Formelsammlung TM EI

Mathematik

x	0	$\frac{\pi}{6}(30°)$	$\frac{\pi}{4}(45°)$	$\frac{\pi}{3}(60°)$	$\frac{\pi}{2}(90°)$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

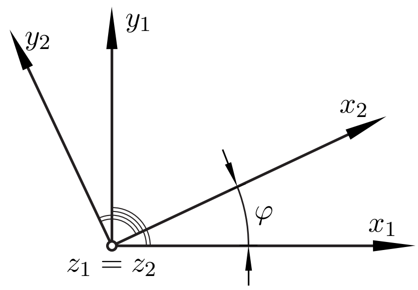
Basisdrehung

Darstellung eines Vektors ${}_1\boldsymbol{a}$ aus Koordinatensystem 1 (Index 1) in Koordinatensystem 2:

Drehmatrix:
Basisvektoren des “alten” Koordinatensystems (1), dargestellt im “neuen” Koordinatensystem (2)

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}_{21}\, {}_1\boldsymbol{a}$$



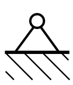
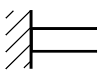
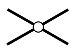
Rücktransformation:

$$\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{A}_{21}^T = \boldsymbol{A}_{21}^{-1}$$

Statisches Gleichgewicht

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \quad \text{und} \quad \sum_i \boldsymbol{r}_{P_i} \times \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{0}$$

Statische Bestimmtheit und Wertigkeit

					 (Hier: $s = 4$)
w_j	eben	1	2	3	$2(s-1)$
	räumlich	1	3	6	$3(s-1)$

mit :
- n : Anzahl der Lager und Knoten
- w_j : Wertigkeit des j-ten Lagers
- i : Anzahl der Körper
- s : Anzahl der Stäbe

$$f = -\sum_{j=1}^{n} w_j + \begin{cases} 3i & \text{ebener Fall} \\ 6i & \text{räumlicher Fall} \end{cases}$$

- $f = 0$ Notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für statische Bestimmtheit → Stereo-Statik
- $f < 0$ System ist $|f|$-fach statisch unbestimmt → Elastostatik
- $f > 0$ System ist f-fach statisch unterbestimmt / kinematisch unbestimmt → Kinematik

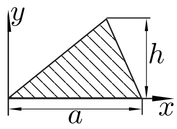
Schwerpunkt

Massenschwerpunkt: $\boldsymbol{r}_S = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\overline{m} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_S = \dfrac{\sum_i \boldsymbol{r}_{Si} m_i}{\sum_i m_i}$

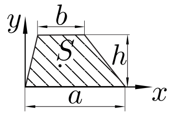
Flächenschwerpunkt: $\boldsymbol{r}_S = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_A \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\overline{A} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_S = \dfrac{\sum_i \boldsymbol{r}_{Si}\, A_i}{\sum_i A_i}$

Schwerpunkte spezieller ebener Körper

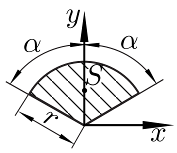
Beliebiges Dreieck $\quad y_s = \dfrac{1}{3}\,h \qquad A = \dfrac{1}{2}\,a\,h$



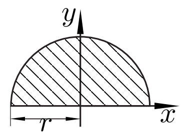
Trapez $\quad y_s = \dfrac{1}{3}\,h\,\dfrac{a+2b}{a+b} \qquad A = \dfrac{1}{2}\,h\,(a+b)$



Kreissegment $\quad y_s = \dfrac{2}{3}\,r\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad A = \alpha\,r^2$



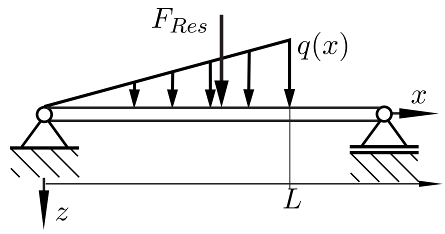
Halbkreis $\quad y_s = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{r}{\pi} \qquad A = \dfrac{1}{2}\,\pi\,r^2$



