Proiect la tema „Metode de rezolvare a ecuaţiilor neliniare”

Lucrare Nr. 1 „Precizarea rădăcinii. Metoda tangentelor”

Elaborat: elevul clasei a XII-a „C”, Nume Prenume Burduja Alexander

Varianta 2

Ecuația I: $x \cdot 2^x = 1$
Ecuația II: $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$

Scop lucrare:
- Verificare a posibilităţii aplicării metodelor în studiu pentru ecuaţiile propuse;
- Analiza ecuaţiilor propuse, rezolvarea analitică, grafică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;
- Estimarea erorilor metodelor în studiu (opţional).

Sarcini de realizat:
1) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic şi de precizat una din ele prin metoda tangentelor cu precizia ε=0.001, utilizând programul corespunzător;*
2) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic şi de precizat una din ele prin metoda tangentelor cu precizia ε=0.001, utilizând programul corespunzător;*

Realizarea sarcinii:

- ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei cu precizarea ei prin metoda tangentelor.***

Separăm rădăcinile ecuaţiei $x \cdot 2^x=1$ în mod grafic. Pentru aceasta rescriem ecuaţia iniţială într-o formă mai comodă pentru construirea graficelor:
$y_1 = x \cdot 2^x$
$y_2 = 1$ (fig.1)

Alcătuim tabelul de valori a funcţiilor y_1 şi y_2.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
2^x	0	1.1487	1.3195	1.5157	1.7411	2.000
$y_1 = x \cdot 2^x$	0	0.2297	0.5278	0.9094	1.3929	2.000
y2=1	1	1	1	1	1	1

Observăm că pentru x=0.6, y1≈0.9094<1 și pentru x=0.8, y1≈1.3929>1. Rădăcina pozitivă se află în intervalul [0,6; 0,8].

Precizăm această rădăcină prin metoda tangentelor. Deoarece $f(0,6)>0$; şi $f(0,8)<0$, iar derivata de ordinul II $f''(x)>0$, atunci în calitate de valoare iniţială aproximativă pe acest interval vom lua $x_0=0,8$.

Calculele le realizăm conform formulei:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

În prealabil determinăm derivata de ordinul I:

$$f''(x)=2^x x + x \cdot 2^x x \cdot \ln 2 = 2^x \cdot (1 + x \cdot \ln 2)$$
$$f''(0,8)=2^{0,8} \cdot (1+0,8 \cdot \ln 2)=2,706$$

Calculele le introducem pentru comoditate în tabel:

n	x_n	x_n^2	$2^x{}_n$	$x_n \cdot 2^x{}_n$	$f(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{2,706}$
0	0.8000	0.6400	1.7411	1.3929	0.3929	0.1451
1	0.6549	0.4289	1.5746	1.0315	0.0315	0.0116
2	**0.6411**	0.4111	1.5596	1.000003	0.000003	0.000001

Răspuns: Soluția este ***x*=0,64118**

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor cu precizarea ei prin metoda tangentelor.***

Este dată ecuaţia: $x^3-3x^2+9x-10=0$

1. Notăm funcţia $f(x)= x^3-3x^2+9x-10=0$.
2. Determinăm derivata de ordinul întâi $f'(x)= 3x^2-6x+9= x^2-2x+3$;
3. Determinăm discriminantul $D=4-12=-8<0$.
4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei $f(x)$, stabilind valorile lui x egale cu:

x	$-\infty$	**1**	**2**	$+\infty$
Semnul *f*(*x*)	–	–	+	+

Avem o singură schimbare de semn, deci ecuaţia are o singură rădăcină reală ce se află în intervalul [1,2].
Precizăm soluţia utilizând metoda tangentelor. Deoarece $f(1)<0$, $f(2)>0$ şi $f''(x)>0$, atunci ca valoare aproximativă luăm $x_0=1.5$.

Pentru calcule vom utiliza formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Determinăm $f'(x)=3x^2-6x+9$.

Toate calculele le introducem pentru comoditate în tabel:

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,5000	2.2500	3.3750	0.1250	6.7500	1.4815
1	1.4815	2.1948	3.2512	0.0020	6.5790	1.4812
2	**1.4812**	2.1939	3.2499	0.000001	6.5780	1.4812

Răspuns: Soluţia este $\boldsymbol{x \approx 1.4812}$

Fig. 1