Bestimmung von optimalen Matchings

Alexander Wiltz

Zusammenfassung
Das Ziel der vorliegenden Seminararbeit ist die Einführung in optimale Matchings [1, Hußmann, S. 203, Kapitel 7]. Es werden grundlegende Begrifflichkeiten geklärt und einen Einblick in das Thema zur Bestimmung perfekter Matchings in kleineren Graphen gegeben.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In diesem Artikel werden die Grundlagen zum Thema Matchings dargelegt. Die Bedingungen für Matchings, den Unterschied maximaler und perfekter Matchings, sowie den Zusammenhang von Graphen und Abbildungen. Anhand eines kurzen Exkurs zum Heiratssatz von Hall - auch als Heiratsproblem bekannt - wird ein perfektes Matching kleinerer Graphen beschrieben.

1. Matching

Bei Matching-Problemen handelt es sich um spezielle Zuordnungsprobleme, die auch Zuteilungsprobleme genannt werden.
Beispiele aus der Praxis sind Zuordnungen, wie Bewerber auf freie Stellen, Lehrer auf Schulklassen oder das bekannte Heiratsproblem von Hall. Ist die Paarbildung erfolgreich, nennt man das Matching.

Ein Matching $G = (V,E)$ heißt bipartiter Graph, wenn die Knoten **V** in zwei disjunkte Mengen **U** und **W** zerlegt werden können, so dass alle Kanten zwischen **U** und **W** verlaufen.

1.1 Was ist Matching?

Ein Matching von $G = (V,E)$ ist eine Teilmenge $G = M \subseteq E$ der Kanten von **G** mit der Eigenschaft, dass keine zwei Kanten einen gemeinsamen Knoten besitzen.
Das bedeutet konkret, dass jeweils nur ein Knoten zu einer Matchingkante gehören kann beziehungsweise darf und zwei Matchingkanten niemals adjazent (angrenzend, benachbart) sein dürfen.

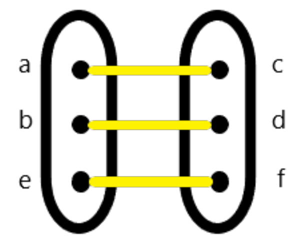

Abbildung 1. Bipartiter Graph

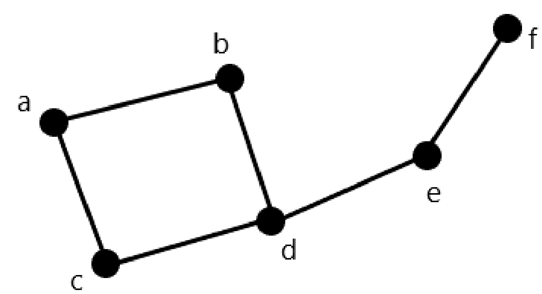

Abbildung 2. Leeres Matching

1.2 Maximales Matching

Ein Matching **M** von **G** ist maximal, wenn jedes Hinzufügen einer weiteren Kante zu **M** das Matching zerstört.
Wenn ein Graph **G** aus n Knoten besteht, kann ein maximales Matching genau $\frac{n}{2}$ Kanten beinhalten. Ein maximales Matching wird auch *nicht erweiterbar* genannt. Beide Matchings sind maximal, da keine weitere Verbindung gefunden werden kann, die zwei Knoten so miteinander verbindet, dass der jeweilige Knoten nicht mehrfach gematcht wurde.

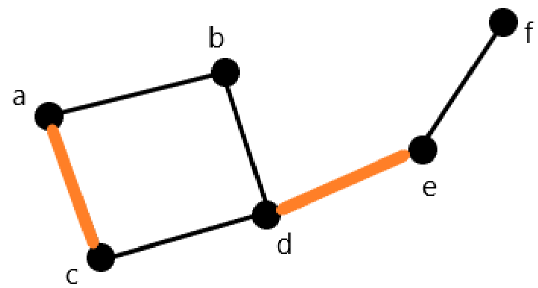

Abbildung 3. Maximales Matching (1)

