Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Analyse von Messdaten

Rudolf Grimm

Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck

Hinweis: Alle genannten Datensätze finden Sie in einer separaten Datei auf OLAT.

Lektion 03: Einfluss des Zufalls, Grundbegriffe der Statistik

Aufgabe 3.1: Stichprobe von Messungen

Die Schwingungsperiode eines Pendels wird 50 mal unter gleichen Bedingungen gemessen (Datensatz 03.01).

a) Schätzen Sie aus der gegebenen Stichprobe den wahren Wert für die Schwingungsperiode ab.

b) Schätzen Sie die Standardabweichung der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung ab.

c) Wie groß ist die Unsicherheit bei der Abschätzung des wahren Werts?

d) Geben Sie nun als Endergebnis Ihre Abschätzung für den wahren Wert so an, dass Sie jedenfalls eine empfohlene Notation verwenden.

Aufgabe 3.2: Reduktion des statistischen Fehlers

In einem Experiment soll die Stärke eines statischen Magnetfeldes genau bestimmt werden. Jede halbe Sekunde erfolgt dazu eine Einzelmessung, die eine zufällige Unsicherheit von 18 Picotesla aufweist. Wie lange muss insgesamt gemessen werden, um die Präzision der Messung auf 1 Picotesla zu verbessern?

Aufgabe 3.3: Genauigkeit des statistischen Fehlers

Wie oft muss man eine Messung unter gleichen Bedingungen durchführen, um den zufälligen Fehler auf 20%, 10%, oder 5% genau ermitteln zu können?

Lektion 04: Wahrscheinlichkeitsverteilung von Messwerten

Aufgabe 4.1: Maximale Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Masse eines Eisengewichts wird durch wiederholte Messungen mit einer Waage ermittelt. Die Analyse des Datensatzes ergibt eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}024\,\mathrm{kg}$. Wie groß ist unter der Annahme eine Gauß'schen Normalverteilung die maximale Wahrscheinlichkeitsdichte im Zentrum der Verteilung?

Aufgabe 4.2: Wahrscheinlichkeiten bei Gauß'scher Normalverteilung

Wir betrachten eine Gauß'sche Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 4{,}23$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}78$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert $x > 5,5$?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert $x < 4,01$?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert im Intervall $3 < x < 5$?

Aufgabe 4.3: Wahrscheinlichkeiten bei Gauß'scher Normalverteilung

Bei einer Präzisionsmessung der Erdbeschleunigung in Innsbruck ergibt sich ein Datensatz aus 140 unter gleichen Bedingungen durchgeführten Einzelmessungen (Datensatz 04.03). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine weitere Einzelmessung einen Wert $g > 9{,}806\,555\,\mathrm{m/s^2}$ ergibt?

Lektion 05: Poissonverteilung

Aufgabe 5.1: Poisson oder nicht?

Die Photonenstatistik in einem Laserstrahl wird auf ihren vermuteteten Poisson'schen Charakter untersucht. Gegeben sind zwei Datensätze (05.01), welche die Anzahl von Zählereignissen in aufeinander folgenden Time-Bins enthalten.

a) Welcher der beiden Datensätze ist mit einer Poisson'schen Statistik vereinbar?

b) Mit welcher Konfidenz können Sie die Poissonverteilung für den anderen Datensatz ausschließen?

Aufgabe 5.2: Fussball

Um Wahrscheinlichkeiten für den Ausgang eines Fussballspiels zu berechnen, gehen wir von der mittleren Anzahl von Toren aus, die wir für jede der beiden Mannschaften erwarten. Für die Heimmannschaft gehen wir von 1,657 Toren pro Spiel aus, während wir für die Auswärtsmannschaft nur 1,209 Tore erwarten (Saison 2016/2017 der 1. Deutschen Bundesliga). Wir nehmen eine Poissonverteilung der Tore an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautet das Ergebnis 0:0?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautet das Ergebnis 3:1?

c) Wie wahrscheinlich sind ein Sieg der Heimmannschaft, ein Unentschieden oder ein Sieg der Auswärtsmannschaft?

d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus c) mit der tatsächlichen Statistik der genannten Saison: 49,0% Heimsiege, 24,2% Untentschieden und 26,8% Auswärtssiege. Welche Schlüsse können Sie daraus ziehen?

