

Треугольники

Углы



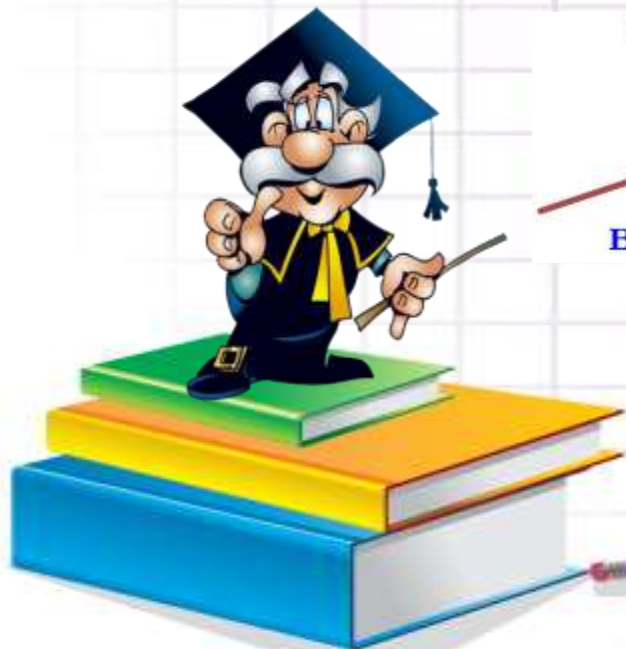
Сумма смежных углов равна 180^0

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^0$$

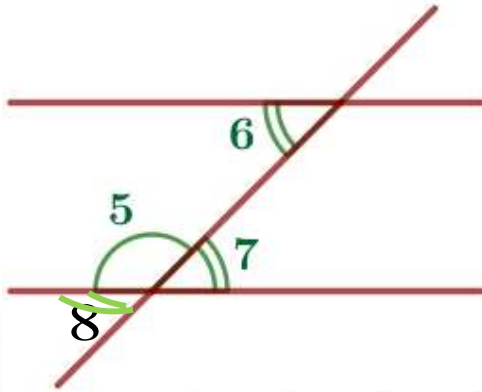


Вертикальные углы равны:

$$\angle 3 = \angle 4$$



УГЛЫ



Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

1) сумма односторонних углов равна 180^0

$$\angle 5 + \angle 6 = 180^0$$

2) накрест лежащие углы равны:

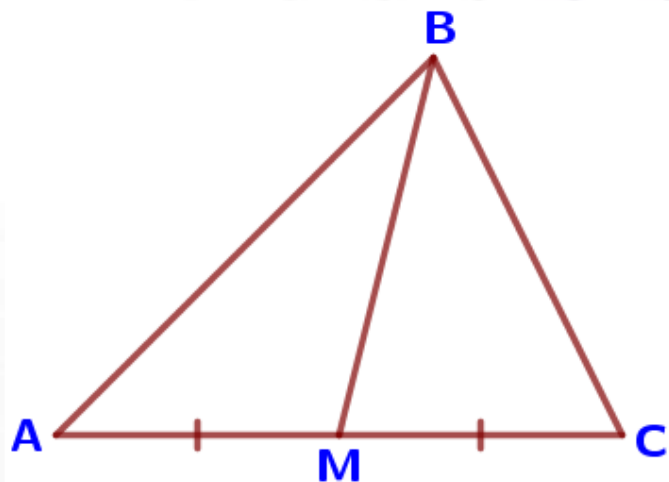
$$\angle 6 = \angle 7$$

3) соответственные углы равны:

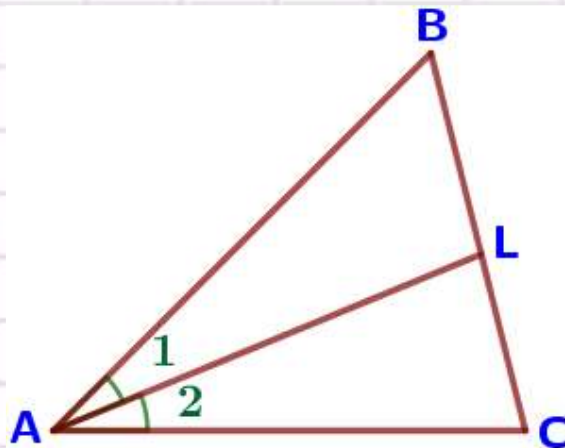
$$\angle 6 = \angle 8$$



Произвольный треугольник

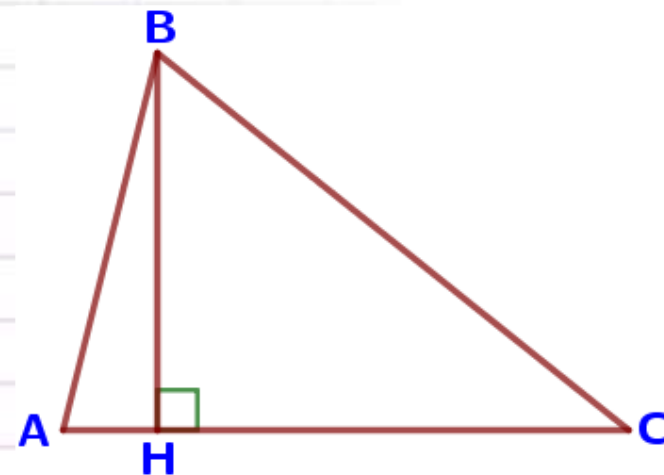


BM – медиана
 $AM = MC$



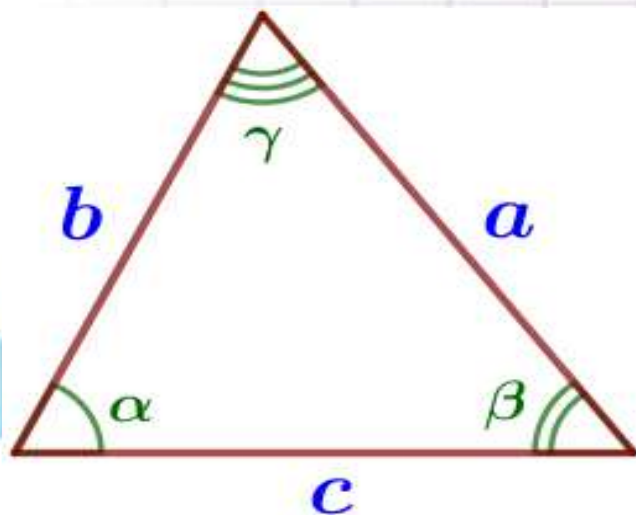
AL – биссектриса

$$\angle 1 = \angle 2$$



BH – высота

$$BH \perp AC$$



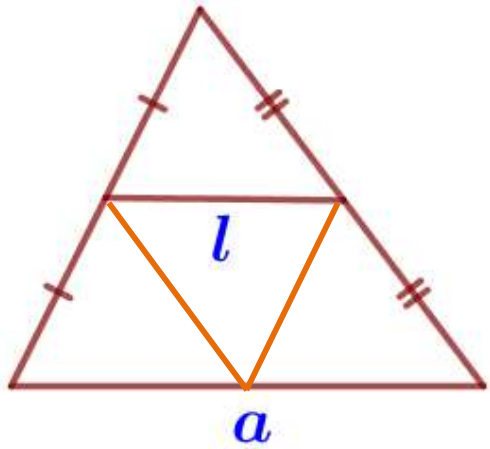
Сумма углов треугольника равна 180^0

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Периметр – сумма длин всех сторон: $P = a + b + c$



Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны:



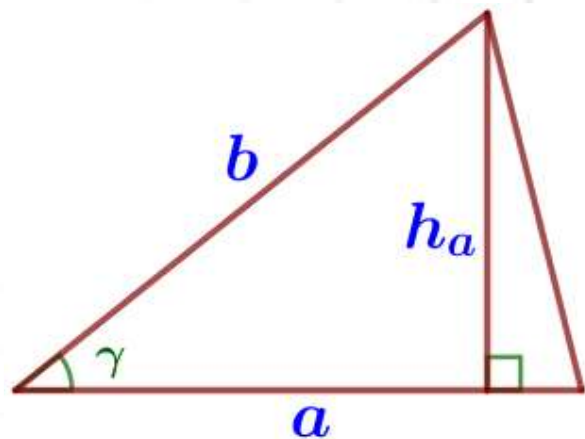
$$l \parallel a; l = \frac{1}{2} a$$

Три средние линии делят треугольник на четыре равных треугольника, подобных данному.



