Soutenance de thèse : Dynamique des breathers

Alexander Semenov[1]
sous la direction de Raphaël Côte

[1]IRMA
Université de Strasbourg

Soutenance de thèse
15 juillet 2022

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0, \qquad \text{(mKdV)}$$
$$(t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

- La généralisation la plus simple de (KdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0. \qquad \text{(KdV)}$$

- Apparaît aussi comme modèle pour décrire l'onde d'Alfvén dans un plasma froid sans collisions (Kakutani-Ono 1969).
- Est aussi un modèle pour d'autres phénomènes physiques.

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0, \qquad \text{(mKdV)}$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

- La généralisation la plus simple de (KdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0. \qquad \text{(KdV)}$$

- Apparaît aussi comme modèle pour décrire l'onde d'Alfvén dans un plasma froid sans collisions (Kakutani-Ono 1969).
- Est aussi un modèle pour d'autres phénomènes physiques.

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0, \qquad \text{(mKdV)}$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

- La généralisation la plus simple de (KdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0. \qquad \text{(KdV)}$$

- Apparaît aussi comme modèle pour décrire l'onde d'Alfvén dans un plasma froid sans collisions (Kakutani-Ono 1969).
- Est aussi un modèle pour d'autres phénomènes physiques.

Équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0, \qquad \text{(mKdV)}$$
$$(t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

- La généralisation la plus simple de (KdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0. \qquad \text{(KdV)}$$

- Apparaît aussi comme modèle pour décrire l'onde d'Alfvén dans un plasma froid sans collisions (Kakutani-Ono 1969).
- Est aussi un modèle pour d'autres phénomènes physiques.

Sommaire

Une équation dispersive

- (KdV), (mKdV) et leurs généralisations sont des équations dispersives. C'est aussi le cas de (NLS) ou de (KP).
- C'est une propriété de la partie linéaire de l'équation :

$$u_t + u_{xxx} = 0. \tag{Airy}$$

- Relation de dispersion pour (Airy) :

$$k = \omega^{1/3},$$

où k est le nombre d'onde et ω est la pulsation.

- Une solution de (Airy) de nombre d'onde k se propage donc à une vitesse $-k^2 < 0$: *elle est négative*.

Une équation dispersive

- (KdV), (mKdV) et leurs généralisations sont des équations dispersives. C'est aussi le cas de (NLS) ou de (KP).
- C'est une propriété de la partie linéaire de l'équation :

$$u_t + u_{xxx} = 0. \tag{Airy}$$

- Relation de dispersion pour (Airy) :

$$k = \omega^{1/3},$$

où k est le nombre d'onde et ω est la pulsation.

- Une solution de (Airy) de nombre d'onde k se propage donc à une vitesse $-k^2 < 0$: *elle est négative*.

Une équation dispersive

- (KdV), (mKdV) et leurs généralisations sont des équations dispersives. C'est aussi le cas de (NLS) ou de (KP).
- C'est une propriété de la partie linéaire de l'équation :

$$u_t + u_{xxx} = 0. \tag{Airy}$$

- Relation de dispersion pour (Airy) :

$$k = \omega^{1/3},$$

  où k est le nombre d'onde et ω est la pulsation.
- Une solution de (Airy) de nombre d'onde k se propage donc à une vitesse $-k^2 < 0$: *elle est négative*.

Une équation dispersive

- (KdV), (mKdV) et leurs généralisations sont des équations dispersives. C'est aussi le cas de (NLS) ou de (KP).
- C'est une propriété de la partie linéaire de l'équation :

$$u_t + u_{xxx} = 0. \tag{Airy}$$

- Relation de dispersion pour (Airy) :

$$k = \omega^{1/3},$$

  où k est le nombre d'onde et ω est la pulsation.
- Une solution de (Airy) de nombre d'onde k se propage donc à une vitesse $-k^2 < 0$: *elle est négative*.

Une équation non linéaire et focalisante

- La nonlinéarité vient avec un signe « $+$ » : elle est à l'origine d'un phénomène de concentration.
- Il peut être à l'origine d'une explosion en temps fini (bien que cela n'arrive pas pour (mKdV) dans les espaces de Sobolev pour lesquels il y a existence locale).
- Il y a *concurrence* entre l'effet de la partie linéaire qui est la *dispersion* et l'effet de la nonlinéarité qui est la *concentration*.
- Équilibre réalisé par les *solitons*.

Une équation non linéaire et focalisante

- La nonlinéarité vient avec un signe « + » : elle est à l'origine d'un phénomène de concentration.
- Il peut être à l'origine d'une explosion en temps fini (bien que cela n'arrive pas pour (mKdV) dans les espaces de Sobolev pour lesquels il y a existence locale).
- Il y a *concurrence* entre l'effet de la partie linéaire qui est la *dispersion* et l'effet de la nonlinéarité qui est la *concentration*.
- Équilibre réalisé par les *solitons*.

Une équation non linéaire et focalisante

- La nonlinéarité vient avec un signe « + » : elle est à l'origine d'un phénomène de concentration.
- Il peut être à l'origine d'une explosion en temps fini (bien que cela n'arrive pas pour (mKdV) dans les espaces de Sobolev pour lesquels il y a existence locale).
- Il y a *concurrence* entre l'effet de la partie linéaire qui est la *dispersion* et l'effet de la nonlinéarité qui est la *concentration*.
- Équilibre réalisé par les *solitons*.

Une équation non linéaire et focalisante

- La nonlinéarité vient avec un signe « $+$ » : elle est à l'origine d'un phénomène de concentration.
- Il peut être à l'origine d'une explosion en temps fini (bien que cela n'arrive pas pour (mKdV) dans les espaces de Sobolev pour lesquels il y a existence locale).
- Il y a *concurrence* entre l'effet de la partie linéaire qui est la *dispersion* et l'effet de la nonlinéarité qui est la *concentration*.
- Équilibre réalisé par les *solitons*.

