ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(СПбГУ)

Образовательная программа бакалавриата “Математика”

Отчет о практике

на тему

Стационарные случайные последовательности

Выполнил студент 3 курса бакалавриата
группа 21.Б02-мкн
Югай Александр Германович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Давыдов Юрий Александрович

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Введение

В рамках учебной практики, мне было предложено ознакомиться с теорией стационарных случайных процессов и элементами эргодической теории [2]. Во время работы я решал учебные задачи из [2]. Их решения приведены ниже.

1. Стационарные (в узком смысле) случайные последовательности. Сохраняющие меру преобразования

Задача 1. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование и $\xi = \xi(\omega)$ – случайная величина, такая что существует математическое ожидание $\mathbb{E}\xi(\omega)$. Показать, что $\mathbb{E}\xi(\omega) = \mathbb{E}\xi(T\omega)$.*

Доказательство. Докажем, что совпадают распределения случайных величин $Y := \xi(\omega)$ и $Z := \xi(T\omega)$. Если это так, то получаем требуемое, воспользовавшись формулой:

$$\mathbb{E}X = \int\limits_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx$$

где $F_X(x)$ – функция распределения случайной величины X.
Докажем это:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\{Y(\omega) \leqslant t\} = \mathbb{P}\{Y(\omega) \in (-\infty; t)\} = \mathbb{P}\{\omega \in Y^{-1}((-\infty; t))\}$$

Воспользуемся, тем, что T – сохраняет меру:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\omega \in Y^{-1}((-\infty; t))\} = \mathbb{P}\{\omega \in T^{-1}Y^{-1}(-\infty; t)\} = \mathbb{P}\{T(\omega) \in Y^{-1}(-\infty; t))\} = \\ = \mathbb{P}\{Y(T(\omega)) \in (-\infty; t)\} = \mathbb{P}\{Z(\omega) \in (-\infty; t)\} = F_Z(t)\end{aligned}$$

Итого $F_Y(t) = F_Z(t)$. Значит по замечанию выше – все доказано. □

Задача 2. *Показать, что в примерах 1 и 2(стр. 599 в* [2]*) преобразования T – являются преобразованиями, сохраняющимим меру.*

Доказательство. **1)**Докажем, что T – измеримо. Это ясно, так как наша σ - алгебра это 2^Ω и поэтому $T^{-1}A$ – измеримо для любого $A \subset \Omega$.
Для доказательства того что T – сохраняет меру воспользуемся задачей 1.6 ниже. Ясно, что одноточечные множества образуют π - систему(стр. 205 [2]), которая к тому же является порождающей для σ-алгебры 2^Ω. Тогда по задаче 1.6 достаточно проверить свойство сохранения меры для одноточечных множеств, для которых это очевидно.

2) Это утверждение достаточно проверить на интервалах $(a, b) \subset [0, 1)$. Рассмотрим случаи:
– Если $a > \lambda$, $\lambda < b < 1$, то:

$$\begin{aligned}T^{-1}(a, b) = (a - \lambda, b - \lambda) \in \mathscr{B}([0, 1)) \\ \mathbb{P}(a, b) = \mathbb{P}(a - \lambda, b - \lambda) = b - a\end{aligned}$$

– *Если* $a < \lambda$, $\lambda < b < 1$, *то:*

$$T^{-1}(a,b) = ([0, b-\lambda) \cup (a-\lambda+1, 1) \in \mathscr{B}([0,1))$$
$$\mathbb{P}(a,b) = \mathbb{P}([0, b-\lambda) \cup (a-\lambda+1,1)) =$$
$$= b - \lambda + 1 - a + \lambda - 1 = b - a$$

– *Если* $a < b < \lambda$, *то:*

$$T^{-1}(a,b) = (a-\lambda+1, b-\lambda+1) \in \mathscr{B}([0,1))$$
$$\mathbb{P}(a,b) = \mathbb{P}(a-\lambda+1, b-\lambda+1) = b-a$$

Значит T–измеримо и сохраняет меру. □

Задача 3. *Пусть* $\Omega = [0,1)$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1))$ *и* $\mathbb{P}$ *– некоторая мера с непрерывной функцией распределения. Показать, что преобразования* $Tx = \lambda x$, $0 < \lambda < 1$, *и* $Tx = x^2$ *не являются преобразованиями, сохраняющими меру.*

Доказательство. **1)** $Tx = \lambda x$, $0 < \lambda < 1$. Предположим противное. Пусть не умаляя общности: $\mathbb{P}(a,b) > 0$. Знаем: $\mathbb{P}(a,b) = F(b) - F(a)$, для непрерывной функции $F(x)$. Рассмотрим меру n-го прообраза этого интервала:

$$\mathbb{P}(T^{-n}(a,b)) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{\lambda^n}, \frac{b}{\lambda^n}\right) = F\left(\frac{a}{\lambda^n}\right) - F\left(\frac{b}{\lambda^n}\right) = \mathbb{P}(a,b) = F(a) - F(b) > 0.$$

Устремим n к $+\infty$.Тогда по неперерывости $F(x)$:

$$\lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{b}{\lambda^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{a}{\lambda^n}\right) = 1$$

Значит:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T^{-n}(a,b)) = \mathbb{P}(a,b) = 0$$

Мы получили противоречие.

2)Также как и выше, предположим противное. Пусть: $\mathbb{P}(a,b) > 0$. Рассмотрим меру n-го прообраза:

$$\mathbb{P}(T^{-n}(a,b)) = \mathbb{P}(a^{\frac{1}{2^n}}, b^{\frac{1}{2^n}}) = F\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) - F\left(b^{\frac{1}{2^n}}\right) = \mathbb{P}(a,b)$$

При n стремящемся к $+\infty$, $F\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)$ стремится к $F(1)$, так как F по условию непрерывная. Тогда $\mathbb{P}(a,b) = 0$. Снова получаем противоречие. □

Задача 4. *Пусть* Ω *– множество всех последовательностей* $\omega = (\ldots, \omega_0, \omega_1, \ldots)$ *действительных чисел,* $\mathscr{F}$ *-* σ*-алгебра, порожденная измеримыми цилиндрами* $\{\omega : (\omega_k, \ldots, \omega_{k+n-1} \in B_n\}$, *где* $n = 1, 2, \ldots, k \in \mathbb{Z}$ *и множество* $B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. *Пусть* $\mathbb{P}$ *–вероятностная мера на* $(\Omega, \mathscr{F})$ *и двухстороннее преобразование* T *определено формулой*

$$T(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots) = (\ldots, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots).$$

