Санкт-Петербургский государственный университет

ЮГАЙ Александр Германович

Выпускная квалификационная работа
Эргодические свойства процессов кристаллизации

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: СВ.5000.2021 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор Факультета Математики
и компьютерных наук,
доктор физико-математических наук,
Давыдов Юрий Александрович

Рецензент: Ведущий научный сотрудник,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института имени
В. А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук,
Бородин Андрей Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Краткий обзор

В работе исследуются оценки коэффициента абсолютной регулярности для процессов кристаллизации, введённых Колмогоровым [2]. Улучшена нижняя оценка [1], а также обобщены верхние оценки для плоского случая.

1. Введение

Процесс кристаллизации, который мы рассматриваем здесь, имеет дело с центрами кристаллизации $g = (x_g, t_g)$, которые появляются в случайные моменты времени t_g в случайном месте x_g. Процесс рождения $\mathcal{N}$ - это точечный процесс Пуассона на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ с мерой интенсивности, обозначаемой Λ. Как только появляются центры кристаллизации, кристаллы начинают расти, если их местоположение еще не занято другим кристаллом, и когда два кристалла встречаются, рост прекращается в точках соприкосновения. Существует множество способов описать процесс роста кристаллов. Первый подход заключается в рассмотрении случайных множеств (называемых состояниями кристаллизации), которые соответствуют доле пространства, занимаемого кристаллами в данный момент времени. В этом случае кристаллизация изучается с помощью теории точечных процессов. Другой способ описать рост кристалла - вывести выражение для скорости роста из характерных свойств локальной среды в пространстве состояний. Можно рассмотреть для зародыша $g \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ и точки $x \in \mathbb{R}^d$ время $A_g(x)$, при котором x достигается свободным кристаллом, связанным с зародышем g. Затем процесс кристаллизации характеризуется случайным полем ξ, задающим для местоположения $x \in \mathbb{R}^d$ время кристаллизации

$$\xi(x) = \inf_{g \in \mathcal{N}} A_g(x).$$

Далее мы будем изучать процессы кристализации через поле ξ. Будем также предполагать, что процесс рождения однороден по координате. Это условие выражается в равенстве для меры интенсивности пуассоновского процесса

$$\Lambda = \lambda^d \times m, \tag{1}$$

где λ^d – мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, а m - мера на $\mathbb{R}^+$ конечная на ограниченных борелевских множествах. Этот процесс стационарен, и далее мы будем оценивать коэффицент равномерной регулярности этого процесса.

2. Предположения о процессах рождения и роста

2.1. **Процесс рождения.** Центры кристаллизации рождаются в соответствии с пуассоновским точечным процессом на $E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, обозначаемом $\mathcal{N}$. То есть центры кристаллизации – это случайные точки $g = (x_g, t_g)$ в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, где x_g– местоположение в пространстве $\mathbb{R}^d$, и t_g это время рождения на временных осях $\mathbb{R}^+$. Поскольку мера Лебега инвариантна относительно трансляции $\mathbb{R}^d$, то $\mathcal{N}$ однороден в пространстве, и достаточно рассмотреть множества вокруг начала координат. Таким образом, для любого времени t мы вводим так называемый причинный конус:

$$K_t = \{g \in E \mid A_g(0) \le t\},$$

который состоит из всех возможных центров кристаллизации, которые могут захватить источник до истечения времени t. Мера $\Lambda(K_t)$ причинного конуса K_t обозначается за $F(t)$.

2.2. **Процесс роста.** Мы говорим, что кристалл является свободным кристаллом, если он происходит из центра кристаллизации, родившегося в месте, которое на момент его рождения еще не было занято другими кристаллами. Мы связываем с каждым центром кристаллизации g в E функцию A_g:

$$\begin{array}{rccc} A_g : & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^+, \\ & x & \mapsto & A_g(x), \end{array}$$

где $A_g(x)$ это время, когда кристалл, относящийся к центру кристаллизации g и считающийся свободным, достигает точки x. Как следствие, свободный кристалл в момент времени t определяется набором:

$$C_g(t) = \{x \mid A_g(x) \leq t\}.$$

Далее мы сделаем несколько предположений относительно семейства свободных кристаллов $\{C_g,\ g \in \mathcal{N}\}$ и семейства функций $\{A_g,\ g \in \mathcal{N}\}$. При необходимости мы также уточним связь между допущениями и ростом кристаллов.

Мы предполагаем, что для любого центра кристаллизации $g = (x_g, t_g)$ и $t > t_g$ выполнено:

$$C_g(t) = x_g \oplus (t - t_g)B, \tag{2}$$

где B это единичный шар в $\mathbb{R}^d$, и $\oplus$ обозначает суммирование по Минковскому множеств A и B:

$$A \oplus B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Легко видеть, что, причинный конус K_t имеет следующую структуру: его горизонтальный участок $K_t(s)$ на уровне s, $0 \leq s \leq t$, представляет собой множество $C(0, ts)$, симметричное множеству $C(0, ts)$. Следовательно

$$F(t) = \Lambda(K_t) = \lambda^d(K) \int_0^t (t-s)^d m(ds).$$

3. Абсолютная регулярность

Для подмножества T из $\mathbb{R}^d$, мы обозначаем через $\mathcal{F}_T$ σ-алгебру порожденную случайными величинами $\xi(x)$ для всех x в T. Теперь рассмотрим два непересекающихся множества T_1 и T_2 в $\mathbb{R}^d$ и определим коэффициент абсолютной регулярности для σ-алгебр $\mathcal{F}_{T_1}$ и $\mathcal{F}_{T_2}$ как

$$\beta(T_1, T_2) = \|\mathcal{P}_{T_1 \cup T_2} - \mathcal{P}_{T_1} \times \mathcal{P}_{T_2}\|_{var}, \tag{3}$$

где $\|\mu\|_{var}$– норма полной вариации знакопеременной меры μ и $\mathcal{P}_T$ – распределение $\xi_{|T}$ как элемента $\mathcal{C}(T)$ непрерывных вещественно-значных функций на T. Отметим, что из $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, следует $\mathcal{C}(T_1 \cup T_2) = \mathcal{C}(T_1) \times \mathcal{C}(T_2)$.