Une équation intégrable

- Propriété rare dans la famille des généralisations de (KdV) : seules (KdV), (mKdV) et l'équation de Gardner la vérifient.
- Existence d'une paire de Lax pour (mKdV) (Wadati 1973) : couple d'opérateurs différentiels L et M tels que (mKdV) est équivalente à

$$L_t = [L, M].$$

- *Conséquences :* infinité de lois de conservation pour (mKdV) et méthode de *scattering inverse* permettant de calculer explicitement des solutions.

Une équation intégrable

- Propriété rare dans la famille des généralisations de (KdV) : seules (KdV), (mKdV) et l'équation de Gardner la vérifient.
- Existence d'une paire de Lax pour (mKdV) (Wadati 1973) : couple d'opérateurs différentiels L et M tels que (mKdV) est équivalente à
$$L_t = [L, M].$$
- *Conséquences :* infinité de lois de conservation pour (mKdV) et méthode de *scattering inverse* permettant de calculer explicitement des solutions.

Une équation intégrable

- Propriété rare dans la famille des généralisations de (KdV) : seules (KdV), (mKdV) et l'équation de Gardner la vérifient.
- Existence d'une paire de Lax pour (mKdV) (Wadati 1973) : couple d'opérateurs différentiels L et M tels que (mKdV) est équivalente à
$$L_t = [L, M].$$
- *Conséquences :* infinité de lois de conservation pour (mKdV) **et** méthode de *scattering inverse* permettant de calculer explicitement des solutions.

Problème de Cauchy pour (mKdV)

Espaces bien adaptés : espaces de Sobolev H^s, $s \in \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + \ldots + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

- Problème de Cauchy *globalement bien posé* pour une donnée initiale dans H^s pour $s > \frac{1}{4}$, avec une continuité uniforme en la donnée initiale (Colliander-Keel-Staffilani-Tao 2003, Kenig-Ponce-Vega 1993).
- Pour $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, il y a encore une forme d'*existence globale* pour le problème de Cauchy pour une donnée initiale dans H^s, mais *il n'y a plus de continuité uniforme en la donnée initiale* (Harrop Griffiths-Killip-Visan 2020, Kenig-Ponce-Vega 2001).

Problème de Cauchy pour (mKdV)

Espaces bien adaptés : espaces de Sobolev H^s, $s \in \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + ... + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

- Problème de Cauchy *globalement bien posé* pour une donnée initiale dans H^s pour $s > \frac{1}{4}$, avec une continuité uniforme en la donnée initiale (Colliander-Keel-Staffilani-Tao 2003, Kenig-Ponce-Vega 1993).
- Pour $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, il y a encore une forme d'*existence globale* pour le problème de Cauchy pour une donnée initiale dans H^s, mais *il n'y a plus de continuité uniforme en la donnée initiale* (Harrop Griffiths-Killip-Visan 2020, Kenig-Ponce-Vega 2001).

Problème de Cauchy pour (mKdV)

Espaces bien adaptés : espaces de Sobolev H^s, $s \in \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{H^n}^2 := \int v^2 dx + \int v_x^2 dx + \ldots + \int (\partial_x^n v)^2 dx.$$

- Problème de Cauchy *globalement bien posé* pour une donnée initiale dans H^s pour $s > \frac{1}{4}$, avec une continuité uniforme en la donnée initiale (Colliander-Keel-Staffilani-Tao 2003, Kenig-Ponce-Vega 1993).
- Pour $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, il y a encore une forme d'*existence globale* pour le problème de Cauchy pour une donnée initiale dans H^s, mais *il n'y a plus de continuité uniforme en la donnée initiale* (Harrop Griffiths-Killip-Visan 2020, Kenig-Ponce-Vega 2001).

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2}\int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2}\int u_x^2 dx - \frac{1}{4}\int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4}\int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2}\int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2}\int u_x^2 dx - \frac{1}{4}\int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4}\int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2}\int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2}\int u_x^2 dx - \frac{1}{4}\int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4}\int u^6 dx.$$

Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution u de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2}\int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2}\int u_x^2 dx - \frac{1}{4}\int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2}\int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2}\int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4}\int u^6 dx.$$

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t+t_0, x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t+t_0, x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t+t_0,x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, $u(t+t_0,x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda>0$, $\frac{1}{\lambda}u\left(\frac{t}{\lambda^3},\frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u(t+t_0,x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Symétries de (mKdV)

Pour une solution $u(t,x)$ de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, $u(t+t_0,x+x_0)$ est aussi solution.
- *Symétrie centrale* : $u(-t,-x)$ est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* : $-u(t,x)$ est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour $\lambda>0$, $\frac{1}{\lambda}u\left(\frac{t}{\lambda^3},\frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme L^1 de (mKdV) : cette équation est L^1-critique.

Sommaire

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1, 1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t = 0$:

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c > 0$, elle a une solution unique dans H^1, aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1,1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t=0$:

$$R_{c,\kappa}(t,x;x_0) := \kappa Q_c(x-ct-x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c>0$, elle a une solution unique dans H^1, aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante c sans déformation, qui a un signe $\kappa \in \{-1, 1\}$ et étant positionnée à x_0 en $t = 0$:

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- Q_c doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si $c > 0$, elle a une solution unique dans H^1, aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Les breathers

- Pour $\alpha, \beta > 0$ (paramètres de formes), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

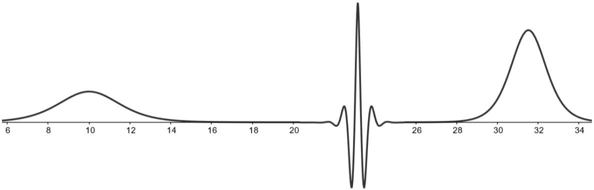
- où $y_1 := x + \delta t + x_1$ (la phase), $y_2 := x + \gamma t + x_2$ (la position), $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ (l'opposé de la pulsation) et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$ (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

