Dynamique d'objets dispersifs non linéaires

A. Semenov[1]

[1]IRMA
Université de Strasbourg

Journée exposés Deuxième année 2021

Sommaire

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

Sommaire

Sommaire

Qu'est-ce qu'une EDP dispersive ?

- Les fréquences différentes se déplacent à des vitesses différentes.
- Les exemples les plus connus de ces équations : (NLS), (gKdV) (en particulier, (KdV) ou (mKdV)), mais aussi (KG) ou (ZK).
- Ces équations ont des *solitons*. C'est le premier exemple d'objet dispersif non linéaire, mais il y en a d'autres.
- Ici, on s'intéressera surtout à (mKdV), i.e. (gKdV) pour $k = 3$

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^k) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec $u(t,x) \in \mathbb{R}$.

Qu'est-ce qu'une EDP dispersive ?

- Les fréquences différentes se déplacent à des vitesses différentes.
- Les exemples les plus connus de ces équations : (NLS), (gKdV) (en particulier, (KdV) ou (mKdV)), mais aussi (KG) ou (ZK).
- Ces équations ont des *solitons*. C'est le premier exemple d'objet dispersif non linéaire, mais il y en a d'autres.
- Ici, on s'intéressera surtout à (mKdV), i.e. (gKdV) pour $k = 3$

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^k) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec $u(t,x) \in \mathbb{R}$.

Qu'est-ce qu'une EDP dispersive ?

- Les fréquences différentes se déplacent à des vitesses différentes.
- Les exemples les plus connus de ces équations : (NLS), (gKdV) (en particulier, (KdV) ou (mKdV)), mais aussi (KG) ou (ZK).
- Ces équations ont des *solitons*. C'est le premier exemple d'objet dispersif non linéaire, mais il y en a d'autres.
- Ici, on s'intéressera surtout à (mKdV), i.e. (gKdV) pour $k = 3$

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^k) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec $u(t,x) \in \mathbb{R}$.

Qu'est-ce qu'une EDP dispersive ?

- Les fréquences différentes se déplacent à des vitesses différentes.
- Les exemples les plus connus de ces équations : (NLS), (gKdV) (en particulier, (KdV) ou (mKdV)), mais aussi (KG) ou (ZK).
- Ces équations ont des *solitons*. C'est le premier exemple d'objet dispersif non linéaire, mais il y en a d'autres.
- Ici, on s'intéressera surtout à (mKdV), i.e. (gKdV) pour $k = 3$

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^k) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec $u(t,x) \in \mathbb{R}$.

Solitons

- C'est une bosse qui se propage à vitesse constante sans déformation (et bien sûr une solution de l'EDP considérée).
- On peut démontrer qu'il se propage nécessairement vers la droite et si on note $c > 0$ sa vitesse et $x_0 \in \mathbb{R}$ sa position initiale, on peut en donner l'expression pour tout temps (pour (mKdV)) :

$$R_c(t,x;x_0) = \frac{\sqrt{2c}}{\cosh\left(\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right)} = \sqrt{c}Q\left(\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right).$$

- La bosse a une décroissance exponentielle des deux côtés.
- C'est l'objet dispersif non linéaire le plus simple. On peut s'intéresser à des résultats de dynamique dessus : étudier sa stabilité, sa stabilité asymptotique.

Solitons

- C'est une bosse qui se propage à vitesse constante sans déformation (et bien sûr une solution de l'EDP considérée).
- On peut démontrer qu'il se propage nécessairement vers la droite et si on note $c > 0$ sa vitesse et $x_0 \in \mathbb{R}$ sa position initiale, on peut en donner l'expression pour tout temps (pour (mKdV)) :

$$R_c(t,x;x_0) = \frac{\sqrt{2c}}{\cosh\left(\sqrt{c}(x-x_0-ct)\right)} = \sqrt{c}Q\left(\sqrt{c}(x-x_0-ct)\right).$$

- La bosse a une décroissance exponentielle des deux côtés.
- C'est l'objet dispersif non linéaire le plus simple. On peut s'intéresser à des résultats de dynamique dessus : étudier sa stabilité, sa stabilité asymptotique.