Показать, что T является сохраняющим меру преобразованием в том и только том случае, когда

$$\mathbb{P}\{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\} = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_k, \dots, \omega_{k+n-1}) \in B_n\}$$

для всех $n = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{Z}$ и $B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$ По теореме о единственности продолжения меры(стр. 38 [3]) инвариантность достаточно доказывать на $B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Пусть $A = \{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\}$. Тогда $T^{-1}A = \{\omega : (\omega_{-1}, \dots, \omega_{n-2}) \in B_n)\}$. Тогда применив утверждение для $k = -1$ мы знаем, что

$$\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_{-1}, \dots, \omega_{n-2}) \in B_n\} = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\} = \mathbb{P}(A).$$

Значит T сохраняет меру.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Так как T сохраняет меру, то по рассуждениям выше мы знаем требуемое для $\forall n$, $k = -1$. Докажем, для $k > 0$:
Пусть $A = \{\omega : (\omega_k, \dots, \omega_{k+n-1}) \in B_n\}$. Возьмем от A k-й прообраз T:

$$\mathbb{P}(T^{-k}A) = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_k, \dots, \omega_{n+k-1}) \in B_n\}$$

Для $k < 0$:
Пусть $A = \{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\}$. Возьмем от A $-k$-й прообраз T:

$$\mathbb{P}(T^{-(-k)}A) = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_k, \dots, \omega_{n+k-1}) \in B_n\} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\{\omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in B_n\}$$

Значит требуемое условие выполнено для всех k и n. □

Задача 5. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ –некоторая стационараная последовательность случайных элементов со значениями в борелевском пространвнстве S. Показать, что можно построить случайные элементы $\xi_{-1}, \xi_{-2}, \dots$ со значаниями в S такие, что двусторонняя последовательность $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ будет стационарной.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Колмогорова о существовании процесса (стр. 346 [1]). Положим за множество временных интервалов $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$, и возьмем следующие функции распределения:

$$F_{t_0,t_1,\dots,t_n}(x_0, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\omega : \xi_0 \le x_0, \xi_{t_1-t_0} \le x_1, \dots, \xi_{t_n-t_0} \le x_n)$$

Тогда по теореме Колмогорова существует случайный процесс $X = (\eta_t)_{t\in\mathscr{T}}$ Такой, что

$$\mathbb{P}(\omega : \eta_{t_0} \le x_0, \dots, \eta_{t_n} \le x_n) = F_{t_0,t_1,\dots,t_n}(x_0, \dots, x_n)$$

Ясно, что $\xi_i \overset{\mathscr{D}}{=} \eta_i, i \ge 0$(из равенства их функций распределкния). Докажем, что последовательность X–стационарная. Так как $\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$ порождена фундаментальными прямоугольниками, то достаточно проверить для $B_n = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$

$$\mathbb{P}(\omega : \eta_k \le x_0, \dots, \eta_{k+n-1} \le x_n) = F_{k,k+1,\dots,k+n}(x_0, \dots, x_n) =$$
$$= \mathbb{P}(\omega : \xi_0 \le x_0, \xi_1 \le x_1, \dots, \xi_n \le x_n) = \mathbb{P}(\omega : \eta_0 \le x_0, \dots, \eta_n \le x_n)$$

Значит $X = (\eta_t)_{t\in\mathscr{T}}$–стационарная последовательность, содержащаа исходную.

□

Задача 6. *Пусть T – измеримое преобразование на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и $\mathscr{E}$ есть π-система подмножеств Ω(стр. 205 [2]), породжающая $\mathscr{F}$. Доказать, что если равенствог $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ верно для $A \in \mathbb{E}$, то оно верно и для $A \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Дополним $\mathscr{E}$ до полукольца $\mathscr{P}$, добавив пустое множество и для любых $A, B \in \mathscr{E}$ добавим $A \backslash B$. Так как $\mathscr{E}$ - π-система, то $\mathscr{P}$ действительно полукольцо.
Положим $Q(A) := \mathbb{P}(T^{-1}A)$. Это мера на $(\Omega, \mathscr{F})$. Докажем, что $\mathbb{P}$ и Q совпадают на $\mathscr{P}$. Так как на элементах π-системы эти меры уже совпадают, то достаточно показать, что они совпадают на дополнениях т.е. $\mathbb{P}(A\backslash B) = Q(A\backslash B) = \mathbb{P}(T^{-1}(A\backslash B))$, для любых $A, B \in \mathscr{E}$.

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(T^{-1}A) - \mathbb{P}(T^{-1}(A \cap B)) =$$
$$= \mathbb{P}(T^{-1}A) - \mathbb{P}(T^{-1}A \cap T^{-1}B) = \mathbb{P}(T^{-1}A \backslash T^{-1}B) = \mathbb{P}(T^{-1}(A\backslash B))$$

Так как $\mathbb{P}$ и Q совпадают на $\mathscr{P}$, которая порождает $\mathscr{F}$, то по теореме о единственности продолжения меры(стр. 38 [3]) $\mathbb{P}$ и Q совпадают на $\mathscr{F}$, т.е. $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ для $A \in \mathscr{F}$. □

Задача 7. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и $\mathscr{G}$ - его под-σ-алгебра $\mathscr{F}$. Показать, что для почти каждого $A \in \mathscr{F}$*

$$\mathbb{P}(A \mid \mathscr{G})(T\omega) = \mathbb{P}(T^{-1}A \mid T^{-1}\mathscr{G})(\omega).$$

Доказательство. По определению:

$$\mathbb{P}(A \mid \mathscr{G})(T\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{G})(T\omega)$$
$$\mathbb{P}(T^{-1}A \mid T^{-1}\mathscr{G})(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T^{-1}A} \mid T^{-1}\mathscr{G})(\omega).$$

Обозначим за Y УМО $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{G})$. Докажем, что $Y(T\omega)$ – удовлетворяет универсальному свойству УМО $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T^{-1}A} \mid T^{-1}\mathscr{G})(\omega)$.
Измеримость - очевидна. Достаточно доказать следующую формулу:

$$\int_C Y(Tx)\, d\mathbb{P} = \int_C \mathbb{1}_{T^{-1}A}(y)\, d\mathbb{P}$$

Перепишем первый интеграл слудующим образом и применим результат Задачи 1:

$$\int_C Y(Tz)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega Y(Tz)\mathbb{1}_C(z)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega Y(Tz)\mathbb{1}_{TC}(Tz)\, d\mathbb{P} =$$
$$= \int_\Omega Y(z)\mathbb{1}_{TC}(z)\, d\mathbb{P} = \int_{TC} Y(z)\, d\mathbb{P}$$

