СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ЗАДАНИЯМ 19

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

#20 из видеокурса	#20 из видеокурса	#104 из видеокурса
$\begin{array}{r\|l} 1105 & 5 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$	$\begin{array}{r\|l} 1106 & 2 \\ 553 & 7 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array}$ $1106 = 2 \cdot 7 \cdot 79$	$\begin{array}{r\|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Простые числа – это целые положительные числа, которые делятся только на себя и на единицу (2; 3; 5; 7; 11; …)
Составные числа – это целые положительные числа, у которых существует ещё хотя бы один делитель, кроме себя и единицы (4; 6; 8; 9; …)
1 – это не простое и не составное число
2 – это единственное чётное простое число (все остальные чётные являются составными)

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Взаимно простые числа – это числа, у которых нет общих делителей, кроме единицы (11 и 12; 15 и 8; 100 и 99; …)

НОД

НОД (Наибольший Общий Делитель) – это наибольшее число, на которое данные числа делятся без остатка
НОД (16; 30; 12) = 2
НОД (21; 15; 48) = 3

НОК

НОК (Наименьшее Общее Кратное) – это наименьшее число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел
НОК (2; 3) = 6
НОК (75; 60) = 300

ДЕЛИТЕЛЬ И КРАТНОЕ

Делитель – на него делится число
Кратное – оно делится на число
1; 2; 5; 10; 25; 50 – это делители числа 50
50; 100; 150; 200; … – это кратные 50 числа

ВИДЫ ЧИСЕЛ

N (натуральные числа) – это положительные целые (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; …)
Z (целые числа) – это числа из множества (0; 1; -1; 2; -2; …)
Q (рациональные числа) – это числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($\frac{2}{7}$; 1; $5\frac{2}{5}$; 6,7; …)
R (действительные числа) – это объединение рациональных и иррациональных чисел
∅ – это пустое множество или «нет решений»

ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ЧИСЛА

Чётные числа – это числа, которые делятся на 2 (0; 2; 4; 6; …)
Нечётные числа – это числа, которые не делятся на 2 (1; 3; 5; 7; …)

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{\text{Сумма чисел}}{\text{Количество чисел}}$$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (например, 2; 5; 8; 11; 14; …)

a_1 — это первый член прогрессии

a_n — это n —ый член прогрессии

S_n — это сумма первых n членов прогрессии

d — это разность прогрессии (то самое число, которое всё время прибавляется)

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

#2 из видеокурса	#2 из видеокурса	#3 из видеокурса
Чему равно 3+13+23+33+43+53+63+73? $S = \frac{3+73}{2} \cdot 8 = 304$	Чему равно 2+4+6+…+52+54? $S = \frac{2+54}{2} \cdot 27 = 756$	Чему равна сумма 100 первых натуральных чисел? $S = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число (например, 2; 6; 18; 54; …)

b_1 — это первый член прогрессии

b_n — это n —ый член прогрессии

q — это знаменатель прогрессии (то самое число, на которое всё время умножается)

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛА

Десятичная запись числа – это сумма степеней десяток с коэффициентами

#13 из видеокурса	#17 из видеокурса	#18 из видеокурса
Дано трёхзначное натуральное число. Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82? $\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 82$	С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3. Могло ли в результате такой операции получиться число 300? $\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c - a - b - c}{3} = 300$	С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 10, а затем к получившейся сумме прибавляют 3. Могло ли в результате такой операции получиться число 224? $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c + b \cdot 10 + 3 = 224$

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Признак делимости на 2	Признак делимости на 3	Признак делимости на 4	Признак делимости на 5
Число делится на 2, если его последняя цифра чётная (0 или 2, или 4, или 6, или 8) 1268 делится на 2, т.к. последняя цифра 8 является чётной	Число делится на 3, если его сумма цифр также делится на 3 201432 делится на 3, т.к. 2+0+1+4+3+2=12 также делится на 3	Число делится на 4, если две его последние цифры нули или составляют число, которое делится на 4 18394735980274372 делится на 4, т.к. последние две цифры составляют число 72, которое делится на 4	Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5 32557245 делится на 5, т.к. последняя цифра 5
Признак делимости на 8	**Признак делимости на 9**	**Признак делимости на 10**	**Признак делимости на 11**
Число делится на 8, если три его последние цифры нули или составляют число, которое делится на 8 18394735980274160 делится на 8, т.к. последние три цифры составляют число 160, которое делится на 8	Число делится на 9, если его сумма цифр также делится на 9 261432 делится на 9, т.к. 2+6+1+4+3+2=18 также делится на 9	Число делится на 10, если его последняя цифра 0 32557240 делится на 10, т.к. последняя цифра 0	Число делится на 11, если сумма цифр (стоящих на чётных местах) равна сумме цифр (стоящих на нечётных местах), либо разность этих сумм делится на 11 1232 делится на 11, т.к. 1+3=2+2 1925 делится на 11, т.к. (9+5)-(1+2)=11