Solitons

- C'est une bosse qui se propage à vitesse constante sans déformation (et bien sûr une solution de l'EDP considérée).
- On peut démontrer qu'il se propage nécessairement vers la droite et si on note $c > 0$ sa vitesse et $x_0 \in \mathbb{R}$ sa position initiale, on peut en donner l'expression pour tout temps (pour (mKdV)) :

$$R_c(t,x;x_0) = \frac{\sqrt{2c}}{\cosh\left(\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right)} = \sqrt{c}Q\left(\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right).$$

- La bosse a une décroissance exponentielle des deux côtés.
- C'est l'objet dispersif non linéaire le plus simple. On peut s'intéresser à des résultats de dynamique dessus : étudier sa stabilité, sa stabilité asymptotique.

Solitons

- C'est une bosse qui se propage à vitesse constante sans déformation (et bien sûr une solution de l'EDP considérée).
- On peut démontrer qu'il se propage nécessairement vers la droite et si on note $c > 0$ sa vitesse et $x_0 \in \mathbb{R}$ sa position initiale, on peut en donner l'expression pour tout temps (pour (mKdV)) :

$$R_c(t,x;x_0) = \frac{\sqrt{2c}}{\cosh\left(\sqrt{c}(x-x_0-ct)\right)} = \sqrt{c}Q\left(\sqrt{c}(x-x_0-ct)\right).$$

- La bosse a une décroissance exponentielle des deux côtés.
- C'est l'objet dispersif non linéaire le plus simple. On peut s'intéresser à des résultats de dynamique dessus : étudier sa stabilité, sa stabilité asymptotique.

Construire de nouveaux objets

- Une fois qu'on a les solitons, on peut chercher à savoir ce qui se passe quand on en met plusieurs.
- L'équation n'étant pas linéaire, une somme de solitons n'est pas une solution.
- Ceci dit, si on prend des solitons de vitesses deux à deux distinctes, une somme de solitons est presqu'une solution et l'est de plus en plus avec le temps qui augmente. En effet, comme les solitons s'éloignent les uns des autres, cette somme est essentiellement égale au soliton le plus proche.
- Cela donne envie de construire une solution qui approche la somme de solitons, de se demander si pour une somme donnée de solitons, elle est unique. On obtient un nouvel objet dispersif non linéaire.

Construire de nouveaux objets

- Une fois qu'on a les solitons, on peut chercher à savoir ce qui se passe quand on en met plusieurs.
- L'équation n'étant pas linéaire, une somme de solitons n'est pas une solution.
- Ceci dit, si on prend des solitons de vitesses deux à deux distinctes, une somme de solitons est presqu'une solution et l'est de plus en plus avec le temps qui augmente. En effet, comme les solitons s'éloignent les uns des autres, cette somme est essentiellement égale au soliton le plus proche.
- Cela donne envie de construire une solution qui approche la somme de solitons, de se demander si pour une somme donnée de solitons, elle est unique. On obtient un nouvel objet dispersif non linéaire.

Construire de nouveaux objets

- Une fois qu'on a les solitons, on peut chercher à savoir ce qui se passe quand on en met plusieurs.
- L'équation n'étant pas linéaire, une somme de solitons n'est pas une solution.
- Ceci dit, si on prend des solitons de vitesses deux à deux distinctes, une somme de solitons est presqu'une solution et l'est de plus en plus avec le temps qui augmente. En effet, comme les solitons s'éloignent les uns des autres, cette somme est essentiellement égale au soliton le plus proche.
- Cela donne envie de construire une solution qui approche la somme de solitons, de se demander si pour une somme donnée de solitons, elle est unique. On obtient un nouvel objet dispersif non linéaire.