Воспользуемся тем, что Y это УМО:

$$\int_{TC} Y(z)\, d\mathbb{P} = \int_{TC} \mathbb{1}_A(z)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_A(z)\mathbb{1}_{TC}(z)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_A(Tz)\mathbb{1}_{TC}(Tz)\, d\mathbb{P} =$$
$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{T^{-1}A}(z)\mathbb{1}_C(z)\, d\mathbb{P} = \int_C \mathbb{1}_{T^{-1}A}(z)\, d\mathbb{P}$$

Что и требовалось доказать. □

Задача 8. *Пусть T – некоторое измеримое преобразование на $(\Omega, \mathscr{F})$ и $\mathscr{P}$ – множество всех вероятностных мер $\mathbb{P}$, относительно которых T является сохраняющим $\mathbb{P}$-меру преобразованием. Показать, что:*
(a) *множество $\mathscr{P}$ выпукло;*
(b) *T является эргодическим преобразованием относительно меры $\mathbb{P}$ в том и только том случае, когда $\mathbb{P}$ есть крайняя точка множества $\mathscr{P}$.*

Доказательство. **(a)** Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathscr{P}, a \in (0,1]$. Докажем, что мера $\mathbb{P}(A) = a\lambda_1(A) + (1-a)\lambda_2(A) \in \mathscr{P}$.

$$\mathbb{P}(T^{-1}A) = a\lambda_1(T^{-1}A) + (1-a)\lambda_2(T^{-1}A) = a\lambda_1(A) + (1-a)\lambda_2(A) = \mathbb{P}(A)$$

(b)$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathbb{P} = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$–эргодично. Тогда λ_1 – абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbb{P}$(т.е. $\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \lambda_1(A) = 0$). Тогда по теоереме Радона-Никодима λ_1 имеет суммируемую плотность относительно меры $\mathbb{P}$ т.е. существует такая f, что:

$$\lambda_1(A) = \int_A f(z)\, d\mathbb{P}$$

Докажем, что f – инвариантная случайная величина. Применим к f теорему о замене меры:

$$\int_A f(z)\, d\mathbb{P} = \int_{T^{-1}A} f(Tz)\, d\mathbb{P}$$

Также воспользуемся инвариантностью T относительно λ_1.

$$\int_A f(z)\, d\mathbb{P} = \int_{T^{-1}A} f(z)\, d\mathbb{P}$$

Тогда совместив оба равенства имеем:

$$\int_{T^{-1}A} f(z)\, d\mathbb{P} = \int_{T^{-1}A} f(Tz)\, d\mathbb{P}$$

Предположим, что $f(Tz) \neq f(z)$. Тогда НУО $\exists \epsilon > 0, a > 0 : \mathbb{P}\{z : f(Tz) - f(z) > \epsilon\} > a > 0$. Положим $A = T(W)$ и тогда $W \subset T^{-1}(TW)$.
Значит:

$$0 = \int_{T^{-1}A} f(Tz) - f(z)\, d\mathbb{P} \geqslant \int_W f(Tz) - f(z)\, d\mathbb{P} \geqslant \epsilon\mathbb{P}\{z : f(Tz) - f(z) > 0$$

Значит, f– инвариантная случайная величина и тогда $f = const$(теорема 1, стр.602 [2]). Значит $\mathbb{P}$ – действительно граничная точка $\mathscr{P}$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Докажем, что если $\mathbb{P}$ – не эргодическое, то оно представляется выпуклой комбинацией мер из $\mathscr{P}$. Если $\mathbb{P}$ – не эргодическое, что существует инвариантное множество $A \in \mathscr{F}$ не полной меры. Тогда положим:

$$\lambda_1(B) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A \cap B), \lambda_2(B) = \frac{1}{1 - \mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(B \setminus A), a = \mathbb{P}(A)$$

Тогда $a\lambda_1(A) + (1-a)\lambda_2(A) = \mathbb{P}(A)$. Эти меры не совпадают с $\mathbb{P}$, так как они различны на $B = A$. $\square$

2. Эргодичность и перемешивание

Задача 1. *Показать, что случайная величина η является инваринтной тогда и только тогда, когда она $\mathscr{J}$ измерима(измерима относительно σ-алгебры инвариантных множеств).*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Докажем, что $\eta^{-1}(B)$ – инвариантное множество. Действительно

$$T^{-1}(\eta^{-1}(B)) = \{\omega : T\omega \in \eta^{-1}(B)\} = \{\omega : \eta(T\omega) \in B\} = \{\omega : \eta(\omega) \in B\} = \eta^{-1}(B).$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались инвариантностью η.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Знаем: $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \eta^{-1}(B) \in \mathscr{J}$. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и пусть $\eta(\omega) = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\eta^{-1}(a) \in \mathscr{J}$ и тогда по инвариантности $T^{-1}\eta^{-1}(a) = \eta^{-1}(a)$. Так как $\omega \in \eta^{-1}(a) = T^{-1}\eta^{-1}(a)$, то $\eta(T\omega) = a = \eta(\omega)$. □

Задача 2. *Показать, что множество A является почти инвариантным тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}(T^{-1}A \setminus A) = 0$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Так как A–почти инвариантно, то $\mathbb{P}(A \triangle T^{-1}A) = 0$. Также:

$$\mathbb{P}(A \triangle T^{-1}A) = \mathbb{P}((A \setminus T^{-1}A) \sqcup (T^{-1}A \setminus A)) = \mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A) + \mathbb{P}(T^{-1}A \setminus A) = 0.$$

Значит, $\mathbb{P}(T^{-1}A \setminus A) = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Так как $\mathbb{P}(A \triangle T^{-1}A) = \mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A) + \mathbb{P}(T^{-1}A \setminus A) = \mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A)$, то достаточно доказать, что $\mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A) = 0$. Распишем $\mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A)$:

$$\mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap T^{-1}A)$$

Теперь распишем $\mathbb{P}(A \cap T^{-1}A)$:

$$\mathbb{P}(A \cap T^{-1}A) = \mathbb{P}(T^{-1}A) - \mathbb{P}(T^{-1}A \setminus A) = \mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$$

