

**Задачи по ДТВ**  
**Занятие 6, 18.04**

1. Пусть  $X$  случайная величина, такая, что  $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ . Предположим, что для некоторых чисел  $a, b$  с.в.  $aX, bX$  одинаково распределены. Верно ли, что  $a = b$ ?

Аналогичный вопрос при  $a, b > 0$ .

2. Для случайной величины  $X$ , принимающей целые значения, определим энтропию как  $H(X) = -\sum_n p_n \ln p_n$ , где  $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ . Доказать, что для независимых  $X, Y$  верно  $H(X + Y) \geq H(X) + H(Y)$ .

3. Значения дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  лежат в интервале  $[0, 1]$ , причём  $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Доказать, что распределения этих величин совпадают, т.е. для любого  $r \in [0, 1]$  верно  $\mathbb{P}(X = r) = \mathbb{P}(Y = r)$ .

4. Случайная величина  $X$  распределена по закону  $\mathcal{P}(a)$ . Найдите  $\mathbb{E}e^{bX}$  для всех  $b \in \mathbb{R}^1$ . Верна ли та же формула для  $b \in \mathbb{C}$ ?

5. Пусть  $n \geq 3$ . Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы и имеют одинаковые распределения

$$X_j = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Рассмотрим круговую сумму

$$S := X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_{n-1}X_n + X_nX_1.$$

Найти  $\mathbb{E}S^2$ .

6.  $n$  человек бросают кубик.  $X$  – количество неупорядоченных пар игроков, выбросивших одинаковую цифру. Найти  $\mathbb{E}X, \mathbb{D}X$ .
7. Шары с номерами от 1 до 8 разложены по 4 штуки по двум урнам. Случайным образом вынимают один шар из каждой урны. Известно, что математические ожидания номеров шаров совпадают, дисперсии тоже. Шары с какими номерами могут быть в первой урне?
8. В левой нижней клетке стандартной шахматной доски  $8 \times 8$  стоит ладья. Все другие клетки свободны. На каждом ходу выбирается равновероятно один из возможных 14 ходов ладьи и он выполняется. Найти математическое ожидание числа ходов до первого попадания в правую верхнюю клетку.