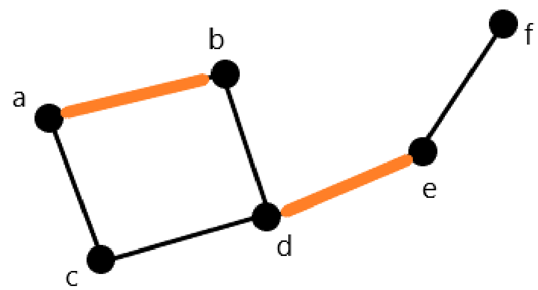

Abbildung 4. Maximales Matching (2)

Mathematisch:
M ist maximal, wenn: $\nexists e \in E \setminus M : e \cup M$ ist Matching.

1.3 Maximum Matching

Ein Maximales Matching ist nicht zwangsläufig ein Maximum-Matching. Das maximale Matching beschreibt eine Variante, in der die maximale Anzahl an Verbindungen innerhalb einer Variante abgebildet wird. Dies beschreibt allerdings nicht das Maximum an möglicher Matchings innerhalb eines Graphen. Ein Maximum ist es genau dann, wenn die absolut maximale Anzahl an Matchings innerhalb eines Graphen abgebildet wird.

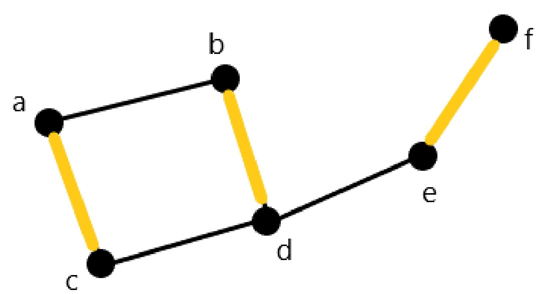

Abbildung 5. Maximum Matching (1)

1.4 Perfektes Matching

Perfekt oder Optimal nennt man ein Matching, wenn alle Knoten von **G** maximal überdeckt sind.
Voraussetzung dafür ist, dass die Anzahl der Knoten n gerade ist. Nur dann kann die maximale Mächtigkeit eines Matchings erreicht werden. Abbildung 5 zeigt ebenfalls ein optimales Matching.

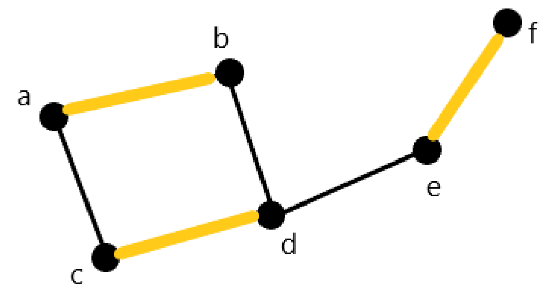

Abbildung 6. Maximum Matching (2)

Mathematisch:
M ist perfekt, wenn: $\forall\ v,w \in V$, mit $w \neq v$: $\exists e(v,w) \in M$

Zu dem Matching aus Abbildung 5 gehört der bipartite Graph aus Abbildung 1.

2. Bestimmung optimaler Matchings

Bestimmung optimaler Matchings anhand des Heiratssatz von Hall.
Benannt nach Philip Hall, beschreibt dieser mathematische Satz aus der Kombinatorik aus dem Jahr 1935, einen Ausgangspunkt der Matching-Thoerie innerhalb der Graphentheorie.
Das in der Informatik als Heiratsproblem bekannte Thema, beschreibt das Problem aus der Vergangenheit eine Gruppe Frauen zu verheiraten. Dies setzt allerdings eine gleich große Gruppe an Männern voraus, die sich für jeweils mindestens eine Frau aus der Gruppe interessieren.
Die Frage ist also: Lassen sich die heiratswilligen Frauen mit den Männern so verheiraten, dass jede Frau einen der mit ihr befreundeten Männer heiratet, ohne dass die Monogamieregel verletzt wird?

Grad einer Knotenmenge:
Es sei $G = (V,E)$ ein Graph und **U** eine Teilmenge der Knoten $\mathbf{V}(U \subseteq V)$. Man definiert den Grad von **U** als die Anzahl derjenigen Knoten von **G**, die mit einem Knoten aus **U** eine Kante bilden, **d(U)**.