Площадь треугольника равна...

1) половине произведения его основания на высоту:



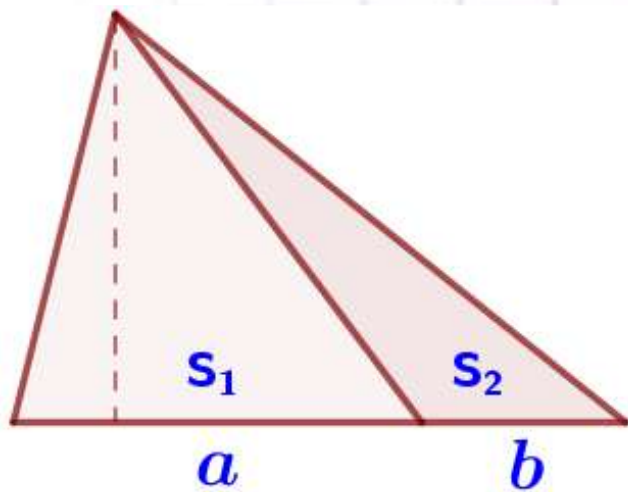
$$S = \frac{1}{2} ah_a; S = lh_a$$

2) половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

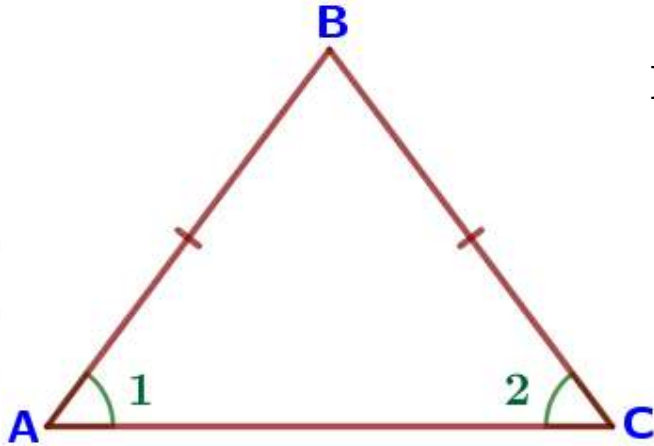
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся, как основания:

$$S_1 : S_2 = a : b$$



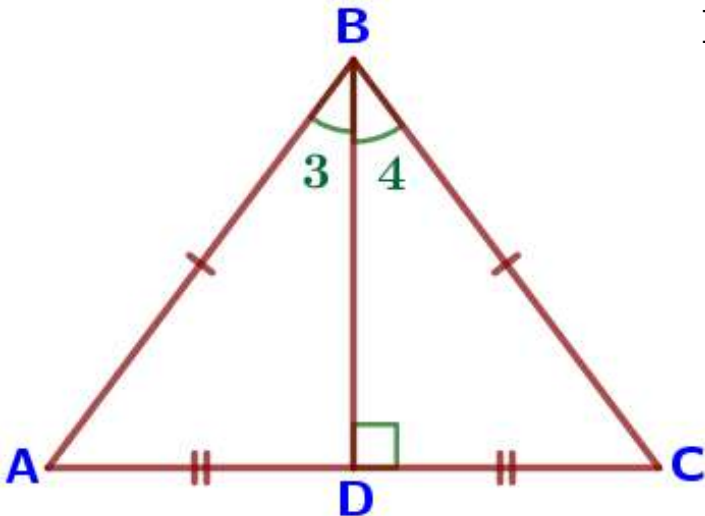
Равнобедренный треугольник



В равнобедренном треугольнике углы при основании равны:

$$\angle 1 = \angle 2$$

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой:



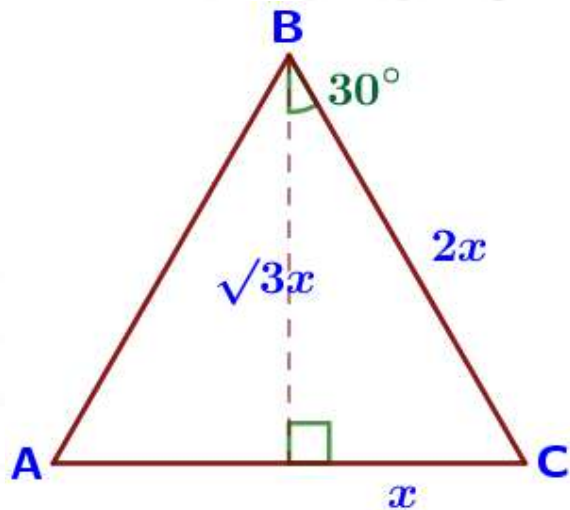
BD – биссектриса $\angle 3 = \angle 4$

BD – медиана $AD = DC$

BD – высота $BD \perp AC$



Равносторонний треугольник



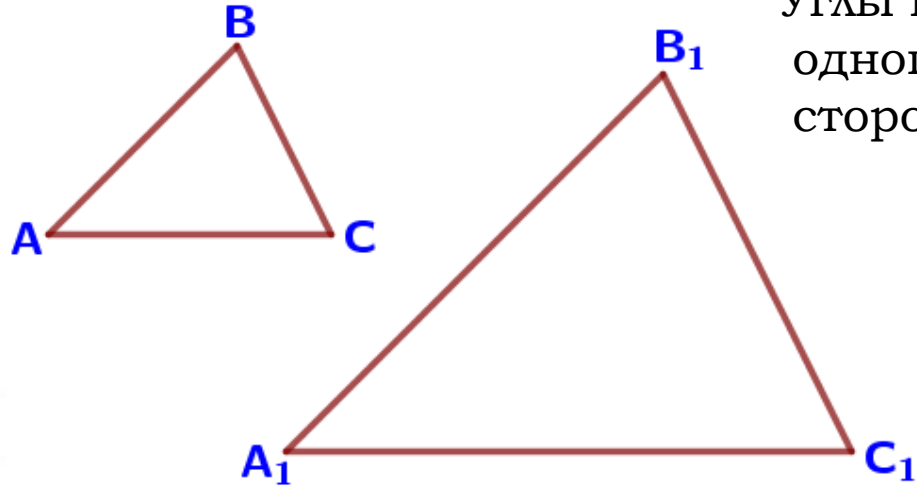
В равностороннем треугольнике все углы равны:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

Каждая медиана в равностороннем треугольнике совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.



