

09. Уравнения

Блок 1. ФИПИ

Примеры решений

Задание 1. Найдите корень уравнения.

1) $7x+6=3x$ $7x-3x=-6$ $4x=-6 \quad :4$ $x=\frac{-6}{4}$ $x=-1,5$ Ответ: -1,5	2) $3+4x=9x-11$ $4x-9x=-11-3$ $-5x=-14 \quad :(-5)$ $x=\frac{-14}{-5}$ $x=2,8$ Ответ: 2,8	3) $2(x+5)=-9$ <i>или</i> $2x+10=-9$ $2x=-9-10$ $2x=-19 \quad :2$ $x=-9,5$ $2(x+5)=-9 \quad :2$ $x+5=-4,5$ $x=-4,5-5$ $x=-9,5$ Ответ: -9,5
--	---	---

Задание 2. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

1) $x^2-1=0$ $x^2-1^2=0$ – разность квадратов $(x-1)(x+1)=0$ $x-1=0$ <i>или</i> $x+1=0$ $x=1$ $x=-1$ <div style="text-align: center;"><i>меньший корень</i></div> Ответ: -1	2) $9x^2=27x$ $9x^2-27x=0$ $9x(x-3)=0$ $9x=0 \quad :9$ <i>или</i> $x-3=0$ $x=0$ $x=3$ <div style="text-align: center;"><i>меньший корень</i></div> Ответ: 0
---	---

Задание 3. Решите уравнение $x^2-196=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2-196=0$$

$$x^2-14^2=0$$
 – разность квадратов
$$(x-14)(x+14)=0$$

$x-14=0$	$x+14=0$
$x=14$	$x=-14$

больший корень

Ответ: 14

Задание 4. Решите уравнение $x^2-3x-28=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$x^2-3x-28=0$ $a=1 \quad b=-3 \quad c=-28$ $D=b^2-4ac$ $D=(-3)^2-4 \cdot 1 \cdot (-28)=9+112=121$	$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{121}}{2 \cdot 1}=\frac{3+11}{2}=7$ $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{121}}{2 \cdot 1}=\frac{3-11}{2}=-4$ <div style="text-align: center;"><i>меньший корень</i></div> Ответ: -4
--	---

Задание 5. Решите уравнение $x^2 - 6x - 16 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = -16$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 10}{2} = 8$$

больший корень

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 10}{2} = -2$$

Ответ: 8

Задание 6. Решите уравнение $5x^2 - 7x + 2 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$5x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$a = 5 \quad b = -7 \quad c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = \frac{7 + 3}{10} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = \frac{7 - 3}{10} = 0,4 \quad \text{меньший корень}$$

Ответ: 0,4

Задание 7. Решите уравнение $2x^2 + 5x + 3 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$a = 2 \quad b = 5 \quad c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 1}{4} = -1 \quad \text{больший корень}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - 1}{4} = -1,5$$

Ответ: -1

09. Уравнения

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия (старый ОБЗ)

Примеры решений

Задание 1. Найдите корень уравнения.

