先进声学 advanced acoustic

这主要是对春季学期开的声场知识做一个总结，有9个lecture和4个实验。

1 声波运动基础

在流体中声波的运动基于三个基本方程：

质量守恒： 物质的正负局部发散伴随着介质局部密度的相应变化

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

动量守恒：流体的粒子会因为压力的梯度而移动 （也被称为欧拉运动方程）

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

绝热过程：空气中的声音是一种绝热现象，没有局部热交换

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = 0$$

然后我们对上述提到的欧拉运动方程求散度，有：

$$\nabla \cdot (\nabla p') + \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \nabla^2 p' + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

也就是可以写成 **线性波方程**

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

而如果对于谐振的波，那么有$p(r,t) = p(r)e^{jwt}$，带入线性波方程中，有：亥姆霍兹方程(helmholtz equation)

$$\nabla^2 p(r) + k^2 p(r) = 0$$

而在分析不同的声场，就可能需要引入不同的坐标系来表示声压的拉普拉斯算子，有：

$$\nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p'}{\partial \varphi^2}$$

2 平面波

从最简单的平面波的情况入手，有平面波是一维波动方程的解，那么有：线性波方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

有其解为 $p = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$。

而如果声波是谐波由正弦波源产生（如由纯音驱动的扬声器），那么其可以表示为：

$$p = p_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}(ct - x) + \varphi\right) = p_1 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

又将声压用复指数方法来进行表示，有：

$$\hat{p} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}$$

那么欧拉运动方程的一维版本现在可以写成：

$$\mathrm{j}\omega\rho\hat{u}_x + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0$$

而此时波方程也就可以简化称为：（一维亥姆霍兹方程）

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + k^2\hat{p} = 0$$

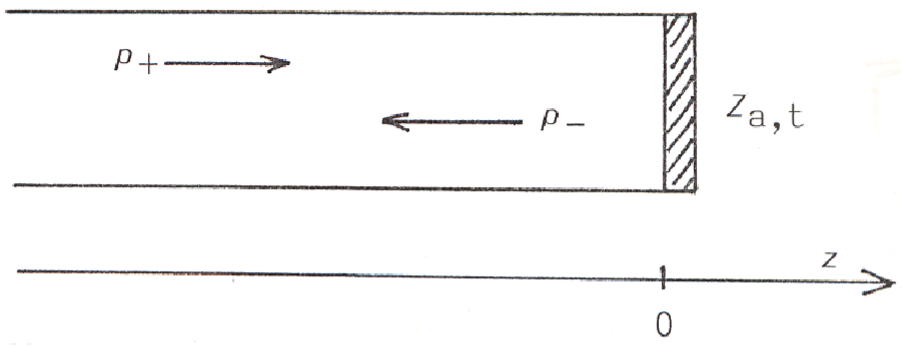
那么沿着x轴传播的声压的表达式就可以写成：

$$\hat{p} = p_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$$

根据欧拉运动公式，可以得到对应的粒子运动速度：

$$\hat{u}_x = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{k}{\omega\rho}p_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} = \frac{p_+}{\rho c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} = \frac{\hat{p}}{\rho c}$$

在具有刚性壁的管道中的平面波



其中声波沿着z方向运动，有一维亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \hat{p} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2}{c^2}\hat{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{p}(z)}{\partial z^2} + k^2 \hat{p}(z) = 0$$

得到通解：

$$\boxed{\hat{p} = p_+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + p_- \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}}$$

根据欧拉运动方程，得到z方向粒子速度：

$$\frac{d\hat{p}}{dz} + \rho \frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\hat{u}_z = -\frac{1}{j\omega\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{1}{\rho c}\left(p_+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} - p_- \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right)$$

此时声波到达管道刚性底部产生反射波，那么就可以自然得到反射系数：

$$R = \frac{p_-}{p+}$$

现在总声压便可以写成：

$$\hat{p} = p_+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right)$$

进而可以算出管道中声压最大值和声压最小值：

$$p_{\max} = |p_+|\left(1 + |R|\right)$$

$$p_{\min} = |p_+|\left(1 - |R|\right)$$

从而可以得到驻波系数：

$$s = \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}$$

以及终端材料吸收系数：

$$\alpha = \frac{P_{abs}}{P_{inc}} = 1 - |R|^2$$

对应的波阻抗：

$$Z_{\rm s}(z) = \frac{\hat{p}}{\hat{u}_z} = \rho c \frac{{\rm e}^{-{\rm j}kz} + R{\rm e}^{{\rm j}kz}}{{\rm e}^{-{\rm j}kz} - R{\rm e}^{{\rm j}kz}}$$