Подобные треугольники



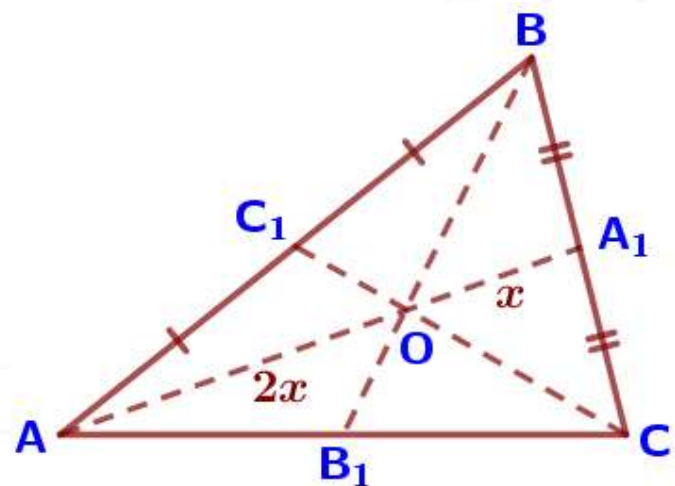
Углы подобных треугольников соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого:

$$\angle A = \angle A_1; \angle C = \angle C_1; \angle B = \angle B_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$



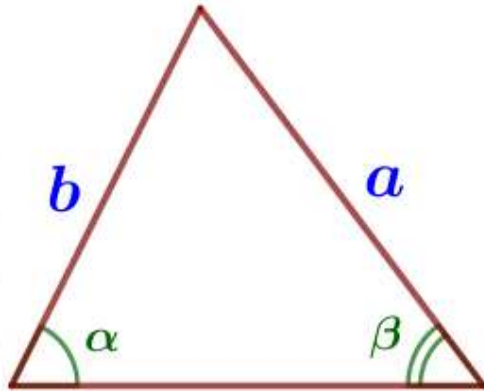


Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины:

Соотношение между сторонами и углами треугольника



Соотношение между сторонами и углами треугольника



Теорема синусов: стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов:

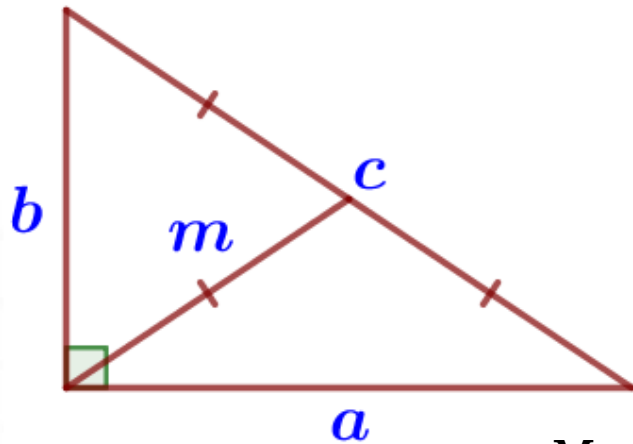
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

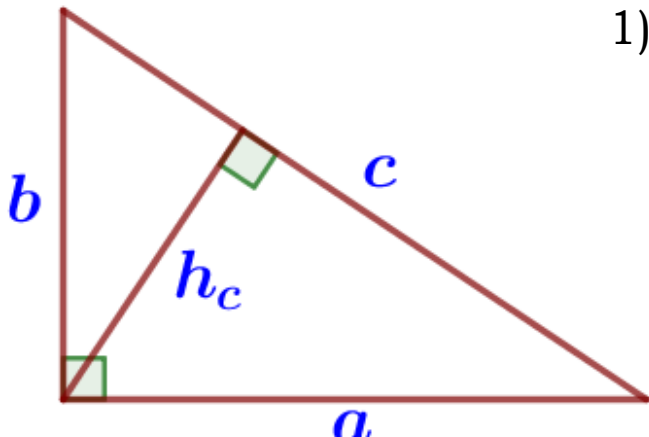
$$m = \frac{c}{2}$$

Площадь прямоугольного треугольника равна ...

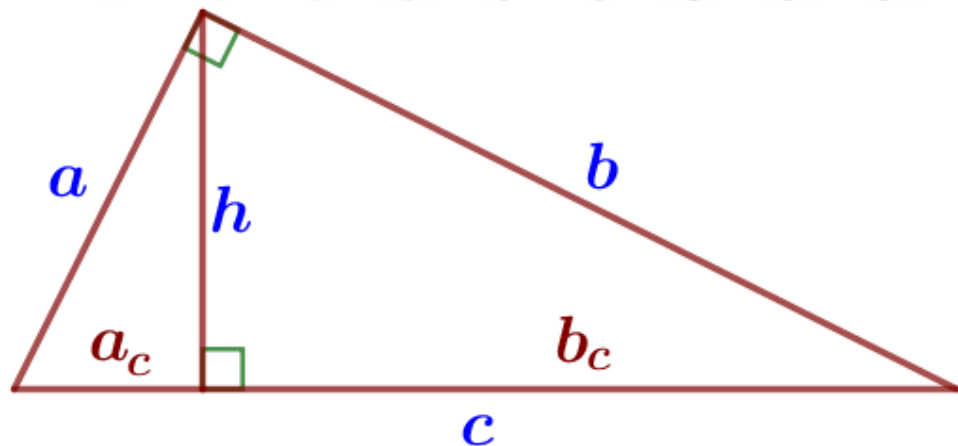
1) половине произведения его катетов $S = \frac{1}{2} ab$

$$S = \frac{1}{2} ch_c$$

2) половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней:



Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

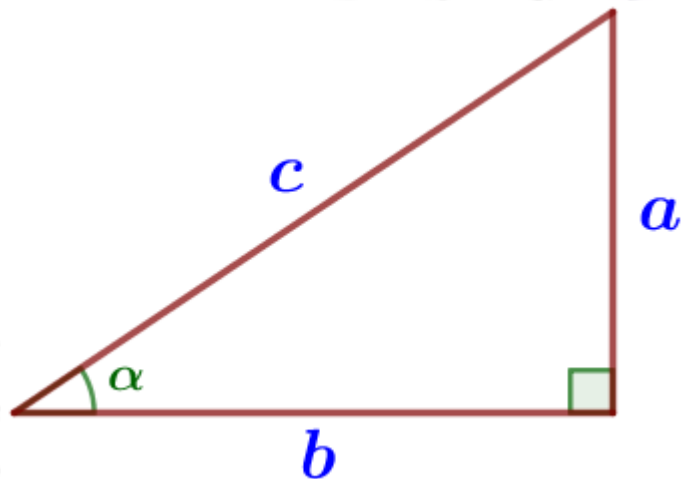


$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$

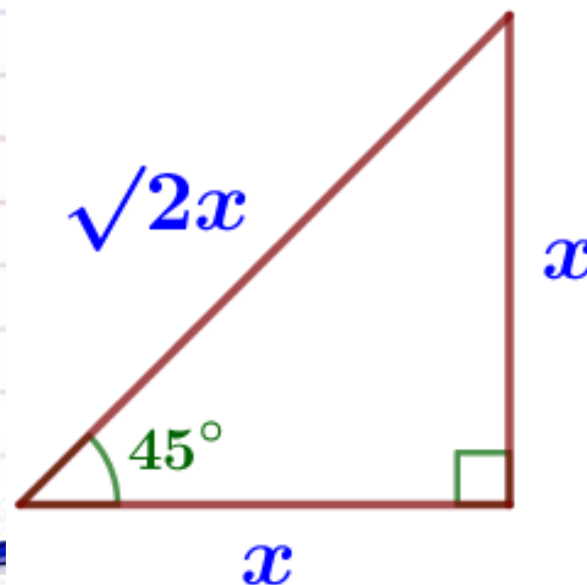
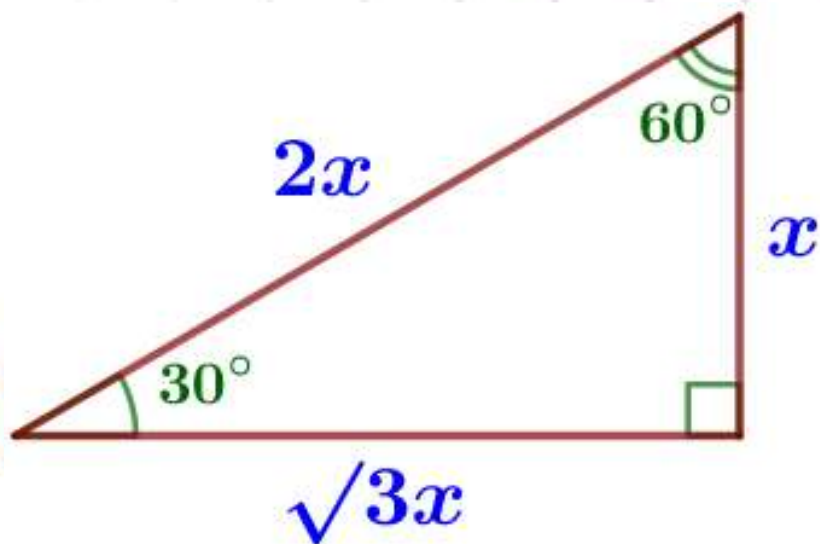




