

Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de l'équation de Korteweg-de Vries modifiée

Alexander Semenov¹

¹IRMA
Université de Strasbourg

Séminaire de l'équipe Analyse
5 mai 2022

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Sommaire

1 Présentation des notions

- Équation considérée (loi d'évolution)
- Objets considérés
- Stabilité orbitale

2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers

- Énoncés des théorèmes
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers

3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences

- Énoncé du résultat
- Éléments de preuve
- Corollaires du théorème

Stabilité de quoi ?

- De fonctions $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dont la loi d'évolution est donnée par l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0.$$

- On *mesure* la distance entre deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ grâce à des normes de Sobolev :

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + \dots + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

Stabilité de quoi ?

- De fonctions $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dont la loi d'évolution est donnée par l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0.$$

- On *mesure* la distance entre deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ grâce à des normes de Sobolev :

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + \dots + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

Stabilité de quoi ?

- De fonctions $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dont la loi d'évolution est donnée par l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0.$$

- On *mesure* la distance entre deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ grâce à des normes de Sobolev :

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + \dots + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

- Apparaît pour la première fois en 1967 dans un problème de physique, comme une généralisation de (KdV).
- Équation dispersive : pour sa partie linéaire, les fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes *vers la gauche*.
- Non linéaire : le principe de superposition n'est pas vérifié.
- La nonlinéarité est à l'origine d'un phénomène de concentration (-> concurrence entre dispersion et concentration).
- Équation intégrable

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

- Apparaît pour la première fois en 1967 dans un problème de physique, comme une généralisation de (KdV).
- Équation dispersive : pour sa partie linéaire, les fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes *vers la gauche*.
- Non linéaire : le principe de superposition n'est pas vérifié.
- La nonlinéarité est à l'origine d'un phénomène de concentration (-> concurrence entre dispersion et concentration).
- Équation intégrable

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

- Apparaît pour la première fois en 1967 dans un problème de physique, comme une généralisation de (KdV).
- Équation dispersive : pour sa partie linéaire, les fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes *vers la gauche*.
- Non linéaire : le principe de superposition n'est pas vérifié.
- La nonlinéarité est à l'origine d'un phénomène de concentration (-> concurrence entre dispersion et concentration).
- Équation intégrable

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

- Apparaît pour la première fois en 1967 dans un problème de physique, comme une généralisation de (KdV).
- Équation dispersive : pour sa partie linéaire, les fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes *vers la gauche*.
- Non linéaire : le principe de superposition n'est pas vérifié.
- La nonlinéarité est à l'origine d'un phénomène de concentration (-> concurrence entre dispersion et concentration).
- Équation intégrable

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

- Apparaît pour la première fois en 1967 dans un problème de physique, comme une généralisation de (KdV).
- Équation dispersive : pour sa partie linéaire, les fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes *vers la gauche*.
- Non linéaire : le principe de superposition n'est pas vérifié.
- La nonlinéarité est à l'origine d'un phénomène de concentration (-> concurrence entre dispersion et concentration).
- Équation intégrable

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2} \int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int u_x^2 dx - \frac{1}{4} \int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2} \int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2} \int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4} \int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2} \int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int u_x^2 dx - \frac{1}{4} \int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2} \int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2} \int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4} \int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2} \int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int u_x^2 dx - \frac{1}{4} \int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2} \int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2} \int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4} \int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2} \int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int u_x^2 dx - \frac{1}{4} \int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2} \int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2} \int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4} \int u^6 dx.$$

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t, x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t + t_0, x + x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t, -x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t, x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1 -critique.

Sommaire

1 Présentation des notions

- Équation considérée (loi d'évolution)
- Objets considérés
- Stabilité orbitale

2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers

- Énoncés des théorèmes
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers

3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences

- Énoncé du résultat
- Éléments de preuve
- Corollaires du théorème

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1, 1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t = 0$:

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c > 0$, elle a une solution unique dans H^1 , aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1, 1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t = 0$:

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c > 0$, elle a une solution unique dans H^1 , aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1, 1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t = 0$:

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c > 0$, elle a une solution unique dans H^1 , aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha, \beta}(t, x; x_1, x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan \left(\frac{\beta \sin(\alpha y_1)}{\alpha \cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha, \beta}(t, x; x_1, x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan \left(\frac{\beta \sin(\alpha y_1)}{\alpha \cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha, \beta}(t, x; x_1, x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan \left(\frac{\beta \sin(\alpha y_1)}{\alpha \cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha, \beta}(t, x; x_1, x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan \left(\frac{\beta \sin(\alpha y_1)}{\alpha \cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Sommaire

1 Présentation des notions

- Équation considérée (loi d'évolution)
- Objets considérés
- Stabilité orbitale

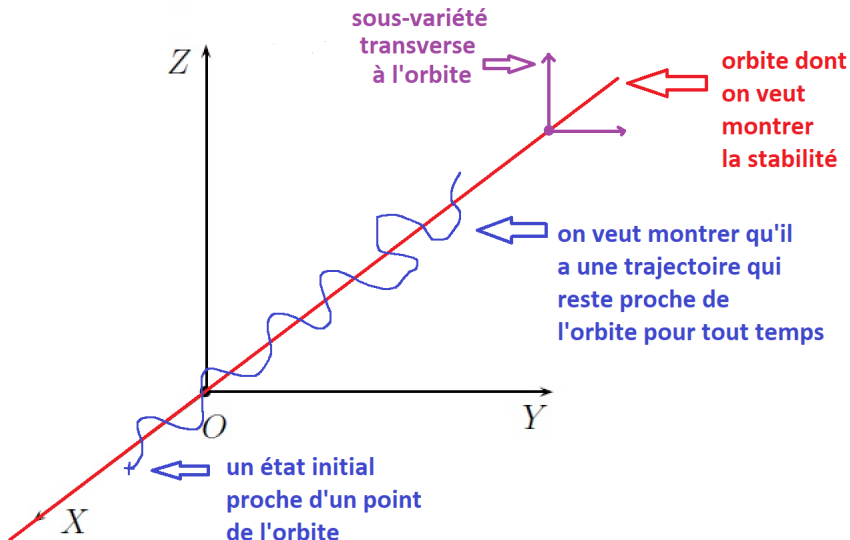
2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers

- Énoncés des théorèmes
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
- Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers

3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences

- Énoncé du résultat
- Éléments de preuve
- Corollaires du théorème

Stabilité orbitale



Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle \mathcal{F} définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans \mathbb{R} .
- On demande que \mathcal{F} soit constante ou décroissante pendant une évolution du système, i.e. $t \mapsto \mathcal{F}(X(t))$ est décroissante.
- Quand on veut montrer la stabilité d'une certaine orbite \mathcal{O} , il convient de montrer que \mathcal{F} admet un minimum local sur \mathcal{O} , et en choisant une sous-variété V_{X_0} transverse à l'orbite en tout point X_0 de \mathcal{O} , de montrer que sa hessienne en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathcal{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C \mathcal{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C (\mathcal{F}(X(t)) - \mathcal{F}(X_0(X(t)))) . \end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle \mathcal{F} définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans \mathbb{R} .
- On demande que \mathcal{F} soit constante ou décroissante pendant une évolution du système, i.e. $t \mapsto \mathcal{F}(X(t))$ est décroissante.
- Quand on veut montrer la stabilité d'une certaine orbite \mathcal{O} , il convient de montrer que \mathcal{F} admet un minimum local sur \mathcal{O} , et en choisissant une sous-variété V_{X_0} transverse à l'orbite en tout point X_0 de \mathcal{O} , de montrer que sa hessienne en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathcal{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C \mathcal{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C (\mathcal{F}(X(t)) - \mathcal{F}(X_0(X(t)))) . \end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle \mathcal{F} définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans \mathbb{R} .
- On demande que \mathcal{F} soit constante ou décroissante pendant une évolution du système, i.e. $t \mapsto \mathcal{F}(X(t))$ est décroissante.
- Quand on veut montrer la stabilité d'une certaine orbite \mathcal{O} , il convient de montrer que \mathcal{F} admet un minimum local sur \mathcal{O} , et en choisissant une sous-variété V_{X_0} transverse à l'orbite en tout point X_0 de \mathcal{O} , de montrer que sa hessienne en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathcal{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C \mathcal{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C (\mathcal{F}(X(t)) - \mathcal{F}(X_0(X(t)))) . \end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle \mathcal{F} définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans \mathbb{R} .
- On demande que \mathcal{F} soit constante ou décroissante pendant une évolution du système, i.e. $t \mapsto \mathcal{F}(X(t))$ est décroissante.
- Quand on veut montrer la stabilité d'une certaine orbite \mathcal{O} , il convient de montrer que \mathcal{F} admet un minimum local sur \mathcal{O} , et en choisissant une sous-variété V_{X_0} transverse à l'orbite en tout point X_0 de \mathcal{O} , de montrer que sa hessienne en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathcal{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C \mathcal{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C (\mathcal{F}(X(t)) - \mathcal{F}(X_0(X(t)))) .\end{aligned}$$

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Stabilité orbitale

Théorème (Weinstein, Bona, Souganidis, Strauss)

Soit une solution u de $(mKdV)$ dans $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$. Soit $R_{c,\kappa}(t, x; x_0)$ un soliton. Il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ (indépendants de u) tels que pour tout $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, si

$$\|u(0) - R_{c,\kappa}(0, \cdot; x_0)\|_{H^1} < \varepsilon,$$

alors il existe $t \mapsto x_0(t)$ (une translation pour tout temps) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))\|_{H^1} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |x_0'(t)| < K\varepsilon.$$

Stabilité orbitale

Théorème (Alejo, Muñoz)

Soit u une solution de $(mKdV)$ dans $C(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}))$. Soit $B_{\alpha,\beta}(t, x; x_1, x_2)$ un breather. Il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ (indépendants de u) tel que pour tout $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, si

$$\|u(0) - B_{\alpha,\beta}(0, \cdot; x_1, x_2)\|_{H^2} < \varepsilon,$$

alors il existe $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - B_{\alpha,\beta}(t, \cdot; x_1(t), x_2(t))\|_{H^2} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |x_1'(t)| + |x_2'(t)| < K\varepsilon.$$

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Éléments de preuve

- Orbite dont on veut montrer la stabilité : $\{R_{c,\kappa}(\cdot, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$.
- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := E[u] + cM[u].$$

- Nous allons montrer que \mathcal{H} admet un minimum local en $R_{c,\kappa}$ et que la hessienne de \mathcal{H} en $R_{c,\kappa}$ restreinte au sous-espace orthogonal à l'orbite est coercive.
- Le sous-espace orthogonal à l'orbite en $R_{c,\kappa}$ est le sous-espace orthogonal à $R'_{c,\kappa}$.

Éléments de preuve

- Orbite dont on veut montrer la stabilité : $\{R_{c,\kappa}(\cdot, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$.
- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := E[u] + cM[u].$$

- Nous allons montrer que \mathcal{H} admet un minimum local en $R_{c,\kappa}$ et que la hessienne de \mathcal{H} en $R_{c,\kappa}$ restreinte au sous-espace orthogonal à l'orbite est coercive.
- Le sous-espace orthogonal à l'orbite en $R_{c,\kappa}$ est le sous-espace orthogonal à $R'_{c,\kappa}$.

Éléments de preuve

- Orbite dont on veut montrer la stabilité : $\{R_{c,\kappa}(\cdot, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$.
- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := E[u] + cM[u].$$

- Nous allons montrer que \mathcal{H} admet un minimum local en $R_{c,\kappa}$ et que la hessienne de \mathcal{H} en $R_{c,\kappa}$ restreinte au sous-espace orthogonal à l'orbite est coercive.
- Le sous-espace orthogonal à l'orbite en $R_{c,\kappa}$ est le sous-espace orthogonal à $R'_{c,\kappa}$.

Éléments de preuve

- Orbite dont on veut montrer la stabilité : $\{R_{c,\kappa}(\cdot, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$.
- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := E[u] + cM[u].$$

- Nous allons montrer que \mathcal{H} admet un minimum local en $R_{c,\kappa}$ et que la hessienne de \mathcal{H} en $R_{c,\kappa}$ restreinte au sous-espace orthogonal à l'orbite est coercive.
- Le sous-espace orthogonal à l'orbite en $R_{c,\kappa}$ est le sous-espace orthogonal à $R'_{c,\kappa}$.

Éléments de preuve

- Pour $w \in H^1$ petit, calculons

$$\mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] = E[R_{c,\kappa} + w] + cM[R_{c,\kappa} + w].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] &= \mathcal{H}[R_{c,\kappa}] + O(\|w\|_{H^1}^3) \\ &\quad + \int (-R''_{c,\kappa} - R_{c,\kappa}^3 + cR_{c,\kappa}) w \\ &\quad + \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2. \end{aligned}$$

- $R_{c,\kappa}$ est un point critique, d'après l'équation elliptique. Il reste à faire l'étude spectrale de la hessienne :

$$\mathcal{Q}[w] := \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].$$

Éléments de preuve

- Pour $w \in H^1$ petit, calculons

$$\mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] = E[R_{c,\kappa} + w] + cM[R_{c,\kappa} + w].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] &= \mathcal{H}[R_{c,\kappa}] + O(\|w\|_{H^1}^3) \\ &\quad + \int (-R''_{c,\kappa} - R_{c,\kappa}^3 + cR_{c,\kappa}) w \\ &\quad + \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2. \end{aligned}$$

- $R_{c,\kappa}$ est un point critique, d'après l'équation elliptique. Il reste à faire l'étude spectrale de la hessienne :

$$\mathcal{Q}[w] := \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].$$

Éléments de preuve

- Pour $w \in H^1$ petit, calculons

$$\mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] = E[R_{c,\kappa} + w] + cM[R_{c,\kappa} + w].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[R_{c,\kappa} + w] &= \mathcal{H}[R_{c,\kappa}] + O(\|w\|_{H^1}^3) \\ &\quad + \int (-R''_{c,\kappa} - R_{c,\kappa}^3 + cR_{c,\kappa}) w \\ &\quad + \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2. \end{aligned}$$