Коэффициент сильного перемешивания определяется следующим образом

$$\alpha(T_1, T_2) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{T_1} \\ B \in \mathcal{F}_{T_2}}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|. \tag{4}$$

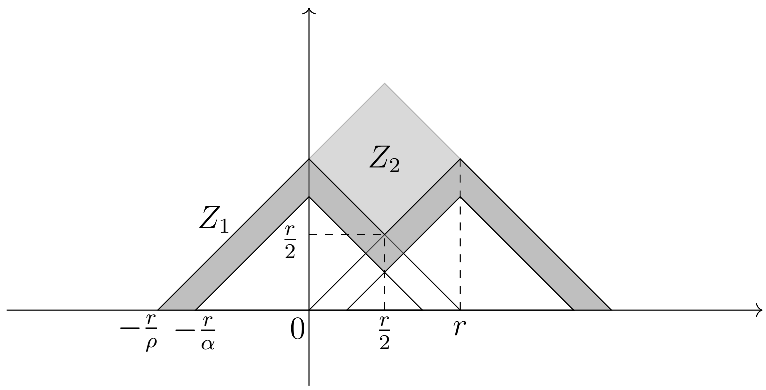

Рис. 1. Область для траекторий $\xi(x)$, при событии из $A \cap B$

Процесс ξ называется абсолютно регулярным (соответственно α-перемешиванием), если коэффициент абсолютной регулярности (соответственно коэффициент сильного перемешивания) стремится к нулю, когда расстояние между T_1 и T_2 стремится к бесконечности, причем T_1 и T_2 принадлежат определенному классу множеств.

Хорошо известно, что

$$\alpha(T_1, T_2) \leq \frac{1}{2}\beta(T_1, T_2). \tag{5}$$

Как следстьвие, абсолютная регулярность процесса ξ влечет α-перемешивание. В случае $d = 1$, обычно выбирают $T_1 = (-\infty, 0]$ и $T_2 = [r, +\infty)$. При $d \geq 2$ выбор более произволен, и возможные варианты рассматриваются далее и в [1].

4. Нижняя оценка для одномерного случая

В статье [1] для процесса кристализации ξ приводится оценка коэффициента сильной регулярности: $\forall \rho \in \mathbb{R}$

$$\left| e^{-2F\left(\frac{r}{\rho}\right)} - e^{-F\left(\frac{(1+\rho)}{\rho} r\right)} \right| \leq \beta(r) \leq 8e^{-F(\frac{r}{2})}.$$

Оказывается, верен следующий результат

Теорема 1. *Если $T_1 = (-\infty, 0]$ и $T_2 = [r, +\infty)$ и выполнены условия (1), (2), то*

$$\beta(r) \geq 2e^{-F(\frac{r}{2})}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим $A = \{\xi(0) \notin (a, b)\}$; $B = \{\xi(r) \notin (a, b)\}$. Из (4) и (5) верно, что

$$\beta(r) \geq 2\alpha(T_1, T_2) \geq 2|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|.$$

Так как ξ стационарный мы получаем, что

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{\xi(0) < a\} + \mathbf{P}\{\xi(r) > b\} = \mathbf{P}\{\xi(0) < a\} + \mathbf{P}\{\xi(0) > b\} = e^{-F(b)} + 1 - e^{-F(a)},$$

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \left(1 - \left(e^{-F(a)} - e^{-F(b)}\right)\right)^2 = 1 - 2\left(e^{-F(a)} - e^{-F(b)}\right) + \left(e^{-F(a)} - e^{-F(b)}\right)^2.$$

Зафиксируем $\rho < \alpha < 2$. Положим $a = \frac{r}{\alpha}$, $b = \frac{r}{\rho}$.

Для вычисления $\mathbf{P}(A \cap B)$, заметим, что искомая вероятность на рис.1, это вероятность того, что центры кристализации не попали в темно-серую область, которую обозначим как Z_1. Также за Z_2 для удобства обозначим светло-серую область. Тогда по формуле включений исключений:

$$\mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_1 \neq \emptyset) = \mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{(1+\rho)}{\rho}r\right) - \mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_2 \neq \emptyset) - 2\mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{r}{\alpha}\right) + \mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{r}{\alpha} - \frac{r}{2}\right) =$$

$$= 1 - e^{-F(\frac{(1+\rho)}{\rho}r)} - 2(1 - e^{-F(\frac{r}{\alpha})}) + 1 - e^{-F(\frac{r}{\alpha}-\frac{r}{2})} - \mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_2 \neq \emptyset).$$