$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$



Углы

№1. Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\cos A$.

- Решение:
- Основное тригонометрическое тождество

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

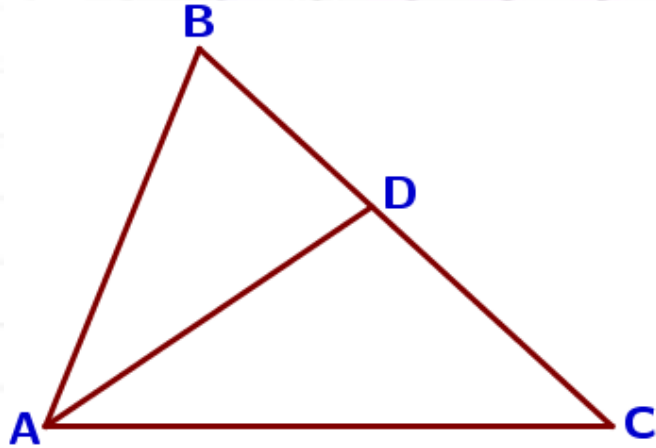
- $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{51}}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{51}{100}} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 0,7$

- Ответ: 0,7



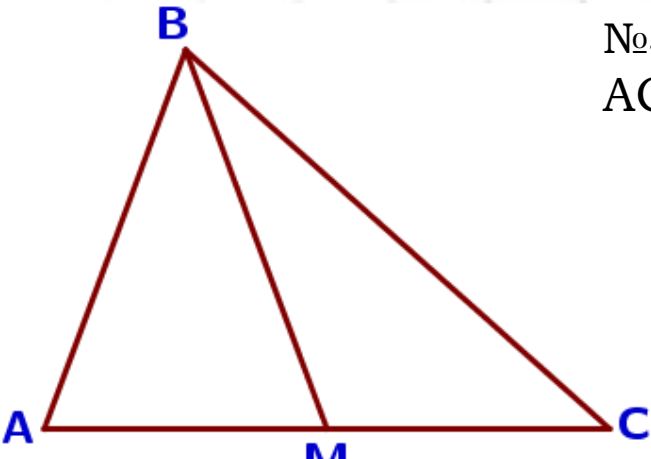
Произвольный треугольник

№2. В треугольнике ABC известно, что угол $BAC=68^\circ$, AD – биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



34°

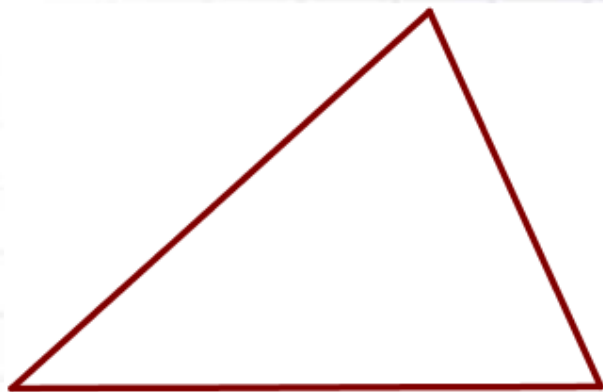
№3 В треугольнике ABC известно, что , BM – медиана, . Найдите AM.
AC =14 BM=10



7

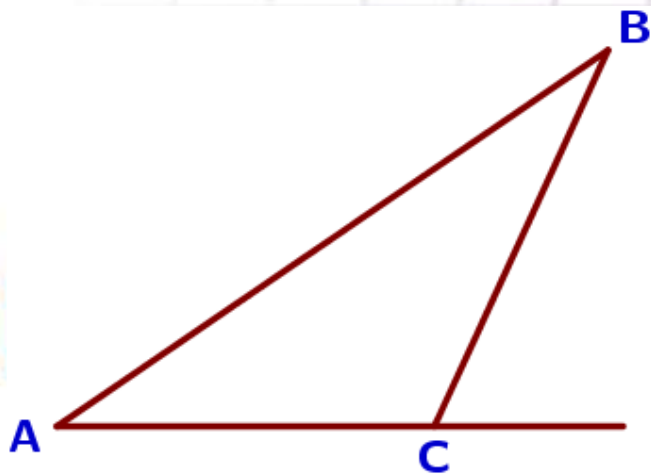


№4 В треугольнике два угла равны 72° и 42° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



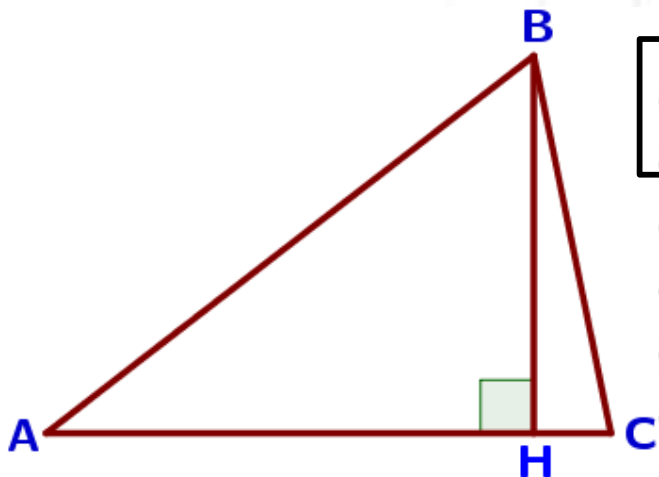
$$180^\circ - (72^\circ + 42^\circ) = 66^\circ$$

№5. В треугольнике ABC угол C равен 115° . Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



$$180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

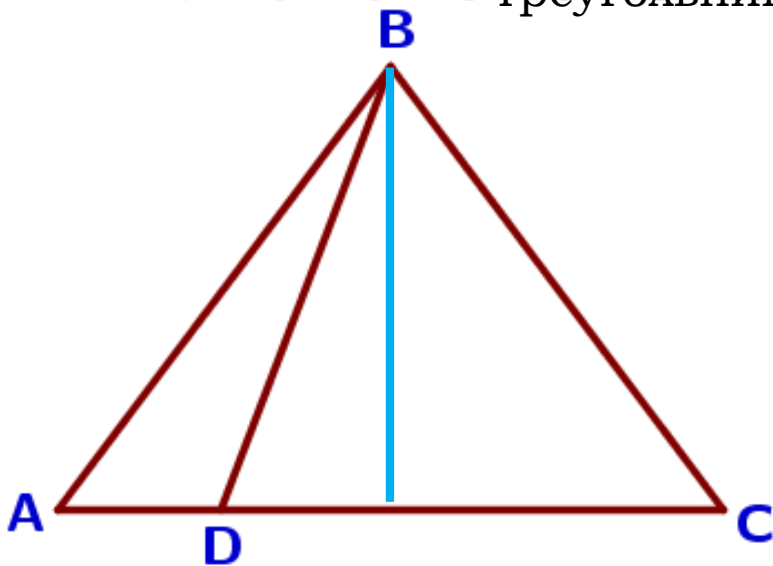




№6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, .
Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах. Угол BAC=37°

$$90^0 - 37^0 = 53^0$$

№7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что AD=6, DC=10. Площадь треугольника ABC равна 48. Найдите площадь треугольника BCD.