Construire de nouveaux objets

- Une fois qu'on a les solitons, on peut chercher à savoir ce qui se passe quand on en met plusieurs.
- L'équation n'étant pas linéaire, une somme de solitons n'est pas une solution.
- Ceci dit, si on prend des solitons de vitesses deux à deux distinctes, une somme de solitons est presqu'une solution et l'est de plus en plus avec le temps qui augmente. En effet, comme les solitons s'éloignent les uns des autres, cette somme est essentiellement égale au soliton le plus proche.
- Cela donne envie de construire une solution qui approche la somme de solitons, de se demander si pour une somme donnée de solitons, elle est unique. On obtient un nouvel objet dispersif non linéaire.

Particularités de (mKdV)

- Il s'agit de (gKdV) avec $k = 3$. k est impair, donc (mKdV) est invariante par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Il existe donc aussi des *antisolitons*.
- (mKdV) est intégrable : cela la différencie des autres (gKdV), sauf (KdV) qui l'est aussi. Il y a donc une infinité d'intégrales conservées, alors que d'habitude il n'y a que la *masse* et l'*énergie*. On en profitera.
- (mKdV) admet un type de solutions particulières localisées qui ne sont pas des multi-solitons : les *breathers*. Ils ont été découverts par Wadati.
- On se demande si toute solution de (mKdV) peut être décomposée en temps long en une somme de solitons et de breathers. C'est la *conjecture de résolution en solitons pour (mKdV)*. Ceci motive l'étude des solitons et des breathers.

Particularités de (mKdV)

- Il s'agit de (gKdV) avec $k = 3$. k est impair, donc (mKdV) est invariante par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Il existe donc aussi des *antisolitons*.
- (mKdV) est intégrable : cela la différencie des autres (gKdV), sauf (KdV) qui l'est aussi. Il y a donc une infinité d'intégrales conservées, alors que d'habitude il n'y a que la *masse* et l'*énergie*. On en profitera.
- (mKdV) admet un type de solutions particulières localisées qui ne sont pas des multi-solitons : les *breathers*. Ils ont été découverts par Wadati.
- On se demande si toute solution de (mKdV) peut être décomposée en temps long en une somme de solitons et de breathers. C'est la *conjecture de résolution en solitons pour (mKdV)*. Ceci motive l'étude des solitons et des breathers.

Particularités de (mKdV)

- Il s'agit de (gKdV) avec $k = 3$. k est impair, donc (mKdV) est invariante par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Il existe donc aussi des *antisolitons*.
- (mKdV) est intégrable : cela la différencie des autres (gKdV), sauf (KdV) qui l'est aussi. Il y a donc une infinité d'intégrales conservées, alors que d'habitude il n'y a que la *masse* et l'*énergie*. On en profitera.
- (mKdV) admet un type de solutions particulières localisées qui ne sont pas des multi-solitons : les *breathers*. Ils ont été découverts par Wadati.
- On se demande si toute solution de (mKdV) peut être décomposée en temps long en une somme de solitons et de breathers. C'est la *conjecture de résolution en solitons pour (mKdV)*. Ceci motive l'étude des solitons et des breathers.

Particularités de (mKdV)

- Il s'agit de (gKdV) avec $k = 3$. k est impair, donc (mKdV) est invariante par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Il existe donc aussi des *antisolitons*.
- (mKdV) est intégrable : cela la différencie des autres (gKdV), sauf (KdV) qui l'est aussi. Il y a donc une infinité d'intégrales conservées, alors que d'habitude il n'y a que la *masse* et l'*énergie*. On en profitera.
- (mKdV) admet un type de solutions particulières localisées qui ne sont pas des multi-solitons : les *breathers*. Ils ont été découverts par Wadati.
- On se demande si toute solution de (mKdV) peut être décomposée en temps long en une somme de solitons et de breathers. C'est la *conjecture de résolution en solitons pour (mKdV)*. Ceci motive l'étude des solitons et des breathers.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle : c'est pourquoi certains raisonnements pour les solitons s'adaptent pour les breathers.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle : c'est pourquoi certains raisonnements pour les solitons s'adaptent pour les breathers.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle : c'est pourquoi certains raisonnements pour les solitons s'adaptent pour les breathers.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle : c'est pourquoi certains raisonnements pour les solitons s'adaptent pour les breathers.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Sommaire