Multi-breathers

Définition

Un *multi-breather* est une solution $p \in \mathscr{C}([T^*, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$ de (mKdV) telle qu'il existe $P_1, ..., P_J$ des solitons ou des breathers de (mKdV) tels que

$$\left\| p(t) - \sum_{j=1}^{J} P_j(t) \right\|_{H^2} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0.$$



Sommaire

Sommaire

Stabilité orbitale des solitons

Théorème (Weinstein, Bona, Souganidis, Strauss)

Soit une solution u de (mKdV) dans $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$. Soit $R_{c,\kappa}(t,x;x_0)$ un soliton. Il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ (indépendants de u) tels que pour tout $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, si

$$\|u(0) - R_{c,\kappa}(0,\cdot;x_0)\|_{H^1} < \varepsilon,$$

alors il existe $t \longmapsto x_0(t)$ (une translation pour tout temps) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|u(t) - R_{c,\kappa}(t,\cdot;x_0(t))\|_{H^1} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |x_0'(t)| < K\varepsilon.$$

Stabilité orbitale des breathers

Théorème (Alejo, Muñoz)

Soit u une solution de (mKdV) dans $C(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}))$. Soit $B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2)$ un breather. Il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ (indépendants de u) tel que pour tout $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, si

$$\|u(0) - B_{\alpha,\beta}(0,\cdot;x_1,x_2)\|_{H^2} < \varepsilon,$$

alors il existe $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|u(t) - B_{\alpha,\beta}(t,\cdot;x_1(t),x_2(t))\|_{H^2} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |x_1'(t)| + |x_2'(t)| < K\varepsilon.$$

Sommaire

Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Conjecture de résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Existence, unicité dans H^1 et régularité d'un multi-soliton de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale H^1 d'une somme de solitons de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Conjecture de résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Existence, unicité dans H^1 et régularité d'un multi-soliton de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale H^1 d'une somme de solitons de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Conjecture de résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Existence, unicité dans H^1 et régularité d'un multi-soliton de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale H^1 d'une somme de solitons de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Conjecture de résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Existence, unicité dans H^1 et régularité d'un multi-soliton de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale H^1 d'une somme de solitons de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Conjecture de résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Existence, unicité dans H^1 et régularité d'un multi-soliton de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale H^1 d'une somme de solitons de (gKdV) L^2-sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

Nouvelles questions

- Existence, unicité et régularité d'un multi-breather ?
- Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers ? d'un multi-breather ?
- Élasticité d'une collision entre deux breathers à déduire du scattering inverse ?

Nouvelles questions

- Existence, unicité et régularité d'un multi-breather ?
- Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers ? d'un multi-breather ?
- Élasticité d'une collision entre deux breathers à déduire du scattering inverse ?

Nouvelles questions

- Existence, unicité et régularité d'un multi-breather ?
- Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers ? d'un multi-breather ?
- Élasticité d'une collision entre deux breathers à déduire du scattering inverse ?

Sommaire

La somme

- On se donne K breathers (notés $B_1, \ldots, B_K$ de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés $R_1, \ldots, R_L$ de paramètres c_l et signes κ_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : $P_1, \ldots, P_J$ (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j, $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^{J} P_j.$$

- Constantes associées à P :

$$\beta := \min(\{\beta_k, 1 \leq k \leq K\} \cup \{\sqrt{c_l}, 1 \leq l \leq L\}),$$

$$\tau := \min_{1 \leq j \leq J-1} (v_{j+1} - v_j).$$

La somme

- On se donne K breathers (notés $B_1, \dots, B_K$ de paramètres α_k, β_k) et L solitons (notés $R_1, \dots, R_L$ de paramètres c_l et signes κ_l) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses : $P_1, \dots, P_J$ (avec $J = K + L$). On note v_j la vitesse de P_j, $x_j(t)$ la position de P_j et

$$P = \sum_{j=1}^{J} P_j.$$

- Constantes associées à P :

$$\beta := \min(\{\beta_k, 1 \leq k \leq K\} \cup \{\sqrt{c_l}, 1 \leq l \leq L\}),$$

$$\tau := \min_{1 \leq j \leq J-1} (v_{j+1} - v_j).$$

Existence et régularité d'un multi-breather

Théorème (S.)

Il existe $\theta > 0$, $T^* > 0$ et $A_s > 0$ pour tout $s \geq 0$, tels qu'il existe un multi-breather p associé à $P_1, ..., P_J$ qui vérifie $p \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ pour tout $s \geq 0$ et

$$\forall t \geq T^*, \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

On peut prendre

$$\theta := \frac{\beta \tau}{32}.$$

Si on suppose que les solitons et les breathers sont suffisamment découplés et rangés dans l'ordre des vitesses croissant à $t = 0$, alors le théorème ci-dessus est vrai avec $T^* = 0$.

Existence et régularité d'un multi-breather

Théorème (S.)

Il existe $\theta > 0$, $T^* > 0$ *et* $A_s > 0$ *pour tout* $s \geq 0$, *tels qu'il existe un multi-breather* p *associé à* $P_1, ..., P_J$ *qui vérifie* $p \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ *pour tout* $s \geq 0$ *et*

$$\forall t \geq T^*, \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

On peut prendre

$$\theta := \frac{\beta \tau}{32}.$$

Si on suppose que les solitons et les breathers sont suffisement découplés et rangés dans l'ordre des vitesses croissant à $t = 0$, alors le théorème ci-dessus est vrai avec $T^* = 0$.

Existence et régularité d'un multi-breather

Théorème (S.)

