$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=?$$

Положим $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$$a^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$$

ВАЖНАЯ ФОРМУЛА: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)+$$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)$$

$$+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$$

Заметим, что: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=$

$=\sqrt[3]{2^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt[3]{4-5}=\sqrt[3]{-1}=-1$ $\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Тогда:

$$a^3=2+\sqrt{5}-3\overbrace{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)}^{a}+2-\sqrt{5}=$$

$=4-3a$

Итого: $a^3=4-3a$

$a^3+3a-4=0$

ЗАМЕТИМ ЧТО: (НА ПАРЕ Я ПОПРОБУЮ СКАЗАТЬ, КАК ТАКОЕ ПОЛУЧИТЬ, НО ЭТО <u>НЕ ОЧЕВИДНО</u>)

$$a^3+3a-4=(a-1)(a^2+a+4)=0$$

$$a^2+a+4=a^2+2\cdot\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}+\underbrace{4-\tfrac{1}{4}}_{3{,}75}=\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2+3{,}75>0$$

Значит $a=1$.