Stabilité orbitale

Théorème (Weinstein)

Soit une solution u de (gKdV) (avec $k<5$) dans $C(\mathbb{R},H^1(\mathbb{R}))$. Soit $R_c(t,x;x_0)$ un soliton. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ (indépendant de u) tel que si

$$\|u(0)-R_c(t,\cdot;x_0)\|_{H^1}<\delta,$$

alors il existe $t\longmapsto x_0(t)$ (une translation pour tout temps) telle que

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad \|u(t)-R_c(t,\cdot;x_0+x_0(t))\|_{H^1}<\varepsilon.$$

Un résultat similaire a été démontré pour les breathers par Alejo et Muñoz, dans H^2 dans un premier temps, car on utilise 3 intégrales conservées pour les breathers (et 2 pour les solitons).
Pour les multi-solitons aussi, on a un tel résultat grâce à Martel, Merle et Tsai.

Stabilité orbitale

Théorème (Weinstein)

Soit une solution u de (gKdV) (avec $k < 5$) dans $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$. Soit $R_c(t,x;x_0)$ un soliton. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (indépendent de u) tel que si

$$\|u(0) - R_c(t,\cdot;x_0)\|_{H^1} < \delta,$$

alors il existe $t \longmapsto x_0(t)$ (une translation pour tout temps) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|u(t) - R_c(t,\cdot;x_0 + x_0(t))\|_{H^1} < \varepsilon.$$

Un résultat similaire a été démontré pour les breathers par Alejo et Muñoz, dans H^2 dans un premier temps, car on utilise 3 intégrales conservées pour les breathers (et 2 pour les solitons).
Pour les multi-solitons aussi, on a un tel résultat grâce à Martel, Merle et Tsai.

Existence, unicité, régularité d'un multi-soliton

Théorème (Martel)

Soit (gKdV) avec $k \leq 5$. Soient $R_1, \ldots, R_K$ des solitons de vitesses deux à deux distinctes. Il existe alors une unique solution $u(t)$ telle que

$$\left\| u(t) - \sum_{k=1}^{K} R_k(t) \right\|_{H^1} \to_{t \to +\infty} 0.$$

De plus, il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $s \geq 1$, il existe $A_s > 0$ tel que

$$\left\| u(t) - \sum_{k=1}^{K} R_k(t) \right\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t},$$

pour tout t suffisamment grand.

Sommaire

Sommaire

Multi-breathers

On se donne K breathers (notés $B_1, ..., B_K$ de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés $R_1, ..., R_L$ de paramètres c_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : $P_1, ..., P_J$ (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j, $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^{J} P_j.$$

Définition

Un *multi-breather* associé à la somme P est une solution $p \in C([T^*, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$ (pour un certain $T^* > 0$) de (mKdV) telle que

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} \to_{t\to+\infty} 0.$$

Multi-breathers

On se donne K breathers (notés $B_1, \ldots, B_K$ de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés $R_1, \ldots, R_L$ de paramètres c_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : $P_1, \ldots, P_J$ (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j, $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^{J} P_j.$$

Définition

Un *multi-breather* associé à la somme P est une solution $p \in C([T^*, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$ (pour un certain $T^* > 0$) de (mKdV) telle que

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} \to_{t \to +\infty} 0.$$

Existence et régularité

Théorème (Existence et régularité)

Dans le cas où les vitesses sont deux à deux distinctes, il existe un multi-breather p associé à P. De plus, $p \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap C^\infty(H^s(\mathbb{R}))$ *pout tout* $s \geq 2$ *et il existe* $\theta > 0$ *tel que pout tout* $s \geq 2$*, il existe* $A_s \geq 1$ *et* $T^* > 0$ *tels que*

$$\forall t \geq T^* \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

Remarque

θ ne dépend que des paramètres de forme. De plus, si les objets sont initialement suffisamment loin les uns des autres dans le bon ordre, alors $T^* = 0$.