Вероятность $\mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_2 \neq \emptyset)$ посчитаем аналогично по формуле включений-исключений:

$$\mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_2 \neq \emptyset) = \mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{(1+\rho)}{\rho}r\right) - 2\mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{r}{\rho}\right) + \mathbf{P}\left(\xi(0) < \frac{r}{2}\right) =$$

$$= 1 - e^{-F(\frac{(1+\rho)}{\rho}r)} - 2(1 - e^{-F(\frac{r}{\rho})}) + 1 - e^{-F(\frac{r}{2})}.$$

Суммируя, получаем:

$$\mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_1 \neq \emptyset) = 2e^{-F(\frac{r}{\alpha})} - e^{-F(\frac{r}{\alpha}-\frac{r}{2})} - 2e^{F(\frac{r}{\rho})} + e^{-F(\frac{r}{2})},$$

$$\mathbf{P}(A\cap B)) = \mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_1 = \emptyset) = 1 - \mathbf{P}(\mathcal{N}\cap Z_1 \neq \emptyset) = 1 - 2e^{-F(\frac{r}{\alpha})} + e^{-F(\frac{r}{\alpha}-\frac{r}{2})} + 2e^{F(\frac{r}{\rho})} - e^{-F(\frac{r}{2})}.$$

Теперь соберем все и оценим $\beta(r)$:

$$\beta(r) \geq 2|\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| =$$

$$= 2|2e^{-F(\frac{r}{\alpha})} - e^{-F(\frac{r}{\alpha}-\frac{r}{2})} - 2e^{F(\frac{r}{\rho})} + e^{-F(\frac{r}{2})} - 2\left(e^{-F(\frac{r}{\alpha})} - e^{-F(\frac{r}{\rho})}\right) + \left(e^{-F(\frac{r}{\alpha})} - e^{-F(\frac{r}{\rho})}\right)^2|.$$

Так как мы выбрали α и ρ произвольно, то устремим α к ρ и получим:

$$\beta(r) \geq 2|e^{-F(\frac{r}{2})} - e^{-F(\frac{r}{\rho}-\frac{r}{2})}|.$$

Теперь устремим ρ к 0. Тогда $F(\frac{r}{\rho}-\frac{r}{2}) \longrightarrow \infty$ и $e^{-F(\frac{r}{\rho}-\frac{r}{2})} \longrightarrow 0$, и мы получим оценку (6) из условия теоремы. □

5. Верхние оценки для плоского случая

Рассмотрим многомерный случай с $d=2$. Введем обозначения $e_1 = (0,1), e_2 = (1,0)$. Возьмём $T_1 = \{e \in \mathbf{R}^2 | \measuredangle(e, -e_2) < \alpha + \frac{\pi}{2}\}$. Обозначим, за l прямую, задаваемую направлением вектора e_1 и за m луч, который образует граница T_1 в положительной полуплоскости. Определим разделяющую гиперповерхность L_1, как прямую, проходящую через 0 и пересекающую l под углом $\beta > \alpha$. Симметрично введем L_2. Тогда расстояние $dist(L_1, L_2) = 2r$. L_0 выберем, как прямую, параллельную L_1 и $dist(L_1, L_0) = r$.
Возьмём T_2 – симметрично T_1, относительно L_0. Также, за E_1 и E_2 обозначим полупространства определяемые L_0 и содержащие T_1 и T_2 соответственно. Все обозначения иллюстрированы на рис.2.

Отметим, что для случая $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}$ в работе [1] получена следующая верхняя оценка на коэффициент абсолютной регулярности для произвольной размерности $d \geq 2$:

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8\sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} \mathrm{e}^{-F(\frac{2rk}{9d})}. \tag{7}$$

Оказывается, верен более общий результат:

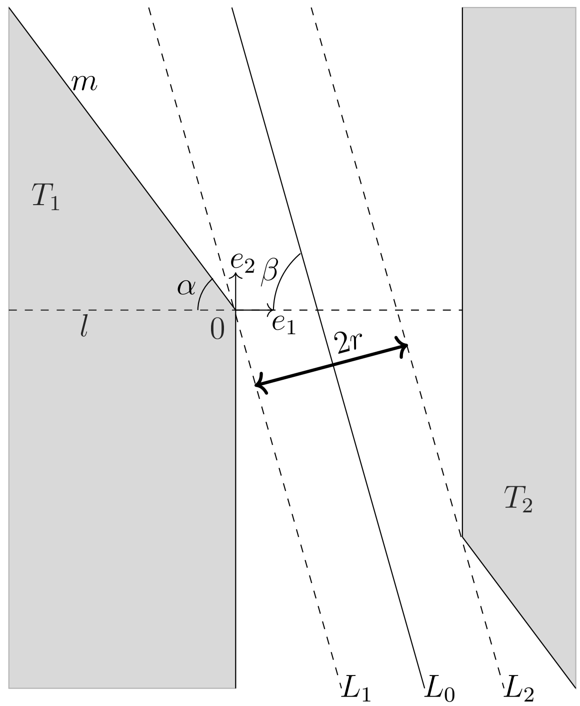

Рис. 2. Области T_1 и T_2

Теорема 2. *Пусть* $T_1 = \{e \in \mathbf{R}^2 | \measuredangle(e, -e_2) < \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ *и* T_2 *– симметрично отраженная* T_1*, относительно* L_0*, область. Если* $\alpha < \frac{\pi}{4} \leq \beta$ *и* $tg\beta = \frac{a}{b} > 1$*, где* $a, b \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{a}{b} > tg\alpha$ *то, верна оценка:*

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + \frac{k}{2a} + \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{k}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1 + tg\alpha + \frac{k}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} \right) e^{-F(C(k+1))}, \tag{8}$$

где $C = \frac{r}{9\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

Также, нам удалось рассмотреть случай $\alpha > \frac{\pi}{4}$, если дополнительно предположить $tg\alpha \in \mathbb{Q}$.