- $R_{c,\kappa}$ est un point critique, d'après l'équation elliptique. Il reste à faire l'étude spectrale de la hessienne :

$$\mathcal{Q}[w] := \frac{1}{2} \int w_x^2 - \frac{3}{2} \int R_{c,\kappa}^2 w^2 + \frac{c}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].$$

Éléments de preuve

- L'opérateur auto-adjoint \mathcal{L} s'écrit comme

$$\mathcal{L}[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} - \frac{3}{2}R_{c,\kappa}^2 w + \frac{c}{2}w.$$

- Il s'agit d'une perturbation compacte de

$$\mathcal{L}_0[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} + \frac{c}{2}w.$$

- En Fourier, cet opérateur correspond à la multiplication par $\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{c}{2}$. On voit que son spectre essentiel correspond à $[\frac{c}{2}, +\infty[$. Il s'agit donc aussi du spectre essentiel de \mathcal{L} .
- En dérivant l'équation elliptique, on voit que

$$\mathcal{L}[R'_{c,\kappa}] = 0.$$

Éléments de preuve

- L'opérateur auto-adjoint \mathcal{L} s'écrit comme

$$\mathcal{L}[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} - \frac{3}{2}R_{c,\kappa}^2 w + \frac{c}{2}w.$$

- Il s'agit d'une perturbation compacte de

$$\mathcal{L}_0[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} + \frac{c}{2}w.$$

- En Fourier, cet opérateur correspond à la multiplication par $\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{c}{2}$. On voit que son spectre essentiel correspond à $[\frac{c}{2}, +\infty[$. Il s'agit donc aussi du spectre essentiel de \mathcal{L} .
- En dérivant l'équation elliptique, on voit que

$$\mathcal{L}[R'_{c,\kappa}] = 0.$$

Éléments de preuve

- L'opérateur auto-adjoint \mathcal{L} s'écrit comme

$$\mathcal{L}[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} - \frac{3}{2}R_{c,\kappa}^2 w + \frac{c}{2}w.$$

- Il s'agit d'une perturbation compacte de

$$\mathcal{L}_0[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} + \frac{c}{2}w.$$

- En Fourier, cet opérateur correspond à la multiplication par $\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{c}{2}$. On voit que son spectre essentiel correspond à $[\frac{c}{2}, +\infty[$. Il s'agit donc aussi du spectre essentiel de \mathcal{L} .
- En dérivant l'équation elliptique, on voit que

$$\mathcal{L}[R'_{c,\kappa}] = 0.$$

Éléments de preuve

- L'opérateur auto-adjoint \mathcal{L} s'écrit comme

$$\mathcal{L}[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} - \frac{3}{2}R_{c,\kappa}^2 w + \frac{c}{2}w.$$

- Il s'agit d'une perturbation compacte de

$$\mathcal{L}_0[w] := -\frac{1}{2}w_{xx} + \frac{c}{2}w.$$

- En Fourier, cet opérateur correspond à la multiplication par $\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{c}{2}$. On voit que son spectre essentiel correspond à $[\frac{c}{2}, +\infty[$. Il s'agit donc aussi du spectre essentiel de \mathcal{L} .
- En dérivant l'équation elliptique, on voit que

$$\mathcal{L}[R'_{c,\kappa}] = 0.$$

Éléments de preuve

- On montre que le noyau de \mathcal{L} est $\text{Vect}(R'_{c,\kappa})$ et que \mathcal{L} a une valeur propre négative.
- \mathcal{L} est coercive sur le sous-espace orthogonal à $R_{c,\kappa}$ et $R'_{c,\kappa}$.
- Ainsi, si $\int w R'_{c,\kappa} = 0$ et $\int w R_{c,\kappa} = 0$, alors on a :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- Il faut écrire la norme H^1 pour pouvoir licitement approximer la fonctionnelle de Lyapunov par \mathcal{Q} .
- Les arguments statiques ne suffisent donc pas pour finir la preuve (il y a une direction négative de trop !). Il nous faut un argument dynamique.

Éléments de preuve

- On montre que le noyau de \mathcal{L} est $\text{Vect}(R'_{c,\kappa})$ et que \mathcal{L} a une valeur propre négative.
- \mathcal{L} est coercive sur le sous-espace orthogonal à $R_{c,\kappa}$ et $R'_{c,\kappa}$.
- Ainsi, si $\int w R'_{c,\kappa} = 0$ et $\int w R_{c,\kappa} = 0$, alors on a :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- Il faut écrire la norme H^1 pour pouvoir licitement approximer la fonctionnelle de Lyapunov par \mathcal{Q} .
- Les arguments statiques ne suffisent donc pas pour finir la preuve (il y a une direction négative de trop !). Il nous faut un argument dynamique.

Éléments de preuve

- On montre que le noyau de \mathcal{L} est $\text{Vect}(R'_{c,\kappa})$ et que \mathcal{L} a une valeur propre négative.
- \mathcal{L} est coercive sur le sous-espace orthogonal à $R_{c,\kappa}$ et $R'_{c,\kappa}$.
- Ainsi, si $\int w R'_{c,\kappa} = 0$ et $\int w R_{c,\kappa} = 0$, alors on a :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- Il faut écrire la norme H^1 pour pouvoir licitement approximer la fonctionnelle de Lyapunov par \mathcal{Q} .
- Les arguments statiques ne suffisent donc pas pour finir la preuve (il y a une direction négative de trop !). Il nous faut un argument dynamique.

Éléments de preuve

- On montre que le noyau de \mathcal{L} est $\text{Vect}(R'_{c,\kappa})$ et que \mathcal{L} a une valeur propre négative.
- \mathcal{L} est coercive sur le sous-espace orthogonal à $R_{c,\kappa}$ et $R'_{c,\kappa}$.
- Ainsi, si $\int w R'_{c,\kappa} = 0$ et $\int w R_{c,\kappa} = 0$, alors on a :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- Il faut écrire la norme H^1 pour pouvoir licitement approximer la fonctionnelle de Lyapunov par \mathcal{Q} .
- Les arguments statiques ne suffisent donc pas pour finir la preuve (il y a une direction négative de trop !). Il nous faut un argument dynamique.

Éléments de preuve

- On montre que le noyau de \mathcal{L} est $\text{Vect}(R'_{c,\kappa})$ et que \mathcal{L} a une valeur propre négative.
- \mathcal{L} est coercive sur le sous-espace orthogonal à $R_{c,\kappa}$ et $R'_{c,\kappa}$.
- Ainsi, si $\int w R'_{c,\kappa} = 0$ et $\int w R_{c,\kappa} = 0$, alors on a :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- Il faut écrire la norme H^1 pour pouvoir licitement approximer la fonctionnelle de Lyapunov par \mathcal{Q} .
- Les arguments statiques ne suffisent donc pas pour finir la preuve (il y a une direction négative de trop!). Il nous faut un argument dynamique.