反射系数和终端阻抗的关系：

$$Z_{\rm a,t} = \frac{\rho c}{S}\frac{1+R}{1-R} \quad \Longleftrightarrow \quad R = \frac{Z_{\rm a,t} - \rho c / S}{Z_{\rm a,t} + \rho c / S}$$

在管的输入处(z=-l)，其声学输入阻抗为：

$$Z_{\rm a,i} = \frac{Z_{\rm s}(-l)}{S} = \frac{\rho c}{S}\frac{{\rm e}^{{\rm j}kl} + R{\rm e}^{-{\rm j}kl}}{{\rm e}^{{\rm j}kl} - R{\rm e}^{-{\rm j}kl}}$$

$$\begin{aligned} Z_{\rm a,i} &= \frac{\rho c}{S}\frac{(Z_{\rm a,t} + \rho c / S){\rm e}^{{\rm j}kl} + (Z_{\rm a,t} - \rho c / S){\rm e}^{-{\rm j}kl}}{(Z_{\rm a,t} + \rho c / S){\rm e}^{{\rm j}kl} - (Z_{\rm a,t} - \rho c / S){\rm e}^{-{\rm j}kl}} \\ &= \frac{Z_{\rm a,t}\cos kl + {\rm j}(\rho c / S)\sin kl}{{\rm j}(S / \rho c)Z_{\rm a,t}\sin kl + \cos kl} \end{aligned}$$

那么如果管长与声波波长成一定比例时，有输入阻抗和输出阻抗的关系：

If $\quad l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,\ldots \quad \Longrightarrow \quad Z_{\rm a,i} = Z_{\rm a,t}$

If $\quad l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0,1,\ldots \quad \Longrightarrow \quad Z_{\rm a,i} = \left(\frac{\rho c}{S}\right)^2 \frac{1}{Z_{\rm a,t}}$

一开一闭的管道中的声辐射

可以视作为安装在无限大挡板上的半径为a的圆形活塞：

在低频时，其辐射阻抗为：

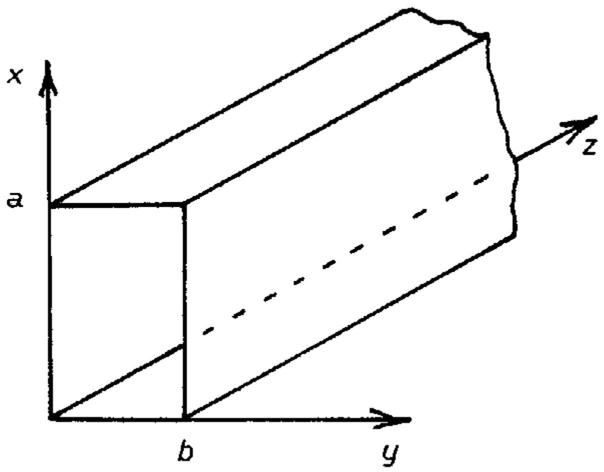
$$Z_{\rm a,r} \approx \frac{\rho c}{S}\left(\frac{1}{2}(ka)^2 + {\rm j}\frac{8}{3\pi}ka\right) \qquad \Delta l = \frac{8a}{3\pi}$$

而在无悬挂在无限大挡板上的低频辐射阻抗为：

$$Z_{a,r} \approx \frac{\rho c}{S}\left(\frac{(ka)^2}{4} + \mathrm{j}0.61ka\right), \qquad \Delta l = 0.61ka$$

管道中的三维波

具有矩形截面管道的声场



直角坐标系下的三维亥姆霍兹方程可以写成： $\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + k^2 \hat{p} = 0$

这个管道沿着z轴无限延申，那么在x,y平面上就会有边界条件，在管道上的粒子速度为0

$$\hat{u}_x(0, y, z) = 0, \qquad \hat{u}_x(a, y, z) = 0$$

$$\hat{u}_y(x, 0, z) = 0, \qquad \hat{u}_y(x, b, z) = 0$$

也就是说：

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0, \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = a$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \quad \text{at } y = 0 \text{ and } y = b$$