Теорема 3. *Пусть* $T_1 = \{e \in \mathbf{R}^2 | \measuredangle(e, -e_2) < \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ *и* T_2 *– симметрично отраженная* T_1*, относительно* L_0*, область. Если* $\alpha < \beta$ *и* $tg\beta = \frac{a}{b}$*,* $tg\alpha = \frac{c}{d}$*, где* $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ *то, верна оценка:*

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-F(Ck)}, \tag{9}$$

где $C = \frac{r}{9\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$.

Применим теоремы 2 и 3 к случаю $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}$. Мы ожидаем получить, что-то похожее на оценку (7).

Во первых $tg\beta = \frac{1}{1}$, следовательно $a = b = 1$. Тогда применив теорему 2 и 3 получим

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + \frac{k}{2} + \frac{(1-k)^+}{2} + \frac{1+k}{2} \right) \mathrm{e}^{-F(\frac{r(k+1)}{18})} \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)\, \mathrm{e}^{-F(\frac{r(k+1)}{18})},$$

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathrm{e}^{-F(\frac{r(k+1)}{18\sqrt{2}})},$$

Прежде чем доказывать теорему, мы приведём оценку, для двух типичных случаев, которые представляют практический интерес [1].

Пример 1: Если $F(t) \geq (d+\delta) lnt - ln\gamma$, где $\delta, \gamma > 0$, мы получаем $e^{F(t)} \leq \gamma t^{-(2+\delta)}$ и сумма (8) оценится как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + \frac{k}{2a} + \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{k}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1 + tg\alpha + \frac{k}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} \right) \mathrm{e}^{-F(C(k+1))} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 3\,(k+1)\, \mathrm{e}^{-F(C(k+1))} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 3\gamma C^{(2+\delta)}\,(k+1)^{-(1+\delta)} = \gamma' C^{-(2+\delta)},$$

где

$$\gamma' = 3\gamma \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(1+\delta)}.$$

Сумма (9) оценится, как

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mathrm{e}^{-F(Ck)} \leq \gamma' C^{-(2+\delta)},$$

где

$$\gamma' = \gamma \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(1+\delta)}.$$

Пример 2: Если $F(t) \geq \gamma t^{\delta} - c$, где $\delta, \gamma, c > 0$, то $e^{F(t)} \leq c_1 e^{-\gamma t^{\delta}}$, где $c_1 = e^{c}$. Сумма (8) оценится, как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + \frac{k}{2a} + \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{k}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1 + tg\alpha + \frac{k}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} \right) \mathrm{e}^{-F(C(k+1))} \leq c_2 e^{-\gamma C^{\delta}}$$

где

$$c_2 = \sum_{k=0}^{\infty} 3\,(k+1)\, c_1 e^{-\gamma C^{\delta}\left((k+1)^{\delta} - 1\right)}.$$

Для (9) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mathrm{e}^{-F(Ck)} \leq c_2 e^{\gamma C^{\delta}},$$

где

$$c_2 = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} k e^{\gamma C^{\delta}(k^{\delta} - 1)}.$$

Для доказательства теорем нам понадобятся леммы, доказанные в [1]. Введем обозначения:

$$\eta_r^1(x) = \inf_{\substack{g \in \mathcal{N} \\ x_g \in E_1}} A_g(x), \tag{10}$$

$$\eta_r^2(x) = \inf_{\substack{g \in \mathcal{N} \\ x_g \in E_2}} A_g(x), \tag{11}$$

$$\xi_R(x) = \inf_{\substack{g \in \mathcal{N} \\ |x_g| \leq R}} A_g(x). \tag{12}$$

Лемма 1. *При $d = 2$, для всех $r > 0$ выполнено,*

$$\mathbb{P}(\xi(x) = \xi_{3r}(x), |x| \leq r) \geq 1 - e^{-F(r)},$$

где ξ_{3R} определено в (12).

Лемма 2. *Пусть $(\eta(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ – случайное поле и T_1, T_2 два дизъюнктных подмножества $\mathbb{R}^d$. Если существуют случайные поля $(\eta_1(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ и $(\eta_2(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ и $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ такие что:*

- *η_1 и η_2 независимы*
- *$\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_i(x), \forall\, x \in T_i\} \geq 1 - \delta_i$ для $i = 1, 2$.*

Тогда

$$\beta(T_1, T_2) \leq 8\,(\delta_1 + \delta_2).$$

6. Доказательство теоремы 2

Чтобы получить верхнюю оценку для коэффициента абсолютной регулярности $\beta(T_1, T_2)$, мы аппроксимируем ограничения ξ на T_1 и T_2 двумя независимыми случайными полями и применяем лемму 2.

Лемма 3. *В предположениях Теоремы 2, для всех $r > 0$,*

$$\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_r^1(x),\ x \in T_1\} \geq 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left(3 + \frac{m}{2a} + \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1 + tg\alpha + \frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} \right) e^{-F(C(m+1))},$$

с η_r^1 определенным в (10), $C = \frac{r}{9\sqrt{2(a^2+b^2)}}$.