$$1) \quad -9 + x = 3x - 7$$

$$x - 3x = -7 + 9$$

$$-2x = 2 \quad | :(-2)$$

$$x = 2 : (-2)$$

$$x = -1$$

Ответ: -1

$$2) \quad 3 - 4(3x - 5) = 12 - 7x$$

$$3 - 12x + 20 = 12 - 7x$$

$$-12x + 7x = 12 - 3 - 20$$

$$-5x = -11 \quad | :(-5)$$

$$x = \frac{-11}{-5}$$

$$x = 2,2$$

Ответ: 2,2

$$3) \quad x - 1 - 2(x + 2) = -3(1 - x) + 8$$

$$x - 1 - 2x - 4 = -3 + 3x + 8$$

$$x - 2x - 3x = -3 + 8 + 1 + 4$$

$$x - 2x - 3x = -3 + 8 + 1 + 4$$

$$-4x = 10 \quad | :(-4)$$

$$x = \frac{10}{-4}$$

$$x = -2,5$$

Ответ: -2,5

$$\begin{aligned}
 4) \quad (x+2)^2 &= (7-x)^2 \\
 x^2 + 4x + 4 &= 49 - 14x + x^2 \\
 x^2 + 4x + 14x - x^2 &= 49 - 4 \\
 18x &= 45 \quad |:18 \\
 x &= \frac{45}{18} \quad x = 2,5 \\
 (x+2)^2 &= (x+2)(x+2) = \\
 x^2 + 2x + 2x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\
 (7-x)^2 &= (7-x)(7-x) = \\
 = 49 - 7x - 7x + x^2 &= 49 - 14x + x^2
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (x+2)^2 &= (7-x)^2 \\
 \begin{cases} x+2 = +(7-x) \\ x+2 = -(7-x) \end{cases} \\
 \begin{cases} x+x = 7-2 \\ x+2 = -7+x \end{cases} \\
 \begin{cases} 2x = 5 \quad |:2 \\ x-x = -7-2 \end{cases} \\
 \begin{cases} x = 2,5 \\ 0x = -9 \text{ (корней нет)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: 2,5

$$\begin{aligned}
 5) \quad (x-4)^2 + (x-1)^2 &= 2x^2 \\
 x^2 - 8x + 16 + x^2 - 2x + 1 &= 2x^2 \\
 x^2 - 8x + x^2 - 2x - 2x^2 &= -16 - 1 \\
 -10x &= -17 \quad |:(-10) \\
 x &= \frac{-17}{-10} \quad x = 1,7 \quad \text{Ответ: } 1,7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad 2x^2 + 3x - 8 &= 5x^2 + 4x - (-5 + 3x^2) \\
 2x^2 + 3x - 8 &= 5x^2 + 4x + 5 - 3x^2 \\
 2x^2 + 3x - 5x^2 - 4x + 3x^2 &= 5 + 8 \\
 2x^2 + 3x - 5x^2 - 4x + 3x^2 &= 5 + 8 \\
 -x &= 13 \quad |:(-1) \\
 x &= -13 \quad \text{Ответ: } -13
 \end{aligned}$$

Задание 2. Найдите корень уравнения.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{x^{(18)}}{1} - \frac{x}{18} &= -\frac{34^{(2)}}{9} \\
 \frac{18x}{18} - \frac{x}{18} &= -\frac{68}{18} \quad | \cdot 18 \\
 18x - x &= -68 \\
 17x &= -68 \quad |:17 \\
 x &= -68:17 \\
 x &= -4
 \end{aligned}$$

Ответ: -4

$$\begin{aligned}
 2) \quad -5 + \frac{x}{3} &= \frac{x+8}{6} \\
 \frac{-5^{(6)}}{1} + \frac{x^{(2)}}{3} &= \frac{(x+8)}{6} \\
 \frac{-30}{6} + \frac{2x}{6} &= \frac{x+8}{6} \quad | \cdot 6 \\
 -30 + 2x &= x + 8 \\
 2x - x &= 8 + 30 \\
 x &= 38
 \end{aligned}$$

Ответ: 38

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{7x+2}{4} + 1 &= \frac{5x}{3} \\
 \frac{(7x+2)^{(3)}}{4} + \frac{1^{(12)}}{1} &= \frac{5x^{(4)}}{3} \\
 \frac{21x+6}{12} + \frac{12}{12} &= \frac{20x}{12} \quad | \cdot 12 \\
 21x + 6 + 12 &= 20x \\
 21x - 20x &= -6 - 12 \\
 x &= -18 \\
 \text{Ответ: } &-18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{16}{x+3} &= -\frac{8}{11} \quad | :8 \\
 \frac{2}{x+3} &= -\frac{1}{11} \\
 x+3 \neq 0 \quad x &\neq -3 \\
 \text{по правилу пропорции:} \\
 2 \cdot 11 &= (x+3) \cdot (-1) \\
 22 &= -x - 3 \\
 x &= -3 - 22 \\
 x &= -25
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{16}{x+3} &= -\frac{8}{11}^{(2)} \\
 \frac{16}{x+3} &= \frac{16}{-22} \\
 x+3 &= -22 \\
 x &= -22 - 3 \\
 x &= -25
 \end{aligned}$$