Balkenstatik

Streckenlasten

Resultierende Kraft: $\quad F_{Res} = \int_L q(x)\,\mathrm{d}\overline{x}$

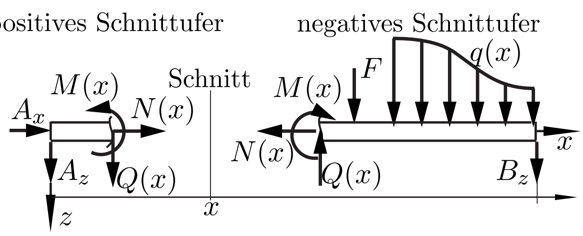


Schnittgrößen

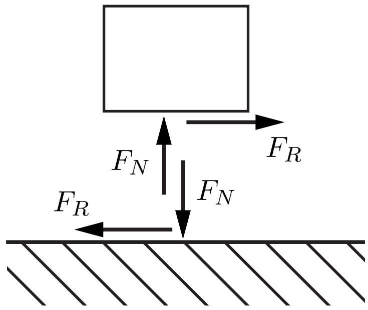
Normalkraft: $\quad N(x)$

Querkraft: $\quad Q(x) \quad$ mit $\quad \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x)$

Biegemoment: $\quad M(x) \quad$ mit $\quad \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)$



Coulombsche Reibung



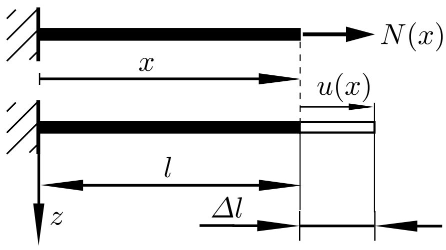
Klotz haftet:	$-\mu_0 F_N \leq F_R \leq \mu_0 F_N$
Klotz gleitet nach rechts:	$F_R = -\mu F_N$
Klotz gleitet nach links:	$F_R = \mu F_N$

Gleitreibkraft immer entgegen Bewegungsrichtung

μ : Gleitreibkoeffizient
μ_0 : Haftreibkoeffizient

Elastostatik

Grundbegriffe



Spannung	:	$\sigma(x) = \dfrac{N(x)}{A(x)}$
Globale Dehnung	:	$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{u(l) - u(0)}{l}$
Lokale Dehnung	:	$\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = u'$
Thermische Dehnung	:	$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$
Stoffgesetz nach HOOKE	:	$\sigma = E\varepsilon$

Grundgleichung elastisch deformierbarer Stab

Elastizitätsgesetz (allgemein)	:	$\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T$
Elastizitätsgesetz (speziell)	:	$\Delta l = \dfrac{Fl}{EA}$

dabei:	$F = N$	Stabbelastung nur durch Einzelkraft $F = N$
	$EA = \text{const.}$	konstante Dehnsteifigkeit
	$\Delta T = 0$	keine Wärmedehnung

Kinematik

Eindimensionale (Punkt-)Bewegungen

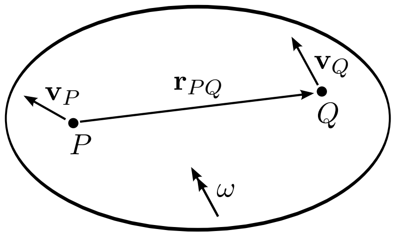
Lage	:	$x(t)$
Geschwindigkeit	:	$v(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \dot{x}(t)$
Beschleunigung	:	$a(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{x}(t)$

Starrkörperformel

Eulersche Beziehung

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PQ}$$

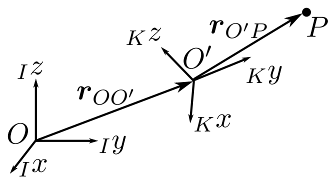
Momentanpol Q



$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PQ} \Rightarrow \boldsymbol{r}_{PQ} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_P}{\omega^2}$$