Доказательство. Введем обозначение $G = \frac{r}{3}$. Покроем T_1 квадратами

$$A_{\overline{k}} = \left[\sqrt{2}G\,(k_1 - 1)_i\, \sqrt{2}Gk_1\right] \times \left[\sqrt{2}G\,(k_2 - 1)\,; \sqrt{2}Gk_2\right],$$

где $\overline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{M} = (-\mathbb{N})^2 \cup \{(-\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \,|\, \frac{|k_2 - 1|}{|k_1 - 1|} < tg\alpha\}$. В покрытие мы берем такие квадраты, что их левый нижний угол лежит в T_1(рис.3).
Теперь преобразуем покрытие $A_{\overline{k}}$ в покрытие $C_{\overline{k}}$:

$$C_{\overline{k}} = \begin{cases} A_{\overline{k}}; A_{\overline{k}} \subset T_1 \\ A_{\overline{k}} \cap T_1; \text{иначе} \end{cases}$$

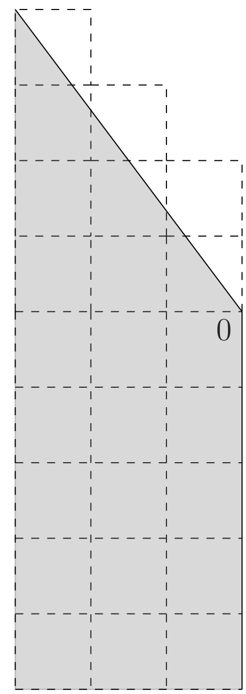

Рис. 3. Покрытие T_1 квадратами

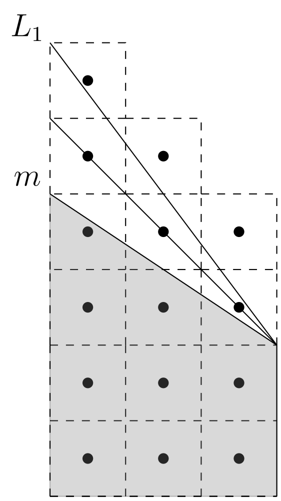

Рис. 4. Центры $A_{\overline{k}}$

Из построения следует, что $T_1 = \bigcup_{\overline{k}} C_{\overline{k}}$ и $C_{\overline{k}} \subset A_{\overline{k}}$.

Центр каждого квадрата $A_{\overline{k}}$ находится в точке $x_{\overline{k}} = \left(\frac{G}{\sqrt{2}}(2k_i - 1)\right)_{i=1,2}$, а диаметр равен $2G$. Из условия $\alpha < \frac{\pi}{4} \leq \beta$ следует, что все $x_{\overline{k}}$ лежат под прямой L_1(рис.4).

Обозначим за p вероятность $\mathbb{P}(\xi(x)=\eta_r(x),\ x\in T_1)$ и заметим, что

$$p=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\overline{k}\in(\mathbb{M})} B_{\overline{k}}\Big), \tag{13}$$

где

$$B_{\overline{k}}=\{(\xi(x)=\eta_r(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}.$$

Обозначим за $B(x,t)$ шар в $\mathbb{R}^2$ с центром в $x\in\mathbb{R}^2$ и радиусом $t>0$. Из леммы 1, мы получаем, что для $t>0$ что

$$\mathbb{P}(\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3t)}(x),\ |x-x_{\overline{k}}|\le t)\ge 1-\mathrm{e}^{-F(t)},$$

где

$$\xi_{B(x_{\overline{k}},3a)}(x)=\inf_{\substack{g\in\mathcal{N}\\ |x_g-x_{\overline{k}}|\le 3a}} A_g(x).$$

Положим $\rho=G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}$, где $s_{\overline{k}}$ расстояние между $x_{\overline{k}}$ и прямой L_1 равное

$$s_{\overline{k}}=|<x_{\overline{k}},e>|=\frac{G}{\sqrt{2}}|<(2k_1-1,2k_2-1),(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})>|=$$

$$=\frac{G}{\sqrt{2a^2+2b^2}}|a(2k_1-1)+b(2k_2-1)|,$$

где $e=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ – единичная нормаль к L_1.

Рассмотрим включения, $C_{\overline{k}}\subset A_{\overline{k}}\subset B(x_{\overline{k}},\rho)$. Отсюда следует, что

$$\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ |x-x_{\overline{k}}|\le\rho\}\subset\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ x\in A_{\overline{k}}\}\subset$$

$$\subset\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}.$$

Более того, $B(x_{\overline{k}},3\rho)$ содержится в полупространстве E_1. Следовательно,

$$\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}\subset\{\xi(x)=\eta^1_r(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}.$$

Обозначив за $p_{\overline{k}}$ вероятность $\mathbb{P}(B_{\overline{k}})$, мы в итоге получаем

$$p_k\ge 1-\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}. \tag{14}$$

С другой стороны, из (13) следует что

$$p=1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\overline{k}\in\mathbb{M}} B^c_{\overline{k}}\Big).$$

Из (14), мы заключаем

$$p\ge 1-\sum_{\overline{k}\in\mathbb{M}}\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}. \tag{15}$$

Теперь мы будем оценивать сумму из (13) сверху:

$$\textstyle\sum_{\overline{k}\in\mathbb{M}}\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}=$$

$$=\ \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\#\{\overline{k}\in\mathbb{M},\ |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)|=m\}\,\mathrm{e}^{-F\left(G\left(1+\frac{1}{3\sqrt{2a^2+2b^2}}m\right)\right)}.$$