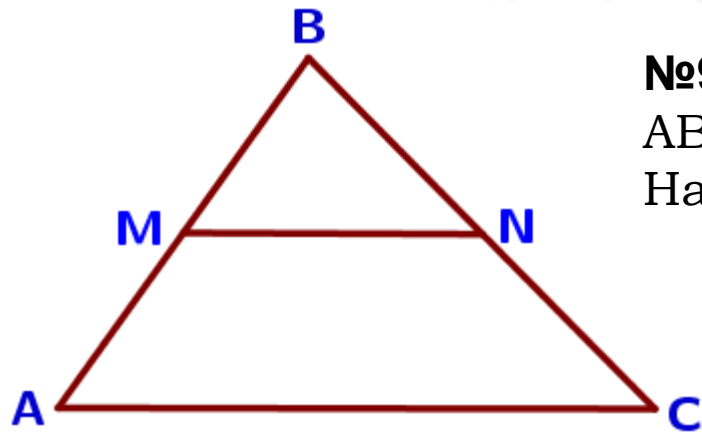


$$S_{ABC} = 48 = \frac{1}{2} 16h$$

$$h = 6$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} 10 \cdot 6 = 30$$





№9. Точки М и N являются серединами сторон АВ и ВС треугольника АВС, сторона АВ равна 21, сторона ВС равна 22, сторона АС равна 28. Найдите MN.

- Решение:
- MN является средней линией треугольника АВС.
- Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.
- Значит $MN = \frac{28}{2} = 14$
- Ответ: 14



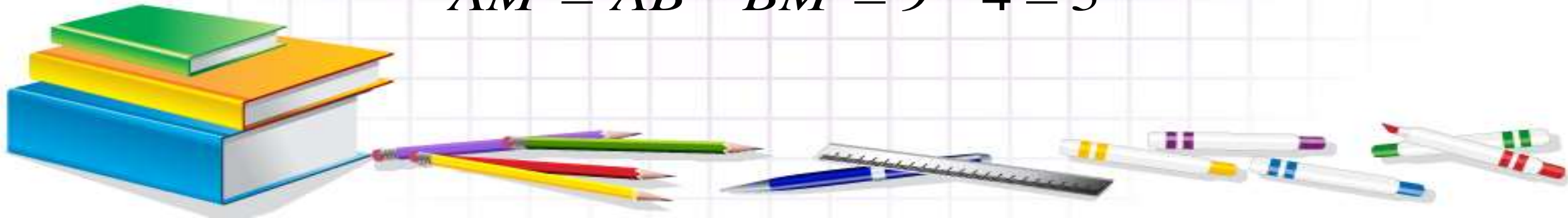
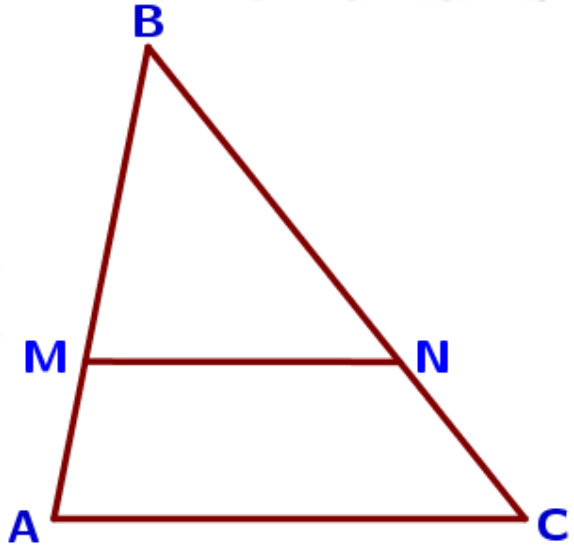
№10. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AB = 9 AC=18 MN=8. Найдите AM.

$$\triangle ABC \sim \triangle MBN$$

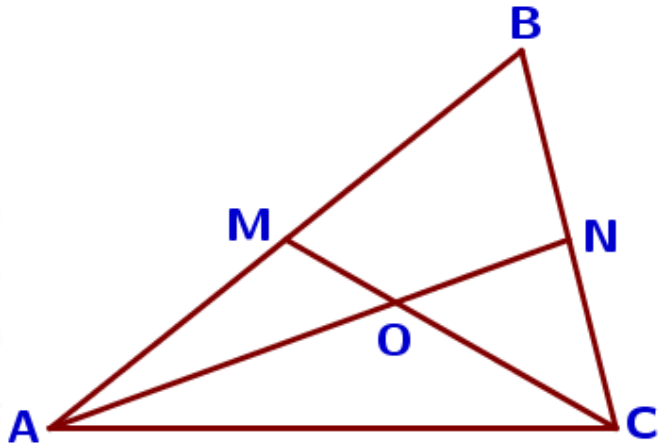
$$\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$BM = \frac{8 \cdot 9}{18} = 4$$

$$AM = AB - BM = 9 - 4 = 5$$



№11. Точки М и N являются серединами сторон АВ и ВС треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, AN=27 CM=18, . Найдите AO.



AN и CM - медианы

значит точкой пересечения делятся в отношении 2:1

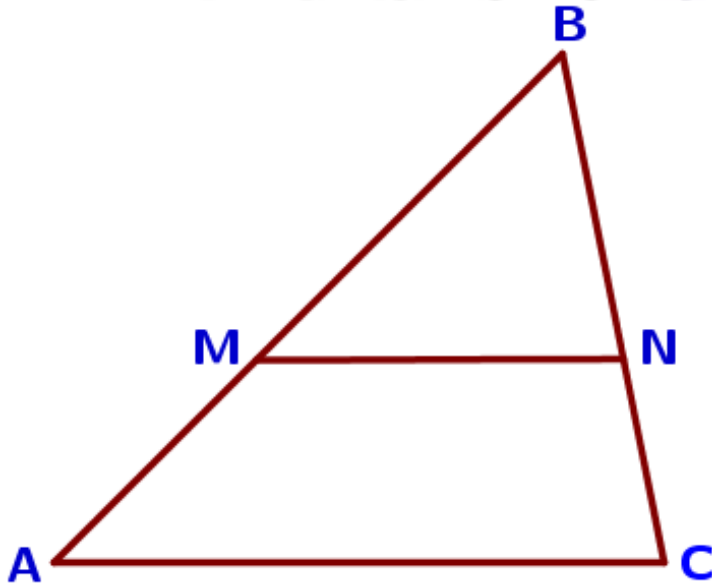
$$2x + x = 27$$

$$x = 9$$

$$AO = 18$$



№12. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AC=36, MN=27. Площадь треугольника ABC равна 96. Найдите площадь треугольника MBN