$\boldsymbol{\omega}$: absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers
$\boldsymbol{v}_Q$: Geschwindigkeit des Punktes Q
$\boldsymbol{v}_P$: Geschwindigkeit des Punktes P
$\boldsymbol{r}_{PQ}$: Vektor von Punkt P zu Punkt Q

Relativkinematik, bewegtes KOSY K



Ortsvektor

$$_I\boldsymbol{r}_{0P} = {}_I\boldsymbol{r}_{00'} + {}_I\boldsymbol{r}_{0'P} = {}_I\boldsymbol{r}_{00'} + \boldsymbol{A}_{IK} \cdot {}_K\boldsymbol{r}_{0'P}$$

Geschwindigkeit

$$_K\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{A}_{KI}\, {}_I\boldsymbol{v}_P = {}_K\boldsymbol{v}_{0'} + {}_K\dot{\boldsymbol{r}}_{0'P} = {}_K\boldsymbol{v}_{0'} + {}_K\overset{\circ}{\boldsymbol{r}}_{O'P} + \underbrace{{}_K\boldsymbol{\omega}_K \times {}_K\boldsymbol{r}_{0'P}}_{\text{EULER-Ableitung}}$$

Beschleunigung

$$_K\boldsymbol{a}_P = {}_K\dot{\boldsymbol{v}}_P = {}_K\ddot{\boldsymbol{r}}_P = {}_K\overset{\circ}{\boldsymbol{v}}_{O'P} + \underbrace{{}_K\boldsymbol{\omega}_K \times {}_K\boldsymbol{v}_P}_{\text{EULER-Ableitung}}$$

dabei ist $_K\boldsymbol{\omega}_K = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Koordinatensystems K, dargestellt im K-System. Der einfache Punkt $(\dot{\ })$ kennzeichnet die totale Ableitung nach der Zeit, der Kringel $(\overset{\circ}{\ })$ die komponentenweise Ableitung.

Kinetik

Impuls

$$\boldsymbol{p} = \int_K \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = m\,\boldsymbol{v}_S$$

Impulssatz

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\,\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{F} = \sum \mathrm{d}\boldsymbol{F}_i$$

mit:

$\boldsymbol{v}_S$: absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes
$\boldsymbol{a}_S$: absolute Beschleunigung des Schwerpunktes
m : Masse
$\sum \boldsymbol{F}_i$: Summe aller angreifenden Kräfte

Trägheitsmomente

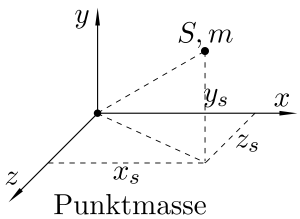
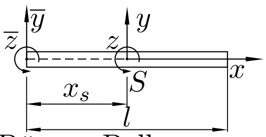
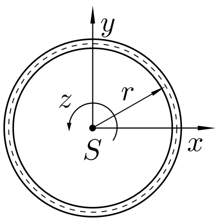
Trägheitsmomente eines Körpers im K-KOSY bzgl. des (Schwer-)Punktes S:

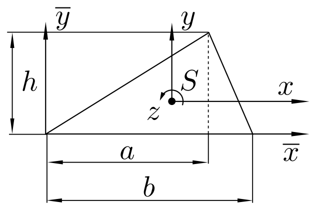
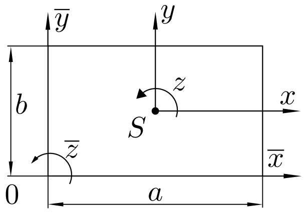
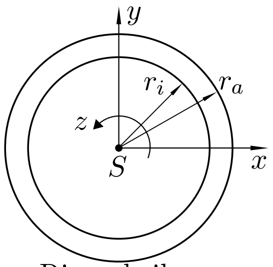
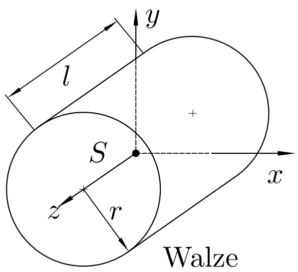
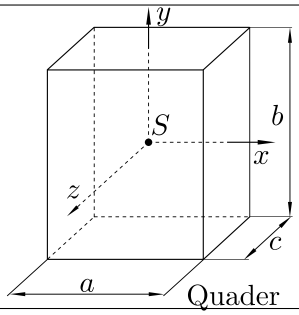
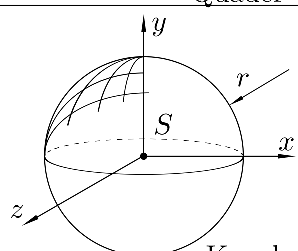
$$_K\boldsymbol{\Theta}^S = \begin{pmatrix} \Theta^S_{xx} & -\Theta^S_{xy} & -\Theta^S_{xz} \\ -\Theta^S_{yx} & \Theta^S_{yy} & -\Theta^S_{yz} \\ -\Theta^S_{zx} & -\Theta^S_{zy} & \Theta^S_{zz} \end{pmatrix}$$

Moment	**Massenträgheit**	**Deviation**
um x-Achse	$\Theta^S_{xx} = \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$	$\Theta^S_{yz} = \Theta^S_{zy} = \int (yz)\,\mathrm{d}m$
um y-Achse	$\Theta^S_{yy} = \int (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$	$\Theta^S_{xz} = \Theta^S_{zx} = \int (xz)\,\mathrm{d}m$
um z-Achse	$\Theta^S_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$	$\Theta^S_{xy} = \Theta^S_{yx} = \int (xy)\,\mathrm{d}m$

Jeder starre Körper besitzt drei zueinander senkrechte Hauptträgheitsachsen, für die die Massenträgheitsmomente (A_0, B_0, C_0) Extremwerte annehmen und die Deviationsmomente Null werden → Hauptachsensystem.

$$_K\boldsymbol{\Theta}^S = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{pmatrix}$$

Punkt- und linienförmige Körper: Massenbelegung $\mu_l = \frac{m}{l}$ $[\mu_l] = \frac{kg}{m}$			
Bezeichnung	Masse, Schwerpunkt	Massenträgheitsmomente	Deviationsmomente
 Punktmasse	m $x_s = x$ $y_s = y$ $z_s = z$	$\Theta_{xx} = m(y^2 + z^2)$ $\Theta_{yy} = m(z^2 + x^2)$ $\Theta_{zz} = m(x^2 + y^2)$	$\Theta_{xy} = mxy$ $\Theta_{yz} = myz$ $\Theta_{zx} = mzx$
 Dünner Balken	$m = \rho A l = \mu_l l$	$\Theta_{xx} = 0$ $\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$ $\Theta_{\overline{yy}} = \Theta_{\overline{zz}} = \frac{1}{3} m l^2$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)
 Dünner Kreis	$m = 2\pi r \mu_l$	$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{1}{2} m r^2$ $\Theta_{zz} = m r^2$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)