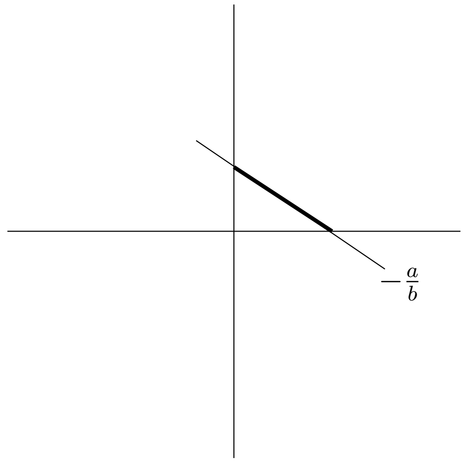

Рис. 5. Прямая $aX + bY = m$

Отдельно оценим коэффициент при экспоненте:

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\} = \#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0, |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\}+$$
$$+\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\} =$$
$$= \#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0, |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\}+$$
$$+\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1-1)+b(2k_2-1) = m\}+$$
$$+\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1-1)+b(2k_2-1) = -m\},$$

Оценим первое слагаемое:

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0, |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\}.$$

Введем обозначения $X = 1 - 2k_1, Y = 1 - 2k_2$. Тогда из условия $k_1 \leq 0, k_2 \leq 0$ следует $X \geq 0, Y \geq 0$, и уравнение переписывается в виде $aX+bY = m$. Это уравнение и ограничения $a, b, m \geq 0$ задает прямую с отрицательным коэффицентом наклона (рис.5). Заметим, что $a, b, X, Y \in \mathbb{Z}$ и решения исходной системы $a(2k_1-1)+b(2k_2-1) = m,\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0$,– это целые точки на этой прямой, лежащие в первой четверти, соответствующей $X, Y \geq 0$. Оценим их число:

$$Y = -\frac{a}{b}X + \frac{m}{b} \geq 0,$$
$$X \leq \frac{m}{a},$$
$$1 - 2k_1 \leq \frac{m}{a},$$
$$-k_1 \leq \frac{m}{2a} - \frac{1}{2} \leq \frac{m}{2a}.$$

Тогда

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0, |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\} \leq \frac{m}{2a} + 1. \tag{16}$$

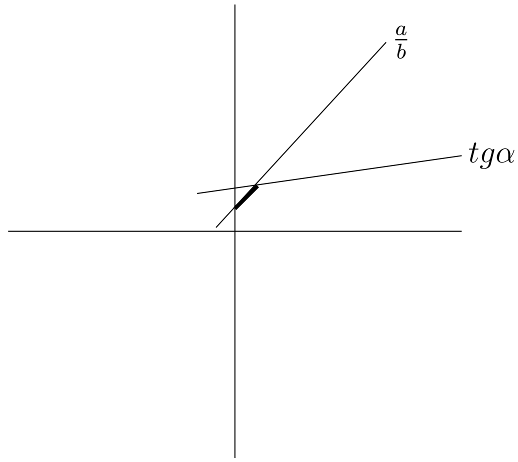

Рис. 6. $bY - aX = m$ и $Y = tg\alpha X + (tg\alpha + 1)$

Оценим второе слагаемое:

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1 - 1) + b(2k_2 - 1) = m\}.$$

Снова определим $X = 1 - 2k_1, Y = 2k_2 - 1$. Из ограничений опять следует, что $X, Y \geq 0$, и уравнение переписывается, как $bY - aX = m$. В отличие от прошлого случая, эта прямая имеет положительный коэффициент наклона. Однако, у нас есть условие $\frac{|k_2-1|}{|k_1-1|} < tg\alpha$, которое накладывает линейные условия на X и Y:

$$|k_2 - 1| < tg\alpha |k_1 - 1|,$$

$$|2k_2 - 2| < tg\alpha |2k_1 - 2|,$$

$$|2k_2 - 1| - 1 < tg\alpha |2k_1 - 1| + tg\alpha,$$

$$Y < tg\alpha X + (tg\alpha + 1).$$

Эти условия задают полуплоскость с границей $Y = tg\alpha X + (tg\alpha + 1)$. Так как $tg\alpha < \frac{a}{b}$, то эта прямая пересечет $bY - aX = m$, и решения системы задаются отрезком, лежащим ниже прямой с углом наклона α и осью абсцисс(рис.6).
Тогда с одной стороны,

$$0 \leq Y < tg\alpha X + (tg\alpha + 1).$$

С другой

$$Y = \frac{a}{b} X + \frac{m}{b}.$$

И значит, имеем

$$0 \leq \frac{a}{b} X + \frac{m}{b} < tg\alpha X + (tg\alpha + 1),$$

$$\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right) X < \left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+,$$

$$X < \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)},$$

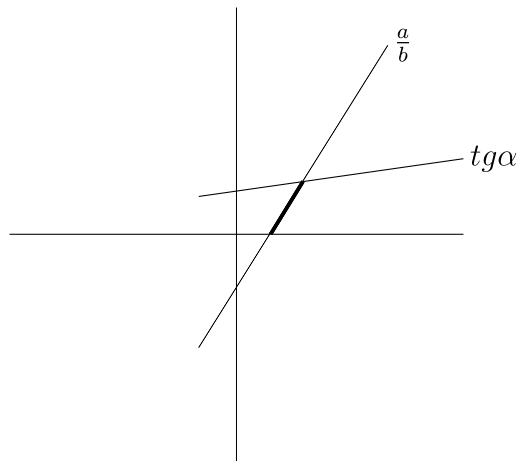

Рис. 7. $aX - bY = m$ и $Y = tg\alpha X + (tg\alpha + 1)$

$$1 - 2k_1 < \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)},$$

$$-k_1 < \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)}.$$

Заключаем

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1 - 1) + b(2k_2 - 1) = m\} \leq \frac{\left(1 + tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + 1. \tag{17}$$

