Эргодические свойства процессов кристаллизации

Югай Александр Германович

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук

2025

Содержание

1. Введение
2. Процесс кристаллизации
3. Эргодичность
4. Абсолютная регулярность
5. Результаты

Содержание

1 Введение

2 Процесс кристаллизации

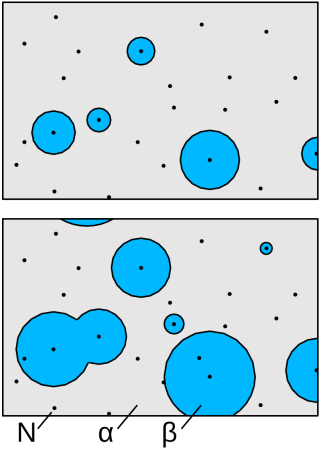
3 Эргодичность

4 Абсолютная регулярность

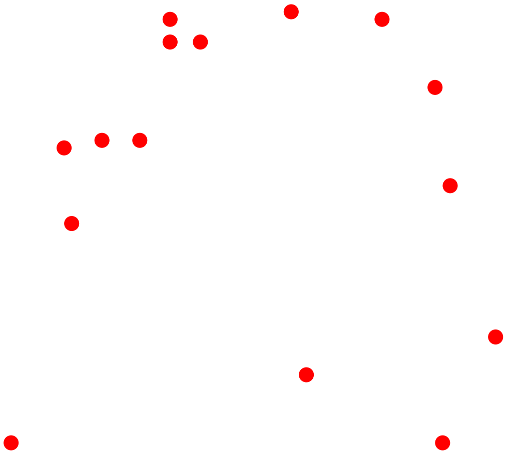
5 Результаты

Введение

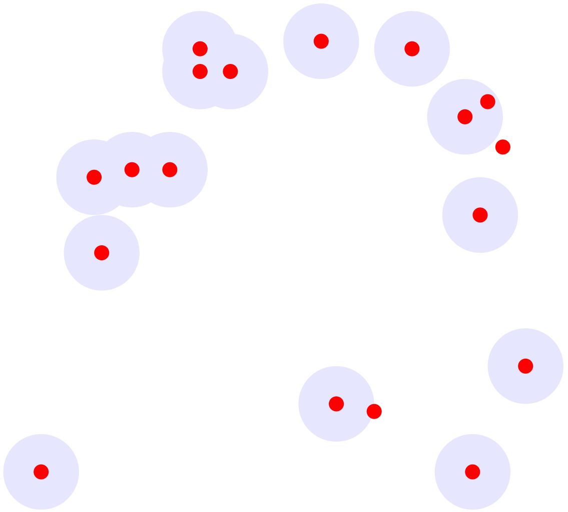
- Процесс кристаллизации: случайное появление центров (x_g, t_g) в пространстве-времени.
- Из каждого центра растет кристалл с некоторой скоростью.