Il existe $\theta > 0$, $T^* > 0$ *et* $A_s > 0$ *pour tout* $s \geq 0$, *tels qu'il existe un multi-breather* p *associé à* $P_1, \ldots, P_J$ *qui vérifie* $p \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ *pour tout* $s \geq 0$ *et*

$$\forall t \geq T^*, \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

On peut prendre

$$\theta := \frac{\beta \tau}{32}.$$

Si on suppose que les solitons et les breathers sont suffisamment découplés et rangés dans l'ordre des vitesses croissant à $t = 0$, alors le théorème ci-dessus est vrai avec $T^* = 0$.

Unicité d'un multi-breather

Théorème (S.)

Si $v_2 > 0$, alors il existe un unique multi-breather associé à $P_1, \dots, P_J$.

Théorème (S.)

Il existe $N > 0$ suffisement grand tel qu'il existe une unique solution $p \in \mathscr{C}([T_0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$ de (mKdV) telle que

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} = O\left(\frac{1}{t^N}\right), \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Unicité d'un multi-breather

Théorème (S.)

Si $v_2 > 0$, alors il existe un unique multi-breather associé à $P_1, ..., P_J$.

Théorème (S.)

Il existe $N > 0$ suffisemment grand tel qu'il existe une unique solution $p \in \mathscr{C}([T_0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$ de (mKdV) telle que

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} = O\left(\frac{1}{t^N}\right), \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Stabilité orbitale

Théorème (S.)

Si $v_2 > 0$*, il existe* $A_0, \theta_0, D_0, a_0 > 0$ *tels qu'on a ce qui suit. Soit* u *une solution* H^2 *de (mKdV),* $D \geq D_0$ *et* $a \in [0, a_0]$ *tels que*

$$\|u(0) - P(0)\|_{H^2} \leq a, \qquad \text{et} \quad \forall j = 1, \ldots, J, \quad x_j(0) > x_{j-1}(0) + D.$$

Alors,

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t) - \widetilde{P}(t)\|_{H^2} \leq A_0(a + e^{-\theta_0 D}),$$

où $\widetilde{P}$ *correspond à* P *modifié avec des paramètres de translation* $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ *définis pour tout* $t \geq 0$*.*
De plus,

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{L} |x'_{0,l}(t)| + \sum_{k=1}^{K} \left(|x'_{1,k}(t)| + |x'_{2,k}(t)|\right) \leq CA_0 \left(a + e^{-\theta_0 D}\right).$$

Stabilité orbitale

- Ici, l'orbite de P est

$$\{\sum_{k=1}^{K} B_{\alpha_k,\beta_k}(\cdot; x_{1,k}, x_{2,k}) + \sum_{l=1}^{L} R_{c_l,\kappa_l}(\cdot; x_{0,l}), (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{0,l}) \in \mathbb{R}^{2K+L}\}$$

est paramétrée par $2K + L$ paramètres.

- On déduit du théorème ci-dessus, la stabilité orbitale d'un multi-breather de (mKdV) lorsque $v_2 > 0$.

Stabilité orbitale

- Ici, l'orbite de P est

$$\left\{\sum_{k=1}^{K} B_{\alpha_k,\beta_k}(\cdot;x_{1,k},x_{2,k})+\sum_{l=1}^{L} R_{c_l,\kappa_l}(\cdot;x_{0,l}),(x_{1,k},x_{2,k},x_{0,l})\in\mathbb{R}^{2K+L}\right\}$$

  est paramétrée par $2K+L$ paramètres.

- On déduit du théorème ci-dessus, la stabilité orbitale d'un multi-breather de (mKdV) lorsque $v_2>0$.

Conséquences de la formule : élasticité des collisions

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t,x) := -2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left[\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)}\right],$$

où $y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1-\sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}}{2}x + x_1$ et
$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1+c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{2}t + x_2.$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}}\ln\left(\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\right).$$

Conséquences de la formule : élasticité des collisions

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t,x) := -2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left[\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)}\right],$$

où $y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1-\sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}}{2}x + x_1$ et
$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1+c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{2}t + x_2$.

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}}\ln\left(\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\right).$$

Conséquences de la formule : élasticité des collisions

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$p(t,x) := -2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left[\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)}\right],$$

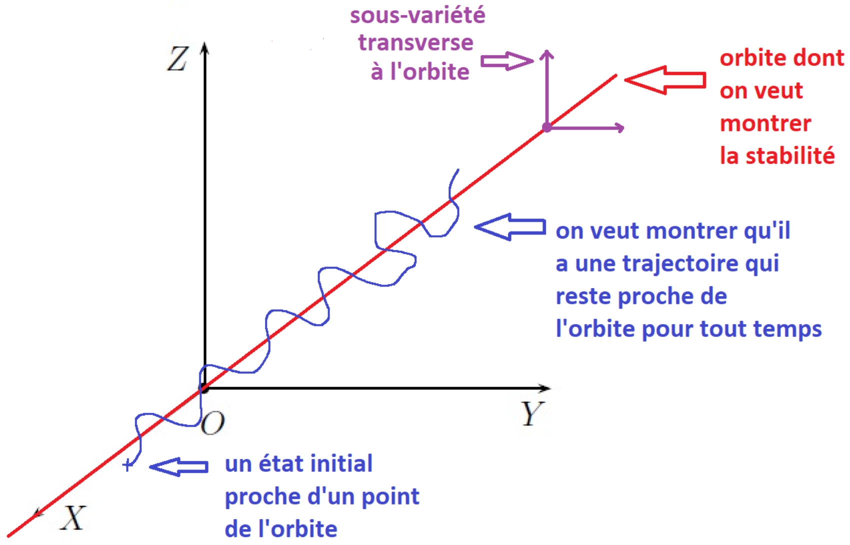
où $y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1-\sqrt{c_2}c_2}{2}t - \frac{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}}{2}x + x_1$ et
$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1+c_2\sqrt{c_2}}{2}t + \frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{2}t + x_2.$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de R_1 est

$$\frac{2}{\sqrt{c_1}}\ln\left(\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}|}\right).$$

