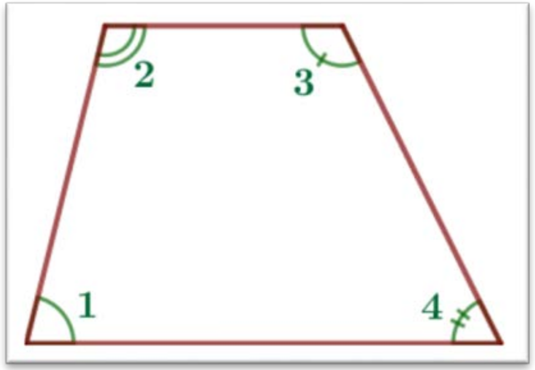
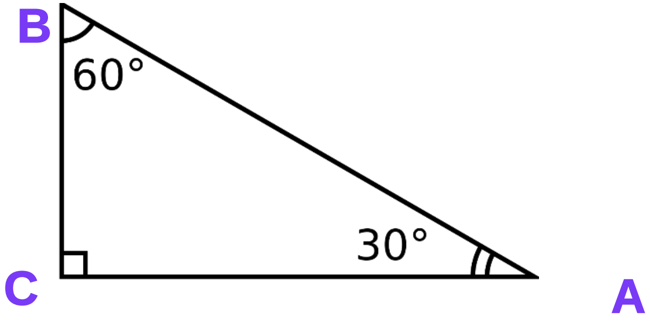
Трапеция.

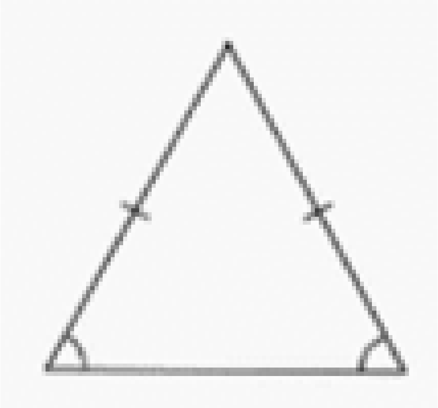
Задание 23. Задачи на вычисление. ОГЭ 2022.



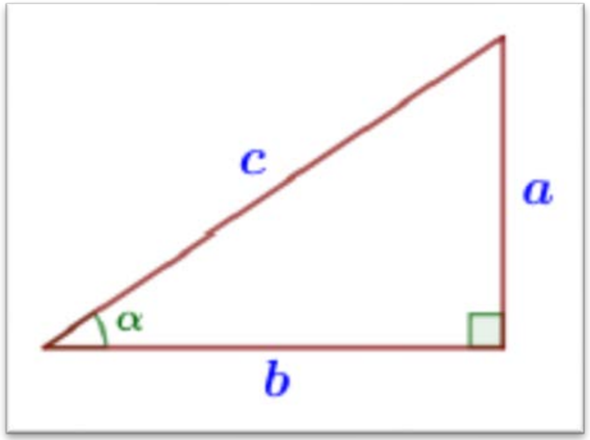
Сумма углов, прилегающих к боковой стороне трапеции равна 180^{o}:
$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = 180^{o}$;



Катет прямоугольного треугольника, лежащего против угла 30^0, равен половине гипотенузы: $BC = \frac{1}{2} AB$



Если у треугольника два угла равны, то этот треугольник является равнобедренным.

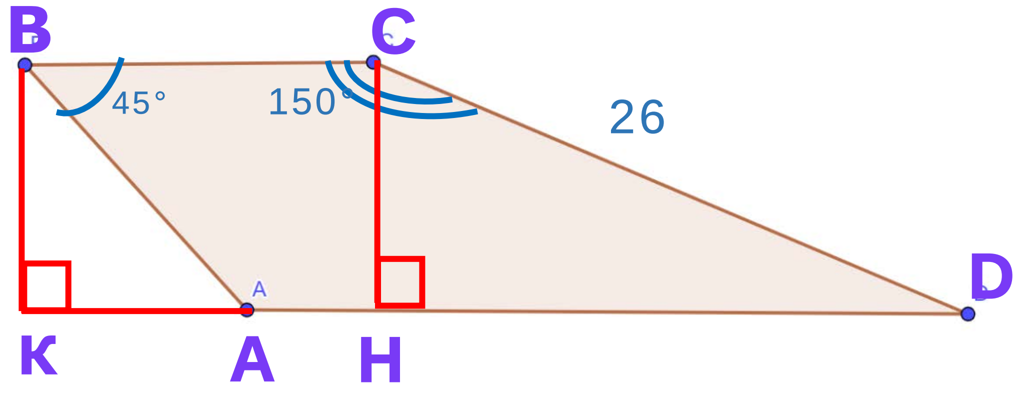


Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$c^2 = a^2 + b^2$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

1. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 150°, а CD=26.



Дано: трапеция ABCD,
$\angle ABC=45^0$, $\angle BCD=150^0$
CD=26
Найти: AB

Решение: 1)Проведём высоты CH и BK;

2) BC∥AD, $\angle BCD+\angle ADC = 180^0$

$\angle ADC = 180^0 - \angle BCD = 180^0 - 150^0 = 30^0$

3) В ΔCHD $\angle H=90^0$, $\angle D=30^0$, $CH=\frac{1}{2}CD = 13$ по свойству катета, лежащего напротив угла в 30^0

4) В ΔBKA $\angle K=90^0$, $\angle KBA= 90^0 - 45^0 = 45^0$, $\angle KAB = 45^0$

Следовательно, ΔBKA – равнобедренный, BK=KA=13.

5) По теореме Пифагора: $AB^2=KA^2+BK^2$

$AB^2=13^2+13^2$

$AB^2=169+169$

$AB^2=338$

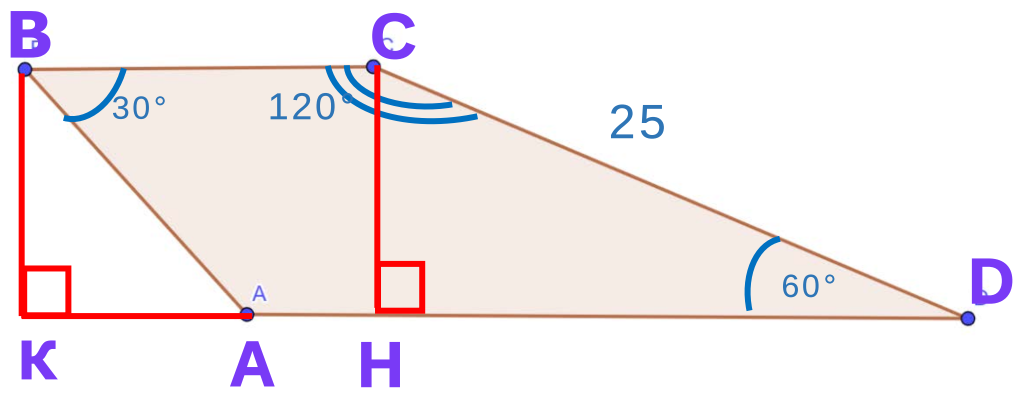
$AB=\sqrt{338}$

$AB=\sqrt{169\cdot 2}$

$AB=13\sqrt{2}$

Ответ: $AB = 13\sqrt{2}$

2. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120°, а CD=25.



Дано: трапеция ABCD,
$\angle ABC=30^0$, $\angle BCD=120^0$
CD=25
Найти: AB

Решение: 1)Проведём высоты CH и BK;

2) $BC \parallel AD$, $\angle BCD + \angle CDA = 180^0$
$\angle CDA = 180^0 - \angle BCD = 180^0 - 120^0 = 60^0$

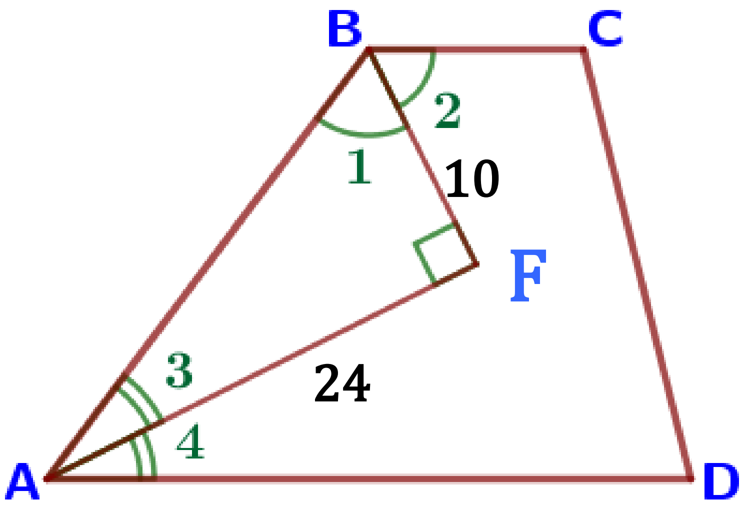
3) В ΔCHD: $\angle H=90^0$, $\sin\angle D=\frac{CH}{CD}$,

$CH=CD\sin\angle D = 25\sin 60^0=25\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

4) В ΔBKA: $\angle K=90^0$, $BK=CH=\frac{25\sqrt{3}}{2}$
$\angle KAB = 30^0$, по свойству катета, лежащего напротив угла в 30^0
$AB=2BK=2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{2}= 25\sqrt{3}$

Ответ: $AB = 25\sqrt{3}$

4. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF=24, BF=10.



Дано: трапеция ABCD, AF, BF – биссектрисы ∟A и ∟B, AF=24, BF=10

Найти: AB

Решение: 1) AF - биссектриса ∟A, $\angle 1 = \angle 2$

BF – биссектриса ∟B, $\angle 3 = \angle 4$

2) ∟A+∟B=180⁰ по свойству углов прилежащих к боковой стороне трапеции;

3) $2\angle 1 + 2\angle 3 = 180^0$;

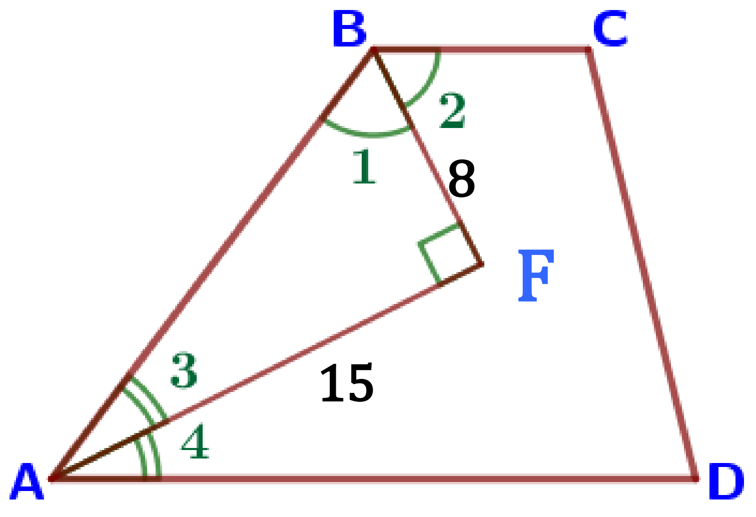
$\angle 1 + \angle 3 = 90^0$, следовательно ∟AFB=$90^0$

4) По теореме Пифагора: $AB^2=AF^2+BF^2$

$AB = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26$

Ответ: $AB = 26$

5. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF=15, BF=8.



