Proiect la tema "Integrarea numerică. Metode aproximative de evaluare a ariilor trapezelor curbilinii "

Lucrare Nr. 4 "Calculul numeric al integralelor "

Elaborat: elevul clasei a XII-a "C", Nume Prenume Burduja Alexander

Varianta 2

Obiective:

- Verificarea posibilităţii aplicării metodei în studiu pentru integralele propuse;
- Analiza integralelor propuse, rezolvarea lor analitică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;

Sarcini de realizat:

1) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor de dreapta*** şi ***de stânga*** pentru n=10, evaluând precizia prin *compararea rezultatelor obţinute*.
2) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor medii***, folosind pentru evaluarea preciziei calculul dublu pentru n_1=8 şi n_2=10.
3) Calculaţi integrala cu precizia 10^{-3}, utilizând ***metoda trapezelor***.

<u>Rezolvarea sarcinii 1</u>

1. Calculaţi integrala $I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{0,5x+2}}{\sqrt{2x+1}+0,8} dx$, utilizând *metoda dreptunghiurilor de stânga* şi *de dreapta*.

***Soluţie*:**

Pentru a calcula valoarea integralei după formulele dreptunghiurilor de stânga sau de dreapta pentru n=10, divizăm intervalul de integrare în 10 părţi cu pasul:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,2-0,4}{10} = 0,08 .$$

Alcătuim tabelul de valori al funcţiei de sub integrală în punctele de divizare a intervalului:

i	**x_i**	$\sqrt{0,5x+2}$	$\sqrt{2x+1}$	$\sqrt{2x+1}+0,8$	**y_i**
0	0,40	1,4832	1,3416	2,1416	**0,6926**
1	0,48	1,5100	1,3928	2,1928	0,6886
2	0,56	1,5362	1,4422	2,2422	0,6851
3	0,64	1,5620	1,4900	2,2900	0,6821
4	0,72	1,5875	1,5362	2,3362	0,6795
5	0,80	1,6125	1,5811	2,3811	0,6772
6	0,88	1,6371	1,6248	2,4248	0,6751
7	0,96	1,6613	1,6673	2,4673	0,6733
8	1,04	1,6852	1,7088	2,5088	0,6717
9	1,12	1,7088	1,7493	2,5493	0,6703
10	1,20	1,7321	1,7889	2,5889	**0,6690**
				Sume:	S_{st} = 6,7955 S_{dr} = 6,7719

În tabel s-au determinat valorile sumelor:

Aflăm valorile aproximative ale integralei. Dacă aplicăm ***formula dreptunghiurilor de stânga***, atunci vom avea:

$$I_{st} = h \cdot S_{st} = 0,08 \cdot 6,7955 \approx 0,5436 .$$

Aflăm acum valoarea integralei, utilizând ***formula dreptunghiurilor de dreapta***:

$$I_{dr} = h \cdot S_{dr} = 0,08 \cdot 6,7719 \approx 0,5417 .$$

Rezultatele obţinute după o formulă sau alta se deosebesc, de aceea în calitate de valoare finală vom lua *semisuma* valorilor determinate, rotunjind rezultatul până la zecimi de miimi:

$$I = \frac{I_{st} + I_{dr}}{2} = 0,543 .$$

Răspuns: $I \approx 0,543$

Rezolvarea sarcinii 2

2. Calculaţi integrala $I = \int_{0,3}^{0,9} \frac{\cos(0,8x+1,2)}{1,5+\sin(x^2+0,6)} dx$, aplicând *metoda dreptunghiurilor medii*.

***Soluţie*:**

Pentru rezolvare vom folosi ***formula dreptunghiurilor medii* (*de mijloc*)**:

$$I_{med} = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$$

Calculele le vom efectua de două ori, pentru n_1=8 şi n_2=10 şi respectiv pentru pasul:

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = \frac{0,9-0,3}{8} = 0,075 \text{ şi } h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{0,9-0,3}{10} = 0,06.$$

