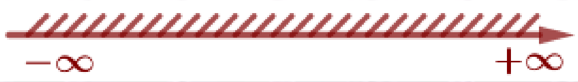
Числовые неравенства

$$x \in R$$

Вся числовая ось:



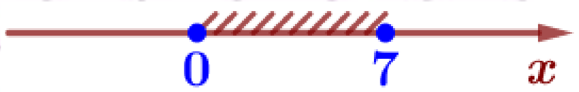
$$x \in (-\infty; +\infty)$$

Интервал:

$$-2 < x < 4$$

$$x \in (-2; +4)$$

Отрезок:



$$0 \le x \le 7$$

$$x \in [0; 7]$$

Закрытый луч:

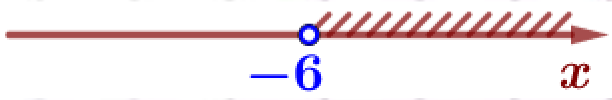
$$x \geq 3$$

$$x \in [3; +\infty)$$

$$x \leq 2$$

$$x \in (-\infty; 2]$$

Открытый луч:



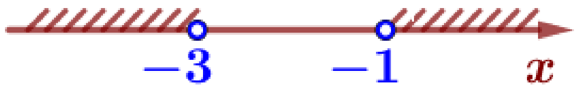
$$x > -6$$

$$x \in (-6; \infty)$$

$$x < 8$$

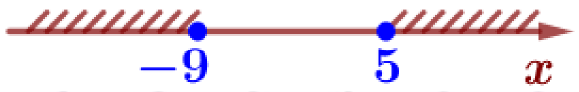
$$x \in (-\infty; 8)$$

Объединение лучей :



$$x < -3 \text{ и } x > -1$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$$



$$x \le -9 \text{ и } x \ge 5$$

$$x \in (-\infty; -9] \cup [5; +\infty)$$

Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или установить, что их нет.

Свойства неравенств

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если число положительно, то знак неравенства не ме- няется, если отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

Линейные неравенства

Общий вид:

$$ax > b \qquad ax < b$$

$$ax \geq b \qquad xa \leq b$$

Алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
2) приведя подобные члены, разделить обе части неравен-ства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Решаем неравенства.

Решить неравенство – найти значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Правила:

1. $$ax + b > c$$

$$ax > c - b$$

Решаем неравенства.

Решить неравенство – найти значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Правила:

2.

$$ax > b \quad \Big| :a$$

$$a > 0 \Longrightarrow x > \frac{b}{a}$$

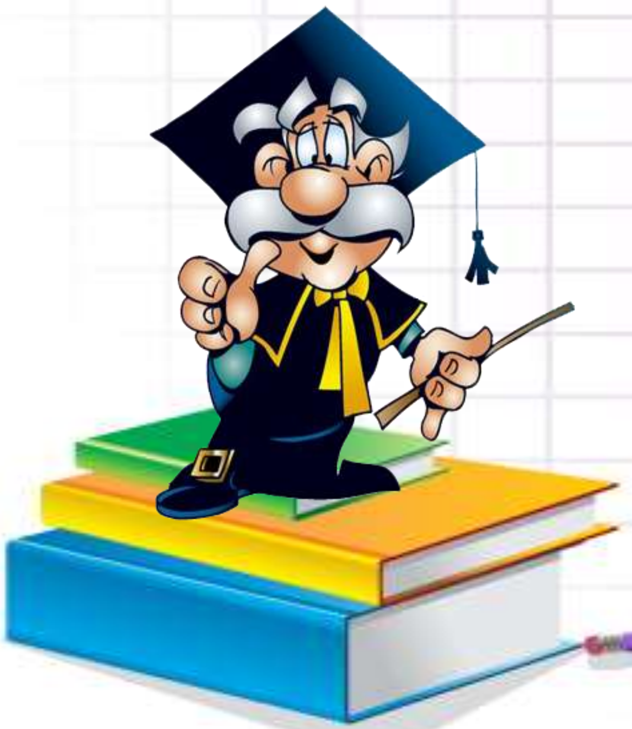
Решаем неравенства.

Решить неравенство – найти значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Правила:

2. $$ax > b \quad \Big| :a$$

$$a < 0 \Rightarrow x < \frac{b}{a}$$



Решаем неравенства.