Осталось оценить последнее слагаемое:

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1 - 1) + b(2k_2 - 1) = -m\}.$$

Опять $X = 1 - 2k_1 \geq 0, Y = 2k_2 - 1 \geq 0$. Уравнение прямой принимает вид $aX - bY = m$. Проведем аналогичное прошлому случаю вычисление:

$$0 \leq Y = \frac{a}{b}X - \frac{m}{b} < tg\alpha X + (tg\alpha + 1),$$

$$\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right) X < 1 + tg\alpha + \frac{m}{b},$$

$$X < \frac{1 + tg\alpha + \frac{m}{b}}{\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)},$$

$$1 - 2k_1 < \frac{1 + tg\alpha + \frac{m}{b}}{\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)},$$

$$-k_1 < \frac{1 + tg\alpha + \frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)}.$$

Значит,

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ k_1 \leq 0, k_2 > 0, a(2k_1 - 1) + b(2k_2 - 1) = -m\} \leq \frac{1 + tg\alpha + \frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + 1. \tag{18}$$

Итого, из (16), (17), (18) заключаем

$$\#\{\overline{k} \in \mathbb{M},\ |a(2k_1-1)+b(2k_2-1)| = m\} \leq 3 + \frac{m}{2a} + \frac{\left(1+tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1+tg\alpha+\frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b}-tg\alpha\right)}.$$

Теперь оценим $\mathrm{e}^{-F\left(G\left(1+\frac{1}{3\sqrt{2a^2+2b^2}}m\right)\right)}$. Положим $C = \frac{G}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда $G\left(1+\frac{1}{3\sqrt{2a^2+2b^2}}m\right) \geq C(m+1)$, и в силу того, что $F(t)$ – возрастающая функция, получаем оценку

$$\mathrm{e}^{-F\left(G\left(1+\frac{1}{3\sqrt{2a^2+2b^2}}m\right)\right)} \leq \mathrm{e}^{-F(C(m+1))}.$$

Отсюда следует оценка из леммы. □

Из однородности процесса кристаллизации и из Леммы 3 следует утверждение

Лемма 4. *В предположениях теоремы 2, для всех* $r>0$,

$$\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_r^2(x),\ x \in T_2\} \geq 1 - \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{m}{2a} + \frac{\left(1+tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1+tg\alpha+\frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b}-tg\alpha\right)}\right) e^{-F(C(m+1))}.$$

с η_r^2 *определенным в (11),* $C = \frac{r}{9\sqrt{2(a^2+b^2)}}$.

Теперь мы готовы доказать теорему 2.

Доказательство. (Теоремы 2) С помощью Леммы 3 и Леммы 4 мы можем воспользоваться леммой 2. Положим $\eta_1 = \eta_1^r, \eta_2 = \eta_2^r$,

$$\delta_1 = \delta_2 = 1 - \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{m}{2a} + \frac{\left(1+tg\alpha - \frac{m}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1+tg\alpha+\frac{m}{b}}{2\left(\frac{a}{b}-tg\alpha\right)}\right) \mathrm{e}^{-F(C(m+1))},$$

и T_1, T_2 как в утверждении теоремы. Тогда мы получаем, что

$$\beta(T_1,T_2) \leq 4(\delta_1+\delta_2) \leq 8\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2a} + \frac{\left(1+tg\alpha - \frac{k}{b}\right)^+}{2\left(\frac{a}{b} - tg\alpha\right)} + \frac{1+tg\alpha+\frac{k}{b}}{2\left(\frac{a}{b}-tg\alpha\right)}\right) \mathrm{e}^{-F(C(k+1))}.$$

□

7. Доказательство теоремы 3

Как и в доказательстве теоремы 2 докажем следующую лемму

Лемма 5. *В предположениях Теоремы 3, для всех* $r>0$,

$$\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_r^1(x),\ x \in T_1\} \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-F(Ck)},$$

с η_r^1 *определенным в (10),* $C = \frac{r}{9\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$.

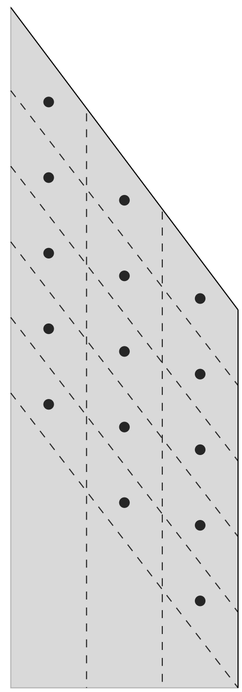

Рис. 8. Покрытие T_1 параллелепипедами

Доказательство. Вновь обозначим $G = \frac{r}{3}$. Теперь покроем T_1 параллелепипедами. Обозначим за $P(x,y,\gamma)$ – параллелепипед с левой верхней вершиной в точке x,с левой нижней вершиной в точке y и углом γ между сторонами. Теперь возьмем следующее покрытие

$$A_{\overline{k}} = \frac{2G}{\sqrt{2+2sin\alpha}} P((-\frac{dk_1}{\sqrt{d^2+c^2}}, \frac{ck_1-k_2}{\sqrt{d^2+c^2}}), (\frac{-d(k_1-1)}{\sqrt{d^2+c^2}}, \frac{c(k_1-1)-k_2+1}{\sqrt{d^2+c^2}}), \alpha+\frac{\pi}{2}),$$