亥姆霍兹方程的解为：

$$\hat{p}(x, y, z, t) = p_x(x) p_y(y) p_z(z) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

将其带回亥姆霍兹方程可以得到：

$$\frac{1}{p_x(x)}\frac{\mathrm{d}^2 p_x(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{p_y(y)}\frac{\mathrm{d}^2 p_y(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{p_z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 p_z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2=0$$

又知道有： $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$

那么就可以将三维的亥姆霍兹方程拆分为分别三个维度上的一维亥姆霍兹方程，那么就有通解为：

$$p_x(x)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}.$$

$$p_y(y)=C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y}+D\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_y y}$$

$$p_z(z)=E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}+F\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}$$

最后组合到一起：

$$\hat{p}=\left(A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}\right)\left(C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y}+D\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_y y}\right)\left(E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}+F\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

那么再根据在$x=0$与$x=a$处，$y=0$与$y=b$处的边界条件，我们可以得到：

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+k_z^2=k^2$$

在管道中的声压有：

$$\hat{p}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\left(\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right)\left(p_{mn+}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{zmn}z)}+p_{mn-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+k_{zmn}z)}\right)$$

其中轴向波数就可以由之前的k的关系得到：

$$k_{zmn}=\left(k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^{1/2}$$

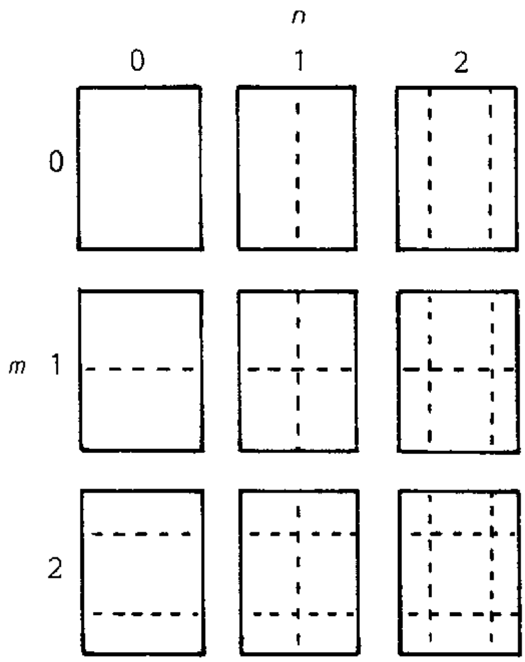
$$\varepsilon_m=1 \qquad \text{for } m=0$$
$$\varepsilon_m=2 \qquad \text{for } m>0$$

若$m=0$及$n=0$，那么我们就有平面波（基础管道模式）

$$\hat{p}=p_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}+p_-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}$$