1.

$$6x + 2 \le 3x - 7$$

$$\Updownarrow$$

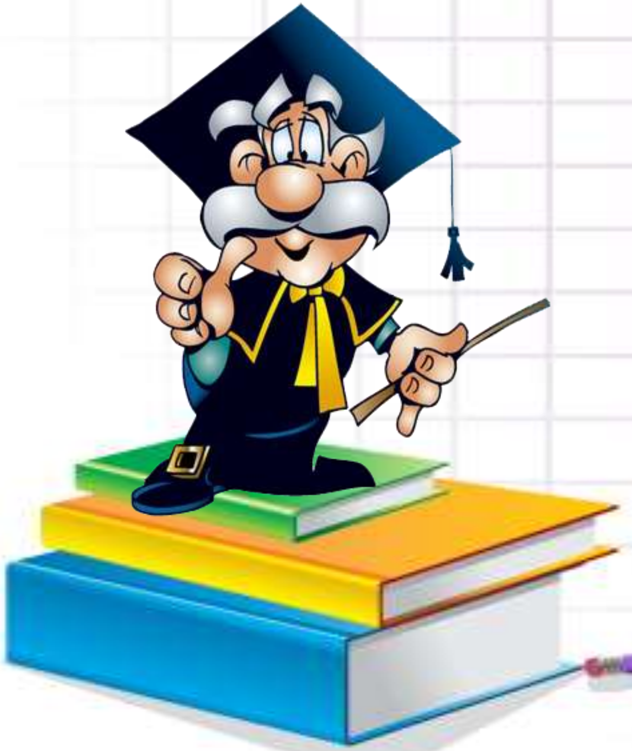
$$6x - 3x \le -7 - 2$$

$$\Updownarrow$$

$$3x \le -9$$

$$\Updownarrow$$

$$x \le -3$$



Ответ: $\left(-\infty; -3\right]$

2.