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если $a < b$ $c < d$ то $a + c < b + d$	Если $a > b$ $c > d$ то $a + c > b + d$
#60 из видеокурса	**#60 из видеокурса**
$a_1 \geq 1$ $a_2 \geq 2$ $a_3 \geq 3$ $a_4 \geq 4$ $a_5 \geq 5$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 15$	$a_6 - a_5 \geq 1$ $a_6 - a_4 \geq 2$ $a_6 - a_3 \geq 3$ $a_6 - a_2 \geq 4$ $a_6 - a_1 \geq 5$ $5a_6 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ $5a_6 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \geq 15$

УРАВНЕНИЕ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Решить уравнение в целых числах – значит подобрать такие целые x и y, которые бы дали верное равенство

#12 из видеокурса	**#13 из видеокурса**	**#64 из видеокурса**
Найдите наименьшее возможное N $\begin{cases} 3N = 5a \\ 5N = 7b \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{3N}{5} \\ b = \frac{5N}{7} \end{cases}$ => N должно быть кратно 5 и 7 одновременно => $N \geq 35$	$2a = 8b + 9c$, где a, b и c — цифры трёхзначного числа При $a = 4$ $b = 1$ $c = 0$ Получаем верное равенство	$14y = 3x$ При $x = 14$ $y = 3$ Мы получим верное равенство, есть и другие решения в целых числах

СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ

Если каждое слагаемое делится на число, то сумма должна делиться на это число

#8 из видеокурса	**#17 из видеокурса**	**#18 из видеокурса**
a_1 и d — натуральные числа. Чему равны a_1 и d, если $2a_1 + 4d = 99$? Левая часть уравнения кратна 2, а правая нет, значит равенство невозможно Можно доказать и так: $2a_1 + 4d = 99$ $a_1 + 2d = 49{,}5$ НО сумма целых чисел не может быть дробным числом	a и b — цифры. Чему равны a и b, если $33a + 3b = 151$? Левая часть уравнения кратна 3, а правая нет, значит равенство невозможно Можно доказать и так: $33a + 3b = 151$ $11a + b = \frac{151}{3}$ НО сумма целых чисел не может быть дробным числом	a и b — цифры. Чему равны a и b, если $100a + 20b = 310$? Левая часть уравнения кратна 20, а правая нет, значит равенство невозможно Можно доказать и так: $100a + 20b = 310$ $5a + b = 15{,}5$ НО сумма целых чисел не может быть дробным числом

КАК МИНИМИЗИРОВАТЬ ИЛИ МАКСИМИЗИРОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЯ

#8 из видеокурса	**#59 из видеокурса**	**#60 из видеокурса**
Найдите наибольшее возможное целое n $n = \frac{13 - 2a_1}{d} + 1$ Для максимизации n нужно брать a_1 и d как можно меньшими, т.е. $a_1 = 1$ и $d = 1$ $n \leq \frac{13 - 2 \cdot 1}{1} + 1$ $n \leq 12$	Найдите наименьшую возможную сумму чисел $S = 168 - (a_6 + a_7)$ S будет наименьшей при наибольшем возможном значении $(a_6 + a_7)$ Учитывая, что $(a_6 + a_7) \leq 27$ Получаем $S \geq 168 - 27$ $S \geq 141$	Найдите наибольшее возможное $S - B$ $S - B = \frac{120 - 12B}{11}$ $S - B$ будет наибольшим при наименьшем возможном B Учитывая, что $B \geq 8$ Получаем $S - B \leq \frac{120 - 12 \cdot 8}{11}$ $S - B \leq \frac{24}{11}$

МИНИМАЛЬНАЯ СУММА

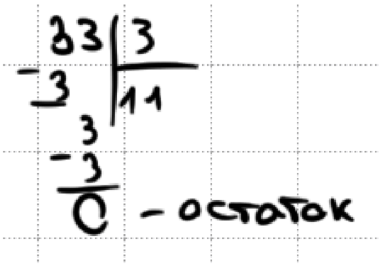
#2 из видеокурса	#3 из видеокурса	#6 из видеокурса
Сумма 35 различных натуральных чисел равна 1062. Может ли на доске быть 8 чисел, заканчивающихся на три и 27 чётных чисел? $\text{Сумма восьми чисел, зак. на три} \geq \frac{3+73}{2}\cdot 8$ $\text{Сумма восьми чисел, зак. на три} \geq 304$ $\text{Сумма 27} - \text{ми чётных чисел} \geq \frac{2+54}{2}\cdot 27$ $\text{Сумма восьми чисел, зак. на три} \geq 756$ $\text{Сумма всех 35 чисел} \geq 304+756$ $\text{Сумма всех 35 чисел} \geq 1060$ => Может	На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120. Может ли оказаться среди них число 230? $\text{Сумма 230 и 99 наим. чисел} \geq 230+\frac{1+99}{2}\cdot 99$ $\text{Сумма 230 и 99 наим. чисел} \geq 5180$ => Не может	На доске написано 5 различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4. Может ли их сумма составлять 390? $S \geq 24+54+84+114+144$ $S \geq 420$ => Не может