Значит, $\mathbb{P}(A \setminus T^{-1}A) = 0$. □

Задача 3. *Показать, что преобразование T есть перемешивание в том и только том случае, когда для любых двух случайных величин ξ и η с $\mathbb{E}\xi^2 < \infty, \mathbb{E}\eta^2 < \infty$*

$$\mathbb{E}\xi(T^n\omega)\eta(\omega) \longrightarrow \mathbb{E}\xi(\omega)\mathbb{E}\eta(\omega), n \to \infty$$

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$ Положим $\xi(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$, $\eta(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$.
Имеем:

$$\xi(T^n\omega) = \mathbb{1}_B(T^n\omega) = \mathbb{1}_{T^{-n}}(\omega), \xi(T^n\omega)\eta(\omega) = \mathbb{1}_{(T^{-n}B)\cap A}(\omega)$$

Тогда применив к ним формулу из условия, получим требуемое.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Из свойства перемешивания получаем требуемое утверждение для $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{C_i}(\omega)$, $\eta(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}(\omega)$. Воспользуемся тем, что функции такого вида плотны в L^2(стр. 460 [3]), и тем самым мы имеем сходимость из условия для любых η и ξ. □

Задача 4. *Привести пример сохраняющего меру эргодического преобразования, которое не является перемешиванием.*

Доказательство. Рассотрим вероятностное пространство следующего вида: $\Omega = \{0,1\}, \mathscr{F} = 2^{\Omega}, \mathbb{P} : \mathbb{P}(0) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(1) = \frac{1}{2}$. В качестве T возьмем следующее преобразование: $T(0) = 1, T(1) = 0$. Ясно, что T – сохраняет меру. Также, ясно, что лишь Ω–является инвариантным множеством. Проверим свойство перемешивания:

$$\mathbb{P}(\{1\} \cap T^{-n}\{0\}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } n\text{–нечётно} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

У такой последовательности нет предела. Значит, T– не является перемешиванием. □

Задача 5. *Пусть T–сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathscr{A}$ – алгебра подмножеств Ω и $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$. Предположим, что определение 4(стр. 603* [2]*) предполагает выполнение свойства*

$$\mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), n \to \infty$$

лишь для множеств A и B из $\mathscr{A}$. Показать, что тогда это свойство будет выполнено для всех A и B из $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(и, следовательно преобразование T есть перемешивание). Показать, что утверждение остается справедливым, если $\mathscr{A}$ является π-системой, такой, что $\pi(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$.

Доказательство. Сначала, сведем случай π-системы к случаю алгебры. Пусть $\mathscr{A}$ – наша π-система. Дополним ее до алгебры, добавив $\emptyset, \Omega$ и дополнения всех множеств из $\mathscr{A}$. Ясно, что для пустого и всего Ω предельное тождество в условии выполняется. Достаточно доказать что для любых $A, B \in \mathscr{A}$ верны три предельных тождества

$$1)\mathbb{P}(A^c \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B), n \to \infty$$
$$2)\mathbb{P}(A \cap T^{-n}B^c) \longrightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c), n \to \infty$$
$$3)\mathbb{P}(A^c \cap T^{-n}B^c) \longrightarrow \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c), n \to \infty.$$

Докажем (1):

$$\mathbb{P}(A^c \cap T^{-n}B) = \mathbb{P}(T^{-n}B) - \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)(A^c), n \to \infty.$$

Докажем (2):

$$\mathbb{P}(A \cap T^{-n}B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(B^c)(A), n \to \infty.$$

Докажем (3):

$$\mathbb{P}(A^c \cap T^{-n}B^c) = \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(A^c \cap T^{-n}B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(T^{-n}B) + \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(A)) =$$
$$= \mathbb{P}(B^c)(A^c), n \to \infty.$$

Значит, достаточно доказывать для случая, если $\mathscr{A}$ алгебра.
Восмользуемся фактом, что если $\mathscr{A}$ алгебра, такая, что $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$, то $\forall \epsilon > 0\ \exists A_\epsilon : \mathbb{P}(A_\epsilon \triangle A) < \epsilon$. Тогда зафиксируем ϵ и для любых $A, B \in \mathscr{F}$ запишем

$$(*)\mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T^{-n}B) - \mathbb{P}(A \cup T^{-n}B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup T^{-n}B)$$

$$\mathbb{P}(A\cup T^{-n}B)=\mathbb{P}(A_\epsilon\cup T^{-n}B_\epsilon)+\mathbb{P}(A\setminus A_\epsilon)+\mathbb{P}(T^{-n}B\setminus T^{-n}B_\epsilon)-\mathbb{P}(A_\epsilon\setminus A)-\mathbb{P}(T^{-n}B_\epsilon\setminus T^{-n}B)=$$
$$=\mathbb{P}(A_\epsilon\cup T^{-n}B_\epsilon)+\mathbb{P}(A\setminus A_\epsilon)+\mathbb{P}(T^{-n}(B\setminus B_\epsilon))-\mathbb{P}(A_\epsilon\setminus A)-\mathbb{P}(T^{-n}(B_\epsilon\setminus B))=$$
$$=\mathbb{P}(A_\epsilon\cup T^{-n}B_\epsilon)+\mathbb{P}(A\setminus A_\epsilon)+\mathbb{P}(B\setminus B_\epsilon)-\mathbb{P}(A_\epsilon\setminus A)-\mathbb{P}(B_\epsilon\setminus B)$$

Тогда

$$\mathbb{P}(A_\epsilon\cup T^{-n}B_\epsilon)-2\epsilon\le\mathbb{P}(A\cup T^{-n}B)\le\mathbb{P}(A_\epsilon\cup T^{-n}B_\epsilon)+2\epsilon$$

Подставим в (*)

$$\mathbb{P}(A_\epsilon\cap T^{-n}B_\epsilon)-4\epsilon\le\mathbb{P}(A\cap T^{-n}B)\le\mathbb{P}(A_\epsilon\cap T^{-n}B_\epsilon)+4\epsilon$$

Устремим $n\to\infty$

$$\mathbb{P}(A_\epsilon)\mathbb{P}(B_\epsilon)-4\epsilon\le\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A\cap T^{-n}B)\le\mathbb{P}(A_\epsilon)\mathbb{P}(B_\epsilon)+4\epsilon$$

В силу, произвольности ϵ, получаем требуемое. □

Задача 6. *Пусть A является почти инвариантным множеством. Показать, что $\omega\in A$ ($\mathbb{P}$-п.н.), если и только если $T^n\omega\in A$ для всех $n=1,2,\dots$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Рассмотрим события $B_n=\{\omega\in A: T^k\omega\in A, k=1,2,\dots,n\}=\{\omega\in A:\omega\in T^{-k}A, k=1,2,\dots,n\}=A\cap T^{-1}\cap T^{-2}\cap\dots\cap T^{-n}A$. Это вложенная последовательность событий. Нам достаточно доказать, что