Sommaire

Stabilité orbitale



Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle $\mathscr{F}$ définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour une évolution $X(t)$, on demande que $t \mapsto \mathscr{F}(X(t))$ soit décroissante. $\mathscr{F}$ doit être constante sur $\mathscr{O}$.
- On cherchera à montrer que tout point de $\mathscr{O}$ est critique pour $\mathscr{F}$, et, pour tout point X_0 de $\mathscr{O}$, que pour V_{X_0} le sous-espace orthogonal à $\mathscr{O}$ en X_0, la hessienne de $\mathscr{F}$ en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinnage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathscr{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C\mathscr{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t)))\\ &\simeq C\left(\mathscr{F}(X(t)) - \mathscr{F}(X_0(X(t)))\right).\end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle $\mathscr{F}$ définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour une évolution $X(t)$, on demande que $t \mapsto \mathscr{F}(X(t))$ soit décroissante. $\mathscr{F}$ doit être constante sur $\mathscr{O}$.
- On cherchera à montrer que tout point de $\mathscr{O}$ est critique pour $\mathscr{F}$, et, pour tout point X_0 de $\mathscr{O}$, que pour V_{X_0} le sous-espace orthogonal à $\mathscr{O}$ en X_0, la hessienne de $\mathscr{F}$ en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinnage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathscr{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C \mathscr{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C\left(\mathscr{F}(X(t)) - \mathscr{F}(X_0(X(t)))\right). \end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle $\mathscr{F}$ définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour une évolution $X(t)$, on demande que $t \mapsto \mathscr{F}(X(t))$ soit décroissante. $\mathscr{F}$ doit être constante sur $\mathscr{O}$.
- On cherchera à montrer que tout point de $\mathscr{O}$ est critique pour $\mathscr{F}$, et, pour tout point X_0 de $\mathscr{O}$, que pour V_{X_0} le sous-espace orthogonal à $\mathscr{O}$ en X_0, la hessienne de $\mathscr{F}$ en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinnage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathscr{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C\mathscr{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C\left(\mathscr{F}(X(t)) - \mathscr{F}(X_0(X(t)))\right).\end{aligned}$$

Stabilité orbitale au sens de Lyapunov

- Une fonctionnelle de Lyapunov est une fonctionnelle $\mathscr{F}$ définie sur l'ensemble des états d'un système à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour une évolution $X(t)$, on demande que $t \mapsto \mathscr{F}(X(t))$ soit décroissante. $\mathscr{F}$ doit être constante sur $\mathscr{O}$.
- On cherchera à montrer que tout point de $\mathscr{O}$ est critique pour $\mathscr{F}$, et, pour tout point X_0 de $\mathscr{O}$, que pour V_{X_0} le sous-espace orthogonal à $\mathscr{O}$ en X_0, la hessienne de $\mathscr{F}$ en X_0 restreinte à V_{X_0} est coercive.
- Ainsi, pour toute évolution $X(t)$ qui se trouve dans un voisinnage de l'orbite, on choisit $X_0(X(t)) \in \mathscr{O}$ tel que $X(t) - X_0(X(t)) \in V_{X_0}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\|X(t) - X_0(X(t))\|^2 &\leq C\mathscr{F}''_{X_0(X(t))}(X(t) - X_0(X(t))) \\ &\simeq C\left(\mathscr{F}(X(t)) - \mathscr{F}(X_0(X(t)))\right).\end{aligned}$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \widetilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t)\partial_x \widetilde{R_k} = \int w(t)\partial_{x_1} \widetilde{B_k} = \int w(t)\partial_{x_2} \widetilde{B_k} = 0.$$

- Profil de filtration :

$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan\left(\exp\left(\sqrt{\sigma} x/2\right)\right),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on choisit $\widetilde{x_{j-1}}(t) < m_j(t) < \widetilde{x_j}(t)$ de sorte à ce que $m_j' > 0$, et

$$\Phi_j(t,x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \widetilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t)\partial_x \widetilde{R_k} = \int w(t)\partial_{x_1} \widetilde{B_k} = \int w(t)\partial_{x_2} \widetilde{B_k} = 0.$$

- Profil de filtration :

$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan\left(\exp\left(\sqrt{\sigma} x/2\right)\right),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on choisit $\widetilde{x_{j-1}}(t) < m_j(t) < \widetilde{x_j}(t)$ de sorte à ce que $m_j' > 0$, et

$$\Phi_j(t,x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$ de sorte à ce que $w(t) = u(t) - \widetilde{P}(t)$ soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t)\partial_x \widetilde{R_k} = \int w(t)\partial_{x_1} \widetilde{B_k} = \int w(t)\partial_{x_2} \widetilde{B_k} = 0.$$

- Profil de filtration :

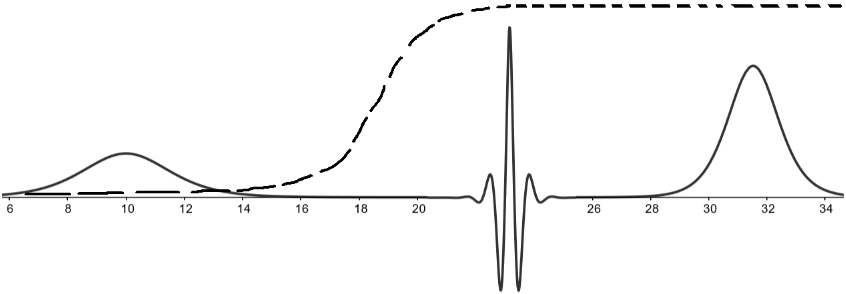
$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan\left(\exp\left(\sqrt{\sigma} x/2\right)\right),$$

où $\sigma > 0$ est à choisir judicieusement.