Comment s'en sortir ?

- Pour tout temps $t > 0$, on associe une translation $\widetilde{R_{c,\kappa}} = R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))$ de $R_{c,\kappa}$ telle que $w(t) := u(t) - \widetilde{R_{c,\kappa}}$ est orthogonale à $\widetilde{R_{c,\kappa}}'$.
- Comme cela, on se place dans l'hyperplan orthogonal à l'orbite.
- L'idéal pour avoir la stabilité est qu'on ait $\int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = 0$.
- Mais si

$$I(t) := \frac{\left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} dx \right|}{\|w(t)\|_{H^1}}$$

est suffisamment petite, c'est bon aussi.

Comment s'en sortir ?

- Pour tout temps $t > 0$, on associe une translation $\widetilde{R_{c,\kappa}} = R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))$ de $R_{c,\kappa}$ telle que $w(t) := u(t) - \widetilde{R_{c,\kappa}}$ est orthogonale à $\widetilde{R_{c,\kappa}}'$.
- Comme cela, on se place dans l'hyperplan orthogonal à l'orbite.
- L'idéal pour avoir la stabilité est qu'on ait $\int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = 0$.
- Mais si

$$I(t) := \frac{\left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} dx \right|}{\|w(t)\|_{H^1}}$$

est suffisamment petite, c'est bon aussi.

Comment s'en sortir ?

- Pour tout temps $t > 0$, on associe une translation $\widetilde{R_{c,\kappa}} = R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))$ de $R_{c,\kappa}$ telle que $w(t) := u(t) - \widetilde{R_{c,\kappa}}$ est orthogonale à $\widetilde{R_{c,\kappa}}'$.
- Comme cela, on se place dans l'hyperplan orthogonal à l'orbite.
- L'idéal pour avoir la stabilité est qu'on ait $\int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = 0$.
- Mais si

$$I(t) := \frac{\left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} dx \right|}{\|w(t)\|_{H^1}}$$

est suffisamment petite, c'est bon aussi.

Comment s'en sortir ?

- Pour tout temps $t > 0$, on associe une translation $\widetilde{R_{c,\kappa}} = R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))$ de $R_{c,\kappa}$ telle que $w(t) := u(t) - \widetilde{R_{c,\kappa}}$ est orthogonale à $\widetilde{R_{c,\kappa}}'$.
- Comme cela, on se place dans l'hyperplan orthogonal à l'orbite.
- L'idéal pour avoir la stabilité est qu'on ait $\int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = 0$.
- Mais si

$$I(t) := \frac{\left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} dx \right|}{\|w(t)\|_{H^1}}$$

est suffisamment petite, c'est bon aussi.

Comment s'en sortir ?

- Pour tout temps $t > 0$, on associe une translation $\widetilde{R_{c,\kappa}} = R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))$ de $R_{c,\kappa}$ telle que $w(t) := u(t) - \widetilde{R_{c,\kappa}}$ est orthogonale à $\widetilde{R_{c,\kappa}}'$.
- Comme cela, on se place dans l'hyperplan orthogonal à l'orbite.
- L'idéal pour avoir la stabilité est qu'on ait $\int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = 0$.
- Mais si

$$I(t) := \frac{\left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} dx \right|}{\|w(t)\|_{H^1}}$$

est suffisamment petite, c'est bon aussi.

Comment s'en sortir ?

- *Stratégie* : Montrer que soit $\|w(t)\|_{H^1}$ reste suffisamment bornée, soit $I(t)$ est suffisamment petite.
- *Idée* : Observer $M[u(t)]$:

$$\frac{1}{2} \int u^2 = \frac{1}{2} \int \widetilde{R_{c,\kappa}}^2 + \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} + \frac{1}{2} \int w(t)^2.$$

- Donc,

$$\frac{d}{dt} \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int w(t)^2.$$

- Après intégration,

$$\begin{aligned} \left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| &\leq C \left(\left| \int w(0) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| + \|w(0)\|_{H^1}^2 + \|w(t)\|_{H^1}^2 \right) \\ &\leq C (\|w(0)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

Comment s'en sortir ?

- *Stratégie* : Montrer que soit $\|w(t)\|_{H^1}$ reste suffisamment bornée, soit $I(t)$ est suffisamment petite.
- *Idée* : Observer $M[u(t)]$:

$$\frac{1}{2} \int u^2 = \frac{1}{2} \int \widetilde{R_{c,\kappa}}^2 + \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} + \frac{1}{2} \int w(t)^2.$$

- Donc,

$$\frac{d}{dt} \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int w(t)^2.$$

- Après intégration,

$$\begin{aligned} \left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| &\leq C \left(\left| \int w(0) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| + \|w(0)\|_{H^1}^2 + \|w(t)\|_{H^1}^2 \right) \\ &\leq C (\|w(0)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

Comment s'en sortir ?

- *Stratégie* : Montrer que soit $\|w(t)\|_{H^1}$ reste suffisamment bornée, soit $I(t)$ est suffisamment petite.
- *Idée* : Observer $M[u(t)]$:

$$\frac{1}{2} \int u^2 = \frac{1}{2} \int \widetilde{R_{c,\kappa}}^2 + \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} + \frac{1}{2} \int w(t)^2.$$

- Donc,

$$\frac{d}{dt} \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int w(t)^2.$$

- Après intégration,

$$\begin{aligned} \left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| &\leq C \left(\left| \int w(0) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| + \|w(0)\|_{H^1}^2 + \|w(t)\|_{H^1}^2 \right) \\ &\leq C (\|w(0)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

Comment s'en sortir ?

- *Stratégie* : Montrer que soit $\|w(t)\|_{H^1}$ reste suffisamment bornée, soit $I(t)$ est suffisamment petite.
- *Idée* : Observer $M[u(t)]$:

$$\frac{1}{2} \int u^2 = \frac{1}{2} \int \widetilde{R_{c,\kappa}}^2 + \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} + \frac{1}{2} \int w(t)^2.$$

- Donc,

$$\frac{d}{dt} \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int w(t)^2.$$

- Après intégration,

$$\begin{aligned} \left| \int w(t) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| &\leq C \left(\left| \int w(0) \widetilde{R_{c,\kappa}} \right| + \|w(0)\|_{H^1}^2 + \|w(t)\|_{H^1}^2 \right) \\ &\leq C (\|w(0)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

Comment s'en sortir ?

- Ainsi,

$$I(t) \leq C \left(\frac{\|w(0)\|_{H^1}}{\|w(t)\|_{H^1}} + \|w(t)\|_{H^1} \right).$$

- Deux comportements possibles : 1er cas : $\|w(t)\|_{H^1} \leq K\varepsilon$ pour tout temps.
- 2e cas : à partir d'un certain temps, $\|w(t)\|_{H^1}$ dépasse $K\varepsilon$. Alors,

$$I(t) \leq C \left(\frac{1}{K} + K\varepsilon \right).$$

- Il ne reste plus qu'à choisir K suffisamment grand, puis ε_0 suffisamment petit.