Existence et régularité

Théorème (Existence et régularité)

Dans le cas où les vitesses sont deux à deux distinctes, il existe un multi-breather p associé à P. De plus,
$p \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap C^\infty(H^s(\mathbb{R}))$ *pout tout* $s \geq 2$ *et il existe* $\theta > 0$ *tel que pout tout* $s \geq 2$*, il existe* $A_s \geq 1$ *et* $T^* > 0$ *tels que*

$$\forall t \geq T^* \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

Remarque

θ ne dépend que des paramètres de forme. De plus, si les objets sont initialement suffisamment loin les uns des autres dans le bon ordre, alors $T^* = 0$.

Unicité et stabilité orbitale

Théorème

Si on rajoute l'hypothèse que $v_1 > 0$ (i.e. pour tout j, P_j se déplace vers la droite), alors le multi-breather p associé à P est unique.

Théorème

Si $v_2 > 0$, il existe $A_0, \theta_0, D_0, a_0 > 0$ tels qu'on a ce qui suit. Soit u une solution H^2 de (mKdV), $D \geq D_0$ et $a \in [0, a_0]$ tels que

$$\|u(0) - P(0)\|_{H^2} \leq a, \qquad et \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad x_j(0) > x_{j-1}(0) + D.$$

Alors,

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t) - \widetilde{P}(t)\|_{H^2} \leq A_0(a + e^{-\theta_0 D}),$$

où $\widetilde{P}$ correspond à P modifié avec des paramètres de translation définis pour tout $t \geq 0$.

Unicité et stabilité orbitale

Théorème

Si on rajoute l'hypothèse que $v_1 > 0$ (i.e. pour tout j, P_j se déplace vers la droite), alors le multi-breather p associé à P est unique.

Théorème

Si $v_2 > 0$, il existe $A_0, \theta_0, D_0, a_0 > 0$ tels qu'on a ce qui suit. Soit u une solution H^2 de (mKdV), $D \geq D_0$ et $a \in [0, a_0]$ tels que

$$\|u(0) - P(0)\|_{H^2} \leq a, \qquad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad x_j(0) > x_{j-1}(0) + D.$$

Alors,

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t) - \widetilde{P}(t)\|_{H^2} \leq A_0(a + e^{-\theta_0 D}),$$

où $\widetilde{P}$ correspond à P modifié avec des paramètres de translation définis pour tout $t \geq 0$.

Sommaire

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

Intégrales conservées par (mKdV)

Une solution u de (mKdV) est telle que les intégrales suivantes sont constantes en temps :

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2,$$

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\int u_x^2 - \frac{1}{4}\int u^4,$$

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 + \frac{1}{4}\int u^6.$$

On notera $M_j(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$ ces mêmes intégrales en u localisées autour de l'objet P_j.

Intégrales conservées par (mKdV)

Une solution u de (mKdV) est telle que les intégrales suivantes sont constantes en temps :

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2,$$

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\int u_x^2 - \frac{1}{4}\int u^4,$$

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 + \frac{1}{4}\int u^6.$$

On notera $M_j(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$ ces mêmes intégrales en u localisées autour de l'objet P_j.

Intégrales conservées par (mKdV)

Une solution u de (mKdV) est telle que les intégrales suivantes sont constantes en temps :

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2,$$

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\int u_x^2 - \frac{1}{4}\int u^4,$$

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 + \frac{1}{4}\int u^6.$$

On notera $M_j(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$ ces mêmes intégrales en u localisées autour de l'objet P_j.

Intégrales conservées par (mKdV)

Une solution u de (mKdV) est telle que les intégrales suivantes sont constantes en temps :

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2,$$

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\int u_x^2 - \frac{1}{4}\int u^4,$$

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 + \frac{1}{4}\int u^6.$$

On notera $M_j(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$ ces mêmes intégrales en u localisées autour de l'objet P_j.