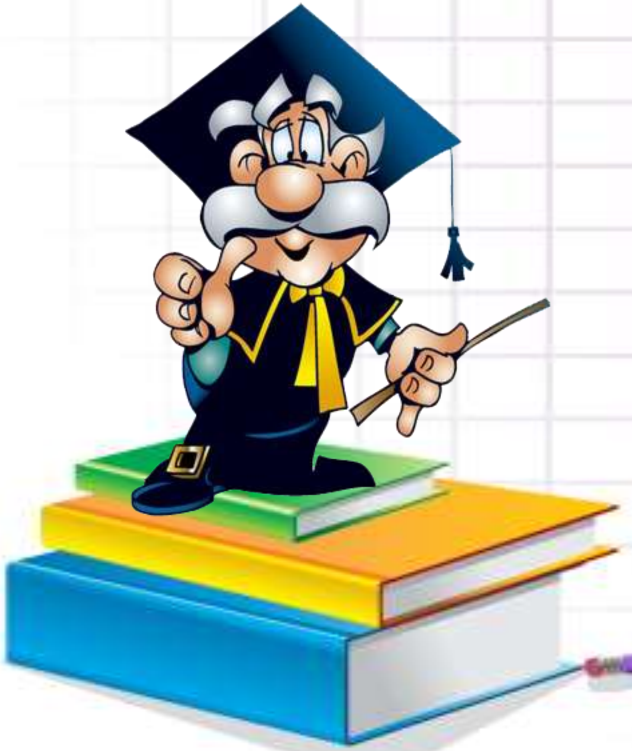
$$17x-4(3x-8)\geq 80$$

$$17x-12x+32\geq 80$$

$$5x\geq 80-32$$

$$5x\geq 48$$

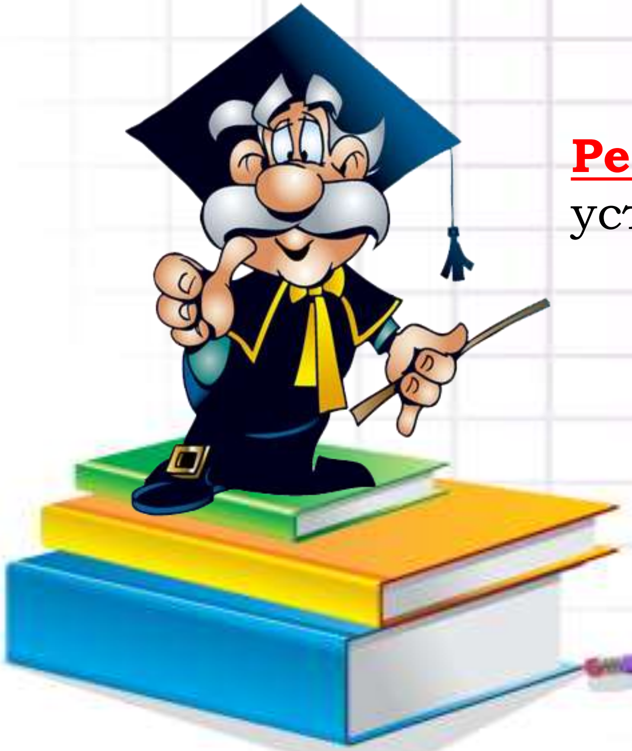
$$x\geq 9,6$$



Ответ: $x\in[9,6;\infty)$

Системы двух линейных неравенств

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

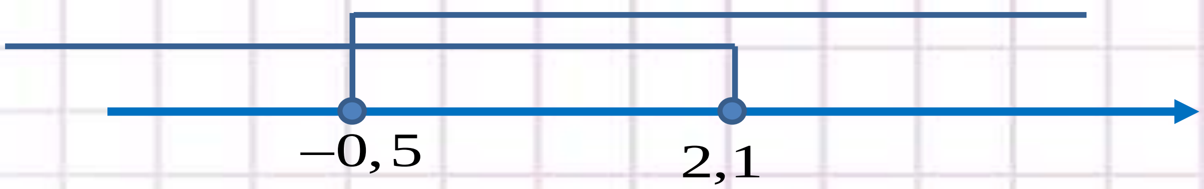


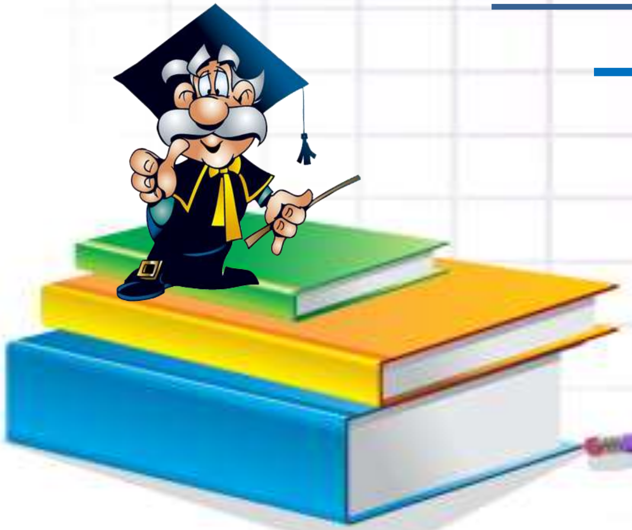
Решить систему неравенств – найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Алгоритм:

1) решить оба неравенства;
2) изобразить на числовой оси множество решений первого и второго неравенств системы;
3) определить значения неизвестного, которые одновременно принадлежат обоим интервалам.

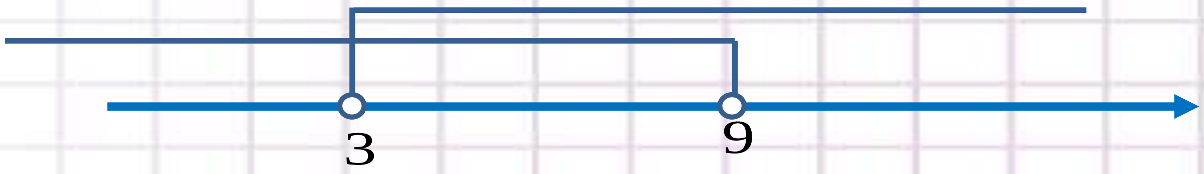
$$\begin{cases} x-2,1\le 0 \\ -2x+2\le 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 2,1 \\ -2x\le 3-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 2,1 \\ x\ge -0,5 \end{cases}$$