где $\overline{k} = (k_1,k_2) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}$.(рис.8).
Центр каждого параллелепипеда $A_{\overline{k}}$ находится в точке

$$x_{\overline{k}} = \frac{2G}{\sqrt{2+2sin\alpha}} (\frac{-d}{2\sqrt{c^2+d^2}}(2k_1-1), \frac{c}{2\sqrt{c^2+d^2}}(2k_1-1) - \left(\frac{2k_2-1}{2\sqrt{c^2+d^2}}\right),$$

а диаметр равен $2G$. Как в доказательстве теоремы 2 обозначим за p вероятность $\mathbb{P}(\xi(x) = \eta_r(x),\ x \in T_1)$ и заметим, что

$$p = \mathbb{P}(\bigcap_{\overline{k}\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}} B_{\overline{k}}), \tag{19}$$

где

$$B_{\overline{k}} = \{(\xi(x) = \eta_r(x),\ x \in C_{\overline{k}}\}.$$

Обозначим за $B(x,t)$ шар в $\mathbb{R}^2$ с центром в $x \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $t > 0$. Из леммы 1, мы получаем, что для $t > 0$ что

$$\mathbb{P}(\xi(x) = \xi_{B(x_{\overline{k}},3t)}(x),\ |x - x_{\overline{k}}| \le t) \ge 1 - \mathrm{e}^{-F(t)},$$

где

$$\xi_{B(x_{\overline{k}},3a)}(x)=\inf_{\substack{g\in\mathcal{N}\\ |x_g-x_{\overline{k}}|\le 3a}} A_g(x).$$

Положим $\rho=G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}$, где $s_{\overline{k}}$ расстояние между $x_{\overline{k}}$ и прямой L_1 равное

$$s_{\overline{k}}=|<x_{\overline{k}},e>|=$$

$$=\frac{G}{\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}|<(-d(2k_1-1),c(2k_1-1)-(2k_2-1)),(a,b)>|=$$

$$=\frac{G}{\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}|-ad(2k_1-1)+bc(2k_1-1)-b(2k_2-1)|=$$

$$=\frac{G}{\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}|(bc-ad)(2k_1-1)-b(2k_2-1)|=$$

$$=\frac{G}{\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}\left((ad-bc)(2k_1-1)+b(2k_2-1)\right),$$

где $e=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ – единичная нормаль к L_1 и $ad-bc>0$ из условия теоремы 3. Рассмотрим включения, $A_{\overline{k}}\subset B(x_{\overline{k}},\rho)$. Отсюда следует, что

$$\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ |x-x_{\overline{k}}|\le\rho\}\subset\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ x\in A_{\overline{k}}\}.$$

Более того, $B(x_{\overline{k}},3\rho)$ содержится в полупространстве E_1 следовательно,

$$\{\xi(x)=\xi_{B(x_{\overline{k}},3\rho)}(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}\subset\{\xi(x)=\eta^1_r(x),\ x\in C_{\overline{k}}\}.$$

Обозначив за $p_{\overline{k}}$ вероятность $\mathbb{P}(B_{\overline{k}})$, мы в итоге получаем

$$p_k\ge 1-\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}. \tag{20}$$

С другой стороны, из (19) следует, что

$$p=1-\mathbb{P}(\bigcup_{\overline{k}\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}B^c_{\overline{k}}).$$

Из (20), мы заключаем

$$p\ge 1-\sum_{\overline{k}\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}. \tag{21}$$

Теперь мы будем оценивать сумму из (21) сверху:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{\overline{k}\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}\mathrm{e}^{-F\left(G+\frac{s_{\overline{k}}}{3}\right)}\\ =\ &\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\#\{\overline{k}\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N},\ (ad-bc)(2k_1-1)+b(2k_2-1)=m\}\,\mathrm{e}^{-F(G+Cm)}\le\end{aligned}$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)\mathrm{e}^{-F(G+Cm)}\le\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)\mathrm{e}^{-F(C(m+1))},$$

где $C=\frac{G}{3\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Так же как и в Теореме 2 из однородности процесса кристаллизации и из предыдущей леммы следует утверждение

Лемма 6. *В предположениях теоремы 2, для всех* $r > 0$,

$$\mathbb{P}\{\xi(x) = \eta_r^2(x),\ x \in T_2\} \geq 1 - \sum_{k=0}^{\infty}(m+1)e^{-F(C(m+1))}$$

с η_r^2 *определенным в (11),* $C = \frac{r}{9\sqrt{(2+2sin\alpha)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$.

Теперь мы готовы доказать теорему 3.

Доказательство. (Теоремы 3) Снова положим $\eta_1 = \eta_1^r, \eta_2 = \eta_2^r$,

$$\delta_1 = \delta_2 = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}(m+1)\mathrm{e}^{-F(C(m+1))}$$

и T_1, T_2 как в утверждении теоремы. Тогда из лемм 1, 5, 6 получаем что

$$\beta(T_1, T_2) \leq 4(\delta_1 + \delta_2) \leq 8\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)\mathrm{e}^{-F(C(m+1))}.$$

□

Список литературы

[1] Yu. Davydov, A. Illig, *Ergodic properties of crystallization processes*, Journal of Mathematical Sciences (2009), 163(4):375-381.

[2] A. N. Kolmogorov, Statistical theory of crystallization of metals, Bull. Acad. Sci. USSR Mat. Ser. 1 (1937) pp. 355-359.