Intégrales conservées par (mKdV)

Une solution u de (mKdV) est telle que les intégrales suivantes sont constantes en temps :

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2,$$

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\int u_x^2 - \frac{1}{4}\int u^4,$$

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 + \frac{1}{4}\int u^6.$$

On notera $M_j(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$ ces mêmes intégrales en u localisées autour de l'objet P_j.

IRMA
Institut de Recherche Mathématique Avancée

Fonctionnelle de Lyapunov et coercivité

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :
$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$
où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$.
- On observe que notre somme de solitons et de breathers se comporte comme un *minimum local*, modulo quelques directions négatives, de cette fonctionnelle de Lyapunov.
- Cela revient à étudier la *coercivité* de la hessienne de la fonctionnelle de Lyapunov considérée autour de P.
- On arrive à éviter les directions négatives grâce à un argument de *modulation*, la contre-partie est de montrer des résultats à translation près.

Fonctionnelle de Lyapunov et coercivité

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$.

- On observe que notre somme de solitons et de breathers se comporte comme un *minimum local*, modulo quelques directions négatives, de cette fonctionnelle de Lyapunov.
- Cela revient à étudier la *coercivité* de la hessienne de la fonctionnelle de Lyapunov considérée autour de P.
- On arrive à éviter les directions négatives grâce à un argument de *modulation*, la contre-partie est de montrer des résultats à translation près.

Fonctionnelle de Lyapunov et coercivité

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right)E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$.

- On observe que notre somme de solitons et de breathers se comporte comme un *minimum local*, modulo quelques directions négatives, de cette fonctionnelle de Lyapunov.
- Cela revient à étudier la *coercivité* de la hessienne de la fonctionnelle de Lyapunov considérée autour de P.
- On arrive à éviter les directions négatives grâce à un argument de *modulation*, la contre-partie est de montrer des résultats à translation près.

Fonctionnelle de Lyapunov et coercivité

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$.

- On observe que notre somme de solitons et de breathers se comporte comme un *minimum local*, modulo quelques directions négatives, de cette fonctionnelle de Lyapunov.
- Cela revient à étudier la *coercivité* de la hessienne de la fonctionnelle de Lyapunov considérée autour de P.
- On arrive à éviter les directions négatives grâce à un argument de *modulation*, la contre-partie est de montrer des résultats à translation près.

Sommaire

Théorème de Liouville pour les solitons

Pour les solitons de (mKdV), il existe un *théorème de Liouville* établi grâce aux travaux de Martel et de Merle :

Théorème

Soit $u(t)$ une solution globale H^1 de (gKdV) (avec $k<5$). Il existe $\delta>0$ tel que si

$$\|u(0)-Q\|_{H^1}<\delta,$$

et si, pour une application $t\in\mathbb{R}\mapsto x(t)\in\mathbb{R}$,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists A>0,\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad \int_{|x|>A}u^2(t,x+x(t))dx<\varepsilon$$

est satisfaite, alors il existe c_1 proche de 1 et $x_1\in\mathbb{R}$ tels que $u(t,x)\equiv R_{c_1}(t,x;x_1)$.

Théorème de Liouville pour les solitons

Pour les solitons de (mKdV), il existe un *théorème de Liouville* établi grâce aux travaux de Martel et de Merle :

Théorème

Soit $u(t)$ une solution globale H^1 de (gKdV) (avec $k<5$). Il existe $\delta>0$ tel que si

$$\|u(0)-Q\|_{H^1}<\delta,$$

et si, pour une application $t\in\mathbb{R}\mapsto x(t)\in\mathbb{R}$,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists A>0,\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad \int_{|x|>A} u^2(t,x+x(t))dx<\varepsilon$$

est satisfaite, alors il existe c_1 proche de 1 et $x_1\in\mathbb{R}$ tels que $u(t,x)\equiv R_{c_1}(t,x;x_1)$.

