Proiect la tema "Metode de rezolvare a ecuaţiilor neliniare"

Lucrare Nr. 3 "Precizarea rădăcinii. Metoda încercărilor. Metoda înjumătăţirii (bisecţiei)"

Elaborat: elevul clasei a XII-a ”C”, Nume Prenume Burduja Alexander

Varianta 2

Ecuația I: $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3x^3} = 0$

Ecuația II: $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$

Ecuația III: $[\log_2(-x)] \cdot (x+2) = -1$

Ecuația IV: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}5x = 0$

Scop lucrare:

- Verificare a posibilităţii aplicării metodelor în studiu pentru ecuaţiile propuse;
- Analiza ecuaţiilor propuse, rezolvarea analitică, grafică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;
- Estimarea erorilor metodelor în studiu (opţional).

Sarcini de realizat:

1) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic;*
2) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător;*
3) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic;*
4) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător.*

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor.***

Este dată ecuaţia: $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3x^3} = 0$

1. Notăm funcţia f(x)= $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3x^3}$
2. Determinăm derivata de ordinul întâi f'(x)= $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^4}$

Deoarece f'(x) > 0 pentru orice x≠0, funcţia este strict crescătoare pe intervalele (-∞;0)U(0;+∞).

3. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x):

x	-1	-0,5	0	0,5	1
Semnul f(x)	-	+	/	-	+

Din tabel observăm, că rădăcinile se află în intervalele: $x_1 \in$[-1;-0.5] şi $x_2 \in$[0,5;1].

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor cu precizarea ei prin metoda înjumătățirii.***

Este dată ecuaţia: $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$

1. Notăm funcţia f(x)= $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1$;
2. Determinăm derivata de ordinul întâi f'(x)= $6x^2 - 18x - 60$
3. Calculăm rădăcinile derivatei:

x_1=-2 & x_2=5;

$x_1 \in (-\infty, -2] \Rightarrow f(-5) = -174(-)$. Deci $x_1 \in [-5, -2]$.

$x_2 \in [-2, 5] \Rightarrow f(0) = 1(+)$. Deci $x_2 \in [0, 5]$.

$x_3 \in [5, +\infty) \Rightarrow f(9) = 190(+)$. Deci $x_3 \in [8, 9]$.

Analizând semnele funcției, găsim trei rădăcini. Vom preciza rădăcina x_3 în [8;9].

Precizăm una din rădăcini, utilizând metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01.
Datele calculate le vom introduce pentru comoditate în tabel (semnele "–" şi "+" semnifică faptul că $f(a_i)<0$ şi $f(b_i)>0$).

Pas *i*	a_i^-	b_i^+	$x_i=(a_i+b_i)/2$	$f(x_i)$
0	8.0000	9.0000	8.5000	71.250
1	8.0000	8.5000	8.2500	18.031
2	8.0000	8.2500	8.1250	-7.019
3	8.1250	8.2500	8.1875	5.370
4	8.1250	8.1875	8.1563	-0.858
5	8.1563	8.1875	8.1719	2.247
6	8.1563	8.1719	8.1641	0.692
7	8.1563	8.1641	8.1602	-0.083

Răspuns: Rădăcina cea mai mică ecuației este: **$x_1 \approx -8{,}1602$**

- ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei***

Este dată ecuaţia: $[\log_2(-x)]\cdot(x+2)=-1$. O aducem la forma $y_1=f_1(x)$ şi $y_2=f_2(x)$, adică:

$$\log_2(-x) = -\frac{1}{x+2}$$

Notând prin $y_1=[\log_2(-x)]$ şi prin $y_2=-\frac{1}{x+2}$, construim graficele acestor funcţii (figura 1.). Din grafic se observă că ecuaţia are două rădăcini: **$x_1 \approx -0{,}5$ şi $x_2 \approx -1{,}7$.**

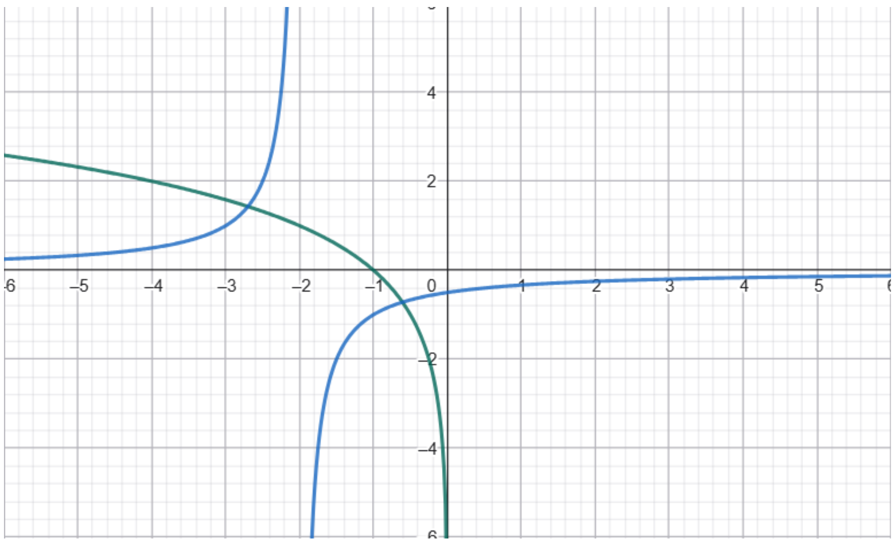

Figura 1 Graficul funcţiilor $y_1=[\log_2(-x)]$ şi $y_2=-\frac{1}{x+2}$

- ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei cu precizarea ei prin metoda înjumătăţirii.***

Este dată ecuaţia: $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0{,}5x=0$. O rescriem într-o formă mai comodă: $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5x$. Notăm prin $y_1=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ şi $y_2=0{,}5x$, apoi construim graficele acestor funcţii (figura 2.).

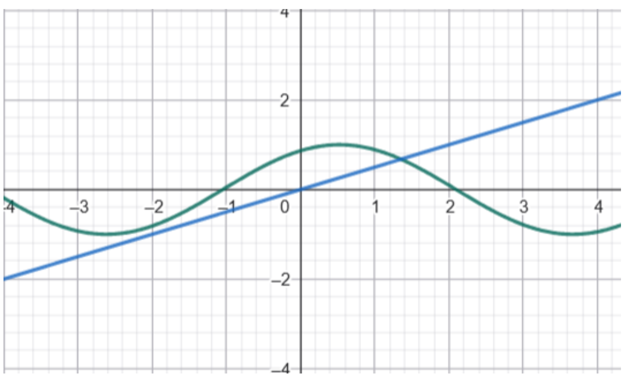

Figura 2 Graficul funcţiilor $y_1=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ şi $y_2=0{,}5x$

Observăm o rădăcină în intervalul [1;2]. Pentru precizarea rădăcinii prin metoda înjumătăţirii alegem intervalele la capetele cărora funcţia f(x)= $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0{,}5x$ are semne diferite.

Rezultatele calculelor le includem pentru comoditate în tabel:

Pas i	a_i^+	b_i^-	x_i	$f(x_i)$
0	1	2	1,5	–0,215
1	1	1,5	1,25	0,123
2	1,25	1,5	1,375	–0,049
3	1,25	1,375	1,3125	0,036
4	1,3125	1,375	1,3438	–0,006
5	1,3125	1,3838	1,3282	0,015
6	1,3282	1,3438	1,3360	0,004

Răspuns: Soluţia ecuaţiei cu precizia $\varepsilon=10^{-2}$ este $\mathbf{x_1 \approx 1,34}$