Comment s'en sortir ?

- Ainsi,

$$I(t) \leq C \left(\frac{\|w(0)\|_{H^1}}{\|w(t)\|_{H^1}} + \|w(t)\|_{H^1} \right).$$

- Deux comportements possibles : 1er cas : $\|w(t)\|_{H^1} \leq K\varepsilon$ pour tout temps.
- 2e cas : à partir d'un certain temps, $\|w(t)\|_{H^1}$ dépasse $K\varepsilon$. Alors,

$$I(t) \leq C \left(\frac{1}{K} + K\varepsilon \right).$$

- Il ne reste plus qu'à choisir K suffisamment grand, puis ε_0 suffisamment petit.

Comment s'en sortir ?

- Ainsi,

$$I(t) \leq C \left(\frac{\|w(0)\|_{H^1}}{\|w(t)\|_{H^1}} + \|w(t)\|_{H^1} \right).$$

- Deux comportements possibles : 1er cas : $\|w(t)\|_{H^1} \leq K\varepsilon$ pour tout temps.
- 2e cas : à partir d'un certain temps, $\|w(t)\|_{H^1}$ dépasse $K\varepsilon$. Alors,

$$I(t) \leq C \left(\frac{1}{K} + K\varepsilon \right).$$

- Il ne reste plus qu'à choisir K suffisamment grand, puis ε_0 suffisamment petit.

Comment s'en sortir ?

- Ainsi,

$$I(t) \leq C \left(\frac{\|w(0)\|_{H^1}}{\|w(t)\|_{H^1}} + \|w(t)\|_{H^1} \right).$$

- Deux comportements possibles : 1er cas : $\|w(t)\|_{H^1} \leq K\varepsilon$ pour tout temps.
- 2e cas : à partir d'un certain temps, $\|w(t)\|_{H^1}$ dépasse $K\varepsilon$. Alors,

$$I(t) \leq C \left(\frac{1}{K} + K\varepsilon \right).$$

- Il ne reste plus qu'à choisir K suffisamment grand, puis ε_0 suffisamment petit.

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Dans le cas des breathers

- Alejo et Muñoz ont trouvé une équation elliptique vérifiée par un breather $B := B_{\alpha,\beta}$:

$$B_{xxxx} + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 \\ - 2(\beta^2 - \alpha^2)(B_{xx} + B^3) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 B = 0.$$

- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := F[u] + 2(\beta^2 - \alpha^2)E[u] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 M[u].$$

- L'orbite est $\{B_{\alpha,\beta}(\cdot; x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On veut donc montrer que la hessienne de \mathcal{H} en B est coercive lorsqu'elle est restreinte à au sous-espace orthogonal à l'orbite, i.e. à $\partial_{x_1} B$ et à $\partial_{x_2} B$.

Dans le cas des breathers

- Alejo et Muñoz ont trouvé une équation elliptique vérifiée par un breather $B := B_{\alpha,\beta}$:

$$B_{xxxx} + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 \\ - 2(\beta^2 - \alpha^2)(B_{xx} + B^3) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 B = 0.$$

- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := F[u] + 2(\beta^2 - \alpha^2)E[u] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 M[u].$$

- L'orbite est $\{B_{\alpha,\beta}(\cdot; x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On veut donc montrer que la hessienne de \mathcal{H} en B est coercive lorsqu'elle est restreinte à au sous-espace orthogonal à l'orbite, i.e. à $\partial_{x_1} B$ et à $\partial_{x_2} B$.

Dans le cas des breathers

- Alejo et Muñoz ont trouvé une équation elliptique vérifiée par un breather $B := B_{\alpha,\beta}$:

$$B_{xxxx} + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 \\ - 2(\beta^2 - \alpha^2)(B_{xx} + B^3) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 B = 0.$$

- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := F[u] + 2(\beta^2 - \alpha^2)E[u] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 M[u].$$

- L'orbite est $\{B_{\alpha,\beta}(\cdot; x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On veut donc montrer que la hessienne de \mathcal{H} en B est coercive lorsqu'elle est restreinte à au sous-espace orthogonal à l'orbite, i.e. à $\partial_{x_1} B$ et à $\partial_{x_2} B$.

Dans le cas des breathers

- Alejo et Muñoz ont trouvé une équation elliptique vérifiée par un breather $B := B_{\alpha,\beta}$:

$$B_{xxxx} + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 - 2(\beta^2 - \alpha^2)(B_{xx} + B^3) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 B = 0.$$

- Fonctionnelle de Lyapunov :

$$\mathcal{H}[u] := F[u] + 2(\beta^2 - \alpha^2)E[u] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 M[u].$$

- L'orbite est $\{B_{\alpha,\beta}(\cdot; x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On veut donc montrer que la hessienne de \mathcal{H} en B est coercive lorsqu'elle est restreinte à au sous-espace orthogonal à l'orbite, i.e. à $\partial_{x_1} B$ et à $\partial_{x_2} B$.

Dans le cas des breathers

- Comme avant, B est un point critique de \mathcal{H} grâce à l'équation elliptique.
- On se ramène à l'étude spectrale de la hessienne :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[w] := & \frac{1}{2} \int w_{xx}^2 - \frac{5}{2} \int B^2 w_x^2 + \frac{5}{2} \int B_x^2 w^2 + 5 \int B B_{xx} w^2 \\ & + \frac{15}{4} \int B^4 w^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \left(\int w_x^2 - 3 \int B^2 w^2 \right) \\ & + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \frac{1}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].\end{aligned}$$

- On trouve que \mathcal{Q} est coercive lorsqu'elle est restreinte au sous-espace orthogonal à $\partial_{x_1} B$, $\partial_{x_2} B$ et B .
- Là aussi, il nous faut un argument dynamique pour avoir un contrôle sur $\int w B(t)$. En fait, c'est exactement le même que dans le cas du soliton.

Dans le cas des breathers

- Comme avant, B est un point critique de \mathcal{H} grâce à l'équation elliptique.
- On se ramène à l'étude spectrale de la hessienne :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[w] := & \frac{1}{2} \int w_{xx}^2 - \frac{5}{2} \int B^2 w_x^2 + \frac{5}{2} \int B_x^2 w^2 + 5 \int B B_{xx} w^2 \\ & + \frac{15}{4} \int B^4 w^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \left(\int w_x^2 - 3 \int B^2 w^2 \right) \\ & + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \frac{1}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].\end{aligned}$$

- On trouve que \mathcal{Q} est coercive lorsqu'elle est restreinte au sous-espace orthogonal à $\partial_{x_1} B$, $\partial_{x_2} B$ et B .
- Là aussi, il nous faut un argument dynamique pour avoir un contrôle sur $\int w B(t)$. En fait, c'est exactement le même que dans le cas du soliton.