Дано: трапеция ABCD, AF, BF – биссектрисы ∟A и ∟B, AF=15, BF=8

Найти: AB

Решение: 1) AF - биссектриса ∟A, ∟1 = ∟2

BF – биссектриса ∟B, ∟3 = ∟4

2) ∟A+∟B=180^0 по свойству углов прилежащих к боковой стороне трапеции;

3) $2∟1 + 2∟3 = 180^0$;

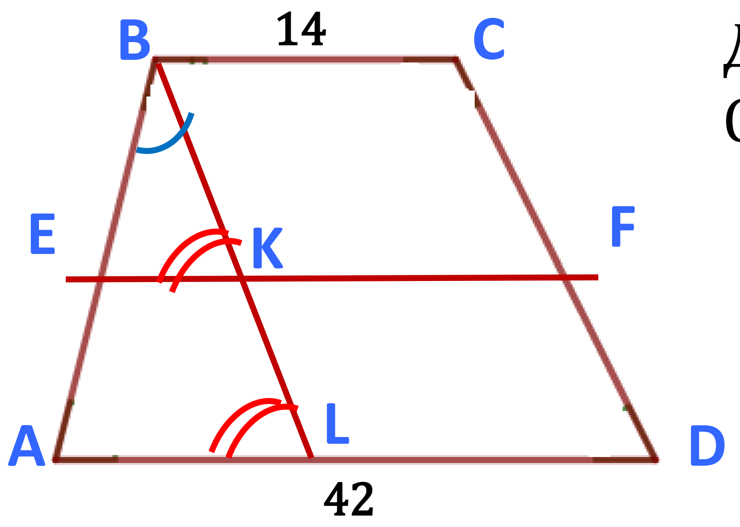
$∟1 + ∟3 = 90^0$, следовательно ∟AFB=90^0

4) По теореме Пифагора: $AB^2=AF^2+BF^2$

$AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

Ответ: $AB = 17$

7. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=42, BC=14, CF:DF=4:3.



Дано: трапеция ABCD, AD||BC||EF, AD=42, BC=14, CF:DF=4:3

Найти: EF

Решение: 1)Пусть CF=4x, DF=3x

Через точку B проведём прямую, параллельную CD;

2) AL=42-14=28, BL=CD= 4x+3x=7x;

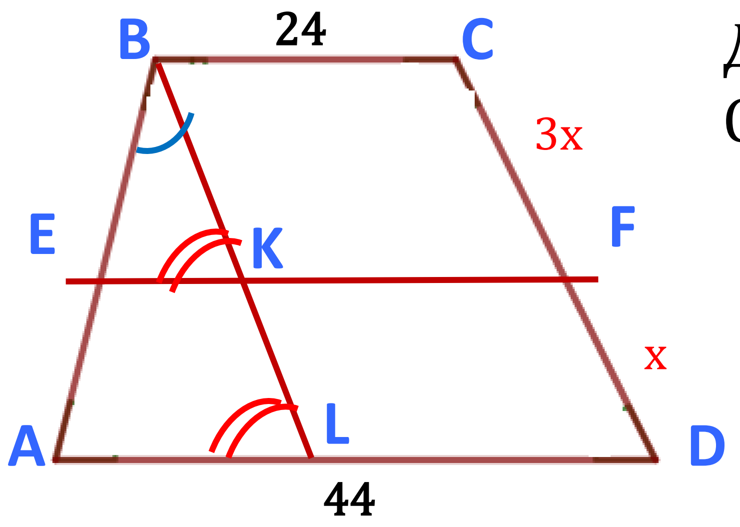
3) $\Delta ABL \sim \Delta EBK$ по 2 углам ($\angle B$ – общий, $\angle BKE = \angle BLA$ по свойству соответственных углов при AD||EF и секущей BL);

4) $\frac{AL}{EK} = \frac{BL}{BK}$; $\frac{28}{EK} = \frac{7x}{4x}$; $EK = \frac{28 \cdot 4}{7} = 16$

EF=EK+KL=16+28=44

Ответ: EF=44

8. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=44, BC=24, CF:DF=3:1.



Дано: трапеция ABCD, AD||BC||EF, AD=44, BC=24, CF:DF=3:1

Найти: EF

Решение: 1)Пусть CF=3x, DF=x

Через точку B проведём прямую, параллельную CD;

2) AL=44-24=20, BL=CD=3x+x=4x;

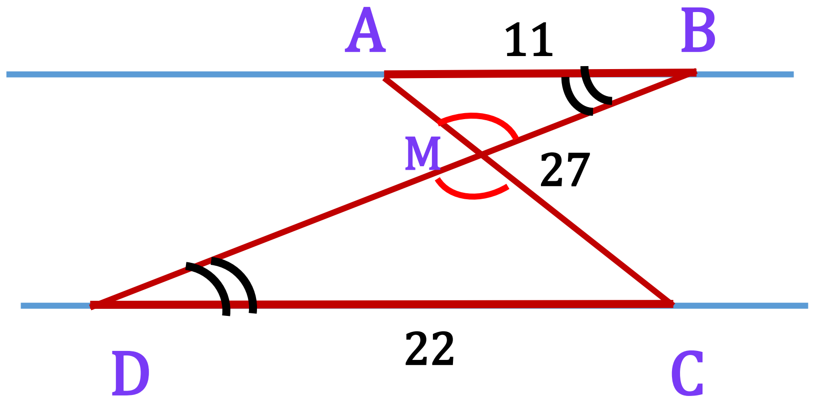
3) ΔABL∾ΔEBK по 2 углам (∟B – общий, ∟BKE=∟BLA по свойству соответственных углов при AD||EF и секущей BL);

4) $\frac{AL}{EK}=\frac{BL}{BK}$; $\frac{20}{EK}=\frac{4x}{3x}$; $EK=\frac{20\cdot3}{4}=15$

EF=EK+KL=15+20=35

Ответ: EF=35

2. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=11, DC=22, AC=27



Дано: $AB \parallel DC$, AC и BD пересекаются в точке M, AB=11, DC=22, AC=27

Найти: MC

Решение:

1) Рассмотрим Δ AMB и ΔCMD:
∟ AMB= ∟CMD по свойству вертикальных углов,
∟MDC = ∟ABM по свойству накрест лежащих углов при $AB \parallel DC$ и секущей **BD**

$\xRightarrow{\text{по 2 Углам}}$ Δ AMB∾ΔCMD

2) $\boxed{\frac{AB}{DC}} = \boxed{\frac{AM}{MC}} = \frac{MB}{MD}$

3) Пусть AM=x, MC=27-x

$$\frac{11}{22} = \frac{x}{27-x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{27-x}$$

2x = 27-x
2x+x = 27
3x = 27
x = 9

MC=27-x = 27-9
MC=18

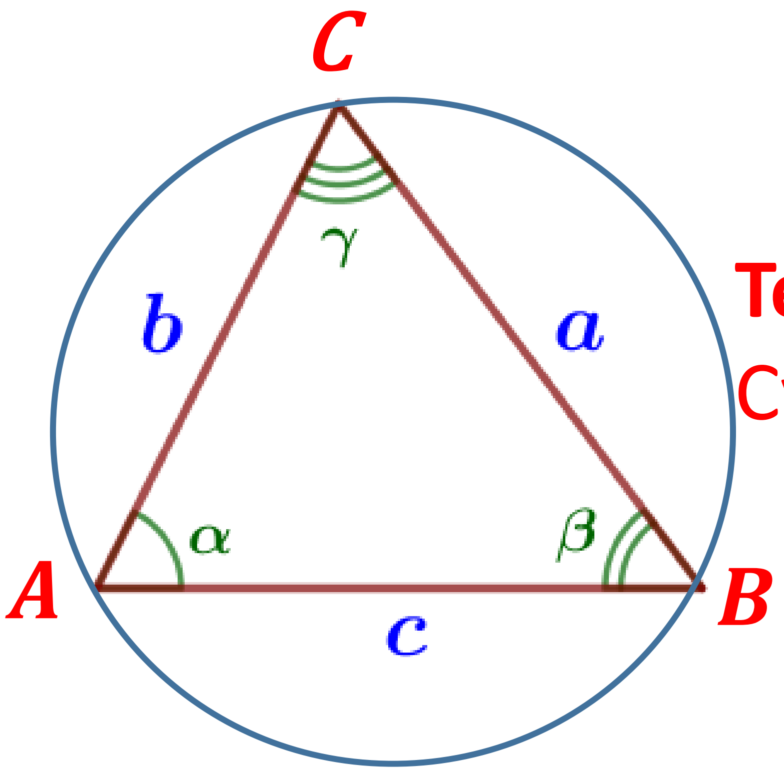
Ответ: 18

Задание 23. Задачи на вычисления.

ОГЭ по математике. 9 класс. 2022 год.

Треугольник.

Задание 23. Задачи на вычисление.