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(A)$$

Докажем, что для любого n выполнено $\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(A)$. Будем доказывать это по индукции. База $n=1$:

$$\mathbb{P}(A\cap T^{-1}A)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\setminus T^{-1}A)$$

Тут последнее слагаемое рано 0, по почти инвариантности A. Докажем переход:

$$\mathbb{P}(A\cap T^{-1}\cap T^{-2}\cap\dots\cap T^{-n}A)=\mathbb{P}((A\cap T^{-1}\cap T^{-2}\cap\dots\cap T^{-n+1}A)\cap T^{-n}A)$$
$$=\mathbb{P}(A\cap T^{-1}\cap T^{-2}\cap\dots\cap T^{-n+1}A)-\mathbb{P}((A\cap T^{-1}\cap T^{-2}\cap\dots\cap T^{-n+1}A)\setminus T^{-n}A)\ge$$
$$\ge\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\setminus T^{-n}A)=\mathbb{P}(A)$$

Последнее равенство следует из почти-инвариантности A.
Заметим, что верно и обратное неравенство, так как $B_n\subseteq A$. Значит $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=\mathbb{P}(A)$ и все доказано.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Знаем $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=\mathbb{P}(A)$. Требуется доказать, что

$$\mathbb{P}(\{\omega\in A^c:\omega:T^k\omega\in A,k=1,2,\dots\})=\mathbb{P}(\{\omega\in A^c:\omega\in T^{-k}k=1,2,\dots\})=$$
$$=\mathbb{P}(T^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)\setminus A)=0$$

Так как, $B_n\subseteq A$, то имеем оценку

$$\mathbb{P}(T^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)\setminus A)\le\mathbb{P}(T^{-1}A\setminus A)=0$$

Последнее равно 0 по почти-инваринтности A. □

Задача 7. *Привести пример сохраняющих меру преобразований T на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, для которых: (a) из того что $A \in \mathscr{F}$, вовсе не следует, что $TA \in \mathscr{F}$; (b) из того, что $A \in \mathscr{F}$ и $TA \in \mathscr{F}$, вовсе не следует, что $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(TA)$.*

Доказательство. **(a)** Рассмотрим следующее вероятностное пространство: $\Omega = \{a, b, c\}, \mathscr{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}, \mathbb{P} : \mathbb{P}(a) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{1}{2}$. В качестве T - возьмем следующее преобразование: $T(a) = b, T(b) = T(c) = a$. Ясно, что оно сохраняет меру($T^{-1}(\{a\}) = \{b, c\}, T^{-1}(\{b, c\}) = \{a\}$), но $T(\{a\}) = \{b\}$– не измеримо.

(b)Рассмотрим следующее вероятностное пространство и его преобразование: $\Omega = \{a, b\}, \mathscr{F} = 2^{\Omega}, \mathbb{P} : \mathbb{P}(a) = 1, \mathbb{P}(b) = 0, T : T(a) = T(b) = a$. Оно сохраняет меру, но $0 = \mathbb{P}(b) \neq \mathbb{P}(T^{-1}(b)) = \mathbb{P}(a) = 1$.

□

3. Эргодические теоремы

Задача 1. *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ – гауссовская стационарная последовательность (т.е. $\xi_i \backsim \mathscr{N}(0, \sigma_i^2)$) с $\mathbb{E}\xi_n = 0$ и ковариационной функцией $R(n) = \mathbb{E}\xi_{k+n}\xi_k$. Показать, что условие $R(n) \to 0$ является достаточным для того, чтобысохраняющее меру преобразование, соответствующее последовательности ξ, было перемешиванием (и, следовательно эргодическим).*

Доказательство. Зафиксируем $A_0, B_0 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\infty})$. Положим

$$A = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A_0\}, B = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in B_0\}, B_n = \{\omega : (\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) \in B_0\}$$

Нужно доказать, что

$$\mathbb{P}(A \cap B_n) \to \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ n \to \infty$$

Зафиксируем $\epsilon > 0$. Так как наша σ-алгебра попрождена всевозможными $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$ и открытые множества A_0^*, B_0^* такие, что $\mathbb{P}(A \triangle A^*) < \epsilon$ и $\mathbb{P}(B \triangle B^*) < \epsilon$ где $A^* = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A_0^*\}$ и $B^* = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in B_0^*\}$. Из стационарности для множеств $B_n = \{\omega : (\xi_n, \xi_{n+m-1}, \dots) \in B_0^*\}$ получаем $\mathbb{P}(B_n \triangle B_n^*) < \epsilon$.
Пусть P – распределение вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ и Q_n – распределение вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m-1})$. Докажем, что из того, что $R(n) \to 0$ следует $Q_n \xrightarrow{w} P$, $n \to \infty$. Рассмотрим характеристические функции этих распределени. Пусть $\phi_n(\bar{t})$ – характеристическая функция распределения Q_n и $\phi(\bar{t})$ – характеристическая функция распределения P. Докажем, что $\phi_n \to \phi, n \to \infty$. Это равносильно слабой сходимости.

$$\phi_n(\bar{t}) = exp\{-\frac{1}{2}(K_n\bar{t}, t)\},\ \phi(\bar{t}) = exp\{-\frac{1}{2}(K\bar{t}, t)\},\ \text{где,}$$

$$K_m = (\mathbb{E}\xi_i\xi_j)_{i,j \in \{1, \dots m\}},$$

$$K = \begin{pmatrix} K_m & 0 \\ 0 & K_m \end{pmatrix}, K_n = \begin{pmatrix} K_m & A_n \\ A_n^T & C_n \end{pmatrix},$$

$$A_n = (\mathbb{E}\xi_i\xi_{n+j-1})_{i,j \in \{1, \dots m\}}, C_n = (\mathbb{E}\xi_{n+i-1}\xi_{n+j-1})_{i,j \in \{1, \dots m\}}$$

Из стационарности следует, что $(\xi_1, \dots \xi_m)$ и $(\xi_n, \dots \xi_{n+m-1})$ одинаково распределены и следовательно $C_n = K$. Из $R(n) \to 0$ следует, что A_n поэлементно стремится к нулевой матрице. Тогда $\phi_n \to \phi, n \to \infty$ и значит есть слабая сходимость распределений.