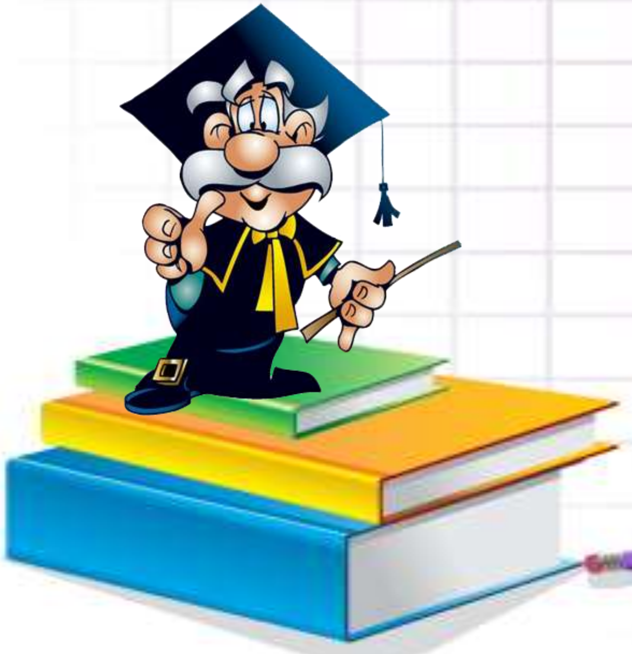




Ответ: $x\in[-0,5;2,1]$

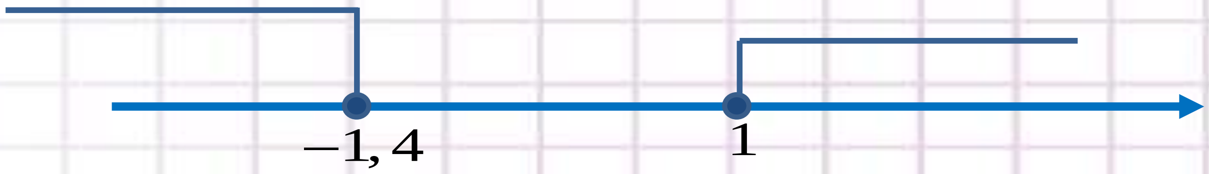
$$\begin{cases} -72+8x<0 \\ 5-6x>-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<9 \\ x<3 \end{cases}$$





Ответ: $x \in (-\infty; 3)$

$$\begin{cases} x-3\geq -2 \\ x+1,4\leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -1,4 \end{cases}$$



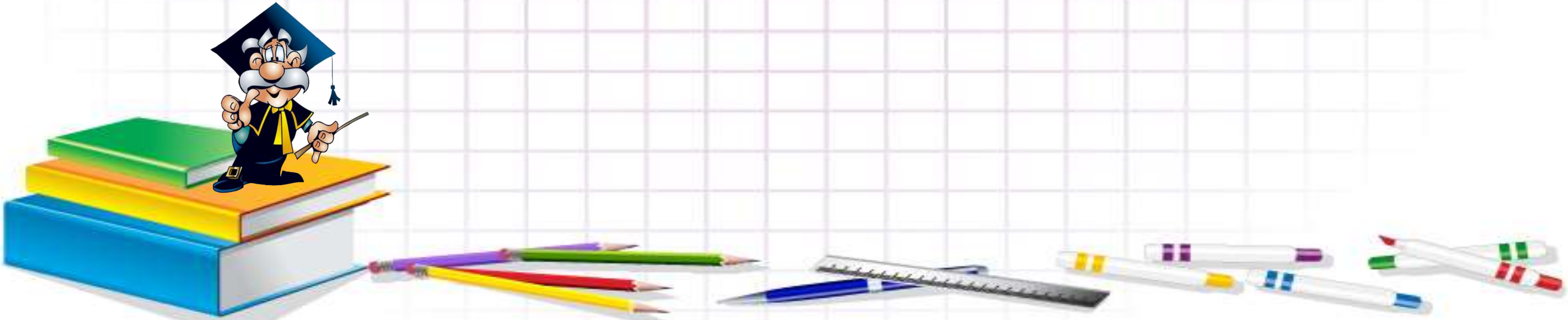
Ответ: *решенийнет*

Квадратные неравенства:

Общий вид: $ax^2 + bx + c \wedge 0$ $\quad \wedge -$ *знак неравенства*

$> \; < \quad \geq \; \leq$

Способы решения:
1) сведение к системе линейных неравенств;
2) с помощью графика квадратичной функции;
3) метод интервалов.