Теория к задаче:

Теорема о сумме углов треугольника:

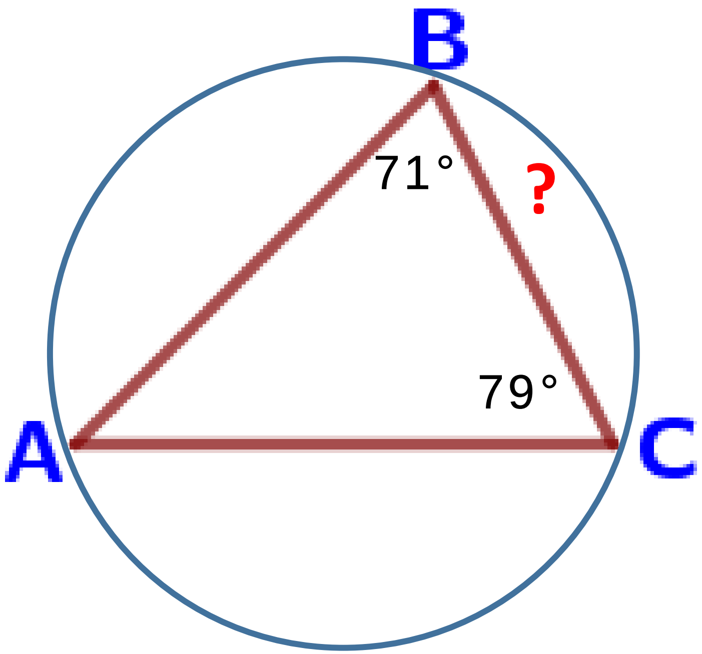
Сумма углов треугольника равна 180^0

Теорема синусов:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$$

1. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



Дано: ΔABC, ∟B=71⁰, ∟C=79⁰,

окружность описана около ΔABC, R=8

Найти: BC

Решение:

1) По теореме о сумме углов треугольника:

Сумма углов треугольника равна 180^0

∟A = 180^0 - (∟B+∟C) =

= 180^0 - (71^0+79^0) = 180^0 - 150^0 = 30^0

2) По теореме синусов: $\frac{BC}{sinA} = 2R$

2) Теорема синусов: Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов: $\boxed{\frac{BC}{sinA}} = \frac{AC}{sinB} = \frac{AB}{sinC} = \boxed{2R}$

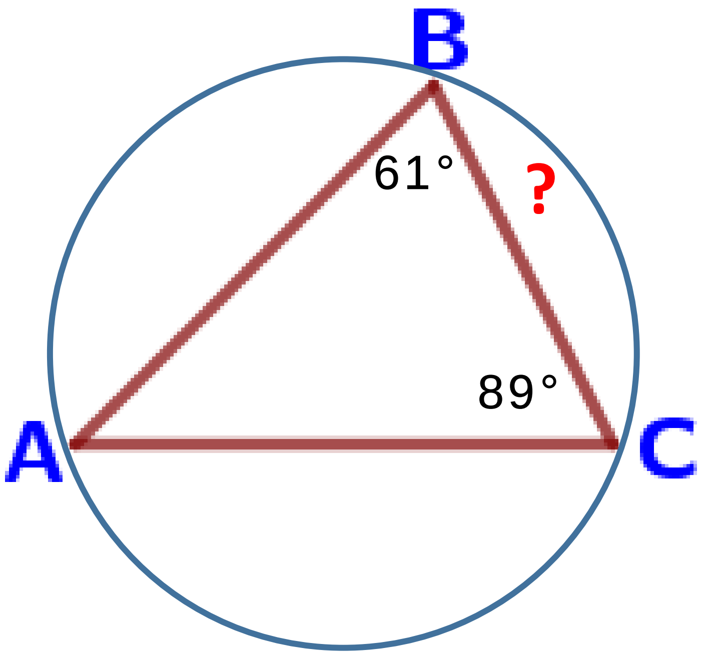
$\frac{BC}{sin30^0} = 2 \cdot 8$

$\frac{BC}{0,5} = 16$

BC = 16·0,5 = 8.

Ответ: BC = 8

2. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 10.



Дано: ΔABC, ∟B=61⁰, ∟C=89⁰,
окружность описана около ΔABC, R=10

Найти: BC

Решение:

1) По теореме о сумме углов треугольника:

∟A = 180⁰ - (∟B+∟C) =

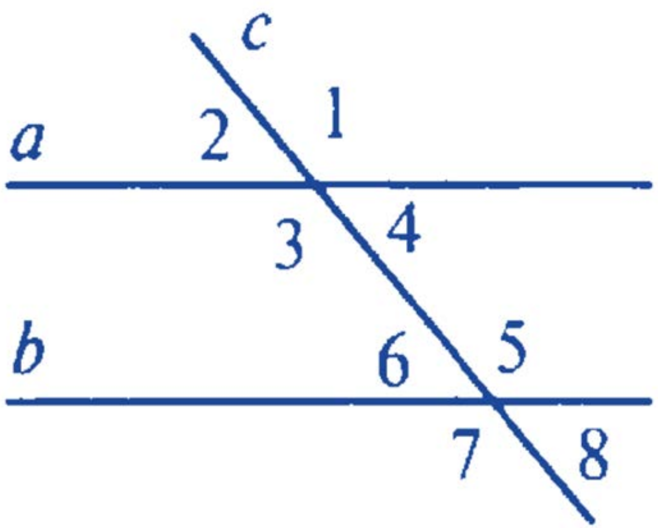
= 180⁰ - (61⁰+89⁰) = 180⁰ - 150⁰ = 30⁰

2) По теореме синусов: $\frac{BC}{sinA} = 2R$

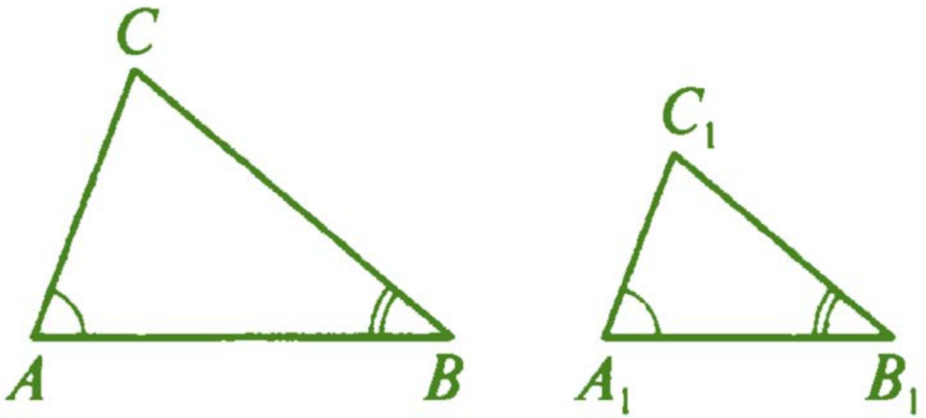
$BC = 2R\ sinA = 2 \cdot 10\ sin30^0 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10$

Ответ: BC = 10

Теория к задаче:



Если a||b и c – секущая, то соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$



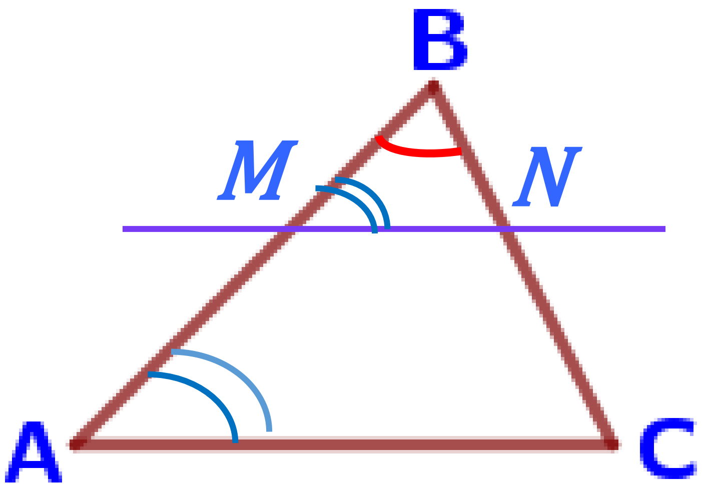
$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$,

если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$

и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

4. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=17, AC=51, NC=32.



Дано: ΔABC, MN||AC, MN=17, AC=51, NC=32.

Найти: BN

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC и ΔMBN:

∟B – общий

∟BMN = ∟BAC (по свойству соответственных углов при прямых AC||MN и секущей AB)

ПО 2 УГЛАМ ⇒ ΔABC ∽ ΔMBN

2) $\frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN}$

Пусть BN = x, BC = x+32

$\frac{51}{17} = \frac{x+32}{x}$

17(x+32) = 51x

17x + 544 = 51x

51x -17x = 544

34x = 544

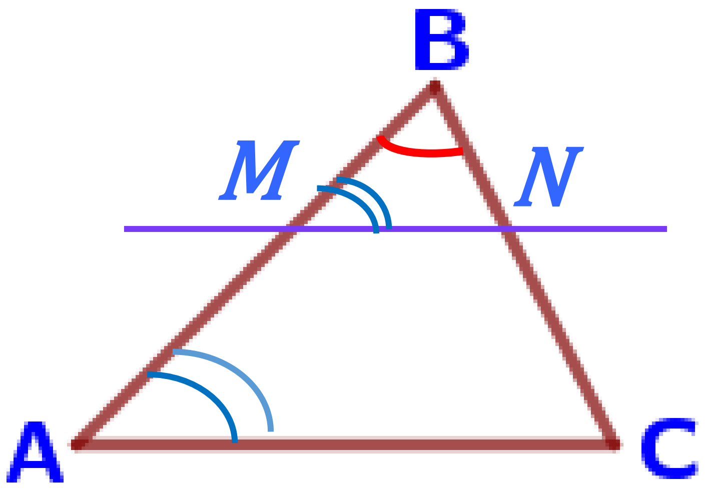
x = 544: 34

x = 16

BN = 16

Ответ: BN=16

5. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=13, AC=65, NC=28.



Дано: ΔABC, MN||AC, MN=13, AC=65, NC=28.

Найти: BN

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC и ΔMBN:

∟B – общий

∟BMN = ∟BAC (по свойству соответственных углов при прямых AC||MN и секущей AB)

по 2 углам ⇒ ΔABC ∽ ΔMBN

2) $\frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN}$

Пусть BN = x, BC = x+28

$\frac{65}{13} = \frac{x+28}{x}$

13(x+28) = 65x

13x + 364 = 65x

65x -13x = 364

52x = 364

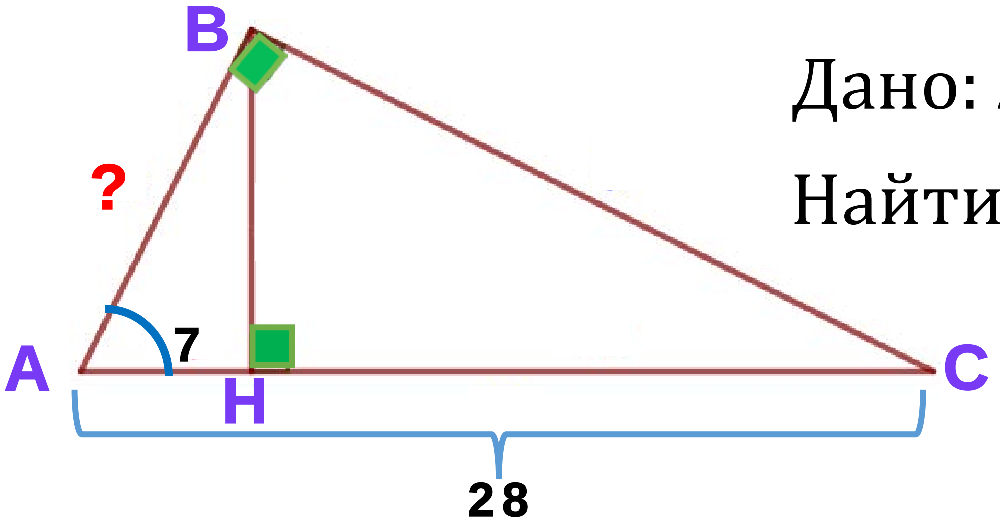
x = 364 : 52

x = 7

BN = 7

Ответ: BN=7

7. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=7, AC=28.