Пусть $\mathbb{P}_n$ – мера соответствующая распределению Q_n и $\mathbb{S}$ – мера соответствующая распределению P. Применим теорему 1 со стр. 431 [1]:

$$\overline{\lim}\,\mathbb{P}_n(Z) \le \mathbb{S}(Z), \text{где } Z \text{ – замкнутое множество}$$

$$\underline{\lim}\,\mathbb{P}_n(C) \ge \mathbb{S}(C), \text{где } C \text{ – открытое множество.}$$

Теперь мы можем доказать свойство перемешивания. Распишем $\mathbb{P}(A \cap B_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n) \le \lim_{n\to+\infty}[\mathbb{P}(A^* \cap B_n^*)] + \epsilon =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}[\mathbb{P}(\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in A^*, (\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m-1}) \in B_0^*)] + \epsilon =$$

$$= \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \mathbb{P}_n(A^* \times B_0^*) \le \mathbb{S}(A^* \times B_0^*) = \mathbb{P}(A^*)\mathbb{P}(B^*) \le (\mathbb{P}(A) + \epsilon)(\mathbb{P}(B) + \epsilon)$$

Аналогично доказывается обратная оценка, но с приближением не открытыми множествами, а замкнутыми. □

Задача 2. *Показать, что для всякой последовательности $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин, соответствующее сохраняющее меру преобразование является перемешиванием.*

Доказательство. Зафиксируем $A_0, B_0 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Положим

$$A = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A_0\}, B = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in B_0\}, B_n = \{\omega : (\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) \in B_0\}$$

Нужно доказать, что

$$\mathbb{P}(A \cap B_n) \to \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ n \to \infty$$

Зафиксируем $\epsilon > 0$. Так как наша σ-алгебра попрождена всевозможными $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$ и множество A_0^* такое, что $\mathbb{P}(A \triangle A^*) < \epsilon$ где $A^* = \{\omega : (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A_0^*\}$. Тогда из независимости, при $n > m$ имеем:

$$\mathbb{P}(A^* \cap B_n) = \mathbb{P}(A^*)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A^*)\mathbb{P}(B)$$

Последнее равенство выполняется ввиду стационарности.
Оценим следующее выражение при $n > m$

$$|\mathbb{P}(A \cap B_n) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B_n)| \le |\mathbb{P}(A \cap B_n) - \mathbb{P}(A^* \cap B_n)| + |\mathbb{P}(A^* \cap B_n) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B_n)| \le$$

$$\le \epsilon + |\mathbb{P}(A^*)\mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B_n)| = \epsilon + |(\mathbb{P}(A^*) - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B_n)| \le \epsilon + \epsilon|\mathbb{P}(B_n)| \le 2\epsilon$$

Значит свойство перемешивания выполняется. □

Задача 3. *Показать, что стационарная последовательность ξ эргодична в том и только том случае, когда для любого $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k), k = 1, 2, \dots$*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(\xi_i, \dots, \xi_{i+k-1}) \to \mathbb{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\},\ \mathbb{P}\text{-п.н.}\ (*)$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть Q – распределение последовательности $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, и определим T следующим образом:

$$T : (x_1, x_2, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$$

Тогда T – эргодическое преобразование, и применив эргодическую теорему Биркгофа-Хинчина к $\eta(x_1, x_2, \dots) = \mathbb{1}_B(x_1, x_2, \dots, x_k)$, получаем требуемое.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Докажем, что T – эргодическое. Для этого достаточно доказать, что любое множество из σ-алгебры $\mathscr{J}$ инварантных множеств имеет меру 0 или 1.
Перепишем условие $(*)$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_A(T^i\omega)\to\mathbb{Q}(A),\ \mathbb{P}\text{-п.н.},\text{ где } A=\{\omega:(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in B\}, B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^k).$$

Тогда по теоереме Биркгофа-Хинчина $\mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_A|\mathscr{J})=\mathbb{E}_Q\mathbb{1}_A$, для $A=\{\omega:(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in B\}, B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$. Так как такие A - порождают $\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$, то это равенство верно для любого множества из $\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$. В частности это верно для множеств из $\mathscr{J}$. Тогда для $A\in\mathscr{J}$:

$$\mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_A|\mathscr{J})=\mathbb{1}_A=\mathbb{E}_Q\mathbb{1}_A$$

Значит любое множество из $\mathscr{J}$ имеет меру либо 0, либо 1. $\square$

Задача 4. *Пусть на $(\Omega,\mathscr{P})$ заданы две вероятностные меры $\mathbb{P}$ и Q, относительно которых сохраняющее меру преобразование T является эргодическим. Доказать, что тогда или $\mathbb{P}=Q$ или $\mathbb{P}\perp Q$ $(\exists A\in\mathscr{F}:\mathbb{P}(A)=1,Q(A)=0)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}\neq Q$. Воспользуемся конструкцией из 8 задачи 1 параграфа. Пусть $\mathscr{P}$– выпуклое множество мер, относительно которых T является сохраняющим меру преобразованием. Тогда $\mathbb{P}$ и Q – крайние точки этого множества. Рассмотрим $\lambda=\frac{1}{2}\mathbb{P}+\frac{1}{2}Q$. Так как это не крайняя точка $\mathscr{F}$, то λ не эргодическое преобразование, а значит существует инвариантное множество A положительной, но не полной меры. Также, относительно эргодических мер A должно иметь меру 0 или 1. Значит $\mathbb{P}(A)=1,Q(A)=0$ или $\mathbb{P}(A)=0,Q(A)=1$. Во втором случае, в качестве искомого множества полной меры подойдет A^c.