Сведение к системе линейных неравенств (1 способ)

Алгоритм: 1) разложить квадратный многочлен на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2) составить и решить совокупность двух систем :

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad a \cdot b < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

3) объединить решения обеих систем.

Пример :Решите неравенство

$$x^2+x-20\ge 0$$

$$x^2+x-20=(x+5)(x-4)$$

$$x^2+x-20=0$$

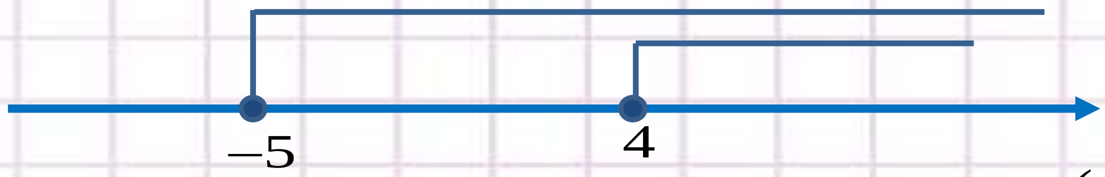
$$(x+5)(x-4)\ge 0$$

$$D=1+4\cdot 1\cdot 20=81$$

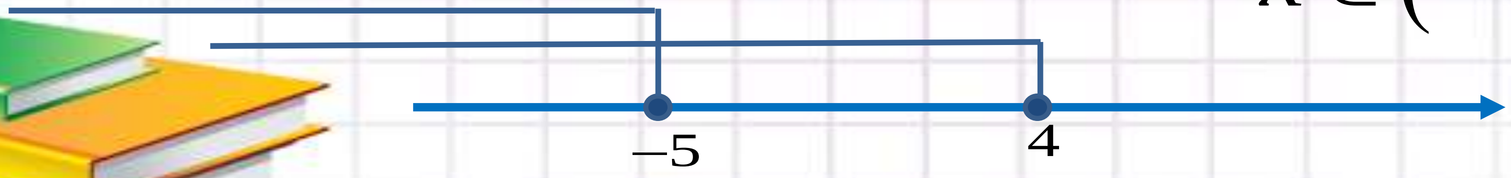
$$x_1=-5$$

$$x_2=4$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+5\ge 0\\ x-4\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+5\le 0\\ x-4\le 0\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -5\\ x\ge 4\end{cases}\\ \begin{cases}x\le -5\\ x\le 4\end{cases}\end{array}\right.$$

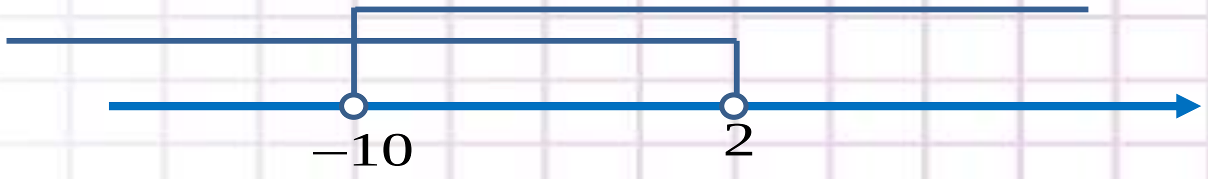


$$x\in(-\infty;-5]\cup[4;\infty)$$

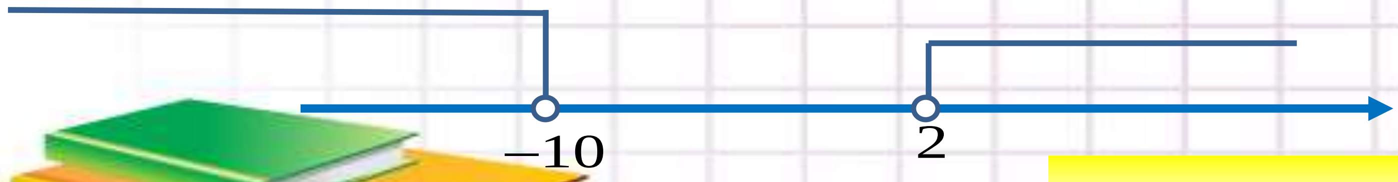


Пример : Решите неравенство $(x+10)(x-2)<0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+10>0 \\ x-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+10<0 \\ x-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-10 \\ x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-10 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right.$$