Dans le cas des breathers

- Comme avant, B est un point critique de \mathcal{H} grâce à l'équation elliptique.
- On se ramène à l'étude spectrale de la hessienne :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[w] := & \frac{1}{2} \int w_{xx}^2 - \frac{5}{2} \int B^2 w_x^2 + \frac{5}{2} \int B_x^2 w^2 + 5 \int B B_{xx} w^2 \\ & + \frac{15}{4} \int B^4 w^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \left(\int w_x^2 - 3 \int B^2 w^2 \right) \\ & + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \frac{1}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].\end{aligned}$$

- On trouve que \mathcal{Q} est coercive lorsqu'elle est restreinte au sous-espace orthogonal à $\partial_{x_1} B$, $\partial_{x_2} B$ et B .
- Là aussi, il nous faut un argument dynamique pour avoir un contrôle sur $\int w B(t)$. En fait, c'est exactement le même que dans le cas du soliton.

Dans le cas des breathers

- Comme avant, B est un point critique de \mathcal{H} grâce à l'équation elliptique.
- On se ramène à l'étude spectrale de la hessienne :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[w] := & \frac{1}{2} \int w_{xx}^2 - \frac{5}{2} \int B^2 w_x^2 + \frac{5}{2} \int B_x^2 w^2 + 5 \int B B_{xx} w^2 \\ & + \frac{15}{4} \int B^4 w^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \left(\int w_x^2 - 3 \int B^2 w^2 \right) \\ & + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \frac{1}{2} \int w^2 = \int w \mathcal{L}[w].\end{aligned}$$

- On trouve que \mathcal{Q} est coercive lorsqu'elle est restreinte au sous-espace orthogonal à $\partial_{x_1} B$, $\partial_{x_2} B$ et B .
- Là aussi, il nous faut un argument dynamique pour avoir un contrôle sur $\int w B(t)$. En fait, c'est exactement le même que dans le cas du soliton.

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

La somme

- On se donne K breathers (notés B_1, \dots, B_K de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés R_1, \dots, R_L de paramètres c_l et signes κ_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : P_1, \dots, P_J (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j , $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^J P_j.$$

- Ici, l'orbite de P est

$$\left\{ \sum_{k=1}^K B_{\alpha_k, \beta_k}(\cdot; x_{1,k}, x_{2,k}) + \sum_{l=1}^L R_{c_l, \kappa_l}(\cdot; x_{0,l}), (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{0,l}) \in \mathbb{R}^{2K+L} \right\}$$

est paramétrée par $2K + L$ paramètres.

La somme

- On se donne K breathers (notés B_1, \dots, B_K de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés R_1, \dots, R_L de paramètres c_l et signes κ_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : P_1, \dots, P_J (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j , $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^J P_j.$$

- Ici, l'orbite de P est

$$\left\{ \sum_{k=1}^K B_{\alpha_k, \beta_k}(\cdot; x_{1,k}, x_{2,k}) + \sum_{l=1}^L R_{c_l, \kappa_l}(\cdot; x_{0,l}), (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{0,l}) \in \mathbb{R}^{2K+L} \right\}$$

est paramétrée par $2K + L$ paramètres.

Stabilité orbitale

Théorème (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe $A_0, \theta_0, D_0, a_0 > 0$ tels qu'on a ce qui suit. Soit u une solution H^2 de $(mKdV)$, $D \geq D_0$ et $a \in [0, a_0]$ tels que

$$\|u(0) - P(0)\|_{H^2} \leq a, \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad x_j(0) > x_{j-1}(0) + D.$$

Alors,

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t) - \tilde{P}(t)\|_{H^2} \leq A_0(a + e^{-\theta_0 D}),$$

où \tilde{P} correspond à P modifié avec des paramètres de translation $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ définis pour tout $t \geq 0$.

De plus,

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{l=1}^L |x'_{0,l}(t)| + \sum_{k=1}^K (|x'_{1,k}(t)| + |x'_{2,k}(t)|) \leq CA_0 (a + e^{-\theta_0 D}).$$

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Considérer un soliton au niveau H^2

- Pour $R_{c,\kappa}$, on peut prendre la fonctionnelle de Lyapunov correspondant à un breather (dégénéré) de paramètres $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{c}$.
- La hessienne \mathcal{Q} a alors un noyau de dimension 2 engendré par $R'_{c,\kappa}$ et $\partial_c R_{c,\kappa}$. Elle n'a pas de valeurs propres négatives.
- On peut affirmer que si $\int w R_{c,\kappa} = \int w R'_{c,\kappa} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- On choisit les translations de sorte à ce que $w(t)$ soit orthogonal à l'orbite, i.e. à $R'_{c,\kappa}$. Et on contrôle $\int R_{c,\kappa} w(t)$ avec l'argument dynamique usuel.

Considérer un soliton au niveau H^2

- Pour $R_{c,\kappa}$, on peut prendre la fonctionnelle de Lyapunov correspondant à un breather (dégénéré) de paramètres $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{c}$.
- La hessienne \mathcal{Q} a alors un noyau de dimension 2 engendré par $R'_{c,\kappa}$ et $\partial_c R_{c,\kappa}$. Elle n'a pas de valeurs propres négatives.
- On peut affirmer que si $\int w R_{c,\kappa} = \int w R'_{c,\kappa} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- On choisit les translations de sorte à ce que $w(t)$ soit orthogonal à l'orbite, i.e. à $R'_{c,\kappa}$. Et on contrôle $\int R_{c,\kappa} w(t)$ avec l'argument dynamique usuel.

Considérer un soliton au niveau H^2

- Pour $R_{c,\kappa}$, on peut prendre la fonctionnelle de Lyapunov correspondant à un breather (dégénéré) de paramètres $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{c}$.
- La hessienne \mathcal{Q} a alors un noyau de dimension 2 engendré par $R'_{c,\kappa}$ et $\partial_c R_{c,\kappa}$. Elle n'a pas de valeurs propres négatives.
- On peut affirmer que si $\int w R_{c,\kappa} = \int w R'_{c,\kappa} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- On choisit les translations de sorte à ce que $w(t)$ soit orthogonal à l'orbite, i.e. à $R'_{c,\kappa}$. Et on contrôle $\int R_{c,\kappa} w(t)$ avec l'argument dynamique usuel.

Considérer un soliton au niveau H^2

- Pour $R_{c,\kappa}$, on peut prendre la fonctionnelle de Lyapunov correspondant à un breather (dégénéré) de paramètres $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{c}$.
- La hessienne \mathcal{Q} a alors un noyau de dimension 2 engendré par $R'_{c,\kappa}$ et $\partial_c R_{c,\kappa}$. Elle n'a pas de valeurs propres négatives.
- On peut affirmer que si $\int w R_{c,\kappa} = \int w R'_{c,\kappa} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}[w].$$

- On choisit les translations de sorte à ce que $w(t)$ soit orthogonal à l'orbite, i.e. à $R'_{c,\kappa}$. Et on contrôle $\int R_{c,\kappa} w(t)$ avec l'argument dynamique usuel.