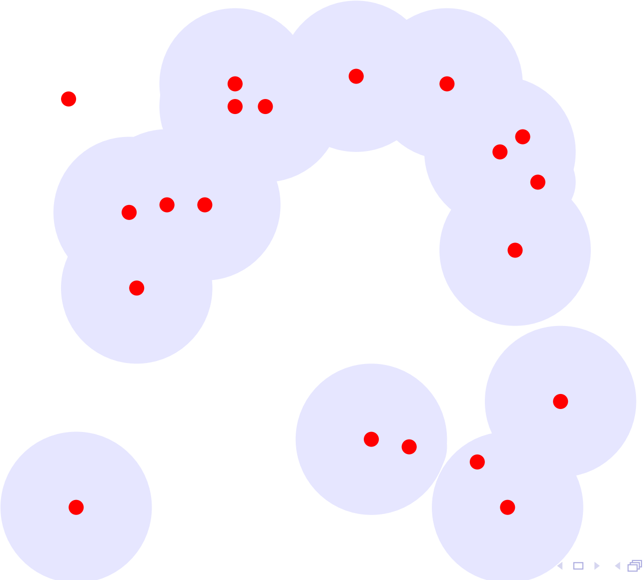
Процесс кристаллизации



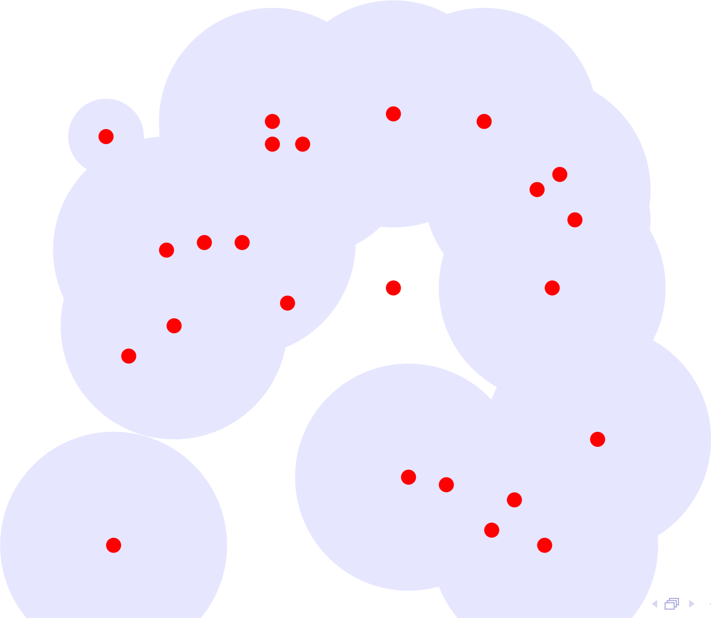
Процесс кристаллизации



Процесс кристаллизации



Процесс кристаллизации



Содержание

1. Введение
2. Процесс кристаллизации
3. Эргодичность
4. Абсолютная регулярность
5. Результаты

Точечные процессы Пуассона

Определение

Пусть E–метрическое пространство.
Положим $\mathbb{K} := \{\Sigma \subset E : |\Sigma| \le \mathbb{N}, \forall x \in E, r > 0 : |B_r(x) \cap \Sigma| < \mathbb{N}\}$.
Случайная величина $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbb{K}$ называется **точечным процессом**.

Точечные процессы Пуассона

Определение

Пусть E–метрическое пространство.
Положим $\mathbb{K} := \{\Sigma \subset E : |\Sigma| \leq \mathbb{N}, \forall x \in E, r > 0 : |B_r(x) \cap \Sigma| < \mathbb{N}\}$.
Случайная величина $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbb{K}$ называется **точечным процессом**.

- Для $A \subset E$ обозначим $\mathcal{N}(A) := |\mathcal{N} \cap A|$.

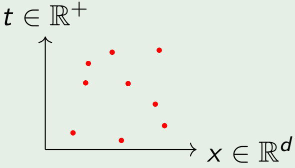
Точечные процессы Пуассона

Определение

Пусть E–метрическое пространство.
Положим $\mathbb{K} := \{\Sigma \subset E : |\Sigma| \leq \mathbb{N}, \forall x \in E, r > 0 : |B_r(x) \cap \Sigma| < \mathbb{N}\}$.
Случайная величина $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbb{K}$ называется **точечным процессом**.

- Для $A \subset E$ обозначим $\mathcal{N}(A) := |\mathcal{N} \cap A|$.

Пример: $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$



Точечные процессы Пуассона

Определение

Случайный точечный процесс $\mathcal{N}$ на пространстве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ называется **пуассоновским**, если:

- Для дизъюнктных $A, B \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ с.в. $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)$ – независимы;
- Число точек в области A имеет распределение Пуассона:

$$\mathbb{P}\{N(A) = k\} = \frac{(\Lambda(A))^k}{k!} e^{-\Lambda(A)},$$

где Λ – **мера интенсивности** процесса.

Точечные процессы Пуассона

Определение

Случайный точечный процесс $\mathcal{N}$ на пространстве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ называется **пуассоновским**, если:

- Для дизъюнктных $A, B \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ с.в. $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)$ – независимы;
- Число точек в области A имеет распределение Пуассона:

$$\mathbb{P}\{N(A) = k\} = \frac{(\Lambda(A))^k}{k!} e^{-\Lambda(A)},$$

где Λ – **мера интенсивности** процесса.

- Длее будем считать:

$$\Lambda(dx \times dt) = \lambda^d(dx) \times m(dt).$$

Процесс кристаллизации

- Имеем центры кристаллизации $\{(x_g, t_g)\}_{g\in\mathcal{N}}$ в пространстве-времени.

Процесс кристаллизации

- Имеем центры кристаллизации $\{(x_g, t_g)\}_{g \in \mathcal{N}}$ в пространстве-времени.
- Мы связываем с каждым центром кристаллизации g функцию A_g:

$$\begin{array}{rccl} A_g: & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^+, \\ & x & \mapsto & A_g(x), \end{array}$$

где $A_g(x)$ это время, когда кристалл, относящийся к центру кристаллизации g достигает точки x.