- Pour $j \geq 2$, on choisit $\widetilde{x_{j-1}}(t) < m_j(t) < \widetilde{x_j}(t)$ de sorte à ce que $m_j' > 0$, et

$$\Phi_j(t,x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

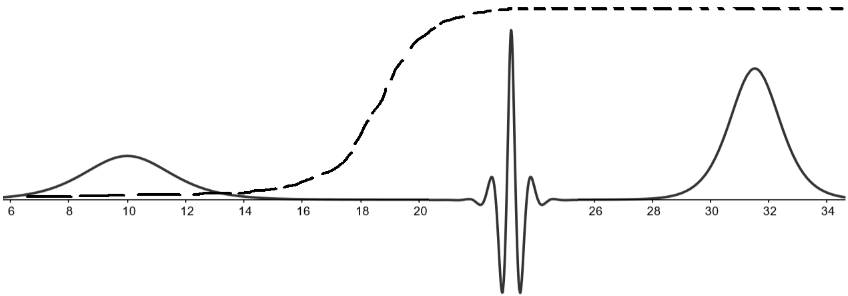
Pour la somme de solitons et de breathers



- Lois de conservation localisées M_j, E_j et F_j :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2 \Phi_j dx.$$

Pour la somme de solitons et de breathers



- Lois de conservation localisées M_j, E_j et F_j :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2}\int u^2 \Phi_j dx.$$

Masse et Énergie au voisinage d'un objet

- Masse au voisinage de $\widetilde{P}_j$:

$$M[\widetilde{P}_j + w] = M[\widetilde{P}_j] + \int w\widetilde{P}_j + O(\|w\|_{L^2}^2)$$
$$=: M[\widetilde{P}_j] + m_j[w] + O(\|w\|_{L^2}^2).$$

- Énergie au voisinage de $\widetilde{P}_j$:

$$E[\widetilde{P}_j + w] = E[\widetilde{P}_j] + \int w_x \widetilde{P}_{j_x} - \int w\widetilde{P}_j^{\,3} + O(\|w\|_{H^1}^2)$$
$$=: E[\widetilde{P}_j] + e_j[w] + O(\|w\|_{H^1}^2).$$

Masse et Énergie au voisinage d'un objet

- Masse au voisinage de $\widetilde{P}_j$:

$$M[\widetilde{P}_j + w] = M[\widetilde{P}_j] + \int w\widetilde{P}_j + O(\|w\|_{L^2}^2)$$
$$=: M[\widetilde{P}_j] + m_j[w] + O(\|w\|_{L^2}^2).$$

- Énergie au voisinage de $\widetilde{P}_j$:

$$E[\widetilde{P}_j + w] = E[\widetilde{P}_j] + \int w_x \widetilde{P}_{j_x} - \int w\widetilde{P}_j^{\,3} + O(\|w\|_{H^1}^2)$$
$$=: E[\widetilde{P}_j] + e_j[w] + O(\|w\|_{H^1}^2).$$

Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_j + |m_j[w(t)] - m_j[w(0)]| + |e_j[w(t)] - e_j[w(0)]| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D}\right)\right]^2,$$

en sachant que, pour tout $i > j$,

$$\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_i + |m_i[w(t)] - m_i[w(0)]| \quad |e_i[w(t)] - e_i[w(0)]| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D}\right)\right]^2.$$

- L'hypothèse de récurrence nous permettra de borner les termes associés aux P_i pour $i > j$.

Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_j + |m_j[w(t)] - m_j[w(0)]| + |e_j[w(t)] - e_j[w(0)]| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D}\right)\right]^2,$$

en sachant que, pour tout $i > j$,

$$\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_i + |m_i[w(t)] - m_i[w(0)]| \; |e_i[w(t)] - e_i[w(0)]| \leq \left[A_0 \left(a + e^{-\theta_0 D}\right)\right]^2.$$

- L'hypothèse de récurrence nous permettra de borner les termes associés aux P_i pour $i > j$.

Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de Φ_j, on prouve que M_j, E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$ près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), M_1, E_1 et F_1 ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.
- Pour $j \geq 2$, comme $v_2 > 0$, on trouve que $\mathscr{H}_j$ est presque-décroissante.
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), $\mathscr{H}_1$ est constante.

Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de Φ_j, on prouve que M_j, E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$ près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), M_1, E_1 et F_1 ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

  où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.
- Pour $j \geq 2$, comme $v_2 > 0$, on trouve que $\mathscr{H}_j$ est presque-décroissante.
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), $\mathscr{H}_1$ est constante.

Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de Φ_j, on prouve que M_j, E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$ près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), M_1, E_1 et F_1 ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.

- Pour $j \geq 2$, comme $v_2 > 0$, on trouve que $\mathscr{H}_j$ est presque-décroissante.
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), $\mathscr{H}_1$ est constante.

Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de Φ_j, on prouve que M_j, E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$ près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour $j=1$ (dernière étape de la récurrence), M_1, E_1 et F_1 ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.

- Pour $j \geq 2$, comme $v_2 > 0$, on trouve que $\mathscr{H}_j$ est presque-décroissante.
- Pour $j=1$ (dernière étape de la récurrence), $\mathscr{H}_1$ est constante.

Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de Φ_j, on prouve que M_j, E_j et F_j sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par $e^{-\theta_0 D}$ près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), M_1, E_1 et F_1 ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* localisée autour de P_j de la manière suivante :

$$\mathscr{H}_j(t) := F_j(t) + 2\left(b_j^2 - a_j^2\right) E_j(t) + \left(a_j^2 + b_j^2\right)^2 M_j(t),$$

  où $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$ si $P_j = B_k$ et $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$ si $P_j = R_l$.
- Pour $j \geq 2$, comme $v_2 > 0$, on trouve que $\mathscr{H}_j$ est presque-décroissante.
- Pour $j = 1$ (dernière étape de la récurrence), $\mathscr{H}_1$ est constante.

