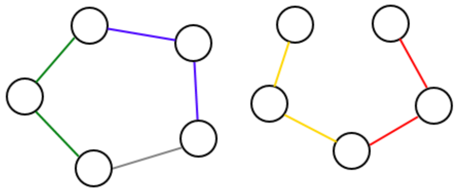
Анализ на задача Хотел

Накратко даден ни е неориентиран граф и трябва да групираме ребрата по двойки, така че всеки две ребра в двойка да имат общ край (връх) и броят двойки да е максимален.

Първа подзадача. Възможностите за пълно изчерпване са много, но най-простата от тях би била да наредим ребрата в пермутация и да видим колко съседни от тях можем да групираме. Взимаме максималния отговор от всички възможни пермутации.

Сложност - **O(N! × N).**

Втора подзадача. Допълнителното ограничение задава граф съставен само от пръчки и цикли. Лесно можем да съобразим, че за всяка свързана компонента можем да групираме най-много $\lfloor M_i/2 \rfloor$ ребра (където M_i е броят ребра в съответната свързана компонента). Ограниченията тук бяха намалени, за да може квадратното решение на задачата да взима повече точки.



Сложност - **O(N + M).**

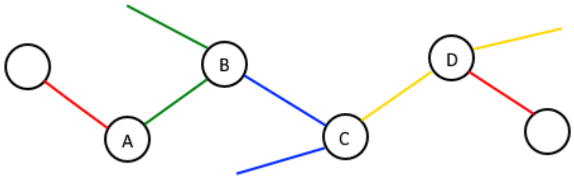
Трета подзадача. Това, че всички върхове имат четни степени, може да значи само Ойлеров цикъл. Ако имаме наредба на ребрата, такава че всеки две съседни споделят общ връх, отново лесно можем да ги групираме в $\lfloor M_i/2 \rfloor$ двойки.

Сложност - **O(N + M).**

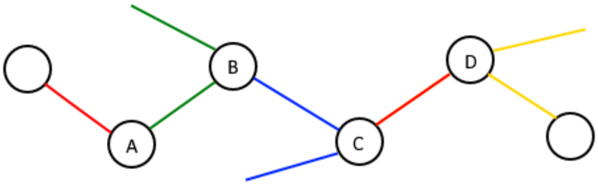
Четвърта подзадача. Макар и в дърво, решението на тази подзадача е доста подобно на авторовото. Ще покажем с алгоритъм, че винаги можем да групираме ребрата в $\lfloor M/2 \rfloor$ двойки. Избираме произволен връх за корен и разбиваме задачата по поддървета. За ребра на едно поддърво ще считаме всички, които поне един връх от поддървото за край (т.е. включваме и реброто към родителя на корена на поддървото (ако дадено поддърво има нечетен брой ребра ще оставим точно него негрупирано)). Нека сме намерили оптимално групиране в поддърветата на всички деца на **u**. Разглеждаме всички негрупирани ребра, излизащи от **u**. Ако те са четен брой, ги групираме на случаен принцип и така сме се погрижили за всички ребра в поддървото на **u**. Ако пък са нечетен брой оставяме реброто към родителя на **u** негрупирано. И в двата случая сме намерили оптимално разпределение по двойки.

Сложност - **O(N + M).**

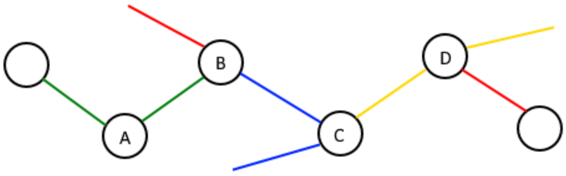
Пета подзадача. Може би някои от вас вече усещат, че винаги съществува разпределение в $\lfloor M_i/2 \rfloor$ групи. За да го докажем, ще подходим по малко по-директния начин. Нека в дадена свързана компонента имаме поне две негрупирани ребра (отбелязаните с червено) и проследим път от групирани ребра между тях. На всяка стъпка ще скъсяваме разстоянието между двете червени ребра, като променяме някои групи.



Нека първото ребро по пътя между тях е групирано с ребро, излизащо от същия връх, от който излиза и негрупираното ребро (двойката жълти ребра). Групираме червеното с жълтото, което не е на пътя между двете червени ребра, а другото оставяме негрупирано.



Другият случай е, когато първото ребро по пътя между тях е групирано с ребро, излизащо от първия връх по пътя между тях (зелената двойка ребра). Тук ще групираме червеното ребро с едното зелено ребро (с другото просто не можем), оставяйки другото зелено негрупирано.



И в двата случая скъсяваме разстоянието между двете негрупирани ребра с 1 (или даже 2, ако имаме две последователни ребра по пътя, които са групирани). Следователно в един момент ще се окажат едно до друго и ще можем да групираме и тях.

Сложност - **O(M × (N + M)).**

Шеста подзадача. Вече споменах при подзадачата, където имаме дърво, че и авторовото решение е доста подобно. Намериме едно *DFS* покриващо дърво на графа. Едно полезно негово свойство, което ще използваме, е, че при него има само дървесни ребра (част от покриващото ребро) и обратни ребра (между връх и негов незадължително директен родител). Ребрата на едно поддърво ще наричаме дървесните ребра в него (включително и това към родителя на корена на поддървото) и обратните ребра с краища върхове от поддървото (тези със само един връх от него не се броят). Да предположим, че сме намерили оптимални разпределения във всички поддървета на децата на **u**. Разглеждаме всички негрупирани дървесни ребра, излизащи от **u** и всички негрупирани обратни ребра с горен край **u**. Ако са четен брой, е ясно, че ще групираме всички. Ако са нечетен брой оставяме негрупирано само дървесното ребро към родителя на **u**. Така сме групирали всички ребра в поддървото на **u** без най-много едно.

Сложност - **O(N + M).**

Автор: Александър Гатев