$\square$

Задача 5. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование на $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ и $\mathscr{A}$ – алгебра подмножеств Ω такая, что $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$. Пусть*

$$\mathbb{1}_A^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_A(T^i\omega)$$

Доказать, что преобразование T эргодично в том и только том случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:
(i) *$\mathbb{1}_A^{(n)}\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{P}(A)$ для любого $A\in\mathscr{A}$.*
(ii) *$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap T^{-i}B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ для всех $A,B\in\mathscr{A}$.*
(iii) *$\mathbb{1}_A^{(n)}\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{P}(A)$ для любого $A\in\mathscr{F}$.*

Доказательство. **(iii)** Следует из 3 задачи
(i) Сведем к предыдущему случаю. Достаточно доказать, что для любого $A\in\mathscr{F}$

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)}-\mathbb{P}(A)|>\epsilon\}\to 0,\ n\to\infty.$$

Зафиксируем $A\in\mathscr{F}$, $\delta>0$. Так как $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$, то найдется такое $A^*\in\mathscr{A}$, такое что $\mathbb{P}(A\bigtriangleup A^*)<\frac{\delta}{3}$. Оценим $\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{A^*}|>\frac{\epsilon}{3}\}$:

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{A^*}|>\frac{\epsilon}{3}\}\le\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{A^*}|>0\}\le\frac{\delta}{3}$$

Значит и для средних оценка выполняется:

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{1}_{A^*}^{(n)}| >\leq \frac{\delta}{3}$$

Заметим, что по неравенству треугольника:

$$|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{P}(A)| \leq |\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{1}_{A^*}^{(n)}| + |\mathbb{1}_{A^*}^{(n)} - \mathbb{P}(A^*)| + |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A^*)|$$

Теперь мы можем оценить $\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{P}(A)| > \epsilon\}$:

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{P}(A)| > \epsilon\} \leq \mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{1}_{A^*}^{(n)}| > \frac{\epsilon}{3}\} + \mathbb{P}\{|\mathbb{1}_{A^*}^{(n)} - \mathbb{P}(A^*)| > \frac{\epsilon}{3}\} + \mathbb{P}\{|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A^*)| > \frac{\epsilon}{3}\} \leq$$

$$\leq \frac{2\delta}{3} + \mathbb{P}\{|\mathbb{1}_{A^*}^{(n)} - \mathbb{P}(A^*)| > \frac{\epsilon}{3}\}$$

Последнее слагаемое стремится к 0 при $n \to$. Получаем пценку для любого $\delta > 0$:

$$0 < \overline{\lim_n} \mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{P}(A)| > \epsilon\} < \frac{2\delta}{3}$$

Значит $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\mathbb{1}_A^{(n)} - \mathbb{P}(A)| > \epsilon\} = 0$.
(ii) Сведем задачу к следствию со стр. 606 [2]. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и найдем такие $A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathscr{A}$ такие, что $\mathbb{P}(A \triangle A_\epsilon) < \epsilon$ и $\mathbb{P}(B \triangle B_\epsilon) < \epsilon$. Воспользуемся оценкой, полученной в 5 задаче 2-го параграфа:

$$\mathbb{P}(A_\epsilon \cap T^{-n} B_\epsilon) - 4\epsilon \leq \mathbb{P}(A \cap T^{-n} B) \leq \mathbb{P}(A_\epsilon \cap T^{-n} B_\epsilon) + 4\epsilon$$

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_\epsilon \cap T^{-i} B_\epsilon) - 4\epsilon \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap T^{-i} B) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_\epsilon \cap T^{-i} B_\epsilon) + 4\epsilon$$

$$\mathbb{P}(A_\epsilon)\mathbb{P}(B_\epsilon) - 4\epsilon \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap T^{-i} B) \leq \mathbb{P}(A_\epsilon)\mathbb{P}(B_\epsilon) + 4\epsilon$$

$$(\mathbb{P}(A) - \epsilon)(\mathbb{P}(B) - \epsilon) - 4\epsilon \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap T^{-i} B) \leq (\mathbb{P}(A) + \epsilon)(\mathbb{P}(B) + \epsilon) + 4\epsilon$$

Аналогичная оценка верна и для нижнего предела. Тогда в силу произвольности ϵ получаем требуемое. □

Задача 6. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Доказать, что это преобразование эргодично относительном меры $\mathbb{P}$ тогда и только тогда, когда на $(\Omega, \mathscr{F})$ не существует меры $Q \neq \mathbb{P}$ такой, что относительно $\mathbb{P}$ Q имеет плотность и преобразование T сохраняет меру Q.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $Q(A) = \int_A f(z) d\mathbb{P}$. Тогда, как было показано в 8 задаче 1-го параграфа $f(z) = f(Tz)$ и следовательно $f(z)$ является инваринтной случайной величиной отмносительно меры $\mathbb{P}$. Тогда $\mathbb{P}$ – не эргодично. Получили противоречие. □

Задача 7. *Доказать, что преобразование бернуллиевского сдвига(стр.610 [2]) является перемешиванием*

Доказательство. Частный случай задачи 2 3-го параграфа. □

Задача 8. *Пусть T – сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Будем обозначать $T^{-1}\mathscr{F} = \{T^{-1}A : A \in \mathscr{F}\}$ и говорить, что σ - алгебра*

$$\mathscr{F}_{-\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}\mathscr{F}$$

является тривиальной($\mathbb{P}$ - тривиальной), если каждое множество из $\mathscr{F}_{-\infty}$ имеет меру 0 или 1. Доказать, что такое преобразование T – обладает свойством эргодичности и перемешивания.

Доказательство. Сразу будем доказывать, свойство перемешивания. Эргодичность отсюда будет следовать.
Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть X, Y_n – ограниченные случайные величины, такие что:*
(i) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_n) = 0$
(ii) $\mathbb{E}X^2 \le 1$, $\mathbb{E}Y_n^2 \le 1$
(iii) *Y_n – измерима относительно σ - алгебры $T^{-n}\mathscr{F}$*
Тогда $\mathbb{E}XY_n \to 0$, $n \to \infty$

Покажем, что из леммы следует утверждение. Рассмотрим $X := \mathbb{1}_A - \mathbb{P}(A)$ и $Y_n := \mathbb{1}_{T^{-n}B} - \mathbb{P}(T^{-n}B) = \mathbb{1}_{T^{-n}B} - \mathbb{P}(B)$ (последнее равенство верно. так как T сохраняет меру). Очевидно, что обе случайные величины подходят под условие леммы. Тогда

$$\mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}\{\mathbb{1}_{A\cap T^{-n}B} - \mathbb{1}_A\mathbb{P}(B) - \mathbb{1}_{T^{-n}B}\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\} = \mathbb{E}XY_n$$

Тогда $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A \cap T^{-n}B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, т.е. T – преобразование перемешивания.
Докажем лемму:
Заметим, что σ - алгебры $\mathscr{F}_n = T^{-n}\mathscr{F}$ – образуют убывающую фильтрацию. Тогда по теореме Леви $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) \to \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{-\infty})$ почти наверное. Так как $\mathscr{F}_{-\infty}$ – тривиальная σ-алгебра, то $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}X = 0$. Значит $\mathbb{E}(XY_n|\mathscr{F}_n) = Y_n\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) \to 0$ почти наверное, так как Y_n – ограничена и $\mathscr{F}_n$-измерима. Далее, если X и Y_n ограниченные случайные величины, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY_n|\mathscr{F}_n)) = \mathbb{E}XY_n \to 0$$

