ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(СПбГУ)

Образовательная программа бакалавриата "Математика"

Отчет о практике

на тему

**Гомотопические пределы
в триангулируемых категориях**

Выполнил студент 2 курса бакалавриата
группа 21.Б02-мкн
Югай Александр Германович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор РАН Бондарко Михаил Владимирович

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Введение

В рамках учебной практики, мне было предложено ознакомиться с конструкцией триангулируемых категорий [1] и некоторыми инструментами для работы с ними. Одним из таких инструментов, являются гомотопические пределы и копределы [2]. Эти объекты, крайне полезны, при изучении гомологических и когомологических функторов, определенных на данной триангулируемой категории и действующих в некоторую абелеву категорию. Важным примером когомологического функтора является функтор обычных когомологий из триангулируемой гомотопической категории комплексов модулей. Мне была предложена задача: доказать, что для любого когомологического функтора из триангулируемой категории в категорию модулей образ когомотопического копредела цепочки морфизмов совпадает с копределом образа этой цепи.

1. Определения и формулировка основных результатов

Определение 1. Пусть $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}, i \geq 0$ цепочка морфизмов в триангулированной категории T. Тогда определим гомотопический копредел, как конус морфизма: $hocolim(X_i) := C(1 - shift)$, где:

$$\sqcup_i X_i \xrightarrow{1-shift} \sqcup_i X_i$$

Мною была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}, i \geq 0$ цепочка морфизмов в триангулированной категории T, содержащей копроизведение любого счетного множества своих объектов. Пусть H – когомологический функтор в абелеву категорию $\mathcal{A}$, замкнутую относительно копределов. Тогда:*

(i) *Существует морфизм: $\varinjlim(H(X_i)) \longrightarrow H(hocolim(X_i))$*

(ii) *Если $\mathcal{A} = ((R - Mod))$, то $H(hocolim(X_i)) \simeq \varinjlim(H(X_i))$*

2. Доказательство основных результатов

Приведем доказательство теоремы 1.

Доказательство. **(i)** $Y := hocolim(X_i)$. По определению $hocolim(X_i)$ следующий треугольник–выделенный:

$$\sqcup_i X_i \xrightarrow{1-shift} \sqcup_i X_i \xrightarrow{h} Y$$

Положим $c_i := h \circ in_i$. Достаточно доказать, что $H(c_{i+1} \circ f_i) = H(c_i)$. Тогда морфизм из копредела существует по универсальному свойству. Распишем
$H(c_{i+1} \circ f_i) = H(h \circ in_{i+1} \circ f_i) =$[из свойств морфизма $shift$] $= H(h \circ shift \circ in_i)$. Теперь рассмотрим образ выделенного треугольника под действием функтора H:

$$\ldots \xrightarrow{H(\omega)} H(\sqcup_i X_i) \xrightarrow{1-H(shift)} H(\sqcup_i X_i) \xrightarrow{H(h)} H(Y) \xrightarrow{H(\omega[1])]} \ldots$$

Это точная последовательность, так как функтор–когомологический. Значит:
$H(h \circ (1 - shift)) = 0 \Longrightarrow H(h) = H(h \circ shift)$. Вернемся к проверяемому равенству:
$H(c_{i+1} \circ f_i) = H(h \circ shift \circ in_i) = H(h \circ in_i) = H(c_i)$.

(ii) т.к. H–аддитивный функтор, то он сохраняет счетные копроизведения [3]. Т.к. $\mathcal{A} = ((R - Mod))$, то в категории существуют коэквалайзеры. Также мы знаем, что $\varinjlim(H(X_i))$–является коэквалайзером 1 и $H(shift)$ [3]. Этот факт выражается в следующей диаграмме:

$$\bigoplus_i H(X_i) \overset{H(shift)}{\rightrightarrows} \bigoplus_i H(X_i) \longrightarrow \varinjlim(H(X_i))$$

Значит $\varinjlim(H(X_i)) \simeq Coker(1 - H(shift))$.
Докажем, что $H(Y) \simeq Coker(1 - H(shift))$. Выпишем опять точную последовательность:

$$\ldots \xrightarrow{H(\omega)} \bigoplus_i H(X_i) \xrightarrow{1-H(shift)} \bigoplus_i H(X_i) \xrightarrow{H(h)} H(Y) \xrightarrow{H(\omega[1])} \ldots$$

Докажем, что $1 - H(shift)$–мономорфизм. Отсюда будет следовать, что и $1 - H(shift[1])$–мономорфизм, значит из точности $Ker(1 - H(shift[1])) = 0 = Im(\omega[1])$. Тогда $Ker(H(h)) = H(Y) = Im(H(h))$ и значит $H(Y) \simeq Coker(1 - H(shift))$.
Рассмотрим $\bigoplus_i H(X_i)$ как множество финитных последовательностей. Распишем морфизм $1 - H(shift)$ почленно:
$(\ldots, 0, 0, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n, 0, 0 \ldots) \longrightarrow (\ldots, 0, 0, y_i, y_{i+1} - f_i(y_i), y_{i+1} - f_i(y_i), y_{i+2} - f_{i+1}(y_{i+1}), \ldots, y_n - f_{n-1}(y_{n-1}), f_n(y_n), 0, \ldots)$
Если $(\ldots, 0, 0, y_i, y_{i+1} - f_i(y_i), y_{i+1} - f_i(y_i), y_{i+2} - f_{i+1}(y_{i+1}), \ldots, y_n - f_{n-1}(y_{n-1}), f_n(y_n), 0, \ldots) = 0$, то $y_i = 0 \Longrightarrow y_{i+1} = 0 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow y_n = 0$. Значит ядро–тривиально, следовательно это действительно мономорфизм.Тогда по сказанному выше $H(Y)) \simeq \varinjlim(H(X_i))$. $\square$

Список литературы

[1] А. Д. Елагин, *Введение в гомологическую алгебру*, https://ium.mccme.ru/s16/s16-elagin.html **1** (2016).

[2] MARCEL BÖKSTEDT, AMNON NEEMAN, *Homotopy limits in triangulated categories*, Compositio Mathematica, **tome 86** (1993), 209-234.

[3] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics (GTM, volume 5), 225-230, 133-136