Дано: ΔABC, $\angle B=90^0$ AH=7, AC=28

Найти: AB

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC и ΔAHB:

$\angle H = \angle B = 90^{0}$ по условию

$\angle A$ - общий угол

ПО 2 УГЛАМ ⇒ ΔABC ∽ ΔAHB:

2) $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH}$

$\frac{28}{AB} = \frac{AB}{7}$

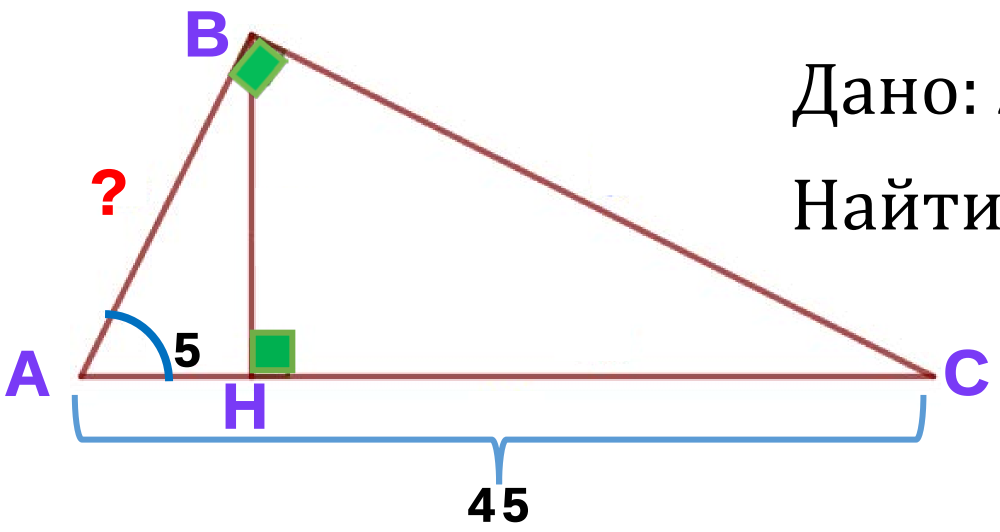
$AB \cdot AB = 28 \cdot 7$

$AB^2 = 28 \cdot 7$

$AB = \sqrt{28 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 = 14$

Ответ: AB = 14

8. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=5, AC=45.



Дано: ΔABC, $\angle B = 90^0$ $AH = 5$, $AC = 45$

Найти: AB

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC и ΔAHB:

$\angle H = \angle B = 90^{\,0}$ по условию

$\angle A$ - общий угол

ПО 2 УГЛАМ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta AHB$:

2) $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AH}$

$\dfrac{45}{AB} = \dfrac{AB}{5}$

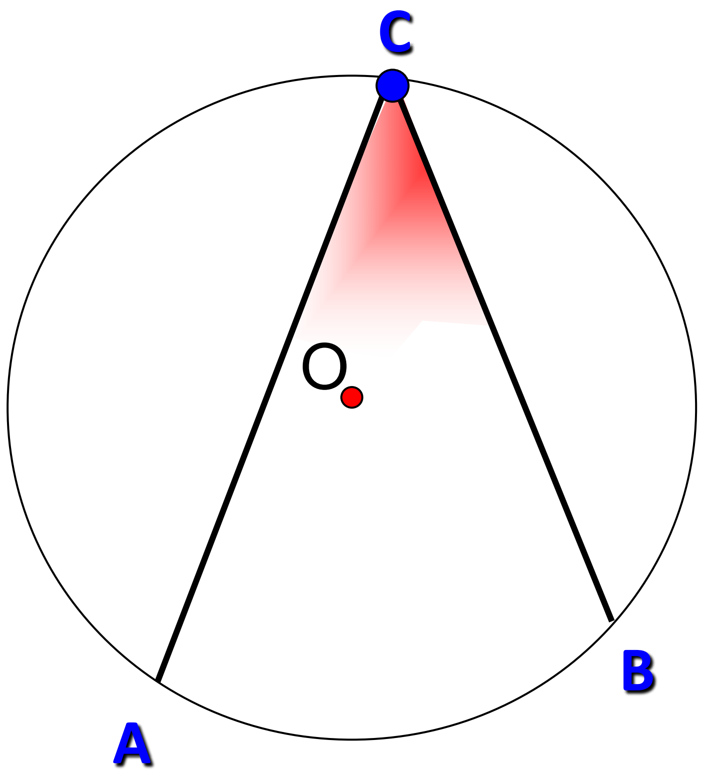
$AB \cdot AB = 45 \cdot 5$

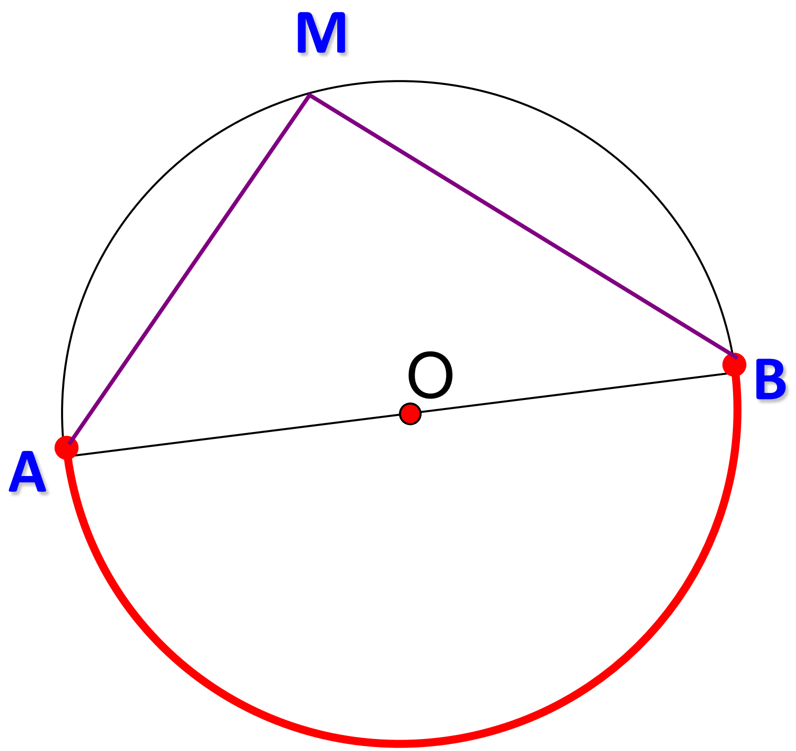
$AB^2 = 45 \cdot 5$

$AB = \sqrt{45 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5 = 15$

Ответ: $AB = 15$

Теория к задаче:

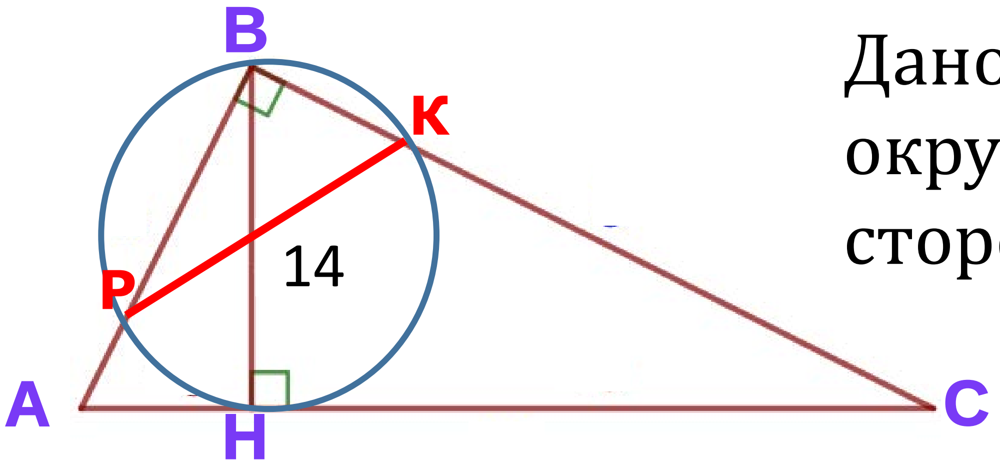




Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.

10. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если BH=14.



Дано: ΔABC, $\angle B=90^0$, $BH=14$, $BH\perp AC$, окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K

Найти: PK

Решение:

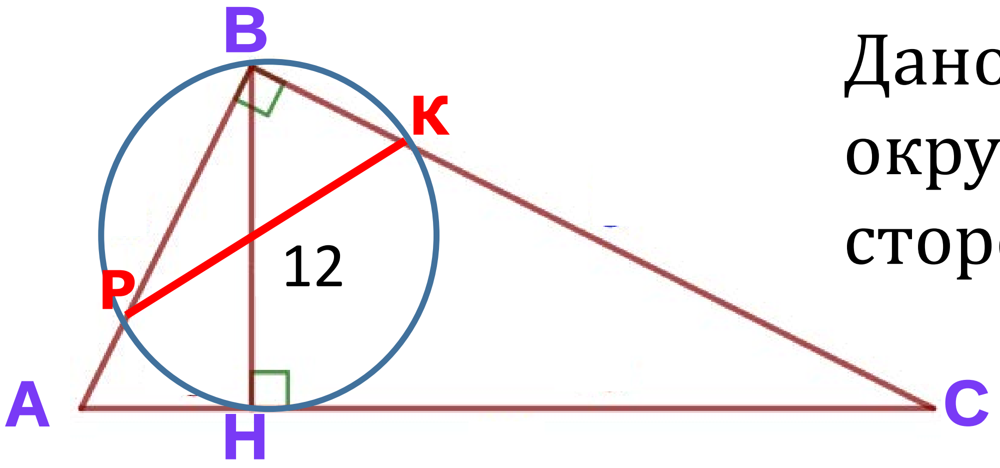
$\angle PBK$ вписанный, опирается на дугу PHK;

$\angle PBK = 90^0$, следовательно дуга $PHK = 180^0$;

PK – диаметр окружности, $PK = 14$

Ответ: PK = 14

11. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если BH=12.



Дано: ΔABC, $\angle B = 90^0$, $BH = 12$, $BH \perp AC$, окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K

Найти: PK

Решение:

$\angle PBK$ вписанный, опирается на дугу PHK;

$\angle PBK = 90^o$, следовательно дуга $PHK = 180^o$;

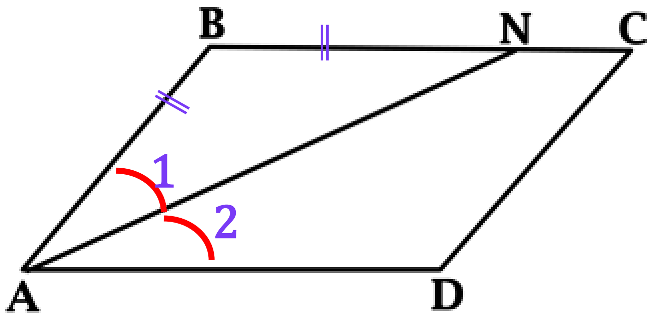
PK – диаметр окружности, $PK = 12$

Ответ: PK = 12

Параллелограмм.