Coercivité

- Développement limité de $\mathscr{H}_j$ en w en écrivant $u = \widetilde{P} + w$:

$$\mathscr{H}_j(t) = \mathscr{H}_j[\widetilde{P}] + \mathscr{Q}_j(t) + O(\|w(t)\|_{H^2}^3),$$

le terme linéaire étant négligé grâce à l'équation elliptique vérifiée par P_j (et aux hypothèses de récurrence sur les variations de m_j et e_j).

- Si P_j est un soliton, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_x\widetilde{P}_j = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Si P_j est un breather, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_1}\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_2}\widetilde{P}_j = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Dans tous les cas, il y a une condition d'orthogonalité de trop !

Coercivité

- Développement limité de $\mathscr{H}_j$ en w en écrivant $u = \widetilde{P} + w$:

$$\mathscr{H}_j(t) = \mathscr{H}_j[\widetilde{P}] + \mathscr{Q}_j(t) + O(\|w(t)\|_{H^2}^3),$$

le terme linéaire étant négligé grâce à l'équation elliptique vérifiée par P_j (et aux hypothèses de récurrence sur les variations de m_j et e_j).

- Si P_j est un soliton, on trouve que si $\int w\widetilde{P_j} = \int w\partial_x\widetilde{P_j} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Si P_j est un breather, on trouve que si $\int w\widetilde{P_j} = \int w\partial_{x_1}\widetilde{P_j} = \int w\partial_{x_2}\widetilde{P_j} = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Dans tous les cas, il y a une condition d'orthogonalité de trop !

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

Coercivité

- Développement limité de $\mathscr{H}_j$ en w en écrivant $u = \widetilde{P} + w$:

$$\mathscr{H}_j(t) = \mathscr{H}_j[\widetilde{P}] + \mathscr{Q}_j(t) + O(\|w(t)\|_{H^2}^3),$$

le terme linéaire étant négligé grâce à l'équation elliptique vérifiée par P_j (et aux hypothèses de récurrence sur les variations de m_j et e_j).

- Si P_j est un soliton, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_x \widetilde{P}_j = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Si P_j est un breather, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_1}\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_2}\widetilde{P}_j = 0$, alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$

- Dans tous les cas, il y a une condition d'orthogonalité de trop !

Coercivité

- Développement limité de $\mathscr{H}_j$ en w en écrivant $u = \widetilde{P} + w$:
$$\mathscr{H}_j(t) = \mathscr{H}_j[\widetilde{P}] + \mathscr{Q}_j(t) + O(\|w(t)\|_{H^2}^3),$$
le terme linéaire étant négligé grâce à l'équation elliptique vérifiée par P_j (et aux hypothèses de récurrence sur les variations de m_j et e_j).
- Si P_j est un soliton, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_x \widetilde{P}_j = 0$, alors
$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$
- Si P_j est un breather, on trouve que si $\int w\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_1}\widetilde{P}_j = \int w\partial_{x_2}\widetilde{P}_j = 0$, alors
$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C\mathscr{Q}_j[w].$$
- Dans tous les cas, il y a une condition d'orthogonalité de trop !

Condition d'orthogonalité de trop

- Pour finir, le but est de montrer que si $\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_j =: \|w\|_{H^2,\Phi_j}^2$ atteint un certain seuil, alors $\int \widetilde{P}_j w = m_j[w]$ est suffisamment petite pour que la coercivité soit vérifiée (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\frac{1}{2}\int u^2\Phi_j = \frac{1}{2}\int \widetilde{P}^2\Phi_j + \int w(t)\widetilde{P}\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j$$

$$\simeq \frac{1}{2}\sum_{i=j}^{J}\int \widetilde{P}_i^{\,2} + \sum_{i=j}^{J}\int w(t)\widetilde{P}_i + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j.$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j,

$$\int w(t)\widetilde{P}_j \leq \int w(0)\widetilde{P}_j - \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(0)^2\Phi_j.$$

Condition d'orthogonalité de trop

- Pour finir, le but est de montrer que si $\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_j =: \|w\|_{H^2,\Phi_j}^2$ atteint un certain seuil, alors $\int \widetilde{P}_j w = m_j[w]$ est suffisamment petite pour que la coercivité soit vérifiée (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int u^2\Phi_j &= \frac{1}{2}\int \widetilde{P}^2\Phi_j + \int w(t)\widetilde{P}\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2}\sum_{i=j}^{J}\int \widetilde{P}_i^2 + \sum_{i=j}^{J}\int w(t)\widetilde{P}_i + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j.\end{aligned}$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j,

$$\int w(t)\widetilde{P}_j \leq \int w(0)\widetilde{P}_j - \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(0)^2\Phi_j.$$

Condition d'orthogonalité de trop

- Pour finir, le but est de montrer que si $\int \left(w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2\right) \Phi_j =: \|w\|_{H^2,\Phi_j}^2$ atteint un certain seuil, alors $\int \widetilde{P}_j w = m_j[w]$ est suffisamment petite pour que la coercivité soit vérifiée (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int u^2\Phi_j &= \frac{1}{2}\int \widetilde{P}^2\Phi_j + \int w(t)\widetilde{P}\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2}\sum_{i=j}^{J}\int \widetilde{P}_i^{\,2} + \sum_{i=j}^{J}\int w(t)\widetilde{P}_i + \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j.\end{aligned}$$

- Ainsi, par hypothèse de récurrence et presque-décroissance de la M_j,

$$\int w(t)\widetilde{P}_j \leq \int w(0)\widetilde{P}_j - \frac{1}{2}\int w(t)^2\Phi_j + \frac{1}{2}\int w(0)^2\Phi_j.$$

Condition d'orthogonalité de trop

- Donc,

$$\frac{\int w(t)\widetilde{P}_j}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} \leq \frac{\|w(0)\|_{H^2,\Phi_j}}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} + \|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}.$$

- Pour minorer $\int w(t)\widetilde{P}_j = m_j[w(t)]$, on utilise l'équation elliptique vérifiée par $\widetilde{P}_j$ pour réécrire m_j comme une combinaison à coefficients positifs de $-e_j[w(t)]$ et $-f_j[w(t)]$.
- On peut majorer $e_j[w(t)]$ et $f_j[w(t)]$ de la même manière qu'on a majoré $m_j[w(t)]$. On en déduit que $\left|\int w(t)\widetilde{P}_j\right|$ est suffisamment petite par rapport à $\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}$.
- Ces étapes permettent aussi de borner les variations de m_j et e_j qui sont utiles pour la récurrence.