Процесс кристаллизации

- Имеем центры кристаллизации $\{(x_g, t_g)\}_{g\in\mathcal{N}}$ в пространстве-времени.
- Мы связываем с каждым центром кристаллизации g функцию A_g:

$$\begin{array}{rccl} A_g : & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^+, \\ & x & \mapsto & A_g(x), \end{array}$$

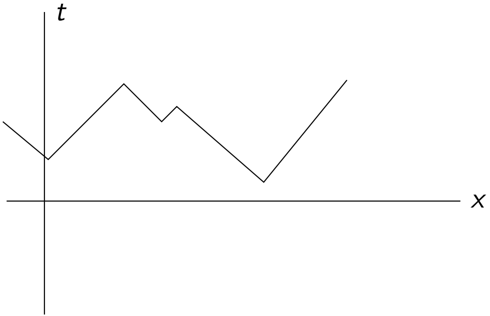
  где $A_g(x)$ это время, когда кристалл, относящийся к центру кристаллизации g достигает точки x.
- Далее будем считать, что кристаллы растут со скоростью 1, т.е. в нашем случае: $A_g(x) = t_g + |x - x_g|$.

Процесс кристаллизации

- **Процесс кристаллизации**:

$$\xi(x) = \inf_{g \in \mathcal{N}} A_g(x).$$

$\xi(x)$ – время, когда точка x закристаллизовалась.



Содержание

1 Введение

2 Процесс кристаллизации

3 Эргодичность

4 Абсолютная регулярность

5 Результаты

Эргодичность

Определение

- Пусть $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$–случайное поле. Тогда мы говорим, что $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ – **стационарно**, если $\forall h \forall x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$:

$$\mathbb{P}\{(Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_m)) \in B\} =$$

$$= \mathbb{P}\{(Y(x_1+h), Y(x_2+h), \dots, Y(x_m+h)) \in B\},$$

  где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

- Пусть $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$–стационарное случайное поле, где $Y(0) \sim (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность компактов в $\mathbb{R}^d$. Тогда случайное поле $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ – **эргодично**, тогда и только тогда, когда $\forall f \in L^1(\Omega, \mu)$:

$$\frac{1}{\lambda^d(V_n)} \int_{V_n} f(Y(x))d\lambda^d(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mathbb{E}f(Y(0)).$$

Эргодичность

Определение

Пусть $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$–стационарное случайное поле.
Положим для $C_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{R}^d$, $(x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\overline{C^h_{m,x_1,x_2,\dots x_m}} := \{\omega : (Y(x_1 + h), Y(x_2 + h), \dots, Y(x_m + h)) \in C_m\}.$$

Тогда случайное поле $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ – **перемешивающее**, тогда и только тогда, когда
$\forall A_m, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$; $\forall (x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m, (y_1, y_2, \dots y_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A^0_{m,x_1,x_2,\dots x_m}} \cap \overline{B^h_{m,y_1,y_2,\dots y_m}}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A^0_{m,x_1,x_2,\dots x_m}}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B^0_{m,y_1,y_2,\dots y_m}}\right).$$

Эргодичность

Определение

Пусть $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$–стационарное случайное поле.
Положим для $C_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{R}^d$, $(x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\overline{C^h_{m,x_1,x_2,\dots x_m}} := \{\omega : (Y(x_1+h), Y(x_2+h), \dots, Y(x_m+h)) \in C_m\}.$$

Тогда случайное поле $\{Y(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ – **перемешивающее**, тогда и только тогда, когда
$\forall A_m, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$; $\forall (x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m, (y_1, y_2, \dots y_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A^0_{m,x_1,x_2,\dots x_m}} \cap \overline{B^h_{m,y_1,y_2,\dots y_m}}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A^0_{m,x_1,x_2,\dots x_m}}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B^0_{m,y_1,y_2,\dots y_m}}\right).$$

- Из условия перемешивания следует эргодичность.

Эргодичность

- Стационарность процесса $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ следует из однородности меры интенсивности процесса рождения $\mathcal{N}$ относительно сдвигов в $\mathbb{R}^d$.

Эргодичность

- Стационарность процесса $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ следует из однородности меры интенсивности процесса рождения $\mathcal{N}$ относительно сдвигов в $\mathbb{R}^d$.
- Более того, процесс $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ является перемешивающим.