Conjecture pour les breathers

- On conjecture qu'un théorème similaire devrait être vérifié pour les breathers.
- Pour y arriver, la première étape est de formuler et démontrer un théorème de Liouville *linéaire* pour les breathers.
- C'est plus compliqué que pour les solitons. Pour les solitons, l'opérateur linéaire associé est :

$$\mathscr{L}u = -\partial_x^2 u + u - kQ^{k-1}u,$$

qui est *constant en temps*, avec des propriétés spectrales. Si on remplace Q par B, $\mathscr{L}$ n'est plus constant en temps, ce qui cause des difficultés.

Conjecture pour les breathers

- On conjecture qu'un théorème similaire devrait être vérifié pour les breathers.

- Pour y arriver, la première étape est de formuler et démontrer un théorème de Liouville *linéaire* pour les breathers.

- C'est plus compliqué que pour les solitons. Pour les solitons, l'opérateur linéaire associé est :

$$\mathscr{L}u = -\partial_x^2 u + u - kQ^{k-1}u,$$

qui est *constant en temps*, avec des propriétés spectrales. Si on remplace Q par B, $\mathscr{L}$ n'est plus constant en temps, ce qui cause des difficultés.

IRMA
Institut de Recherche Mathématique Avancée

Conjecture pour les breathers

- On conjecture qu'un théorème similaire devrait être vérifié pour les breathers.
- Pour y arriver, la première étape est de formuler et démontrer un théorème de Liouville *linéaire* pour les breathers.
- C'est plus compliqué que pour les solitons. Pour les solitons, l'opérateur linéaire associé est :

$$\mathscr{L} u = -\partial_x^2 u + u - kQ^{k-1} u,$$

qui est *constant en temps*, avec des propriétés spectrales. Si on remplace Q par B, $\mathscr{L}$ n'est plus constant en temps, ce qui cause des difficultés.

Slide supplémentaire 1

- $$M[R_c] = 2c^{1/2}, \qquad M[B_{\alpha,\beta}] = 4\beta,$$
- $$E[R_c] = -\frac{2}{3}c^{3/2}, \qquad E[B_{\alpha,\beta}] = -\frac{4}{3}\beta\left(\beta^2 - 3\alpha^2\right),$$
- $$F[R_c] = \frac{2}{5}c^{5/2}, \qquad F[B_{\alpha,\beta}] = \frac{4}{5}\beta\left(\beta^4 - 10\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^4\right).$$

Lorsque $\alpha \to 0$, $B_{\alpha,\beta}$ tend vers un dipôle constitué de solitons R_{β^2}.

Slide supplémentaire 2 : considérer un soliton au niveau H^2

- On considère les solitons et les breathers comme des objets de même nature, càd à un niveau H^2. Pour cela, on a dû essayer de comprendre la *structure variationnelle* H^2 d'un soliton. Cela a été possible en remarquant que R_c a le même comportement variationnel que « $B_{0,\sqrt{c}}$ ».
- La contre-partie est qu'on a dû mettre en place une modulation sur *deux* paramètres du soliton, comme pour le breather. Sauf que pour le breather, on pouvait y arriver sans toucher les *paramètres de forme*. Pour le soliton, on est obligé de modifier x_0 et c, ce qui change sa forme et rajoute quelques difficultés supplémentaires dans la preuve, qu'on a résolu en faisant un bon choix de *condition d'orthogonalité*. La condition d'orthogonalité essentielle pour résoudre les difficultés est :

$$\int R_l \varepsilon = 0.$$

Slide supplémentaire 3 : argument de bootstrap

Un argument de continuité permet de réduire les preuves à un argument de bootstrap. Par exemple, pour montrer qu'un multi-breather p est H^s régulier, on montre que :

Lemme

Il existe $A_s > 0$ et $\theta > 0$ indépendant de s tels que si

$$\forall t \in [t^*, T], \qquad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t},$$

alors

$$\forall t \in [t^*, T], \qquad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq \frac{A_s}{2} e^{-\theta t}.$$

Pour l'unicité et la stabilité, on décompose la preuve de ce lemme en un raisonnement par récurrence. On améliore la constante pour des normes localisées autour d'un certain nombre d'objets (les plus à gauche ou les plus à droite, selon la preuve).