Condition d'orthogonalité de trop

- Donc,

$$\frac{\int w(t)\widetilde{P}_j}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} \leq \frac{\|w(0)\|_{H^2,\Phi_j}}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} + \|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}.$$

- Pour minorer $\int w(t)\widetilde{P}_j = m_j[w(t)]$, on utilise l'équation elliptique vérifiée par $\widetilde{P}_j$ pour réécrire m_j comme une combinaison à coefficients positifs de $-e_j[w(t)]$ et $-f_j[w(t)]$.
- On peut majorer $e_j[w(t)]$ et $f_j[w(t)]$ de la même manière qu'on a majoré $m_j[w(t)]$. On en déduit que $\left|\int w(t)\widetilde{P}_j\right|$ est suffisamment petite par rapport à $\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}$.
- Ces étapes permettent aussi de borner les variations de m_j et e_j qui sont utiles pour la récurrence.

Condition d'orthogonalité de trop

- Donc,

$$\frac{\int w(t)\widetilde{P}_j}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} \leq \frac{\|w(0)\|_{H^2,\Phi_j}}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} + \|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}.$$

- Pour minorer $\int w(t)\widetilde{P}_j = m_j[w(t)]$, on utilise l'équation elliptique vérifiée par $\widetilde{P}_j$ pour réécrire m_j comme une combinaison à coefficients positifs de $-e_j[w(t)]$ et $-f_j[w(t)]$.
- On peut majorer $e_j[w(t)]$ et $f_j[w(t)]$ de la même manière qu'on a majoré $m_j[w(t)]$. On en déduit que $\left|\int w(t)\widetilde{P}_j\right|$ est suffisamment petite par rapport à $\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}$.
- Ces étapes permettent aussi de borner les variations de m_j et e_j qui sont utiles pour la récurrence.

Condition d'orthogonalité de trop

- Donc,

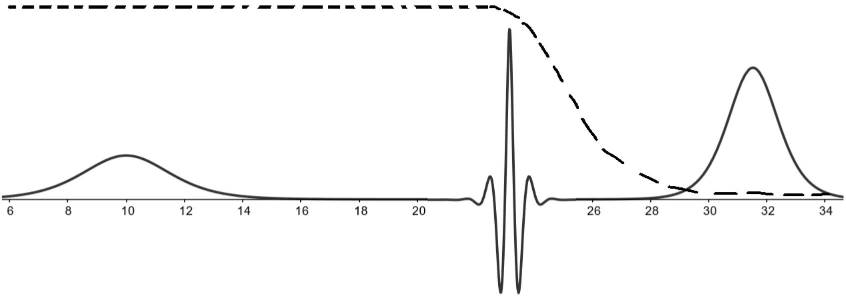
$$\frac{\int w(t)\widetilde{P}_j}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} \leq \frac{\|w(0)\|_{H^2,\Phi_j}}{\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}} + \|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}.$$

- Pour minorer $\int w(t)\widetilde{P}_j = m_j[w(t)]$, on utilise l'équation elliptique vérifiée par $\widetilde{P}_j$ pour réécrire m_j comme une combinaison à coefficients positifs de $-e_j[w(t)]$ et $-f_j[w(t)]$.
- On peut majorer $e_j[w(t)]$ et $f_j[w(t)]$ de la même manière qu'on a majoré $m_j[w(t)]$. On en déduit que $\left|\int w(t)\widetilde{P}_j\right|$ est suffisamment petite par rapport à $\|w(t)\|_{H^2,\Phi_j}$.
- Ces étapes permettent aussi de borner les variations de m_j et e_j qui sont utiles pour la récurrence.

Sommaire

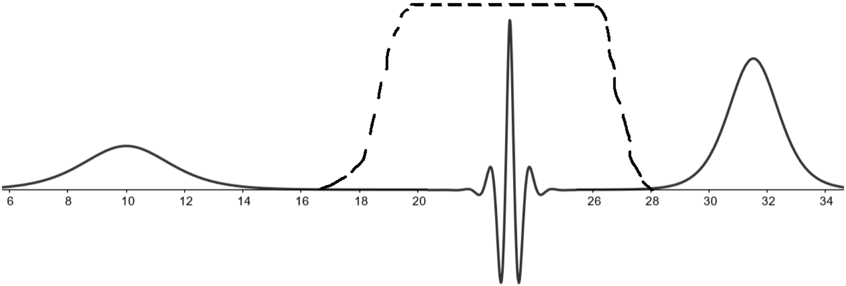
Pour l'unicité

On procède selon les mêmes idées mais avec des fonctionnelles de Lyapunov presque-croissantes.



Pour l'existence

Comme on cherche à construire une solution qui converge exponentiellement vers la somme P, on peut obtenir des fonctionnelles de Lyapunov *presque-constantes*. Ceci nous permet d'obtenir un résultat indépendant su signe des vitesses des objets.



Sommaire

Perspectives

- Théorème de Liouville pour les breathers
- Train infini de breathers ?
- Extension des résultats aux dipôles ?