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \tilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t) \partial_x \tilde{R}_k = \int w(t) \partial_{x_1} \tilde{B}_k = \int w(t) \partial_{x_2} \tilde{B}_k = 0.$$

- Profil de filtration :

$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan(\exp(\sqrt{\sigma}x/2)),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on pose $m_j(t) := \frac{\tilde{x}_{j-1}(t) + \tilde{x}_j(t)}{2}$, et

$$\Phi_j(t, x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \tilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t) \partial_x \tilde{R}_k = \int w(t) \partial_{x_1} \tilde{B}_k = \int w(t) \partial_{x_2} \tilde{B}_k = 0.$$

- Profil de filtration :

$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan(\exp(\sqrt{\sigma}x/2)),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on pose $m_j(t) := \frac{\tilde{x}_{j-1}(t) + \tilde{x}_j(t)}{2}$, et

$$\Phi_j(t, x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \tilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t) \partial_x \tilde{R}_k = \int w(t) \partial_{x_1} \tilde{B}_k = \int w(t) \partial_{x_2} \tilde{B}_k = 0.$$

- Profil de filtration :

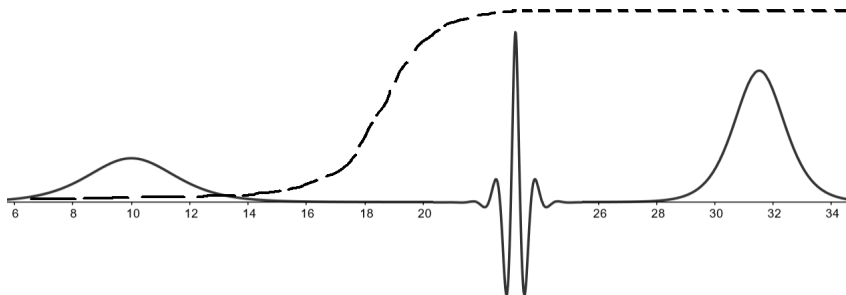
$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan(\exp(\sqrt{\sigma}x/2)),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on pose $m_j(t) := \frac{\tilde{x}_{j-1}(t) + \tilde{x}_j(t)}{2}$, et

$$\Phi_j(t, x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

Pour la somme de solitons et de breathers



Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_j + \left| \int w(t) \tilde{P}_j - \int w(0) \tilde{P}_j \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

en sachant que, pour tout $i > j$

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_i + \left| \int w(t) \tilde{P}_i - \int w(0) \tilde{P}_i \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

- Lois de conservation localisées M_j , E_j et F_j :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j dx.$$

- Mais, grâce à la *monotonie* de Φ_j , on prouve que M_j , E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$).

Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_j + \left| \int w(t) \tilde{P}_j - \int w(0) \tilde{P}_j \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

en sachant que, pour tout $i > j$

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_i + \left| \int w(t) \tilde{P}_i - \int w(0) \tilde{P}_i \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

- Lois de conservation localisées M_j , E_j et F_j :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j dx.$$

- Mais, grâce à la *monotonie* de Φ_j , on prouve que M_j , E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$).

Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_j + \left| \int w(t) \tilde{P}_j - \int w(0) \tilde{P}_j \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

en sachant que, pour tout $i > j$

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_i + \left| \int w(t) \tilde{P}_i - \int w(0) \tilde{P}_i \right| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2$$

- Lois de conservation localisées M_j , E_j et F_j :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j dx.$$

- Mais, grâce à la *monotonie* de Φ_j , on prouve que M_j , E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$).

Pour la somme de solitons et de breathers

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_j(t) := F_j(t) + 2(b_j^2 - a_j^2) E_j(t) + (a_j^2 + b_j^2)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.

- Comme d'habitude, on fait un développement de Taylor d'ordre 2 en w de \mathcal{H}_j en écrivant $u = \tilde{P} + w$. On peut négliger le terme linéaire, grâce à l'équation elliptique et à l'hypothèse de récurrence.
- L'idée est qu'on se ramène à l'étude spectrale de \mathcal{Q}_j , où on borne les termes associés aux P_i , pour $i > j$, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Pour la somme de solitons et de breathers

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_j(t) := F_j(t) + 2(b_j^2 - a_j^2) E_j(t) + (a_j^2 + b_j^2)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.

- Comme d'habitude, on fait un développement de Taylor d'ordre 2 en w de \mathcal{H}_j en écrivant $u = \tilde{P} + w$. On peut négliger le terme linéaire, grâce à l'équation elliptique et à l'hypothèse de récurrence.
- L'idée est qu'on se ramène à l'étude spectrale de \mathcal{Q}_j , où on borne les termes associés aux P_i , pour $i > j$, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Pour la somme de solitons et de breathers

- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (*presque-décroissante*) localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_j(t) := F_j(t) + 2(b_j^2 - a_j^2) E_j(t) + (a_j^2 + b_j^2)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.

- Comme d'habitude, on fait un développement de Taylor d'ordre 2 en w de \mathcal{H}_j en écrivant $u = \tilde{P} + w$. On peut négliger le terme linéaire, grâce à l'équation elliptique et à l'hypothèse de récurrence.
- L'idée est qu'on se ramène à l'étude spectrale de \mathcal{Q}_j , où on borne les termes associés aux P_i , pour $i > j$, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Pour la somme de solitons et de breathers

- Pour finir, il reste à faire l'étude de $\int \tilde{P}_j w$ (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j &= \frac{1}{2} \int \tilde{P}^2 \Phi_j + \int w(t) \tilde{P} \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{i=j}^J \int \tilde{P}_i^2 + \sum_{i=j}^J \int w(t) \tilde{P}_i + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j. \end{aligned}$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j ,

$$\int w(t) \tilde{P}_j \leq \int w(0) \tilde{P}_j - \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(0)^2 \Phi_j.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- Pour finir, il reste à faire l'étude de $\int \tilde{P}_j w$ (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j &= \frac{1}{2} \int \tilde{P}^2 \Phi_j + \int w(t) \tilde{P} \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{i=j}^J \int \tilde{P}_i^2 + \sum_{i=j}^J \int w(t) \tilde{P}_i + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j. \end{aligned}$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j ,

$$\int w(t) \tilde{P}_j \leq \int w(0) \tilde{P}_j - \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(0)^2 \Phi_j.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- Pour finir, il reste à faire l'étude de $\int \tilde{P}_j w$ (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j &= \frac{1}{2} \int \tilde{P}^2 \Phi_j + \int w(t) \tilde{P} \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{i=j}^J \int \tilde{P}_i^2 + \sum_{i=j}^J \int w(t) \tilde{P}_i + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j. \end{aligned}$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j ,

$$\int w(t) \tilde{P}_j \leq \int w(0) \tilde{P}_j - \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(0)^2 \Phi_j.$$

Sommaire

- 1 Présentation des notions
 - Équation considérée (loi d'évolution)
 - Objets considérés
 - Stabilité orbitale
- 2 Stabilité orbitale des solitons et des breathers
 - Énoncés des théorèmes
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des solitons
 - Éléments de preuve de la stabilité orbitale des breathers
- 3 Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers de (mKdV) et conséquences
 - Énoncé du résultat
 - Éléments de preuve
 - Corollaires du théorème

Multi-breather

Définition

On dit que p est un *multi-breather* associé à P lorsque

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- p est donnée par une formule (intégrabilité de mKdV) et vérifie

$$\|p(t) - \bar{P}(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

où \bar{P} correspond à la somme P où chaque objet a d'autres paramètres de translation.