Aufgabe 5.3: Geburten im Bezirkskrankenhaus

Im Bezirkskrankenhaus St. Johann kommen im Jahr typischerweise 730 Kinder zur Welt, was einer Geburtenrate von 2 pro Tag entspricht. In guter Näherung können Sie eine Poissonverteilung annehmen.

a) Schätzen Sie ab, an wievielen Tagen im Jahr keine Geburt stattfindet?

b) Schätzen Sie ab, an wievielen Tagen im Jahr 7 oder mehr Geburten stattfinden?

c) Welche Einflüsse bzw. Effekte werden durch die Annahme einer Poissonverteilung vernachlässigt?

Aufgabe 5.4: Interpretation von Kriminalstatistiken

Unter Annahme von Poissonverteilungen wollen wir Kriminalstatistiken von Österreich betrachten.

a) Im Jahre 2017 ist die Zahl der Kfz-Diebstähle im Vergleich zum Vorjahr von 2950 auf 2660 zurückgegangen. Kann man hier von einem signifikanten Rückgang sprechen?

b) Mit welcher Konfidenz lässt sich eine zufällige Schwankung im Falle von a) ausschließen?

c) Im Jahre 2016 gab es in Österreich 46 vollendete Tötungsdelikte (sog. „Mordrate“). Im Vorjahr waren es dagegen nur 39 derartige Fälle. Kann man hier von einem signifikanten Anstieg sprechen, oder lässt sich dies durch eine zufällige Fluktuation erklären?

Lektion 06: Fortpflanzung von Messfehlern (Fehlerpropagation)

Aufgaben zu dieser Lektion entlehnt aus dem Lehrbuch von Hughes und Hase (Kap. 4).

Aufgabe 6.1: Fehlerpropagation bei Funktionen einer Variablen

Gegeben sei der direkt bestimmte Messwert $a = 9{,}274(5)$. Welcher beste Schätzwert und welche Unsicherheit ergeben sich daraus für die indirekt bestimmte Messgröße y, falls die folgenden funktionalen Zusammenhänge gelten:

(a) $y = \frac{a-1}{a+1}$, (b) $y = \frac{a^2}{a-2}$, (c) $y = \arcsin(1/a)$, (d) $y = \ln(1/\sqrt{a})$, (e) $y = \exp(a^2)$.

Aufgabe 6.2: Fehlerpropagation bei Funktionen mehrerer Variablen

Für die drei Größen a, b und c seien die Messwerte $a = 12{,}3 \pm 0{,}4$, $b = 5{,}6 \pm 0{,}2$ and $c = 89{,}0 \pm 2{,}5$ gegeben. Welcher beste Schätzwert und welche Unsicherheit ergeben sich daraus für die indirekt zu bestimmende Größe y im Falle der folgenden funktionalen Zusammenhänge:

(a) $y = \frac{a-b}{a+b}$, (b) $y = \frac{ab}{c}$, (c) $y = a^2bc^3$, (d) $y = \ln(ab^2c)$, (e) $y = \exp(\frac{ab}{c})$.

Aufgabe 6.3: Reflektivität einer Glasoberfläche

Die Reflektivät R einer Glasoberfläche (siehe Physik II: Fresnel'sche Formeln und Snellius'sches Brechungsgesetz) ist für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht durch

$$R = \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)}$$

gegeben, wobei α und β den Einfalls- bzw. Ausfallswinkel bezeichnen. Berechnen Sie den Wert von R und die entsprechende Unsicherheit für die durch eine Messung bestimmten Werte beider Winkel $\alpha = (45{,}0 \pm 0{,}1)^\circ$ und $\beta = (34{,}5 \pm 0{,}2)^\circ$.