$x\in(-10;2)$



решенийнет

Ответ: $x\in(-10;2)$

С помощью графика квадратичной функции (2 способ)

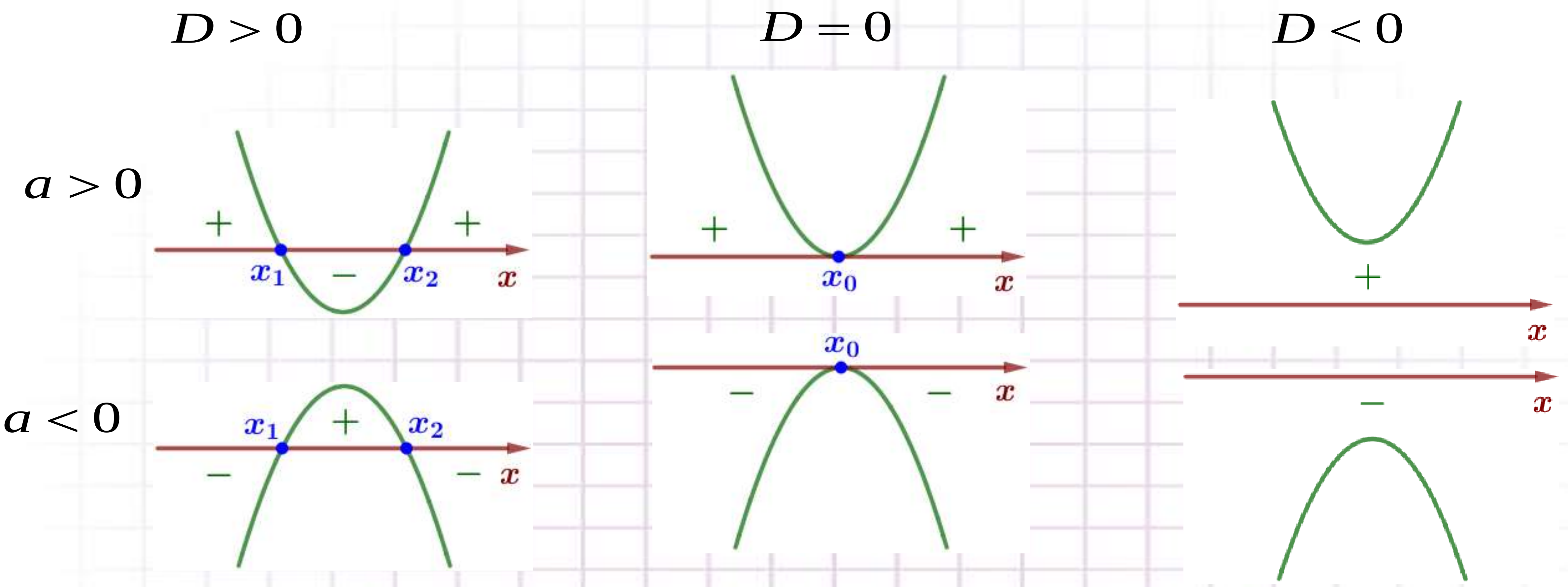
Алгоритм:

1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ или установить, что их нет;

2) определить направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$

3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью *Ox*, если они есть;

4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.


$D > 0$
$D = 0$
$D < 0$
$a > 0$
$a < 0$
$+$ x_1 $-$ x_2 $+$ x
$+$ x_0 $+$ x
$+$ x
$-$ x_1 $+$ x_2 $-$ x
x_0 $-$ $-$ x
$-$ x