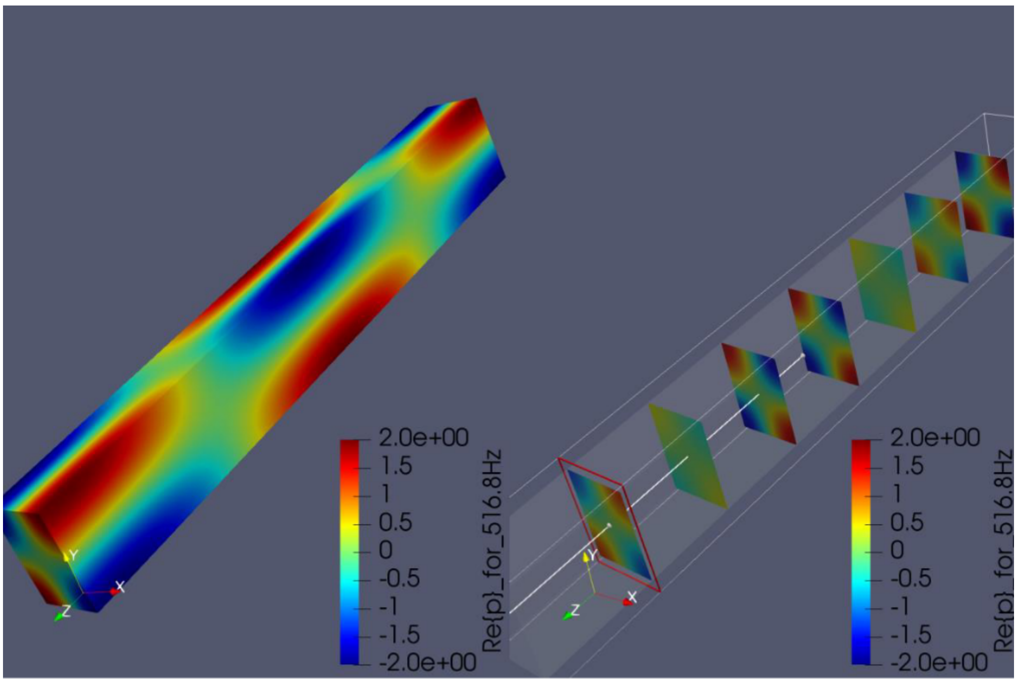
那么此时从波数的大小就可以看出波的传播方式

- 传播波：有 $k=\dfrac{\omega}{c}\geq\left(\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^{2}+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^{2}\right)^{1/2}$



可以推出此时的轴向粒子速度分量：

$$\hat{u}_{zmn}=\frac{p_{mn+}}{\rho c}\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\frac{k_{zmn}}{k}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{zmn}z)}$$



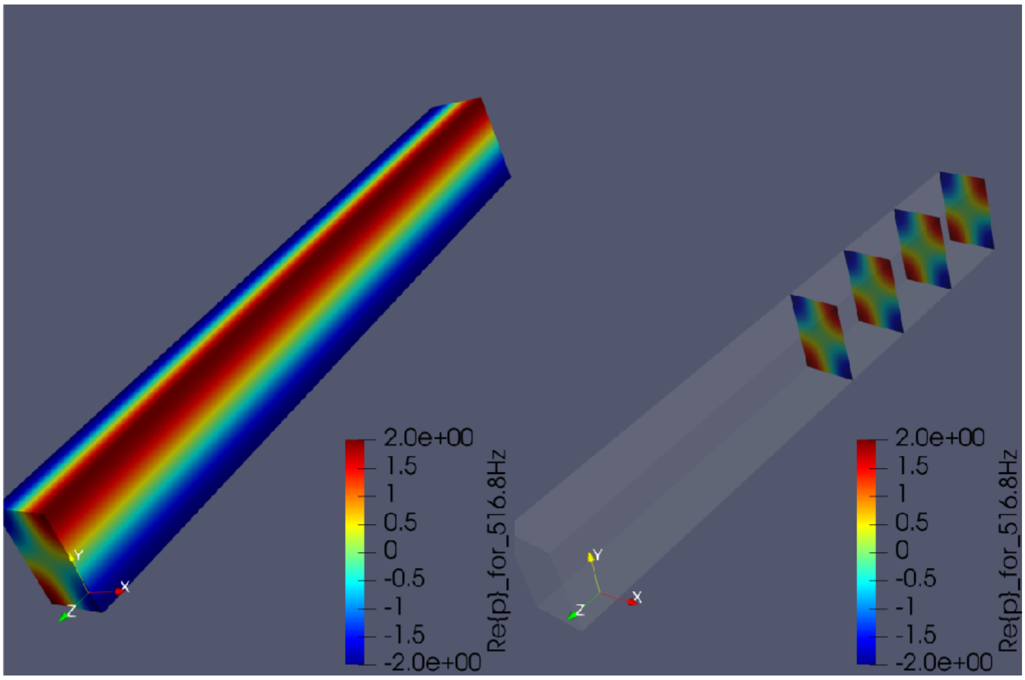
- 没有传播，对应于驻波，$k_{zmn}=0$，有： $k=\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^{1/2}$

这对应于频率： $f_{mn}=\frac{c}{2}\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^{1/2}$

此时与(m,n)模式相关的声压为：

$$\hat{p}_{mn}(x,y,z,t)=p_{mn+}\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

这是一个二维横向驻波



- 衰减波（虚无波）,$k_{zmn}\in Im$，有: $k<\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^{1/2}$