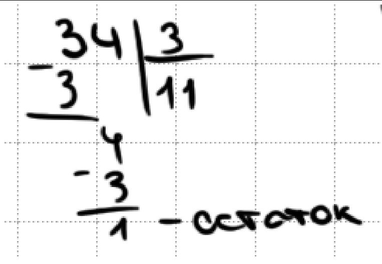
ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЫРАЖЕНИЯ

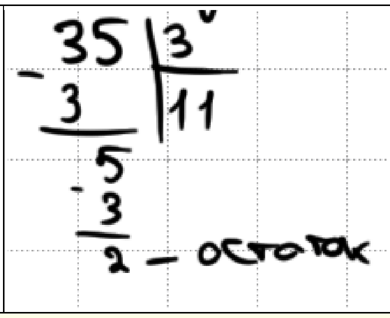
#13 из видеокурса	#15 из видеокурса	#18 из видеокурса
Найдите наибольшее возможное целое k $\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=k$ $\frac{a+b+c}{a+b+c}+\frac{99a+9b}{a+b+c}=k$ $1+\frac{99a+9b}{a+b+c}=k$ Мы ищем наибольшее значение левой части уравнения, поэтому минимизируем знаменатель. Пусть $c=0$ $1+\frac{99a+9b}{a+b}\geq k$ $1+\frac{9a+9b}{a+b}+\frac{90a}{a+b}\geq k$ $10+\frac{90a}{a+b}\geq k$ b и c не могут быть нулями одновременно, поэтому пусть $b=1$ $10+\frac{90a}{a+1}\geq k$ Теперь левая часть принимает наибольшее значение при $a=9$ $k\leq 91$	Найдите наибольшее возможное целое k $\frac{700+10b+c}{7+b+c}=k$ $\frac{7+b+c}{7+b+c}+\frac{693+9b}{7+b+c}=k$ $1+\frac{693+9b}{7+b+c}=k$ Попробуем выделить не 1, а не 10 $\frac{70+10b+10c}{7+b+c}+\frac{630-9c}{7+b+c}=k$ $10+\frac{630-9c}{7+b+c}=k$ Если увеличивать b или c, то k уменьшается, поэтому для каждого значения $b+c$, начиная с наименьших, будем искать b и c такие, чтобы k было целым Если $b+c=0$, то это противоречит условию Если $b+c=1$, то целого k не будет Если $b+c=2$, то $k=80$ — наибольшее при $b=2$ и $c=0$ $k\leq 80$	Найдите наибольшее возможное k $\frac{100a+10b+c+10b+3}{100a+10b+c}=k$ $\frac{100a+10b+c}{100a+10b+c}+\frac{10b+3}{100a+10b+c}=k$ $1+\frac{10b+3}{100a+10b+c}=k$ Для максимизации k надо минимизировать c и a Учитывая, что $1\leq a\leq 9$ и $0\leq c\leq 9$ $k\leq 1+\frac{10b+3}{10b+100}$ $k\leq 1+\frac{10b+100}{10b+100}-\frac{97}{10b+100}$ $k\leq 2-\frac{97}{10b+100}$ Для максимизации k надо минимизировать дробь, а для этого надо максимизировать b Учитывая, что $0\leq b\leq 9$ $k\leq 2-\frac{97}{190}$ $k\leq\frac{283}{190}$

ОСТАТКИ

Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как и само число
Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 9, как и само число







#5 из видеокурса	#77 из видеокурса
На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6. Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021? Все слагаемые, которые можно использовать, при делении на 5 дают остаток 1 1021 при делении на 5 тоже даёт остаток 1 1 слагаемое использоваться нельзя, т.к. 1021 не подходит 2 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 2 3 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 3 4 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 4 5 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 0 6 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 1 => число слагаемых ≥ 6	На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго. Может ли сумма этих чисел быть равна 2021? Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как и само число => все три числа на доске имеют одинаковый остаток при делении на 3, т.е. 0 0 0 или 1 1 1 или 2 2 2 => итоговая сумма точно кратна 3, т.е. не может быть 2021