Satz von Hall:
Ein bipartiter Graph $G = (V1 \cup V2, E)$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn für alle Teilmengen $U1 \subseteq V1$ die Ungleichung $d(U1) \geq |U1|$ erfüllt ist.

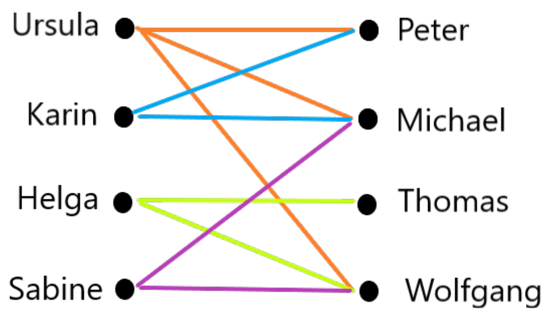

Abbildung 7. Heiratsgraph

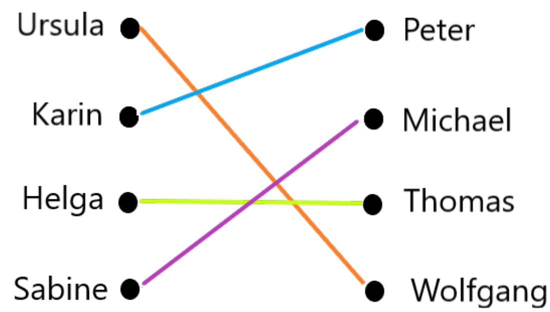

Abbildung 8. Perfektes Matching

Für die Teilmenge $U = \{Ursula, Karin\}$ gilt $d(U) = 3$, da drei Kanten zu einer anderen Teilmenge führen (Peter, Michael, Wolfgang).
Durch Zerlegung in zwei Teilmengen **V1** und **V2** ergeben sich folgende Mengen:
$V1 = \{Ursula(1), Karin(2), Helga(3), Sabine(4)\}$
und $V2 = \{Peter, Michael, Thomas, Wolfgang\}$

$d(1) = 3 \geq 1$, $d(1,2) = 3 \geq 2$, $d(1,3) = 4 \geq 2$, $d(1,4) = 3 \geq 2$, $d(1,2,3) = 4 \geq 3$, $d(1,2,4) = 3 \geq 3$, $d(1,3,4) = 4 \geq 3$, $d(1,2,3,4,) = 4 \geq 4$

Der Heiratssatz besagt: *Wird kein Widerspruch gefunden, so gibt es ein perfektes Matching.*

-	**Ursula**	**Karin**	**Helga**	**Sabine**
1	Peter	Peter	Thomas	Wolfgang
2	Michael	Michael	Wolfgang	Michael
3	Wolfgang	-	-	-

Tabelle 1. Beziehungen Frauen zu Männern

-	**Peter**	**Michael**	**Thomas**	**Wolfgang**
1	Karin	Sabine	Helga	Ursula
2	Ursula	Karin	-	Helga
3	-	Ursula	-	Sabine

Tabelle 2. Beziehungen Männer zu Frauen

3. Ausblick

Für kleinere Interessengraphen ist dieses Verfahren durch „probieren“ ohne weiteres anwendbar.
Für größere Graphen gibt es entsprechende Algorithmen.

Weiterführende Themen die sich mit größeren Matchingproblemen beschäftigen sind:
der Greedy-Matching-Algorithmus, die Symmetrische Differenz, der Satz von Berge und die Tiefensuche.

Quellen

programmingwiki.de/index.php?title=Matching-Probleme (zuletzt abgerufen: 01.11.2020)
www.youtube.com/watch?v=chdr2aj4FUc (zuletzt abgerufen: 31.10.2020)
https://de.wikipedia.org/wiki/Heiratssatz (zuletzt abgerufen: 03.11.2020)

Literatur

[1] B. Lutz-Westphal S. Hußmann. *Kombinatorische Optimierung Erleben*. 11. Vieweg+Teubner, Vieweg+Teubner Verlag — GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2007, March 2007.