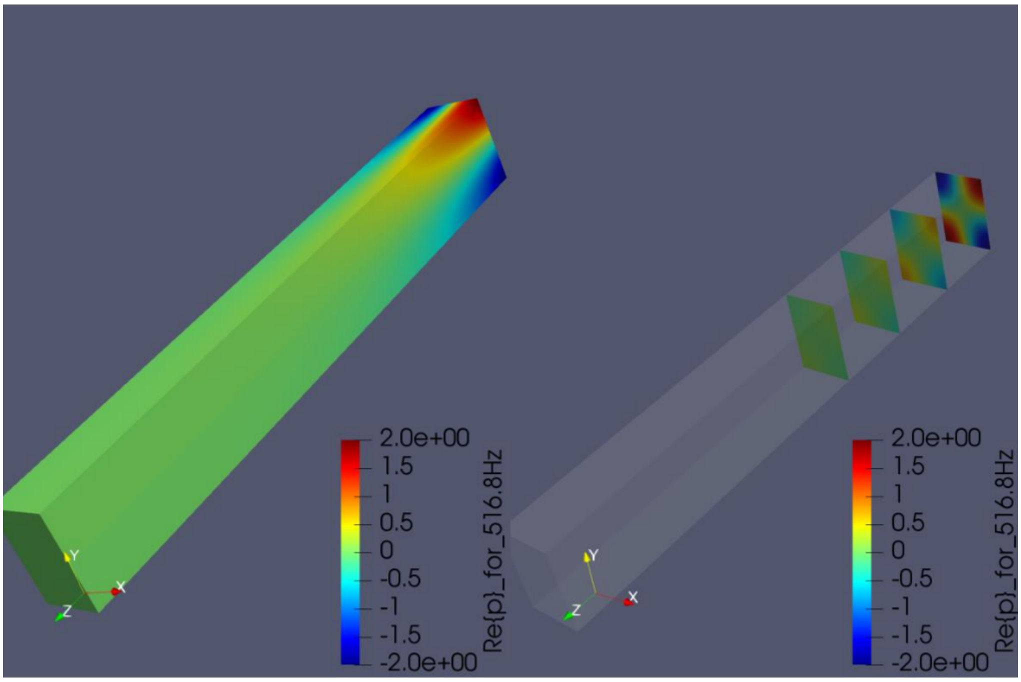
其对应的模式以指数衰减：

$$\hat{p}_{mn}(x,y,z,t)=p_{mn+}\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_z z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

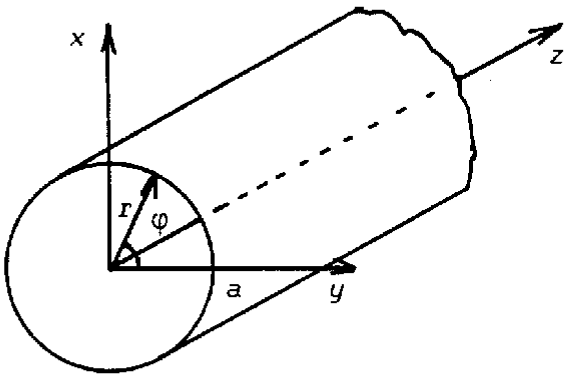
$$\gamma_z=\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-k^2\right)^{1/2}=\frac{2\pi}{c}\left(f_{mn}^2-f^2\right)^{1/2}$$

轴向粒子速度为：

$$\hat{u}_{zmn}(x,y,z,t) = -\mathrm{j}\frac{p_{mn+}}{\rho c}\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}\frac{\gamma_z}{k}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_z z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$



圆形横截面管道中的声场



球坐标系下的亥姆霍兹方程可以写成：

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + k^2 \hat{p} = 0$$

与之前的具有矩形截面的管道相同，其边界条件在于在管道边缘上粒子运动速度为0： $\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}|_{r=a} = 0$

亥姆霍兹方程的解为： $\hat{p}(r,\varphi,z,t) = p_r(r)p_\varphi(\varphi)p_z(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

将这个解带入球坐标系下的亥姆霍兹方程，有：

$$\frac{1}{p_r(r)}\frac{\mathrm{d}^2 p_r(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{p_r(r)}\frac{\mathrm{d}p_r(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{p_\varphi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2 p_\varphi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+\frac{1}{p_z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 p_z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2=0$$

分离变量z，有: $$\frac{\mathrm{d}^2 p_z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2 p_z(z)=0$$

将其带入亥姆霍兹方程再重组，得到:

$$\frac{r^2}{p_r(r)}\frac{\mathrm{d}^2 p_r(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{r}{p_r(r)}\frac{\mathrm{d}p_r(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{p_\varphi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2 p_\varphi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+r^2\left(k^2-k_z^2\right)=0$$