$\triangle ABC \sim \triangle MBN$

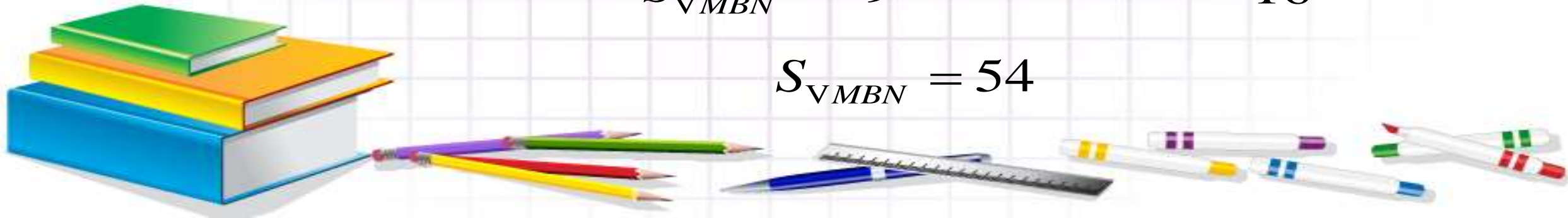
$$\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

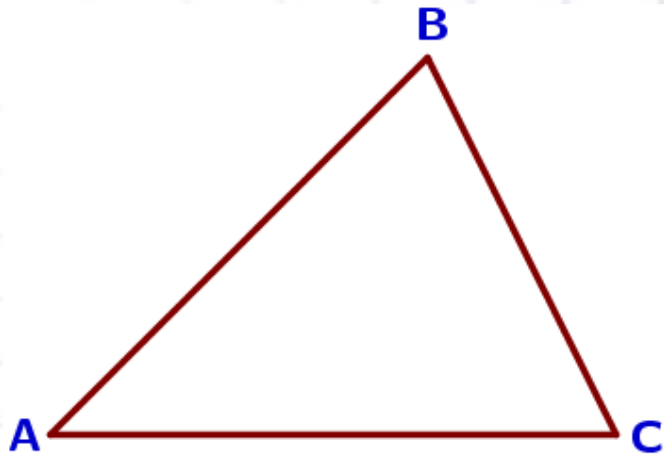
$$\frac{96}{S_{\triangle MBN}} = \frac{16}{9}$$

$$S_{\triangle MBN} = \frac{96 \cdot 9}{16}$$

$$S_{\triangle MBN} = 54$$



№13. В треугольнике ABC известно, что $\sin \angle C = \frac{5}{6}$, AB=15, BC=8. Найдите площадь треугольника ABC.

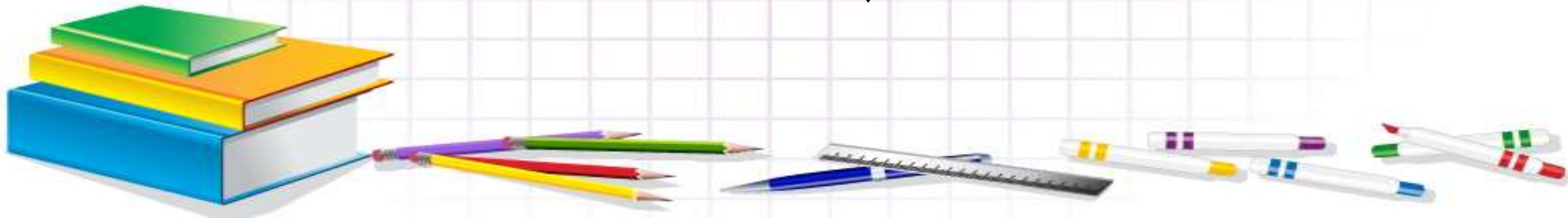


$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

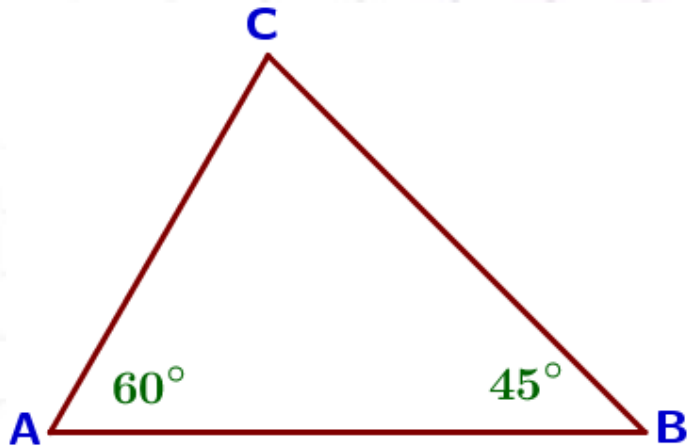
$$S = \frac{1}{2} 15 \cdot 8 \cdot \frac{5}{6}$$

$$S = \frac{1}{2} 15 \cdot 8 \cdot \frac{5}{6}$$

$$S_{\triangle} = 50$$



№14. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 45° , $BC = 7\sqrt{6}$. Найдите AC.

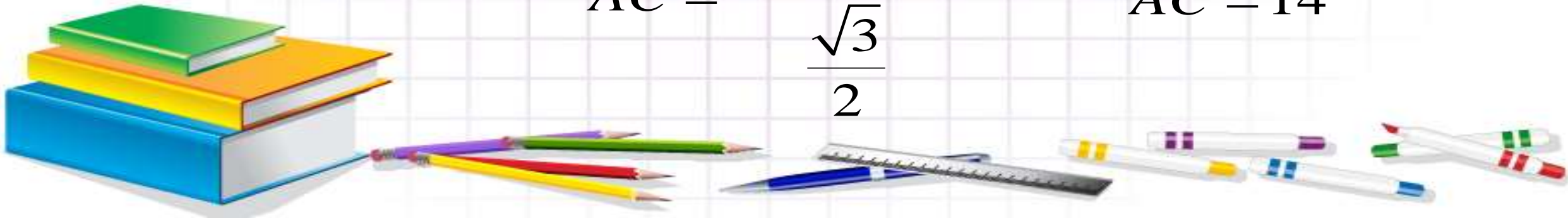


$$\frac{BC}{\sin 60} = \frac{AC}{\sin 45}$$

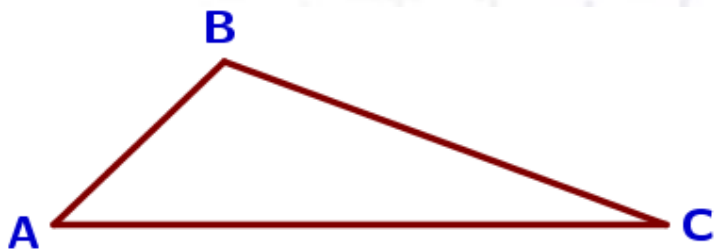
$$\frac{7\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AC = \frac{7\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$AC = 14$$



№15. В треугольнике ABC известно, что $AB=5$, $BC=10$, $AC=11$. Найдите $\cos ABC$