- Стационарность процесса $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ следует из однородности меры интенсивности процесса рождения $\mathcal{N}$ относительно сдвигов в $\mathbb{R}^d$.
- Более того, процесс $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ является перемешивающим.
- **Каким еще усилениям условия эргодичности удовлетворяет $\xi(x)$?**

Содержание

1 Введение

2 Процесс кристаллизации

3 Эргодичность

4 Абсолютная регулярность

5 Результаты

Абсолютная регулярность

- В работе *Yu. Davydov, A. Illig, Ergodic properties of crystallization processes* было предложено изучать **коэффициент абсолютной регулярности** процесса $\xi(x)$.

Абсолютная регулярность

- В работе *Yu. Davydov, A. Illig, Ergodic properties of crystallization processes* было предложено изучать **коэффициент абсолютной регулярности** процесса $\xi(x)$.
- Коэффициент абсолютной регулярности процесса $\xi(x)$:

$$\beta(T_1, T_2) = \|\mathcal{P}_{T_1 \cup T_2} - \mathcal{P}_{T_1} \times \mathcal{P}_{T_2}\|_{var},$$

где $\mathcal{P}_T$ – это распределение $\xi_{|T}$ и $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^d$.

Абсолютная регулярность

- В работе *Yu. Davydov, A. Illig, Ergodic properties of crystallization processes* было предложено изучать **коэффициент абсолютной регулярности** процесса $\xi(x)$.
- Коэффициент абсолютной регулярности процесса $\xi(x)$:

$$\beta(T_1, T_2) = \|\mathcal{P}_{T_1 \cup T_2} - \mathcal{P}_{T_1} \times \mathcal{P}_{T_2}\|_{var},$$

где $\mathcal{P}_T$ – это распределение $\xi_{|T}$ и $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^d$.
- Если $\mathcal{F}_T = \sigma\{\xi(x)|x \in T\}$ и

$$\alpha(T_1, T_2) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{T_1} \\ B \in \mathcal{F}_{T_2}}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|, \tag{1}$$

то

$$\alpha(T_1, T_2) \leq \frac{1}{2}\beta(T_1, T_2).$$

Абсолютная регулярность

Примеры

- $d = 1$

$$T_1 = (-\infty, 0], \; T_2 = [r, +\infty).$$

Абсолютная регулярность

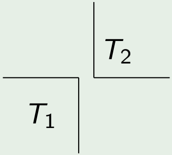
Примеры

- $d = 1$

$$T_1 = (-\infty, 0],\ T_2 = [r, +\infty).$$

- $d = 2$

$$T_1 = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0],\ T_2 = [r, +\infty) \times [0, +\infty).$$



Абсолютная регулярность

- Пусть $dist(T_1, T_2) = r$. Обозначим $\beta(r) = \beta(T_1, T_2)$.

Абсолютная регулярность

- Пусть $dist(T_1, T_2) = r$. Обозначим $\beta(r) = \beta(T_1, T_2)$.
- Из условия $\beta(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ следует перемешивание и эргодичность.

Абсолютная регулярность

- Пусть $dist(T_1, T_2) = r$. Обозначим $\beta(r) = \beta(T_1, T_2)$.
- Из условия $\beta(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ следует перемешивание и эргодичность.
- Хорошие оценки $\beta(r)$ дают асимптотическую нормальность оценкок $\mathbb{E}f(\xi(x))$.

Случай $d = 1$

- В той же статье было показано, что в случае $d = 1$ $\forall \rho \in \mathbb{R}$

$$\left| e^{-2F\left(\frac{r}{\rho}\right)} - e^{-F\left(\frac{(1+\rho)}{\rho} r\right)} \right| \leq \beta(r) \leq 8e^{-F\left(\frac{r}{2}\right)},$$

где $F(t) = \Lambda(\{g \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \,|\, A_g(0) \leq t\})$.

Случай $d = 1$

- В той же статье было показано, что в случае $d = 1$ $\forall \rho \in \mathbb{R}$
$$\left| e^{-2F\left(\frac{r}{\rho}\right)} - e^{-F\left(\frac{(1+\rho)}{\rho}r\right)} \right| \le \beta(r) \le 8e^{-F(\frac{r}{2})},$$
где $F(t) = \Lambda(\{g \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid A_g(0) \le t\})$.
- Нижняя оценка получается выбором в (1) конкретных A и B.