Значит лемма доказана. □

Задача 9. *Пусть $1 \le p < \infty$ и T – сохраняющее меру преобразование на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Пусть случайная величина $\xi(\omega) \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.*
Доказать справедливость следующей эргодической теоремы фон Неймана в $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$: существует случайная величина $\eta(\omega)$ такая, что

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega) - \eta(\omega)\right|^p \to 0, n \to \infty.$$

Доказательство. Положим за $f(\omega)$ ограниченную функция, и такую, что $\mathbb{E}|\xi - f|^p < \epsilon$. Тогда пусть $\eta(\omega) = \mathbb{E}(f|\mathscr{J})$. Имеем оценку

$$\left(\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega) - \eta(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi(T^k\omega) - f(T^k\omega))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega) - \eta(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Первое слагаемое не больше ϵ. По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина среднее f сходится по вероятности к η, и последнее слагаемое стремится к 0, так как под знаком матожидания стоят ограниченные, сходящиеся почти-всюду величины и мы можем применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Значит есть сходимость в среднем в L^p. □

Задача 10. *Теорема Бореля о нормальности утверждает, что доля единиц и нулей в двоичном разложении чисел $\omega \in [0, 1)$ сходится почти наверное (относительно меры Лебега) к $\frac{1}{2}$. Доказать этот результат, рассматривая преобразование $T : [0, 1) \to [0, 1)$, определенное формулой*

$$T(\omega) = 2\omega\,(mod\,1),$$

и применяя эргодическую теорему 1 (стр. 604 [2]*).*

Доказательство. Пусть $\omega = 0, \omega_1\omega_2 \ldots$. Рассмотрим случайную величину $\xi(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega_1=1\}}(\omega)$. $\xi(\omega)$ устроена слудующим образом:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [\frac{1}{2}, 1)] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значит $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$. Распишем $\xi(T^n\omega)$

$$\xi(T^n\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega_1=1\}}(2^n\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega_{n-1}=1\}}(\omega)$$

Если T эргодическое, тогда по эргодической теореме Биркгофа-Хинчина:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{\omega_k=1\}}(\omega) = \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$$

Докажем теперь, что T – эргодическое преобразование. Согласно замечанию к теореме 1 стр. 602 [2], эргодичность равносильна тому, что любая инвариантная случайная величина $\xi(\omega) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ – константа. Пусть $\xi(\omega)$ – инвариатная случайная величина, такая, что $\mathbb{E}\xi(\omega)^2 < \infty$. Рассмотрим её ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi n\omega}$. Тогда, применяя результат задачи 1 §1 имеем:

$$c_n = \mathbb{E}\xi(\omega)e^{-2\pi n\omega} = \mathbb{E}\xi(T\omega)e^{-2\pi nT\omega} = \mathbb{E}\xi(T\omega)e^{-2\pi(2n)\omega} = \mathbb{E}\xi(\omega)e^{-2\pi n\omega} = c_{2n}$$

Так как $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 < \infty$, то $c_n = 0, n \neq 0, \xi(\omega) = c_0$, то есть, T – эргодическое преобразование по замечанию выше. □

Задача 11. *Пусть $\omega \in [0, 1)$. Рассмотрим преобразование $T : [0, 1) \to [0, 1)$, определенное формулой*

$$T(\omega) = \begin{cases} 0, & \textit{если } \omega = 0 \\ \{\frac{1}{\omega}\}, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

где x – дробная часть числа x.
Показать, что преобразование T сохраняетмеру $P = P(.)$ Гаусса на [0,1), определяемую формулой

$$P(A) = \frac{1}{ln2}\int_A \frac{dx}{1+x},\ A \in \mathscr{B}([0,1)).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что мера сохраняется для интервалов вида $[0, x]$, так как $P([a, b]) = P([0, b]) - P([0, a])$. Рассмотрим прообраз $[0, x]$:

$$0 \le \{\frac{1}{\omega}\} \le x$$

$$k \le \frac{1}{\omega} \le k + x, \text{Для какого-то } k \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{1}{k+x} \le \omega \le \frac{1}{k}$$

Значит $T^{-1}(0, x) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k+x}, \frac{1}{k}]$. Докажем, что эти интервалы дизъюнктны:
Пусть два интервала пересеклись. Тогда:

$$\frac{1}{m+x} < \frac{1}{k+x} < \frac{1}{m}$$

Для каких-то $k, m \in \mathbb{N}$. Из первого неравенства заключаем, что $k < m$, то есть $k+1 \le m$. Из второго: $m < k + x$, что невозможно. Значит пересечение дизъюнктно.
Посчитаем $P(0, x)$:

$$P(0, x) = \frac{1}{ln2}\int_{(0,x)} \frac{dx}{1+x} = \frac{ln(1+x)}{ln2}$$

Посчитаем меру прообраза:

$$P(T^{-1}(0, x)) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k+x}, \frac{1}{k}]) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ln2}\int_{\frac{1}{k+x}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{ln2}\sum_{k=1}^{\infty} ln(1+\frac{1}{k}) - ln(1+\frac{1}{k+x}) =$$

$$= \frac{1}{ln2}\sum_{k=1}^{\infty} ln\left(\frac{(k+1)(k+x)}{k(k+x+1)}\right) = \frac{1}{ln2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{(k+1)(k+x)}{k(k+x+1)}\right) = \frac{1}{ln2}\lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{(n+1)(1+x)}{n+x+1}\right) =$$

$$= \frac{ln(1+x)}{ln2} = P(0, x)$$

Значит преобразование T действительно сохраняет меру Гаусса. □

Задача 12. *Дать пример, показывающий, что теорема Пуанкаре о возвратности неверна, вообще говоря, в случае измеримых пространств с бесконечной мерой.*

Доказательство. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}^1, \lambda_1)$ и $T(x) = x + 1$. Ясно, что T сохраняет меру, но для $A = [0, 1]$ не верно, что $T^n(\omega) \in A$ для бесконечно многих n и почти каждой точки $\omega \in A$. □

Список литературы

[1] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, из-во МЦНМО, Москва, 2021, **Том 1**.
[2] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, из-во МЦНМО, Москва, 2021, **Том 2** , 596 - 612.
[3] Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов, *Лекции по вещественному анализу*, изд-во "БХВ-Петербург Санкт-Петербург (2011).