Ответ: -25

$$5) \quad \frac{5}{x+9} = -2 \quad \frac{5}{x+9} = -\frac{2}{1}$$

$x+9 \neq 0$, т.е. $x \neq -9$

по правилу пропорции:

$$5 \cdot 1 = (x+9) \cdot (-2)$$

$$5 = -2x - 18$$

$$2x = -18 - 5$$

$$2x = -23 \quad |:2$$

$$x = -11,5$$

Ответ: -11,5

$$6) \quad \frac{5}{x-12} = \frac{12}{x-5}$$

$$5(x-5) = (x-12) \cdot 12$$

$$5x - 25 = 12x - 144$$

$$5x - 12x = -144 + 25$$

$$-7x = -119 \quad |:(-7)$$

$$x = -119 : (-7)$$

$$x = 17$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-12 \neq 0, \\ x-5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 12, \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Ответ: 17

Задание 3. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$1) \quad (4x-2)(-2x+5)=0$$

$$4x-2=0 \quad \text{или} \quad -2x+5=0$$

$$4x=2 \quad |:4 \quad -2x=-5 \quad |:(-2)$$

$$x=\frac{2}{4} \quad x=\frac{-5}{-2}$$

$$x=0,5 \quad x=2,5$$

меньший кор.

Ответ: 0,5

$$2) \quad 7x^2+14x=0$$

$$7x(x+2)=0$$

$$7x=0 \quad |:7 \quad \text{или} \quad x+2=0$$

$$x=0 \quad x=-2$$

меньший кор.

Ответ: -2

Задание 4. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$1) \quad (-x+2)(4x+4)=0$$

$$-x+2=0 \quad 4x+4=0$$

$$-x=-2 \quad |:(-1) \quad 4x=-4 \quad |:4$$

$$x=2 \quad x=-1$$

больший кор.

Ответ: 2

$$2) \quad 6x^2-30x=0$$

$$6x(x-5)=0$$

$$6x=0 \quad |:6 \quad x-5=0$$

$$x=0 \quad x=5$$

больший кор.

Ответ: 5

$$3) \quad 8x^2=72x$$

$$8x^2-72x=0$$

$$8x(x-9)=0$$

$$8x=0 \quad |:8 \quad x-9=0$$

$$x=0 \quad x=9$$

больший корень

Ответ: 9

Задание 5. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$1) \quad x^2 + 11 = 12x$$

$$x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -12 \quad c = 11 \quad D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 144 - 44 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-12) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{12 + 10}{2} = 11$$

$$x_2 = \frac{-(-12) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{12 - 10}{2} = 1$$

меньший корень

Ответ: 1

$$2) \quad x^2 - 5x = 24$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = -24 \quad D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 11}{2} = -3$$

меньший корень

Ответ: -3

Задание 6. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$1) \quad x^2 + 30 = 11x$$

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -11 \quad c = 30$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-11) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 1}{2} = 6$$

больший корень

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-11) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 1}{2} = 5$$

Ответ: 6

$$2) \quad x^2 + x = 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -20$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

больший корень

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

Ответ: 4

09. Уравнения**Блок 3. Типовые экзаменационные варианты****Примеры решений**

Задание 1. Решите уравнение $(2x-1)^2 - 4x^2 = 0$. Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

$$(2x-1)^2 - 4x^2 = 0$$

или

$$(2x-1)^2 - 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 = 0$$

$$(2x-1)^2 - (2x)^2 = 0 \text{ — разность квадратов}$$

$$-4x = -1 \quad | :(-4)$$

$$(2x-1-2x)(2x-1+2x) = 0$$

$$x = \frac{-1}{-4}$$

$$-1 \cdot (4x-1) = 0$$

$$x = 0,25$$

$$4x - 1 = 0$$

$$4x = 1 \quad | :4$$

$$(2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1) =$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$= 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$x = 0,25$$

Ответ: 0,25

Задание 2. Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 - 4^2 = 0 \text{ — разность квадратов}$$

$$(x-4)(x+4) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$\text{или } x + 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

меньший корень

Ответ: -4

Задание 3. Решите уравнение $-\frac{3}{5}x^2 + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$-\frac{3}{5}x^2 + 15 = 0 \quad | \cdot 5$$

$$-3x^2 + 75 = 0 \quad | :(-3)$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 5^2 = 0 \text{ — разность квадратов}$$

$$(x-5)(x+5) = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$\text{или } x + 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -5$$

больший корень

Ответ: 5