- Les décalages dûs à une collisions peuvent elles aussi être exprimées explicitement.

Multi-breather

Définition

On dit que p est un *multi-breather* associé à P lorsque

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- p est donnée par une formule (intégrabilité de mKdV) et vérifie

$$\|p(t) - \bar{P}(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

où \bar{P} correspond à la somme P où chaque objet a d'autres paramètres de translation.

- Les décalages dûs à une collisions peuvent elles aussi être exprimées explicitement.

Multi-breather

Définition

On dit que p est un *multi-breather* associé à P lorsque

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- p est donnée par une formule (intégrabilité de mKdV) et vérifie

$$\|p(t) - \bar{P}(t)\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

où \bar{P} correspond à la somme P où chaque objet a d'autres paramètres de translation.

- Les décalages dûs à une collisions peuvent elles aussi être exprimées explicitement.

Quelques formules

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t, x) := -2\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)} \right],$$

$$\text{où } y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1 - \sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}{2}x + x_1 \text{ et}$$

$$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1 + c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{2}t + x_2.$$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \right).$$

Quelques formules

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t, x) := -2\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)} \right],$$

$$\text{où } y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1 - \sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}{2}x + x_1 \text{ et}$$

$$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1 + c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{2}t + x_2.$$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \right).$$

Quelques formules

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t, x) := -2\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)} \right],$$

$$\text{où } y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1 - \sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}{2}x + x_1 \text{ et}$$

$$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1 + c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{2}t + x_2.$$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}} \ln \left(\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \right).$$

Stabilité d'un multi-breather

Corollaire (S.)

Soit p le multi-breather associé à P par la formule. On suppose que $v_2 > 0$. Il existe $a_0, A_0 > 0$ tels qu'on a ce qui suit. Soit u une solution H^2 de $(mKdV)$, et $a \in [0, a_0]$ tels que

$$\|u(0) - p(0)\|_{H^2} \leq a.$$

Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a,$$

où \tilde{p} correspond à p modifié avec des paramètres de translation $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ définis pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pourquoi a-t-on pu enlever l'hypothèse de découplage ?

- Grâce à l'uniforme continuité du flot de (mKdV) !
- Au bout d'un certain temps T les différents objets seront suffisamment découplés. Si on arrive à faire en sorte que $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ est suffisamment petite, le corollaire sera une conséquence immédiate du théorème.
- Il suffit de choisir $\|u(0) - p(0)\|_{H^2}$ encore plus petite (en fonction de T , lui-même dépendant des paramètres de translation initiaux des objets), de sorte à pouvoir contrôler $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ par uniforme continuité du flot.

Pourquoi a-t-on pu enlever l'hypothèse de découplage ?

- Grâce à l'uniforme continuité du flot de (mKdV) !
- Au bout d'un certain temps T les différents objets seront suffisamment découplés. Si on arrive à faire en sorte que $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ est suffisamment petite, le corollaire sera une conséquence immédiate du théorème.
- Il suffit de choisir $\|u(0) - p(0)\|_{H^2}$ encore plus petite (en fonction de T , lui-même dépendant des paramètres de translation initiaux des objets), de sorte à pouvoir contrôler $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ par uniforme continuité du flot.

Pourquoi a-t-on pu enlever l'hypothèse de découplage ?

- Grâce à l'uniforme continuité du flot de (mKdV) !
- Au bout d'un certain temps T les différents objets seront suffisamment découplés. Si on arrive à faire en sorte que $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ est suffisamment petite, le corollaire sera une conséquence immédiate du théorème.
- Il suffit de choisir $\|u(0) - p(0)\|_{H^2}$ encore plus petite (en fonction de T , lui-même dépendant des paramètres de translation initiaux des objets), de sorte à pouvoir contrôler $\|u(T) - p(T)\|_{H^2}$ par uniforme continuité du flot.

Unicité des multi-breathers

Corollaire (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe un unique multi-breather p associé à P .

Démonstration.

Soit u un autre multi-breather associé à P (pour $t \rightarrow +\infty$).

Alors, pour $a_0 > a > 0$, il existe un temps T_a tel que

$$\|u(T_a) - p(T_a)\|_{H^2} \leq a.$$

Par stabilité de p ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a.$$

En prenant a de plus en plus petit, on trouve que $u(0)$ est égal à un multi-breather donné par la formule, donc $u = p$ partout. □

Unicité des multi-breathers

Corollaire (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe un unique multi-breather p associé à P .

Démonstration.

Soit u un autre multi-breather associé à P (pour $t \rightarrow +\infty$).

Alors, pour $a_0 > a > 0$, il existe un temps T_a tel que

$$\|u(T_a) - p(T_a)\|_{H^2} \leq a.$$

Par stabilité de p ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a.$$

En prenant a de plus en plus petit, on trouve que $u(0)$ est égal à un multi-breather donné par la formule, donc $u = p$ partout. □

Unicité des multi-breathers

Corollaire (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe un unique multi-breather p associé à P .

Démonstration.

Soit u un autre multi-breather associé à P (pour $t \rightarrow +\infty$).

Alors, pour $a_0 > a > 0$, il existe un temps T_a tel que

$$\|u(T_a) - p(T_a)\|_{H^2} \leq a.$$

Par stabilité de p ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a.$$

En prenant a de plus en plus petit, on trouve que $u(0)$ est égal à un multi-breather donné par la formule, donc $u = p$ partout. □

Unicité des multi-breathers

Corollaire (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe un unique multi-breather p associé à P .

Démonstration.

Soit u un autre multi-breather associé à P (pour $t \rightarrow +\infty$).

Alors, pour $a_0 > a > 0$, il existe un temps T_a tel que

$$\|u(T_a) - p(T_a)\|_{H^2} \leq a.$$

Par stabilité de p ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a.$$

En prenant a de plus en plus petit, on trouve que $u(0)$ est égal à un multi-breather donné par la formule, donc $u = p$ partout. □

Unicité des multi-breathers

Corollaire (S.)

Si $v_2 > 0$, il existe un unique multi-breather p associé à P .

Démonstration.

Soit u un autre multi-breather associé à P (pour $t \rightarrow +\infty$).

Alors, pour $a_0 > a > 0$, il existe un temps T_a tel que

$$\|u(T_a) - p(T_a)\|_{H^2} \leq a.$$

Par stabilité de p ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - \tilde{p}(t)\|_{H^2} \leq A_0 a.$$

En prenant a de plus en plus petit, on trouve que $u(0)$ est égal à un multi-breather donné par la formule, donc $u = p$ partout. □