Решить неравенство: $x^2 + 12x + 32 \leq 0$

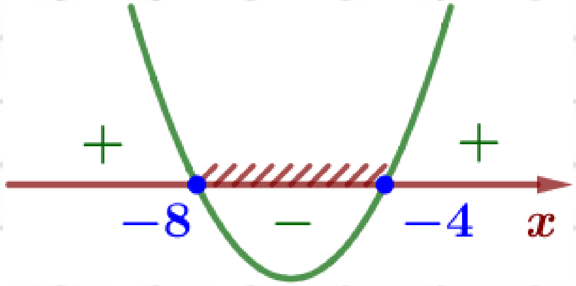
$$x^2 + 12x + 32 = 0$$

а =1>0 ветви вверх

$$D = 16$$

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = -4$$



Ответ: $x \in [-8; -4]$

Решить неравенство: $7x - x^2 < 0$

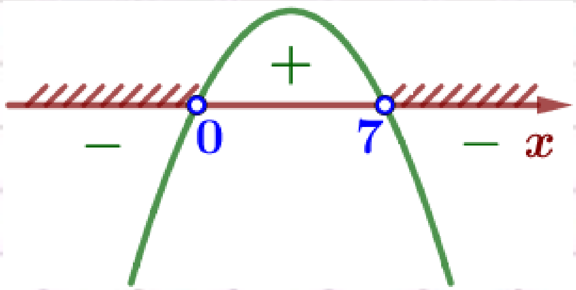
$$7x - x^2 = 0$$

$$x(7 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } 7 - x = 0$$

$$x = 0; x = 7$$

а =−1<0 ветви вниз



Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (7; \infty)$

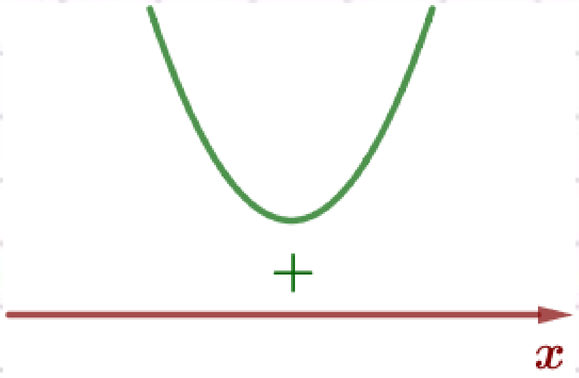
Решить неравенство: $x^2 + 100 < 0$

$$x^2 + 100 = 0$$

а =1>0 ветви вверх

$$x^2 = -100$$

корнейнет



$\varnothing$

Ответ: решений нет

Метод интервалов (3 способ)

Алгоритм: 1) найти нули функции $y = ax^2 + bx + c$, решив квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$;

2) отметить положение нулей на оси Ox;

3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

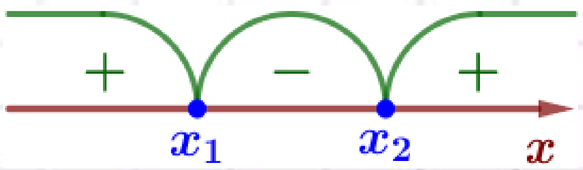
А. вычислить значение функции в точке x=0 (или, например x=1), отметить знак в соответствующем промежутке

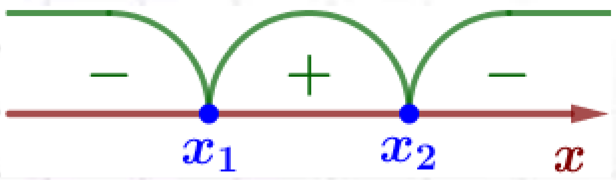
В. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

$D > 0$

(2 корня)

знаки чередуются

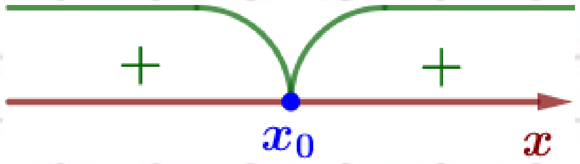


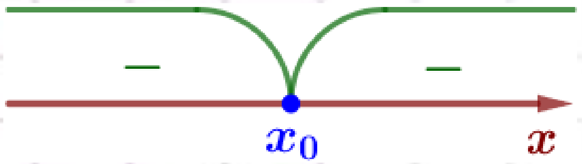


$D = 0$

(1 корень)