Rezultatele le introducem pentru comoditate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

i	x_i	x_i +2h	cos(0,8x +1,2)	1,5+sin(x2 +0,6)	y_i
0	0,300	0,3375	0,1006	2,1548	0,0467
1	0,375	0,4125	0,0408	2,1963	0,0186
2	0,450	0,4875	-0,0192	2,2432	-0,0086
3	0,525	0,5625	-0,0791	2,2933	-0,0345
4	0,600	0,6375	-0,1387	2,3448	-0,0591
5	0,675	0,7125	-0,1978	2,3954	-0,0826
6	0,750	0,7875	-0,2562	2,4431	-0,1049
7	0,825	0,8625	-0,3137	2,4858	-0,1262
				S_1:	**-0,3506**

Tabelul 2

i	x_i	x_i +2h	cos(0,8x+1,2)	1,5+sin(x2+0,6)	y_i
0	0,30	0,33	0,1065	2,2162	0,0480
1	0,36	0,39	0,0588	2,2532	0,0261
2	0,42	0,45	0,0108	2,2856	0,0047
3	0,48	0,51	-0,0372	2,3114	-0,0161
4	0,54	0,57	-0,0848	2,3291	-0,0364
5	0,60	0,63	-0,1319	2,3369	-0,0564
6	0,66	0,69	-0,1782	2,3337	-0,0763
7	0,72	0,75	-0,2234	2,3194	-0,0963
8	0,78	0,81	-0,2675	2,2945	-0,1166
9	0,84	0,87	-0,3102	2,2595	-0,1373
				S_1:	**-0,4566**

Determinăm acum valorile aproximative ale integralei:

$$I_1 = h_1 \cdot S_1 = 0,075 \cdot (-0,3615) = -0,02711;$$

$$I_2 = h_2 \cdot S_2 = 0,06 \cdot (-0,4522) = -0,02713.$$

Observăm că valorile calculate diferă puţin una de alta (ordinul zecimilor de miimi), însă valoarea a doua este mai exactă decât prima, de aceea în calitate de valoare finală a integralei vom lua $I \approx -0,0271$.

Răspuns: $I \approx -0,0271$

Rezolvarea sarcinii 3

3. Calculaţi integrala $I = \int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$, cu precizia 10^{-3}.

***Soluţie*:**

Pentru atingerea preciziei date (10^{-3}), vom determina valoarea lui *n*, astfel încât

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 < 0{,}001. \quad (*)$$

În formula de mai sus, $a = 1{,}2; b = 2{,}7; M_2 = \max\limits_{[1{,}2;2{,}7]}|f''(x)|$, unde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$ este funcţia de sub integrală.

Determinăm în continuare derivata de ordinul doi:

$$f''(x) = \frac{2x^2-3{,}2}{\sqrt{(x^2+3{,}2)^{5/2}}}.$$

La $x = 1,2$: $|f''(1,2)| \approx 0,006$

La $x = 2,7$: $|f''(2,7)| \approx 0,031$ Vom lua o margine superioară de siguranță, $M_2 \approx 0,04$

.

$(b-a) = 2,7 - 1,2 = 1,5$. Inegalitatea devine:

$$\frac{1,5^3 \cdot 0,04}{12n^2} < 0,001 \Rightarrow \frac{3,375 \cdot 0,04}{12 \cdot 0,001} < n^2 \Rightarrow n^2 > 11,25$$

.

Pentru o precizie mai bună, vom stabili valoarea finală a lui *n*=10.

Calcularea integralei se realizează după formula:

$$I \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{19}\right),$$

unde $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2{,}7-1{,}2}{10} = \frac{1{,}5}{10} = 0{,}15;$

Pentru comoditate, toate calculele sunt introduse în tabelul ce urmează:

i	x_i	x_i^2	x_i^2 +3,2	y0 ,y10	y1 ,...,y9
0	1,20	1,4400	2,1541	0,4642	
1	1,35	1,8225	2,2411		0,4462
2	1,50	2,2500	2,3345		0,4284
3	1,65	2,7225	2,4336		0,4109
4	1,80	3,2400	2,5377		0,3941
5	1,95	3,8025	2,6462		0,3779
6	2,10	4,4100	2,7586		0,3625
7	2,25	5,0625	2,8745		0,3479
8	2,40	5,7600	2,9933		0,3341
9	2,55	6,5025	3,1149		0,3210
10	2,70	7,2900	3,2388	0,3088	
			SUME:	**0,7730**	**3,4230**

Astfel, valoarea integralei este $I = 0{,}15 \cdot \left(\frac{0{,}7730}{2} + 3{,}4230\right) = 0{,}5714$.

Răspuns: $I \approx 0{,}5714$