$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos ABC$$

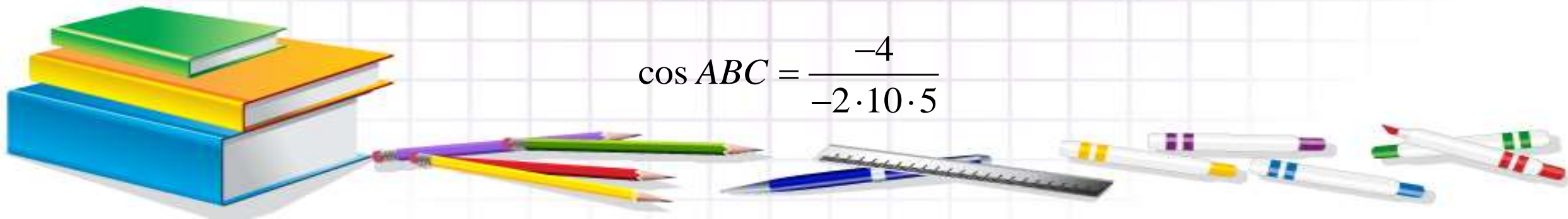
$$\cos ABC = \frac{AC^2 - BC^2 - AB^2}{-2BC \cdot AB}$$

$$\cos ABC = \frac{11^2 - 10^2 - 5^2}{-2 \cdot 10 \cdot 5}$$

$$\cos ABC = 0,4$$

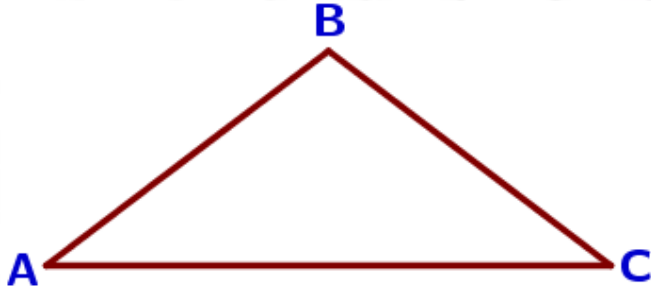
$$\cos ABC = \frac{11^2 - 10^2 - 5^2}{-2 \cdot 10 \cdot 5}$$

$$\cos ABC = \frac{-4}{-2 \cdot 10 \cdot 5}$$



Равнобедренный и равносторонний треугольник

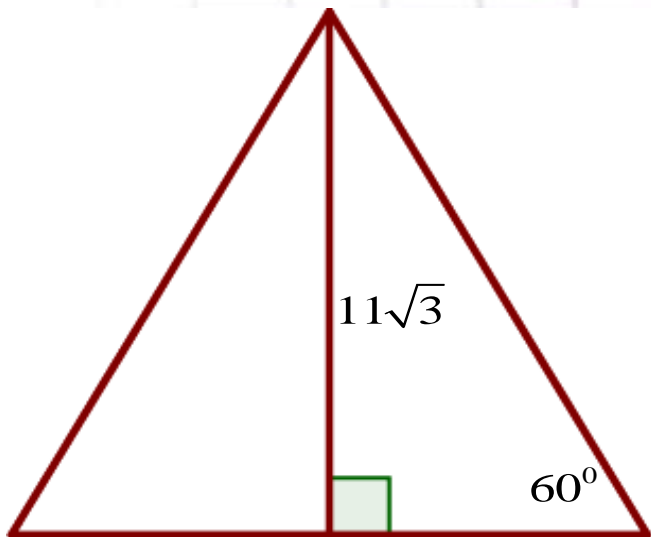
№16. В треугольнике ABC известно что $AB=BC$, угол $ABC=106^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.



$$\angle BCA = \frac{180 - 106}{2}$$

$$\angle BCA = 37^\circ$$

№17. Высота равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите его периметр.



$$\sin 60^\circ = \frac{11\sqrt{3}}{c}$$

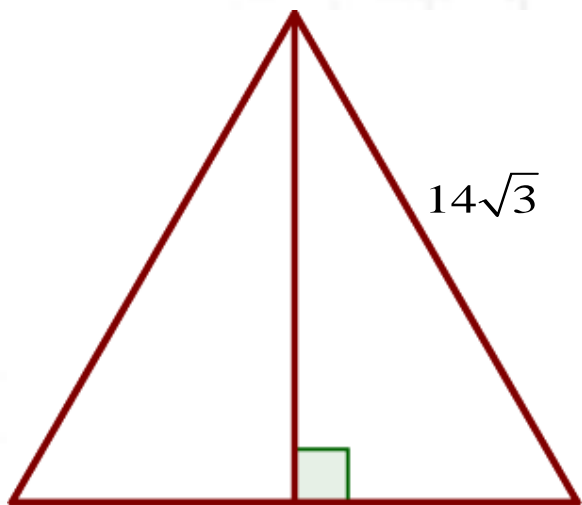
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{c}$$

$$c = \frac{2 \cdot 11\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad P = 3 \cdot 22 = 66$$

$$c = 22$$



№18. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{14\sqrt{3}}$$

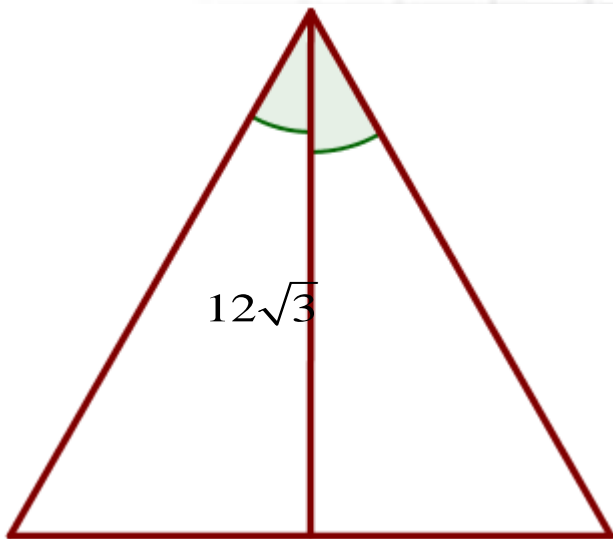
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{14\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{14\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$h = 21$$



№18. Биссектриса равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



$$\sin 60^{\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{a}$$

$$a = 24$$

№19. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

№20. Сторона равностороннего треугольника $10\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.

№21. Медиана равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



Прямоугольный треугольник

№22. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 21° . Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.



$$\alpha = 90^0 - 21^0 = 69^0$$

№23. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите гипотенузу этого треугольника.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

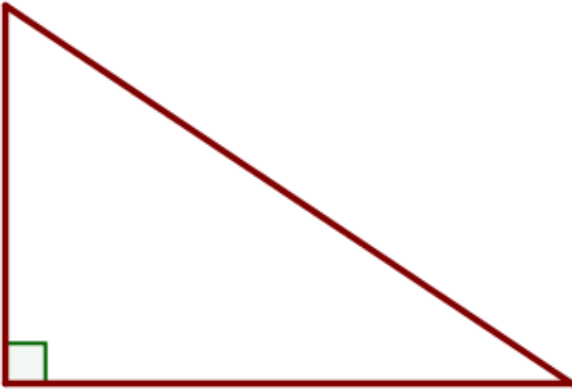
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$$

№24. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 16 и 34 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

$$a^2 = c^2 - b^2$$



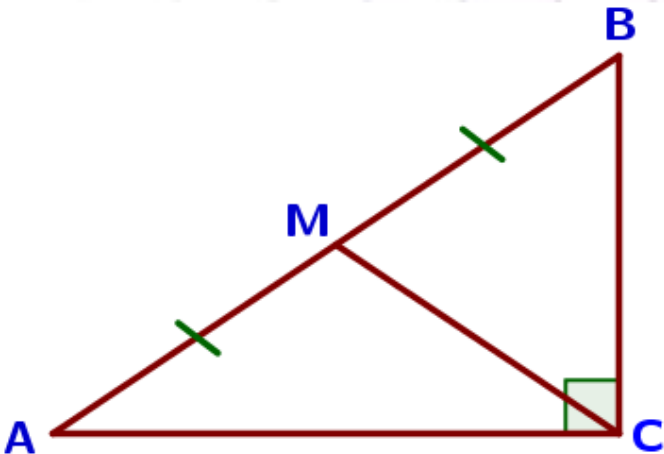
№25. Два катета прямоугольного треугольника равны 4 и 10. Найдите площадь этого треугольника.



$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$$

№26. В треугольнике ABC угол C равен 90° , M – середина стороны AB, $AB=26$, $BC=18$. Найдите CM.