Задание 23. Задачи на вычисления.

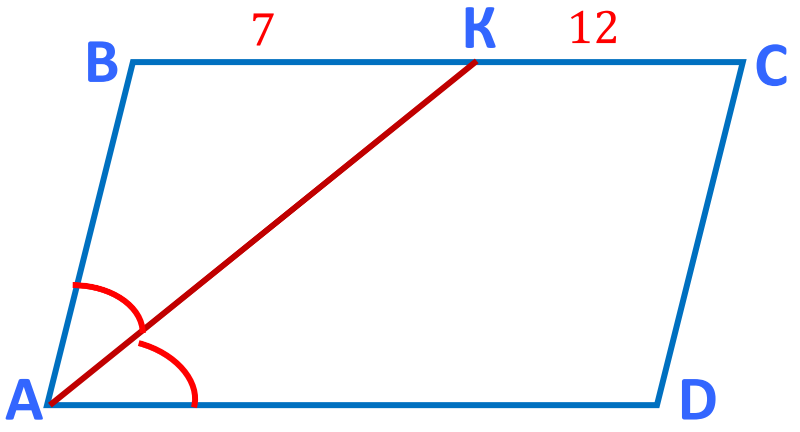
Теория к задаче:



Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

∟1= ∟ 2, следовательно ΔABN – равнобедренный и AB= AN

1. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если ВК=7, СК=12.



Дано: параллелограмм ABCD, АК – биссектриса, ВК=7, СК=12

Найти: периметр параллелограмма

Решение:

1) Биссектриса АК отсекает равнобедренный треугольник, АВ=ВК=7;

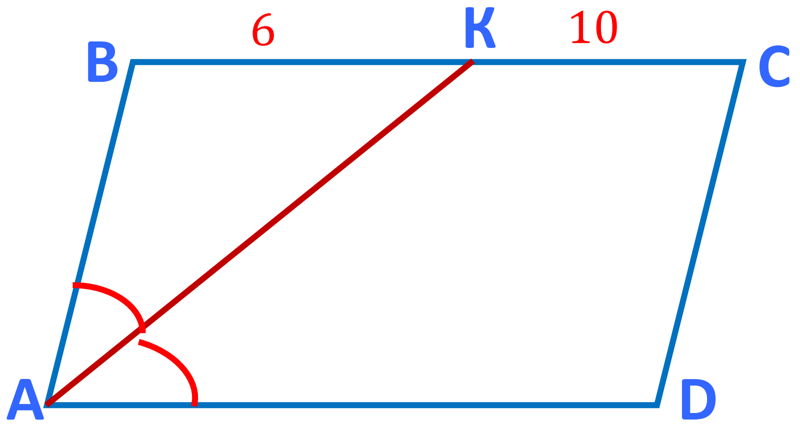
2) $BC = AD = 7 + 12 = 19$

$AB = DC = 7$

3) $P_{ABCD} = 2(AB+BC) = 2(7+19) = 2 \cdot 26 = 52$

Ответ: 52

2. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если ВК=6, СК=10.



Дано: параллелограмм ABCD, АК – биссектриса, ВК=6, СК=10

Найти: периметр параллелограмма

Решение:

1) Биссектриса АК отсекает равнобедренный треугольник, АВ=ВК=6;

2) $BC = AD = 6 + 10 = 16$

$AB = DC = 6$

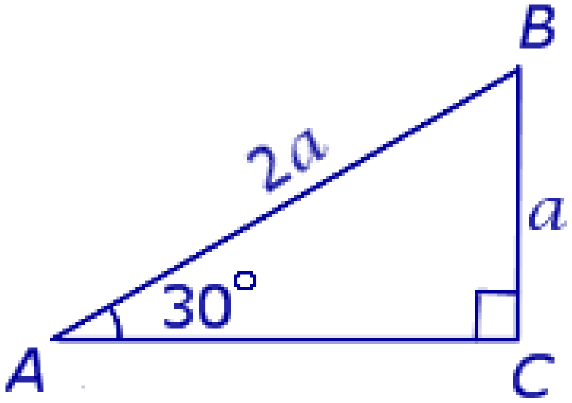
3) $P_{ABCD} = 2(AB+BC) = 2(6+16) = 2 \cdot 22 = 44$

Ответ: 44

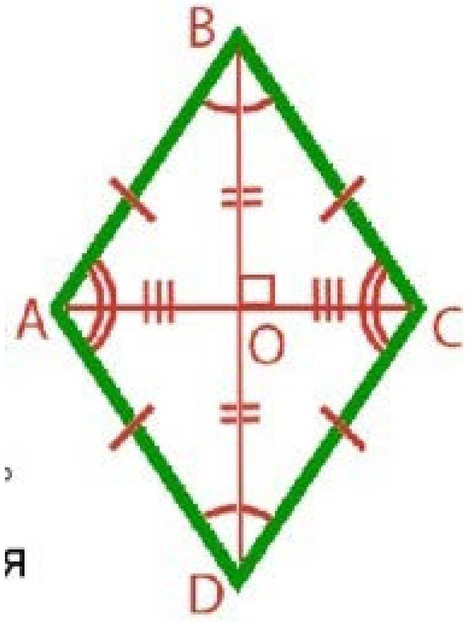
Ромб.

Задание 23. Задачи на вычисление.

Теория к задаче:

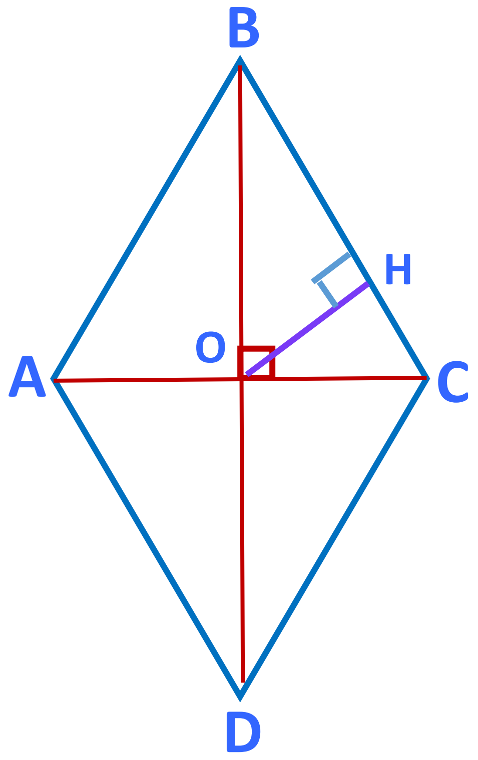


Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.



Диагонали являются биссектрисами его углов: $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BCA = \angle ACD$, $\angle ADB = \angle BDC$

1. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.



Дано: ромб ABCD, OH⊥BC, OH=15, AC=60

Найти: углы ромба

Решение:

1) Рассмотрим ΔCOH: $\llcorner H=90^0$, $OC=\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 60 = 30$

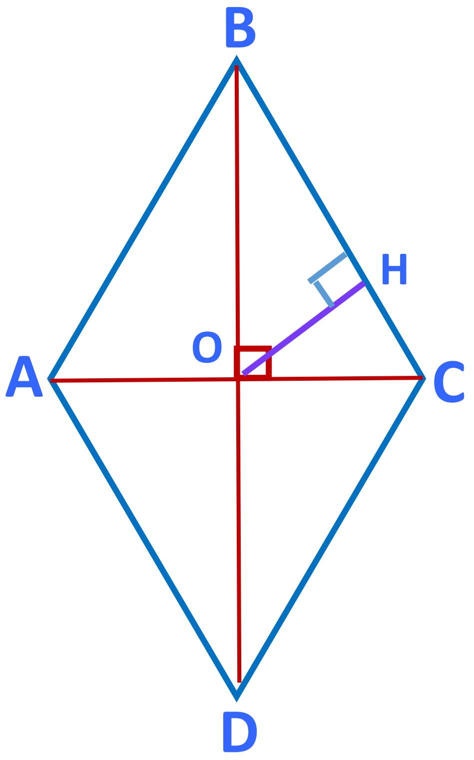
$OH=15$, $OC=30$, $OH=\frac{1}{2}OC$, следовательно $\llcorner OCH=30^0$

2) $\llcorner BCD = \llcorner BAD = 2\cdot 30^0 = 60^0$

$\llcorner ABC = \llcorner ADC = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Ответ: 60^0, 60^0, 120^0, 120^0

2. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



Дано: ромб ABCD, OH⊥BC, OH=17, AC=68

Найти: углы ромба

Решение:

1) Рассмотрим ΔCOH: $\angle H=90^0$, $OC=\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 68 = 34$

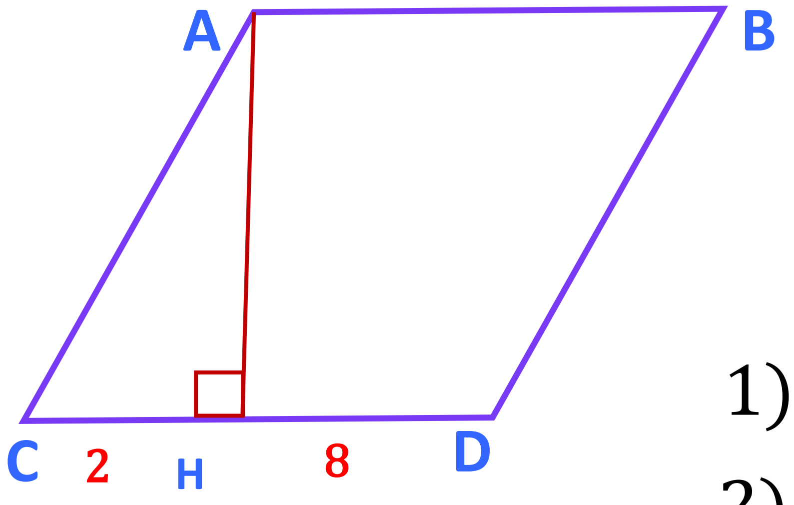
$OH=17$, $OC=34$, $OH=\frac{1}{2}OC$, следовательно $\angle OCH=30^0$

2) $\angle BCD = \angle BAD = 2\cdot 30^0 = 60^0$

$\angle ABC = \angle ADC = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Ответ: 60^0, 60^0, 120^0, 120^0

4. Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=8 и CH=2. Найдите высоту ромба.