同样分离变量ϕ: $$\frac{\mathrm{d}^2 p_\varphi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+k_\varphi^2 p_\varphi(\varphi)=0$$

之后可以得到: $$\frac{\mathrm{d}^2 p_r(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p_r(r)}{\mathrm{d}r}+p_r(r)\left(k^2-k_z^2-\frac{k_\varphi^2}{r^2}\right)=0$$

然后引入径向波数k_r，$k_r^2=k^2-k_z^2$

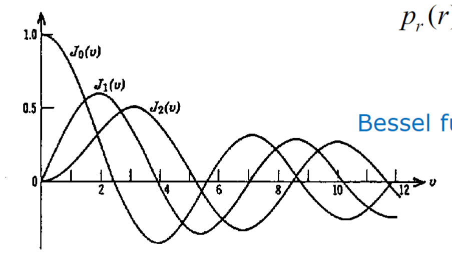
重组后的亥姆霍兹方程可以写成:

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_r(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p_r(r)}{\mathrm{d}r}+p_r(r)\left(k_r^2-\frac{m^2}{r^2}\right)=0$$

上述是一个贝塞尔方程，有通解为: $$p_r(r)=E\mathrm{J}_m(k_r r)+F\mathrm{N}_m(k_r r)$$

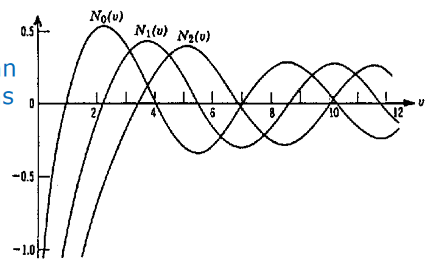
其中J_m 为贝塞尔函数，N_m 为Neumann函数，其图像如下:

$$p_r(r)=E\mathrm{J}_m(k_r r)+F\mathrm{N}_m(k_r r)$$



Bessel functions

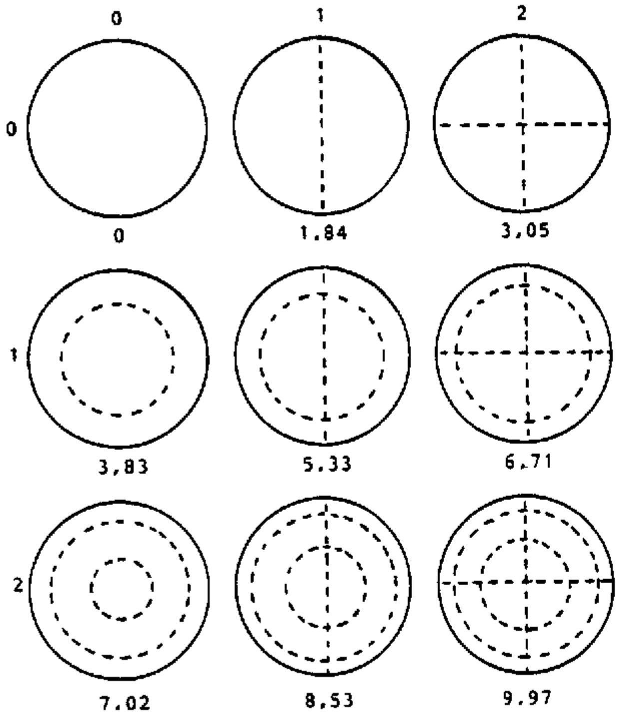
Neumann functions



最终具有圆形截面的管道的声压可以写成:

$$\hat{p}(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_{mn}\mathrm{J}_m(k_{rmn}r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\left(p_{mn+}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{zmn}z)}+p_{mn-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+k_{zmn}z)}\right)$$

且 $$k_{zmn}=\left(k^2-k_{rmn}^2\right)^{1/2}$$



而每一个模式都具有一个截止频率：

$$f_{mn} = \frac{\eta_{mn} c}{2\pi a} \qquad \text{e.g.,} \qquad f_{10} = \frac{1.84c}{2\pi a}$$

具有任意形状截面的管道声场

我们现在考虑具有任意形状截面的管道声场，假设管道不可分割，只考虑横截面，并假设其关于z轴对称，有：声压表达式为：

$$\hat{p}(x,y,z,t) = p_{xy}(x,y)\,p_z(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

带入直角坐标系下的亥姆霍兹方程得到：

$$\frac{1}{p_{xy}(x,y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_{xy}(x,y)+\frac{1}{p_z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 p_z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2=0$$