Dünne Scheiben / homogene Körper: Massenbelegung $\mu_A = \frac{m}{A}$; $\rho = \frac{m}{V}$ $[\mu_A] = \frac{kg}{m^2}$; $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$			
Bezeichnung	Masse, Schwerpunkt	Massenträgheitsmomente	Deviationsmomente
 Dreieckscheibe	$m = \mu_A \frac{1}{2} bh$ $\overline{x}_S = \frac{1}{3}(a+b)$ $\overline{y}_S = \frac{1}{3}h$	$\Theta_{xx} = \frac{1}{18} mh^2$ $\Theta_{yy} = \frac{1}{18} m(a^2+b^2-ab)$ $\Theta_{zz} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy}$	$\Theta_{xy} = \frac{1}{36} mh(2a-b)$ $\Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$
 Rechteckscheibe	$m = \mu_A ab$ $\overline{x}_S = \frac{1}{3}(a+b)$ $\overline{y}_S = \frac{1}{3}h$	$\Theta_{xx} = \frac{1}{12} mb^2$ $\Theta_{yy} = \frac{1}{12} ma^2$ $\Theta_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2+b^2)$ $\Theta_{\overline{zz}} = \frac{1}{3} m(a^2+b^2)$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen) $\Theta_{\overline{xy}} = \frac{1}{4} mab$ $\Theta_{\overline{xz}} = \Theta_{\overline{yz}} = 0$
 Ringscheibe	$m = \mu_A \pi (r_a^2 - r_i^2)$ $\overline{x}_S = \frac{1}{3}(a+b)$ $\overline{y}_S = \frac{1}{3}h$	$\Theta_{xx} = \frac{1}{4} m(r_a^2 + r_i^2)$ $\Theta_{yy} = \Theta_{xx}$ $\Theta_{zz} = \frac{1}{2} m(r_a^2 + r_i^2)$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)
 Walze	$m = \rho \pi r^2 l$	$\Theta_{xx} = \frac{1}{12} m(3r^2 + l^2)$ $\Theta_{yy} = \Theta_{xx}$ $\Theta_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)
 Quader	$m = \rho abc$	$\Theta_{xx} = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $\Theta_{yy} = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $\Theta_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)
 Kugel	$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$	$\Theta_{xx} = \frac{2}{5} mr^2$ $\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \Theta_{xx}$	$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0$ (Hauptachsen)

Drall

Drall eines Starrkörpers um allgemeinen Punkt P:

$$\boldsymbol{L}^P = \boldsymbol{\Theta}^S\,\boldsymbol{\omega} + m\,(\boldsymbol{r}_{PS} \times \boldsymbol{v}_{PS})$$

Drall eines Starrkörpers um körperfesten Punkt (z. B. Momentanpol) K bzw. Schwerpunkt S:

$$\boldsymbol{L}^K = \boldsymbol{\Theta}^K\,\boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{L}^S = \boldsymbol{\Theta}^S\,\boldsymbol{\omega}$$

Drallsatz

Drallsatz für allgemeinen Bezugspunkt P:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^P + m\,(\boldsymbol{r}_{PS} \times \boldsymbol{a}_P) = \sum_i \boldsymbol{M}_i^P$$

Drallsatz für Schwerpunkt S als Bezugspunkt:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^S = \sum_i \boldsymbol{M}_i^S$$

Energie

Kinetische Energie eines Starrkörpers

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_P^2 \;+\; m\,\boldsymbol{v}_P^T\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PS}) \;+\; \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\Theta}^P\,\boldsymbol{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_S^2 \;+\; \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\Theta}^S\,\boldsymbol{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\Theta}^M\,\boldsymbol{\omega}$$

mit:

$\boldsymbol{v}_P$	:	absolute Geschwindigkeit des körperfesten Punktes P
$\boldsymbol{\omega}$	:	absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers
S	:	Schwerpunkt
M	:	Momentanpol
$\boldsymbol{\Theta}^P$	:	Trägheitstensor, bezogen auf den Punkt P

Potentielle Energie

im Gravitationsfeld:	durch lineare Feder:	gesamt:
$V_g = m\,g\,\Delta h$	$V_c = \frac{1}{2}\,c\,(\Delta l)^2$	$V = V_g + V_c$

mit:

m	:	Masse im Kraftfeld
g	:	Erdbeschleunigung
Δh	:	Höhenänderung parallel zur Erdbeschleunigung
c	:	Federkonstante
Δl	:	Längenänderung der Feder

Energieerhaltungssatz für konservative Systeme

$$E = T + V = \text{const.}$$