Дано: ромб ABCD, $AH \perp CD$, DH=8 и CH=2

Найти: AH

Решение:

1) $CD = CH + HD = 2 + 8 = 10$

2) Рассмотрим ΔCAH: $\angle H = 90^0$, AC=10, CH=2

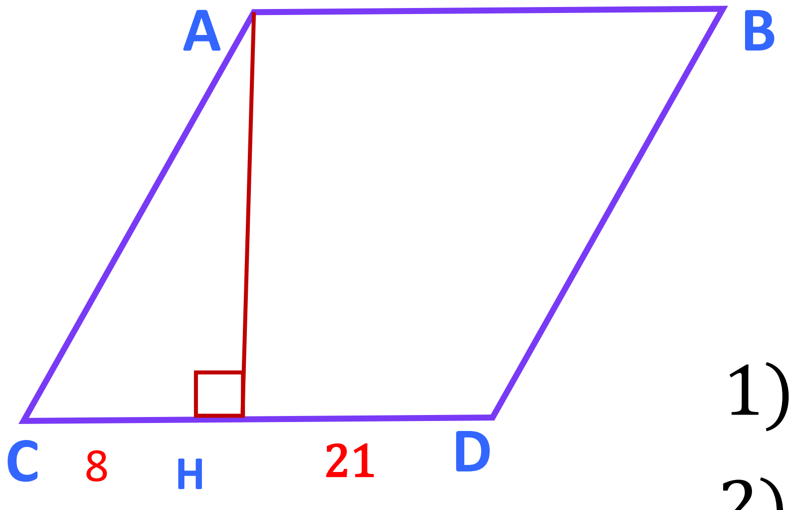
По теореме Пифагора: $AC^2 = AH^2 + CH^2$

$AH^2 = AC^2 - CH^2$

$AH = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{100 - 4} = \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AH = 4\sqrt{6}$

5. Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=21 и CH=8. Найдите высоту ромба.



Дано: ромб ABCD, $AH \perp CD$, DH=21 и CH=8

Найти: AH

Решение:

1) $CD = CH + HD = 21 + 8 = 29$

2) Рассмотрим ΔCAH: $\angle H = 90^0$, AC=29, CH=8

По теореме Пифагора: $AC^2 = AH^2 + CH^2$

$AH^2 = AC^2 - CH^2$

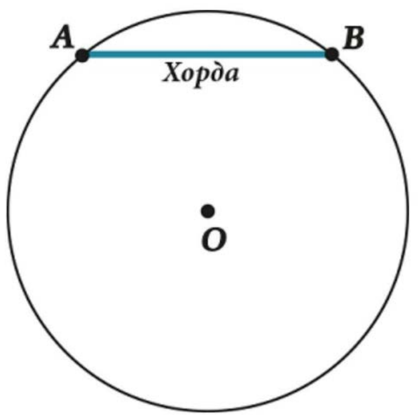
$AH = \sqrt{29^2 - 8^2} = \sqrt{(29-8)(29+8)} = \sqrt{21 \cdot 37} = \sqrt{777}$

Ответ: $AH = \sqrt{777}$

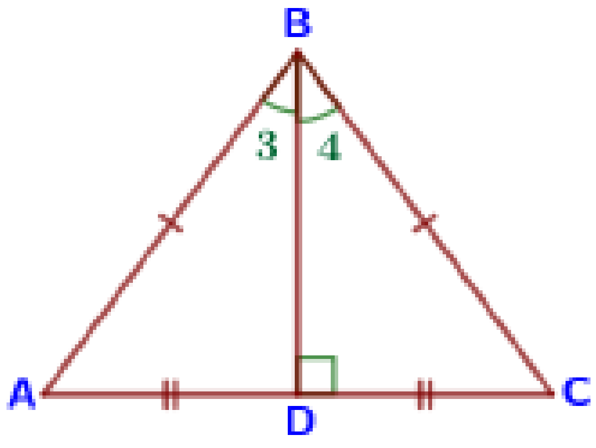
Окружность.

Задание 23. Задачи на вычисления.

Теория к задаче:



АВ - хорда окружности – отрезок, соединяющий две точки на окружности.



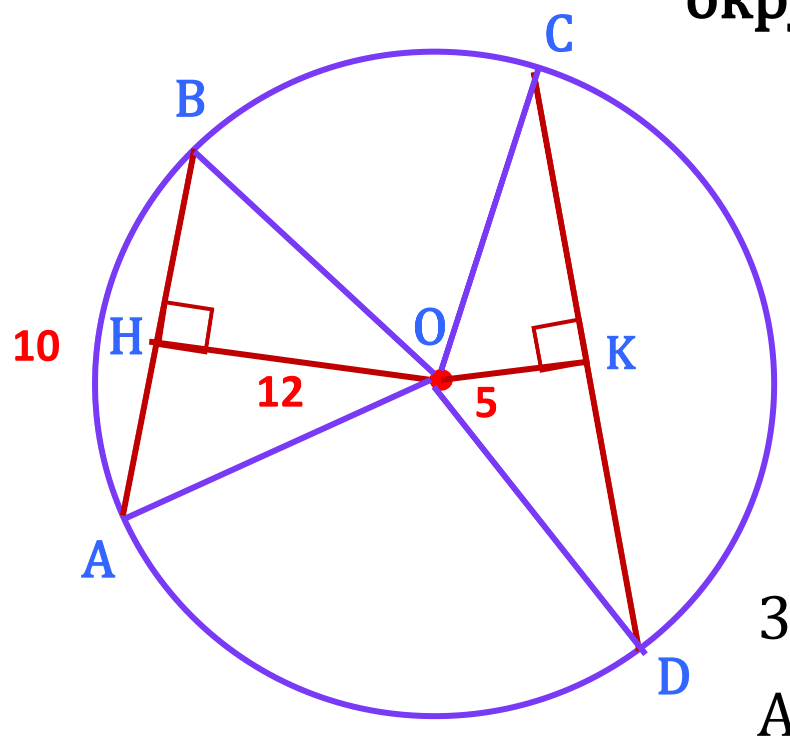
В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой:

BD – биссектриса ($\angle 3 = \angle 4$),

BD – медиана ($AD = CD$),

BD – высота ($BD \perp AC$).

1. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=10, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5.



Дано: окружность с центром в т.O, AB, CD – хорды, AB=10, OH⊥AB, OK⊥CD, OH=12, OK=5

Найти: OK

Решение:

1) OB=OA=R, ΔAOB – равнобедренный;

2) OH⊥AB, OH – высота и медиана по свойству равнобедренного треугольника, AH=BH=5;

3) ΔAOH, ∟H=90^0, по теореме Пифагора: $AO^2=AH^2+OH^2$,

$AO=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

4) OC=OD=R, ΔCOD – равнобедренный;

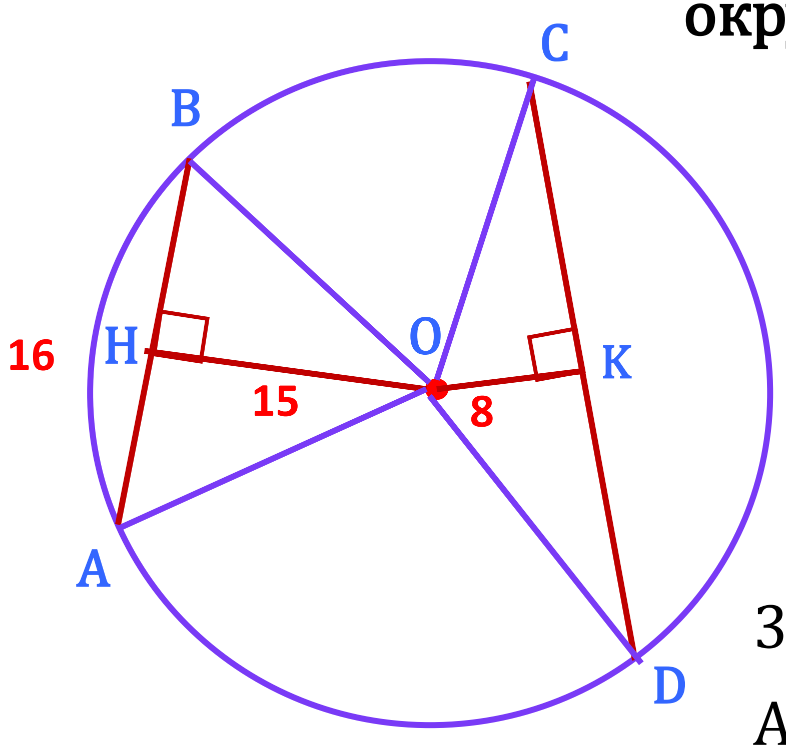
5) ΔCOK, ∟K=90^0, по теореме Пифагора: $CK^2=OC^2-OK^2$,

$CK=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$

6) CD=2CK=2·12=24

Ответ: CD=24

2. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=16, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 15 и 8.



Дано: окружность с центром в т.O, AB, CD – хорды, AB=16, OH⊥AB, OK⊥CD, OH=15, OK=8

Найти: OK

Решение:

1) OB=OA=R, ΔAOB – равнобедренный;

2) OH⊥AB, OH – высота и медиана по свойству равнобедренного треугольника, AH=BH=8;

3) ΔAOH, $\angle H=90^0$, по теореме Пифагора: $AO^2=AH^2+OH^2$,

$AO=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$

4) OC=OD=R, ΔCOD – равнобедренный;

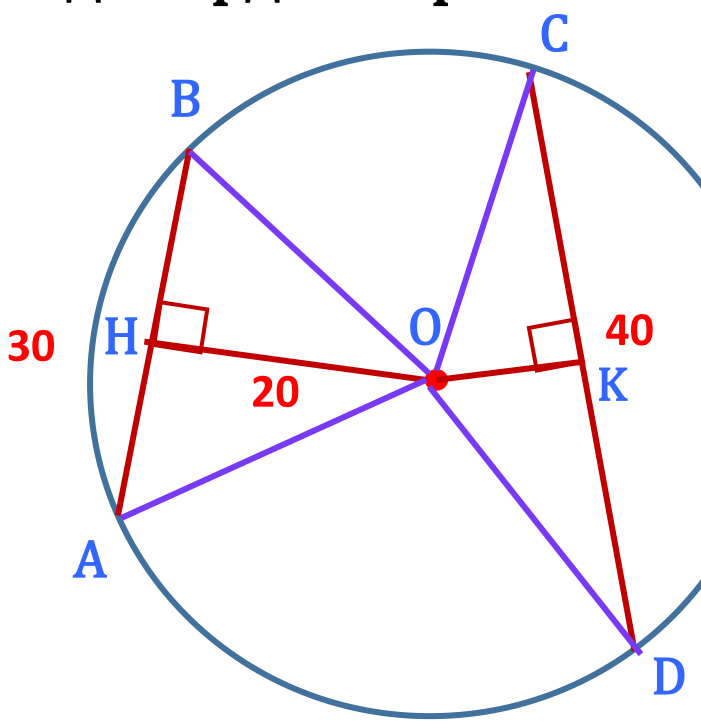
5) ΔCOK, $\angle K=90^0$, по теореме Пифагора: $CK^2=OC^2-OK^2$,

$CK=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{289-64}=\sqrt{225}=15$

6) $CD=2CK=2\cdot 15=30$

Ответ: CD=30

4. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если AB=30, CD=40, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.