знаки совпадают

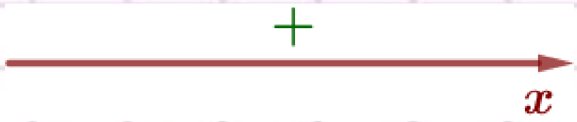


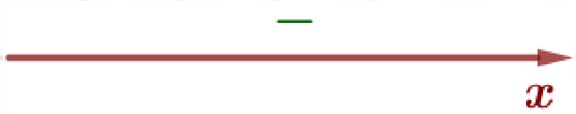


$D < 0$

(нет корней)

функция сохраняет
знак на всей числовой оси





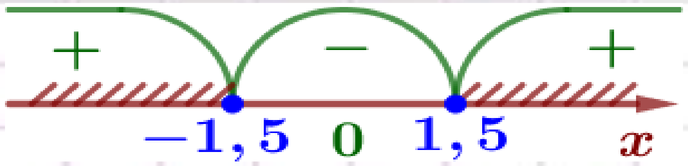
4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Решить неравенство: $4x^2 \geq 9$

$$4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \qquad \text{если } x = 0, \text{ то } 4 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$



$$2x - 3 = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0$$

$$x = 1{,}5 \text{ или } x = -1{,}5$$

$$x \in (-\infty; -1{,}5] \cup [1{,}5; \infty)$$

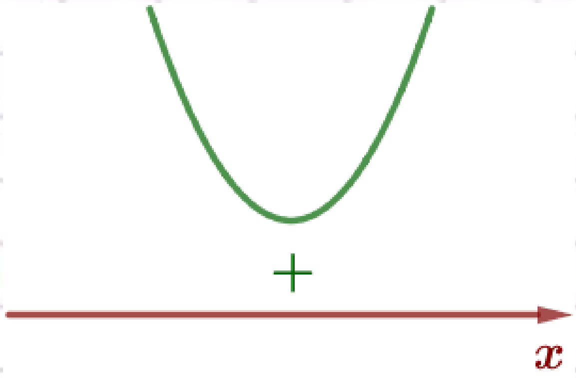
Решить неравенство: $x^2 - 2x + 5 < 0$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

а =1>0 ветви вверх

$$D = -56 < 0$$

(нет корней)
функция сохраняет
знак на всей числовой оси



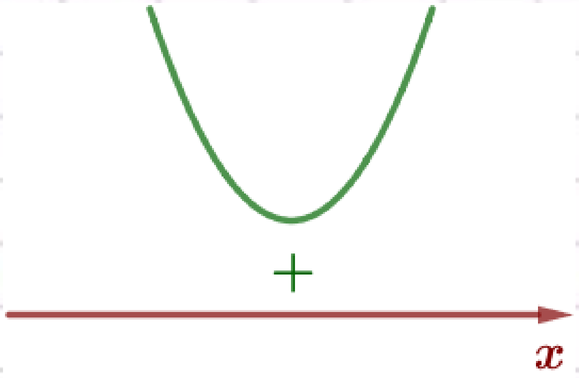
Ответ: решений нет

Решить неравенство: $x^2 + 12 > 0$

$$x^2 + 12 = 0$$

а =1>0 ветви вверх

$$x^2 = -12$$



(нет корней)
функция сохраняет
знак на всей числовой оси

Ответ: х-любое число или $x \in R$

Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:

$1)\, x^2 - 81 < 0$ $\quad 2)\, x^2 - 81 > 0$ $\quad 3)\, x^2 - 9x < 0$ $\quad 4)\, x^2 - 9x > 0$

Решим неравенство №1:

$$x^2 - 81 < 0$$

$$(x-9)(x+9) < 0$$

$$x = 9; x = -9$$

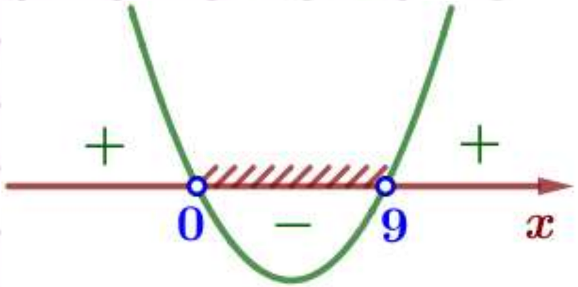
Корни **не** совпадают с данными рисунка.
Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$$x^2 - 9x < 0$$

a =1>0 ветви вверх

$$x = 9; x = 0$$



Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3