无论横截面如何，2维亥姆霍兹方程可以写为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_{xy}(x,y)+k^2 p_{xy}(x,y)=0,$$

其边界条件与之前类似：在壁上例子速度为0，即梯度的法向分量在壁上为0

$$\nabla p_{xy}(x,y)\cdot \mathbf{n}_{\text{wall}}=0$$

上式由无限多个特征函数满足，每个特征函数对应于一个离散的，真实的非负值，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_m(x,y)+k_m^2\psi_m(x,y)=0$$

将上式插入亥姆霍兹方程可以得到： $k^2-k_m^2+\frac{1}{p_z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 p_z(z)}{\mathrm{d}z^2}=0$

有解为： $p_z(z)=A_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{zm}z}+B_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{zm}z}$

这里有： $k_{zm}=\sqrt{k^2-k_m^2}$.

也就是说，亥姆霍兹方程的通解为波的叠加：

$$\hat{p}_m(x,y,z,t)=p_{m+}\psi_m(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{zm}z)}+p_{m-}\psi_m(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+k_{zm}z)}$$

每一个模式有一个截止频率： $f_m=\frac{k_m c}{2\pi}$

管道中的格林函数

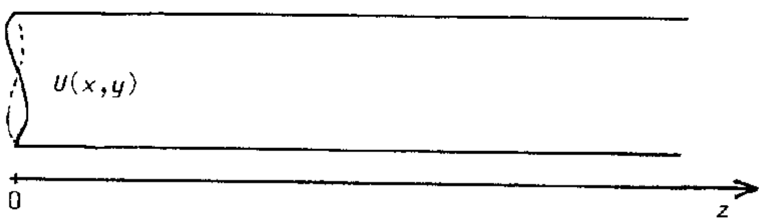
根据上一节我们知道了任意截面的管道的模态可以用满足波动方程的特征函数来表示：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_m(x,y)+k_m^2\psi_m(x,y)=0.$$

又本征函数之间为正交的，其满足：

$$\frac{1}{S}\int_S\psi_m\psi_n^*\mathrm{d}S=\delta_{mn} \quad\Longrightarrow\quad \int_S|\psi_m|^2\mathrm{d}S=S$$

以一个以振动表面激发的无限深管为例，



其由振动表明激发，那么在$z=0$处的边界条件为： $\hat{u}_z(x,y,0,t)=U(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

那么在z=0处的体积速度为： $$U(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p_{m+}}{\rho c}\frac{k_{zm}}{k}\psi_m(x,y)$$

然后利用本征函数的正交性，对上式两边同时乘上ψ_m^*，并对整个截面取积分有：

$$\int_S U(x,y)\psi_n^*(x,y)\mathrm{d}S=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p_{m+}}{\rho c}\frac{k_{zm}}{k}\int_S\psi_m(x,y)\psi_n^*(x,y)\mathrm{d}S=p_{n+}\frac{S}{\rho c}\frac{k_{zn}}{k}$$

$$p_{m+}=\frac{\rho c}{S}\frac{1}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}\int_S U(x,y)\psi_m^*(x,y)\mathrm{d}S.$$

因此，第m项的幅值为：

$$k_{zm}=\frac{k}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}$$

由考虑在此无限深管上，在$(x_0,y_0,0)$处有一个体积速度为Qe^{jwt}振动的单极子

$$U(x,y)=Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

带入第m项声压幅值表达式有：

$$p_{m+}=\frac{\rho c}{S}\frac{Q}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}\int_S\psi_m(x,y)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\mathrm{d}S=\frac{\rho c}{S}\frac{Q\psi_m(x_0,y_0)}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}$$

那么由单极子激发的声压（格林函数）有：

$$\hat{p}(x,y,z,t)=\frac{\rho c}{S}Q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(x,y)\psi_m(x_0,y_0)}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{mz}z)}$$

而自由场的格林函数为： $$G(\mathbf{r},\mathbf{r_0})=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}$$

那么前文描述的半无限管道的格林函数为

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r_0})=-\frac{\mathrm{j}}{Sk}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(x,y)\psi_m(x_0,y_0)}{\sqrt{1-\left(k_m/k\right)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{zm}z}$$

换句话来说，格林函数是单极子声源在任意位置的体积加速度与任意位置的声压之间的归一化传递函数。