Дано: окружность с центром в т.O, AB, CD – хорды, AB=30, CD=40, OH⊥AB, OK⊥CD, OH=20

Найти: OK

Решение:

1) OB=OA=R, ΔAOB – равнобедренный;

2) OH⊥AB, OH – высота и медиана по свойству равнобедренного треугольника, AH=BH=15;

3) ΔAOH, ∟H=90^0, по теореме Пифагора: $AO^2=AH^2+OH^2$,

$AO=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{225+400}=\sqrt{625}=25$

4) OC=OD=R, ΔCOD – равнобедренный, CK=DK=20

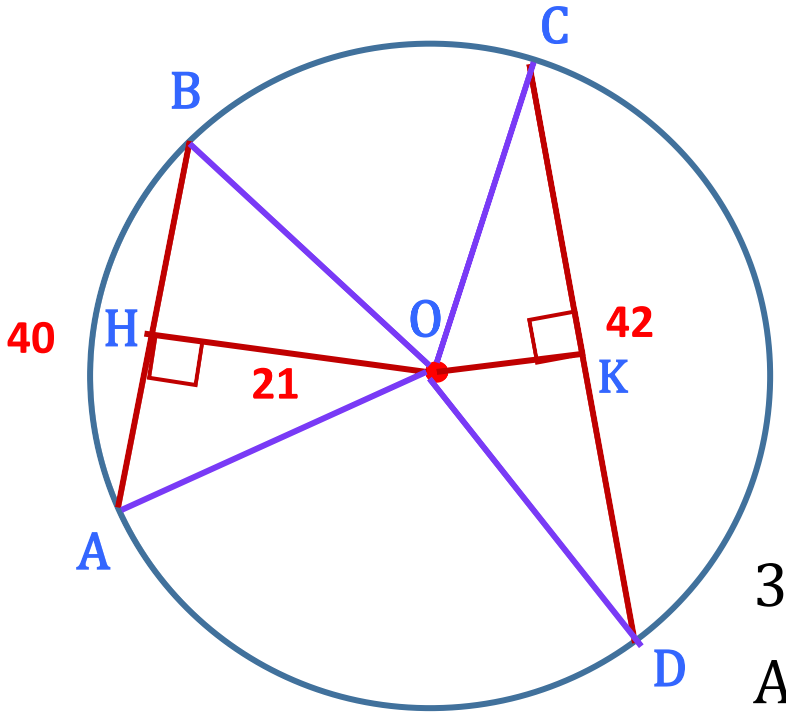
5) ΔCOK, ∟K=90^0, по теореме Пифагора: $OK^2=OC^2-CK^2$,

$CK=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{625-400}=\sqrt{225}=15$

6) CD=2CK=2·15=30

Ответ: CD=30

5. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если AB=40, CD=42, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 21.



Дано: окружность с центром в т.O, AB, CD – хорды, AB=40, CD=42, OH⊥AB, OK⊥CD, OH=21

Найти: OK

Решение:

1) OB=OA=R, ΔAOB – равнобедренный;

2) OH⊥AB, OH – высота и медиана по свойству равнобедренного треугольника, AH=BH=20;

3) ΔAOH, ∟H=90^0, по теореме Пифагора: $AO^2=AH^2+OH^2$,

$AO=\sqrt{21^2+20^2}=\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29$

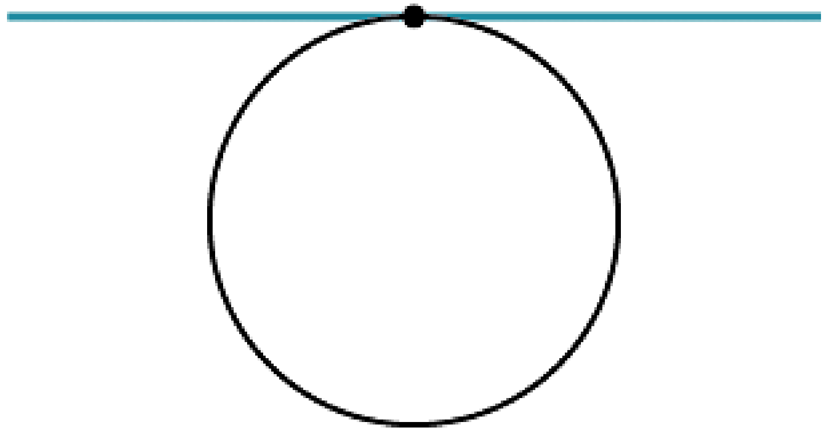
4) OC=OD=R, ΔCOD – равнобедренный, CK=DK=21

5) ΔCOK, ∟K=90^0, по теореме Пифагора: $OK^2=OC^2-CK^2$,

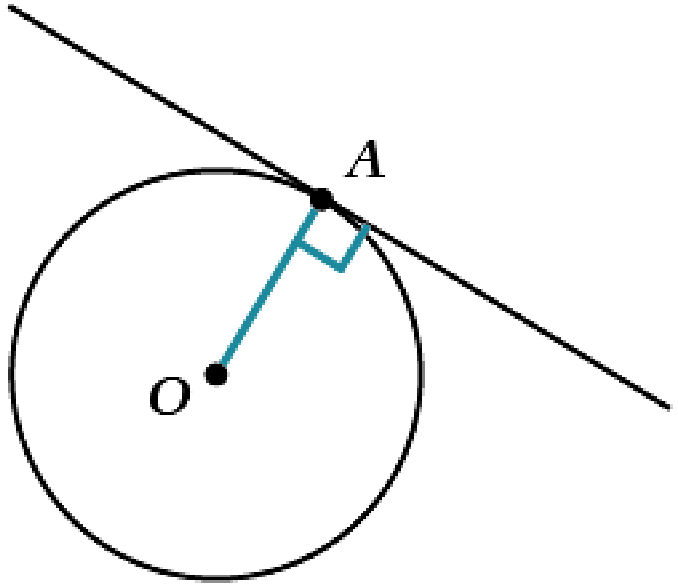
$OK=\sqrt{29^2-21^2}=\sqrt{841-441}=\sqrt{400}=20$

Ответ: OK=20

Теория к задаче:

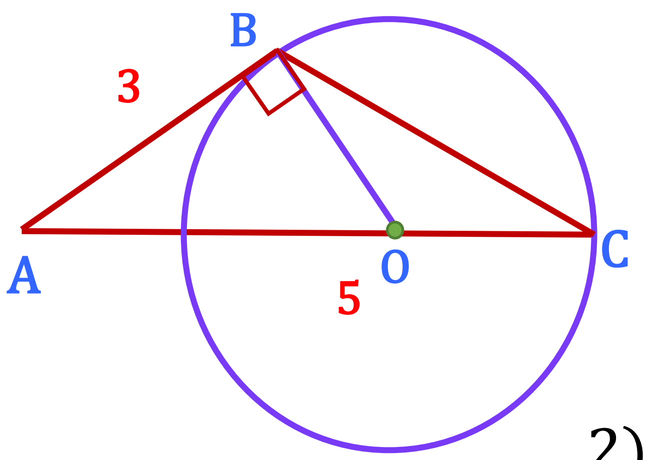


Касательная – *прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку.*



Касательная окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

7. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB=3, AC=5.



Дано: окружность с центром в т.O, AB=3, AC=5

Найти: диаметр окружности

Решение:

1) AO = AC – OC = 5 - R

2) OB – радиус окружности, проведённый в точку касания, OB⊥AB;

2) ΔAOB: $\angle B=90^0$, по теореме Пифагора: $AO^2=AB^2+OB^2$

$(5\text{-}R)^2= 3^2 + R^2$

$25 – 10R + R^2 = 9 + R^2$

$25 – 10R + R^2 - 9 - R^2 = 0$

$16 – 10R = 0$

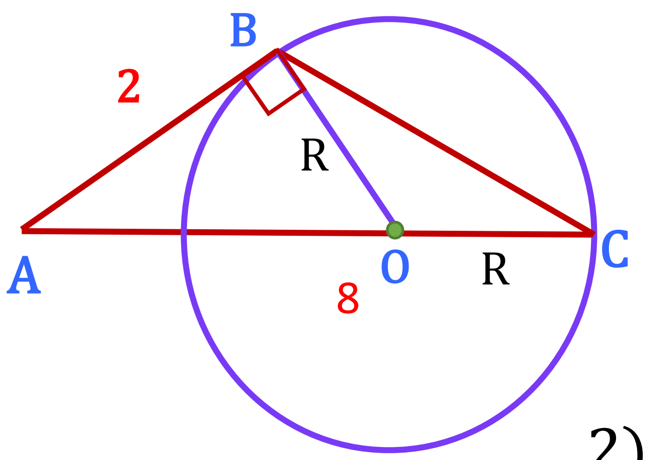
$10R = 16$

$R = 1{,}6$

$d = 2R= 2\cdot 1{,}6 = 3{,}2$

Ответ: 3,2

8. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB=2, AC=8.



Дано: окружность с центром в т.O, AB=2, AC=8

Найти: диаметр окружности

Решение:

1) AO = AC – OC = 8 - R

2) OB – радиус окружности, проведённый в точку касания, OB⊥AB;

2) ΔAOB: ∟B=90^0, по теореме Пифагора: $AO^2=AB^2+OB^2$

$(8\text{-}R)^2 = 2^2 + R^2$

$64 - 16R + R^2 = 4 + R^2$

$64 - 16R + R^2 - 4 - R^2 = 0$

$60 - 16R = 0$

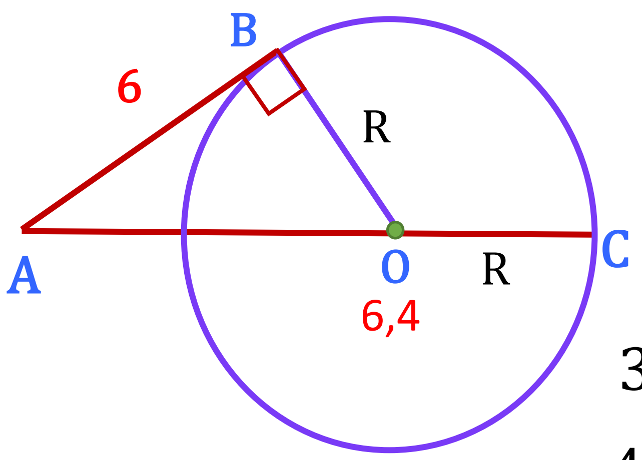
$16R = 60$

$R = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

$d = 2R = 2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5$

Ответ: 7,5

10. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 6,4, а AB=6.