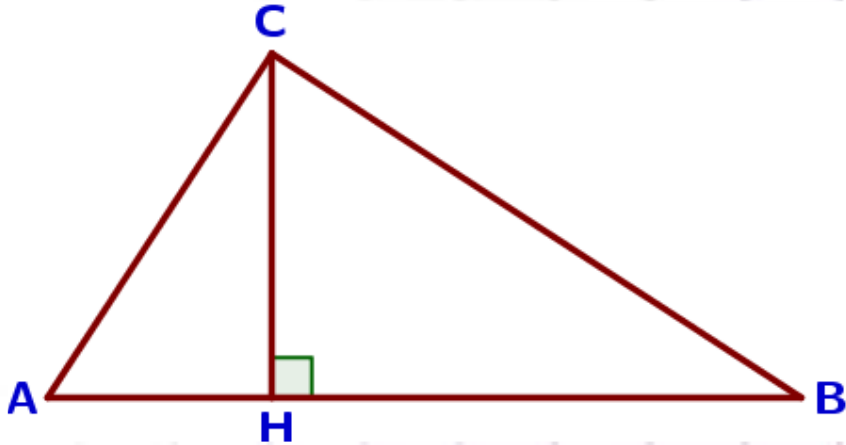


$$m = \frac{c}{2}$$

$$m = 13$$



№27. На гипотенузу АВ прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, AH=4, BH=16. Найдите CH.



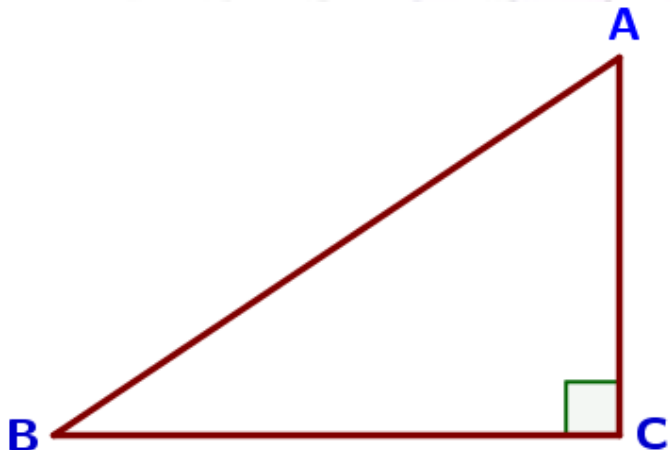
$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

$$h = \sqrt{4 \cdot 16}$$

$$h = 8$$

№28. В треугольнике ABC угол C равен 90° , AC=11, AB=20. Найдите $\sin B$

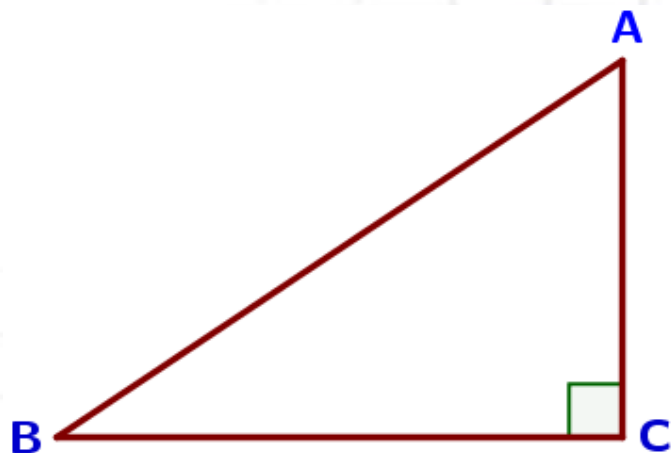


$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin B = \frac{11}{20} = 0,55$$

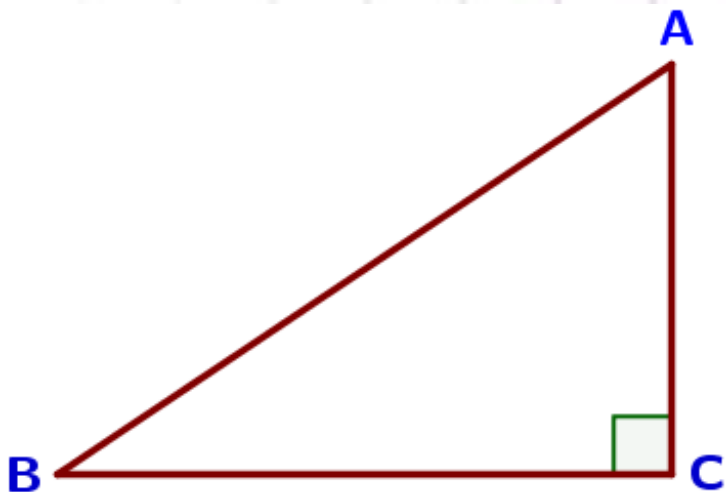


№29. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC=30$, $AB=50$. Найдите $\cos B$



$$\cos B = \frac{BC}{AB} \quad \cos B = \frac{30}{50} \quad \cos B = 0,6$$

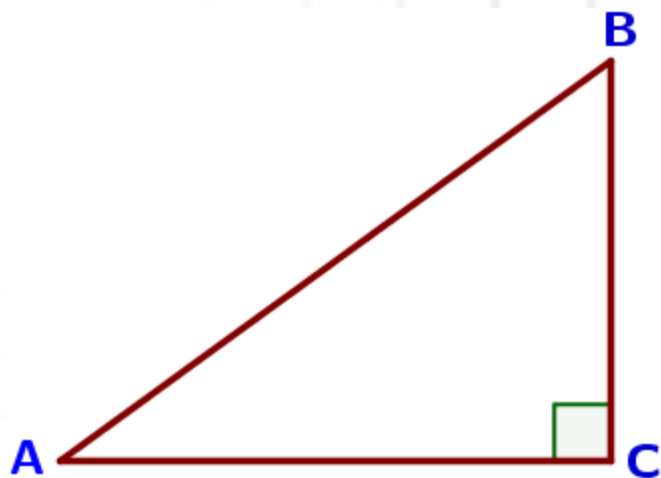
№30. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC=4$, $AC=28$. Найдите $\operatorname{tg} B$.



$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} \quad \operatorname{tg} B = \frac{28}{4} = 7$$



№31. Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите $\cos A$



$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \quad \cos A = \sqrt{1 - \frac{15}{16}}$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{1}{16}} \quad \cos A = \frac{1}{4}$$

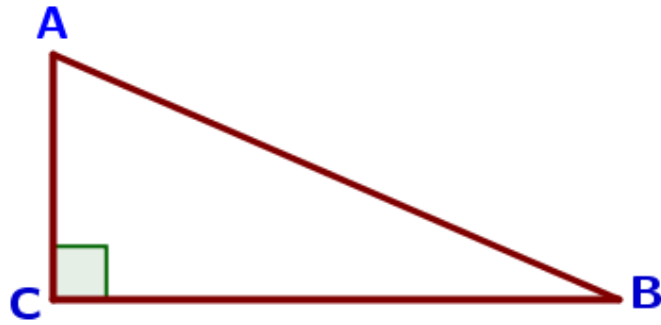
№32. Косинус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\sin A$.

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad \sin A = \sqrt{1 - \frac{7}{16}}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{9}{16}} \quad \sin A = \sqrt{\frac{9}{16}} = 0,75$$



№33. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC=48$, $\operatorname{tg} B = \frac{7}{12}$. Найдите AC.



$$\operatorname{tg} B = \frac{7}{12} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{AC}{48}$$

$$AC = \frac{48 \cdot 7}{12}$$

$$AC = 28$$

№34. В треугольнике ABC угол C прямой, $AB=10$, $\cos B = \frac{2}{5}$. Найдите BC.



$$\cos B = \frac{2}{5} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{BC}{10}$$

$$BC = 4$$