Случай $d = 1$

- В той же статье было показано, что в случае $d = 1$ $\forall \rho \in \mathbb{R}$

$$\left| e^{-2F\left(\frac{r}{\rho}\right)} - e^{-F\left(\frac{(1+\rho)}{\rho} r\right)} \right| \le \beta(r) \le 8e^{-F\left(\frac{r}{2}\right)},$$

  где $F(t) = \Lambda(\{g \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mid A_g(0) \le t\})$.
- Нижняя оценка получается выбором в (1) конкретных A и B.

Лемма

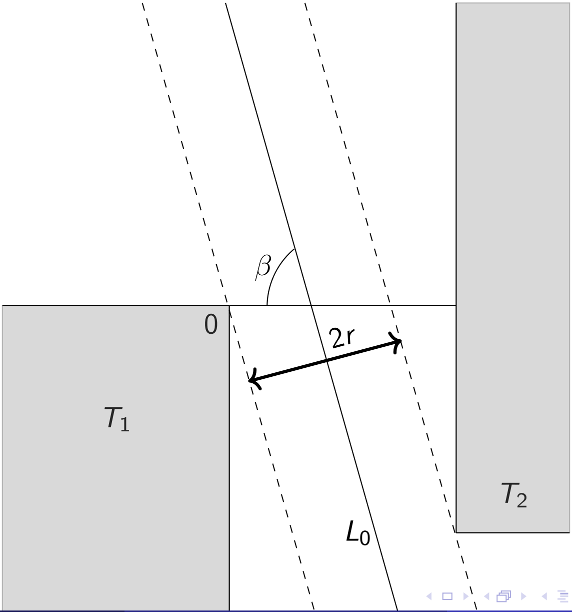
Пусть $(\xi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ – случайное поле и T_1, T_2 два дизъюнктных подмножества $\mathbb{R}^d$. Если существуют случайные поля $(\eta_1(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ и $(\eta_2(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ и $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ такие что:

- η_1 и η_2 независимы;
- $\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_i(x), \forall x \in T_i\} \ge 1 - \delta_i$ для $i = 1, 2$.

Тогда

$$\beta(T_1, T_2) \le 8\,(\delta_1 + \delta_2).$$

Случай $d \geq 2$



Случай $d \geq 2$

- В статье была получена оценка:

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} \mathrm{e}^{-F\left(\frac{2rk}{9d}\right)}.$$

Случай $d \geq 2$

- В статье была получена оценка:

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} \mathrm{e}^{-F(\frac{2rk}{9d})}.$$

- При $d = 2$:

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathrm{e}^{-F(\frac{rk}{9})}.$$

Содержание

1. Введение
2. Процесс кристаллизации
3. Эргодичность
4. Абсолютная регулярность
5. Результаты

Цели исследования

- Улучшить нижнюю границу в случае $d = 1$.

Цели исследования

- Улучшить нижнюю границу в случае $d = 1$.
- Обобщить верхнюю оценку на другие области T_1 и T_2 в случае $d = 2$.

Цели исследования

- Улучшить нижнюю границу в случае $d = 1$.
- Обобщить верхнюю оценку на другие области T_1 и T_2 в случае $d = 2$.
- Интересный случай, где по аналогии с $d = 1$, T_1 и T_2 представляют собой полупространства.

Случай $d = 1$

- Удалось улучшить нижнюю границу:

Теорема 1

Если $T_1 = (-\infty, 0]$ и $T_2 = [r, +\infty)$, то

$$\beta(r) \geq 2e^{-F(\frac{r}{2})}.$$

Случай $d = 1$

- Удалось улучшить нижнюю границу:

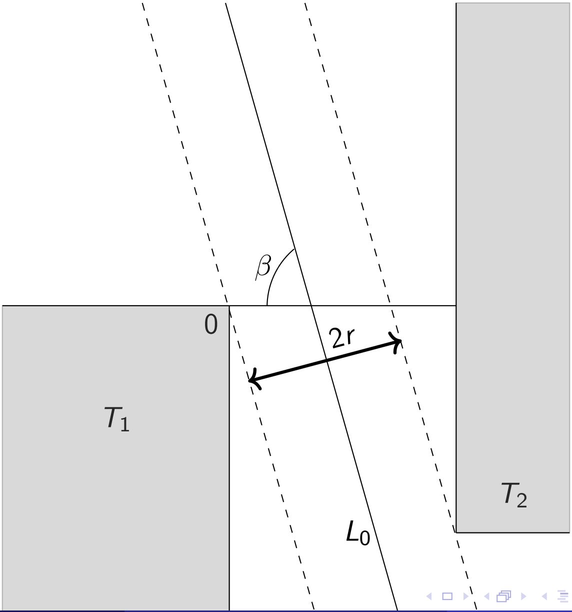
Теорема 1

Если $T_1 = (-\infty, 0]$ и $T_2 = [r, +\infty)$, то

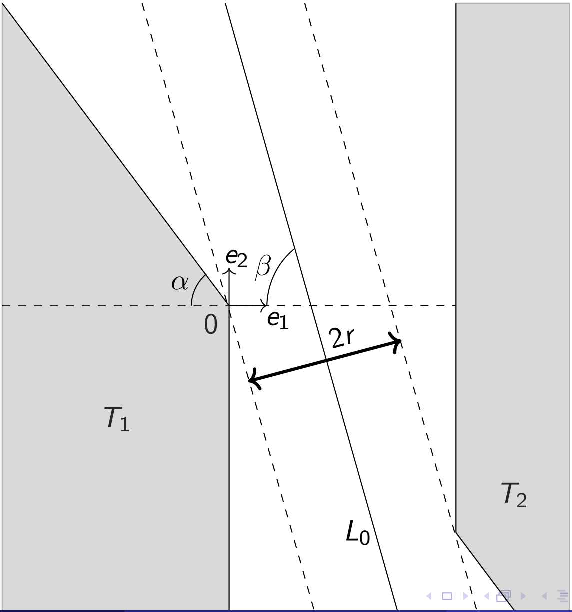
$$\beta(r) \geq 2e^{-F(\frac{r}{2})}.$$

- Сводится к выбору в (1) конкретных A и B.

Случай $d = 2$



Случай $d = 2$



Случай $d = 2$

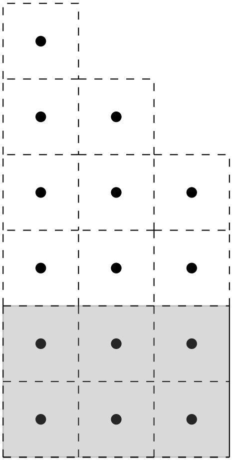
Теорема 2

Пусть $T_1 = \{e \in \mathbf{R}^2 | \measuredangle(e, -e_2) < \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ и T_2 – симметрично отраженная T_1, относительно L_0, область. Если $\alpha < \frac{\pi}{4} \leq \beta$ и $tg\beta = \frac{a}{b} > 1$, где $a, b \in \mathbb{N}$ и $\frac{a}{b} > tg\alpha$ то, верна оценка:

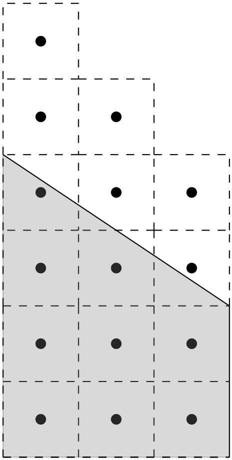
$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + \frac{k}{2a} + \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{k}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1 + tg\alpha + \frac{k}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} \right) \mathrm{e}^{-F(C(k+1))},$$

где $C = \frac{r}{9\sqrt{2(a^2+b^2)}}$.

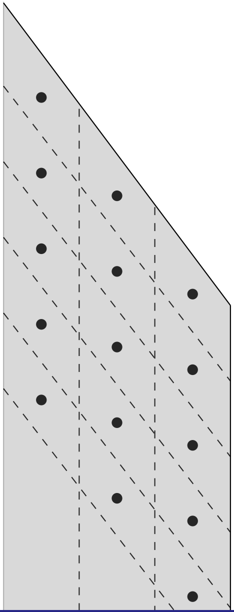
Случай $d = 2$



Случай $d = 2$



Случай $d = 2$



Случай $d = 2$

Теорема 3

Пусть $T_1 = \{e \in \mathbf{R}^2 | \measuredangle(e, -e_2) < \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ и T_2 – симметрично отраженная T_1, относительно L_0, область. Если $\alpha < \beta$ и $tg\beta = \frac{a}{b}$, $tg\alpha = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ то, верна оценка:

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathrm{e}^{-F(Ck)},$$

где $C = \frac{r}{9\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$.

Спасибо за внимание!