Дано: окружность с центром в т.O, AB=6, d=6,4

Найти: AC

Решение: 1) $R=\frac{1}{2}d = 3,2$

2) OB – радиус окружности, проведённый в точку касания, OB⊥AB;

3) ΔAOB: $\llcorner B=90^0$, по теореме Пифагора: $AO^2=AB^2+OB^2$

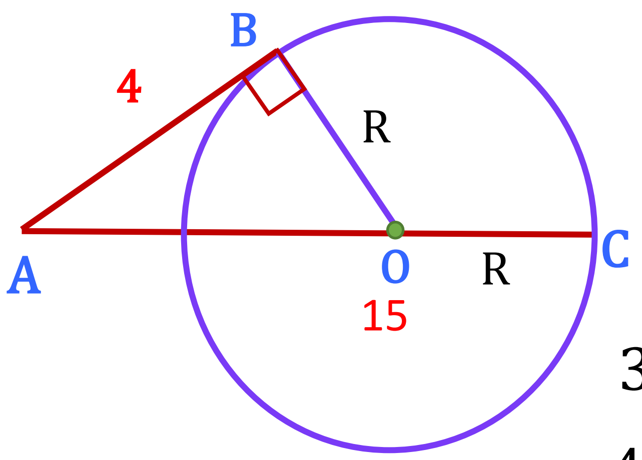
4) $AO^2= 6^2+ 3,2^2$

$AO= \sqrt{36 + 10,24} = \sqrt{46,24} = 6,8$

$AC = AO + OC = 6,8 + 3,2 = 10$

Ответ: 10

11. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 15, а AB=4.



Дано: окружность с центром в т.O, AB=4, d=15

Найти: AC

Решение: 1) $R=\frac{1}{2}d = 7{,}5$

2) OB – радиус окружности, проведённый в точку касания, $OB \perp AB$;

3) ΔAOB: $\llcorner B=90^0$, по теореме Пифагора: $AO^2=AB^2+OB^2$

4) $AO^2= 4^2+ 7{,}5^2$

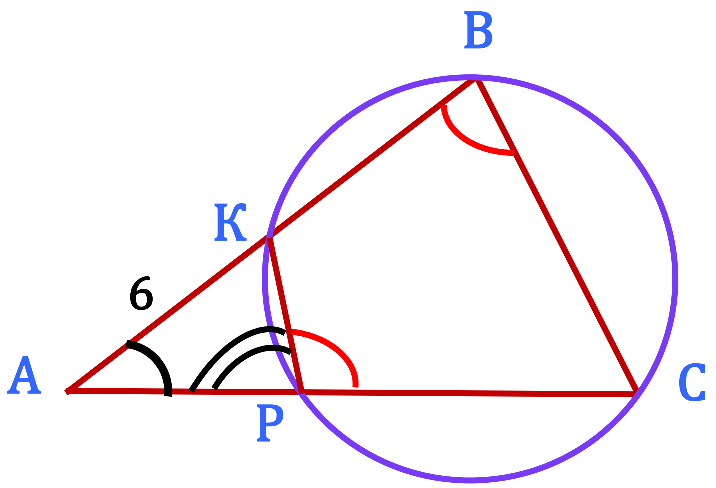
$AO= \sqrt{16+56{,}25} = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$

$AC = AO + OC = 8{,}5 + 7{,}5 = 16$

Ответ: 16

13. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если AK=6, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

Дано: ΔABC, окружность пересекает стороны AB и AC в точках K и P, окружность проходит через вершины B и C, AK=6, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.



Найти: KP

Решение:

1) Четырёхугольник KPCB вписан в окружность, значит сумма противоположных углов равна 180^0:
$\angle KBC + \angle KPC = 180^0$

2) $\angle APK$ и $\angle KPC$ – смежные, $\angle APK + \angle KPC = 180^0$;
Получим, что $\angle KBC = \angle APK$

3) Рассмотрим Δ APK и ΔABC: $\angle A$ – общий, $\angle ABC = \angle APK$ $\xrightarrow{\text{По 2 Углам}}$ Δ APK ∽ ΔABC

4) $\frac{AB}{AP} = \boxed{\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{KP}}$

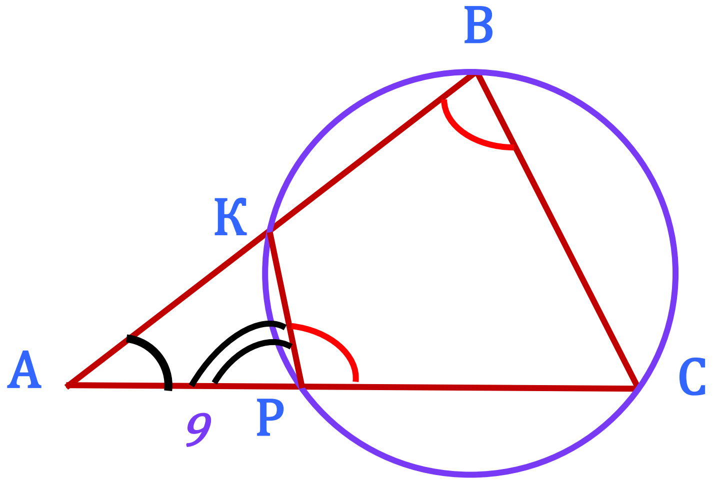
По условию, AC=1,5BC, получим равенство: $\frac{1{,}5BC}{6} = \frac{BC}{KP}$

$$KP = \frac{6 \cdot BC}{1{,}5BC} = 4$$

Ответ: 4

15. Окружность пересекает стороны АВ и АС треугольника АВС в точках К и Р соответственно и проходит через вершины В и С. Найдите длину отрезка КР, если АР=9, а сторона ВС в 3 раза меньше стороны АВ.

Дано: ΔАВС, окружность пересекает стороны АВ и АС в точках К и Р, окружность проходит через вершины В и С, АР=9, а сторона ВС в 3 раза меньше стороны АВ.



Найти: КР

Решение:

1) Четырёхугольник КРСВ вписан в окружность, значит сумма противоположных углов равна 180^0:
$\angle KBC + \angle KPC = 180^0$

2) $\angle APK$ и $\angle KPC$ – смежные, $\angle APK + \angle KPC = 180^0$;
Получим, что $\angle KBC = \angle APK$

3) Рассмотрим Δ АРК и ΔАВС: $\angle A$ – общий, $\angle ABC = \angle APK \xRightarrow{\text{По 2 Углам}} \Delta APK \sim \Delta ABC$

4) $\boxed{\dfrac{AB}{AP}} = \dfrac{AC}{AK} = \boxed{\dfrac{BC}{KP}}$

По условию, АВ=3ВС, получим равенство: $\dfrac{3BC}{9} = \dfrac{BC}{KP}$

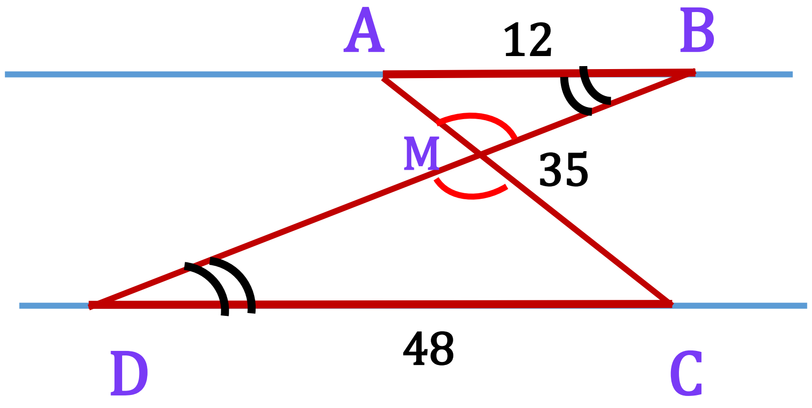
$KP = \dfrac{9 \cdot BC}{3BC} = 3$

Ответ: 3

Другое.

Задание 23. Задачи на вычисления.

1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=12, DC=48, AC=35.



Дано: AB ∥ DC, AC и BD пересекаются в точке M,
AB=12, DC=48, AC=35

Найти: MC

Решение:

1) Рассмотрим Δ AMB и ΔCMD:

∟AMB= ∟CMD по свойству вертикальных углов,

∟MDC = ∟ABM по свойству накрест лежащих углов при AB ∥ DC и секущей **BD**

$\xRightarrow{\text{по 2 Углам}}$ Δ AMB∾ΔCMD

2) $\boxed{\dfrac{AB}{DC}} = \boxed{\dfrac{AM}{MC}} = \dfrac{MB}{MD}$

3) Пусть AM=x, MC=35-x

$$\frac{12}{48} = \frac{x}{35-x}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{35-x}$$

$4x = 35\text{-}x$

$4x\text{+}x = 35$

$5x = 35$

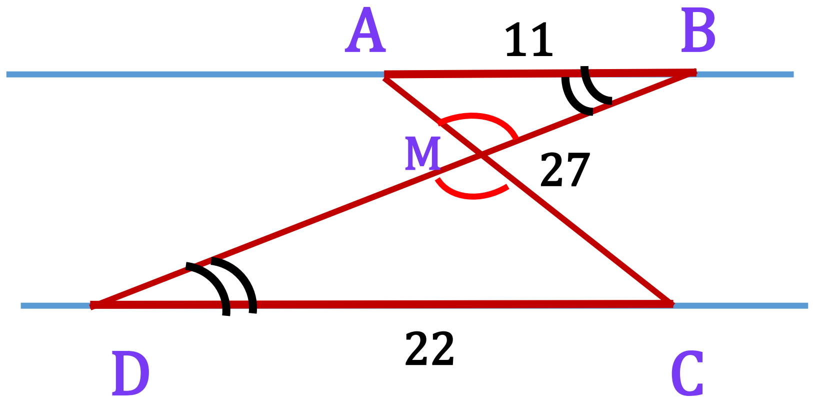
$x = 7$

MC=35-x = 35-7

MC=28

Ответ: 28

2. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=11, DC=22, AC=27



Дано: $AB \parallel DC$, AC и BD пересекаются в точке M, AB=11, DC=22, AC=27

Найти: MC

Решение:

1) Рассмотрим Δ AMB и ΔCMD:

∟ AMB= ∟CMD по свойству вертикальных углов,

∟MDC = ∟ABM по свойству накрест лежащих углов при $AB \parallel DC$ и секущей **BD**

$\xRightarrow{\text{по 2 Углам}}$ Δ AMB∾ΔCMD

2) $\boxed{\dfrac{AB}{DC}} = \boxed{\dfrac{AM}{MC}} = \dfrac{MB}{MD}$

3) Пусть AM=x, MC=27-x

$$\frac{11}{22} = \frac{x}{27 - x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{27 - x}$$

$2x = 27\text{-}x$

$2x+x = 27$

$3x = 27$

$x = 9$

MC=27-x = 27-9

MC=18

Ответ: 18