Aufgabe 6.4: Bestimmung der Viskosität mit Hagen-Poiseuille-Gesetz

Nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille (siehe Physik I: Viskosität) ist die Volumendurchflussrate durch ein Rohr gegeben durch

$$\dot{V} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l},$$

wobei r und l den Radius und die Länge des Rohrs bezeichnen und Δp den Druckabfall angibt. In einem Experiment wird die Volumendurchflussrate auf 2% genau gemessen. Der Rohradius ist auf 6% genau bekannt, die Länge auf 0,3% und der Druckabfall auf 10%. Mit welcher relativen Genauigkeit lässt sich daraus die Viskosität bestimmen? Welcher Fehler ist hier dominant?

Lektion 07: Kombination von Messergebnissen

Aufgabe 7.1: Zwei Messungen zur Erdbeschleunigung

Zwei unter gleichen Bedingungen durchgeführte Messungen zur Erdbeschleunigung ergeben die Werte $9{,}8045(12)\,\mathrm{m/s^2}$ und $9{,}8065(9)\,\mathrm{m/s^2}$. Kombinieren Sie diese zu einem Gesamtergebnis.

Aufgabe 7.2: Bestimmung einer Zählrate

Für einen seltenen physikalischen Prozess wurden in einer Langzeitmessung, die genau ein Jahr (365 Tage) dauert, 48 Ereignisse festgestellt. Die Messung soll noch einmal wiederholt werden, doch die entsprechende zweite Langzeitmessung muss wegen eines technischen Defekts nach 222 Tagen abgebrochen werden. Bis zu diesem Zeitpunkt wurden 35 Ereignisse festgestellt. Geben Sie den besten Schätzwert und den Fehler für die Zählrate (Ereignisse/Jahr) an. Nehmen Sie an, dass die Ereignisse der Poissonstatistik folgen.

Aufgabe 7.3: Kombination von vielen Einzelmessungen

Eine Größe wird fünfzigmal gemessen, wobei die Fehler der Einzelmessungen stark variieren.

a) Kombinieren Sie die Einzelergebnisse (Datensatz 07.03) zu einem Gesamtergebnis.

b) Ignorieren Sie nun die Fehlerangaben für die einzelnen Messwerte und berechnen Sie den Mittelwert und den Standardfehler aus den 50 einzelnen Messwerten, so wie Sie es in Lektion 3 gelernt haben. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Resultat aus (a).

Lektion 09: Anpassung von Kurven - Grundideen und χ^2

Aufgabe 9.1: Berechnung von χ^2

Gegeben seien ein Satz von 21 Messwerten x_i, y_i mit Fehlern α_i (Datensatz 09.01) sowie drei Funktionen mit optimal angepassten Parameterwerten:

a) $y(x) = a + bx$ mit $a = -0{,}1868$ und $b = 0{,}7552$.

b) $y(x) = a + bx + cx^2$ mit $a = -0{,}0515$, $b = 0{,}2963$ und $c = 0{,}2272$.

c) $y(x) = a + b\cos(x)$ mit $a = 1{,}0065$ und $b = -1{,}0090$.

Stellen Sie die Messpunkte mit den drei Kurven graphisch dar und berechnen Sie für alle drei Fälle die Größe χ^2.

Aufgabe 9.2: Wahrscheinlichkeiten bei der Kombination zweier Messwerte

In Aufgabe 7.1 haben Sie bereits die zwei Messwerte $y_1 = 9{,}8045(12)$ und $y_2 = 9{,}8065(9)$ (für die Erdbeschleunigung in Einheiten von $\mathrm{m/s^2}$) zu einem Gesamtergebnis kombiniert. Wir interessieren uns hier für den Faktor $p_{\mathrm{rel}} = \exp(-\chi^2/2)$ als Maß für die relative Wahrscheinlichkeit, dass eine Konstante y dem tatsächlichen Wert entspricht.

a) Variieren Sie y im Bereich von 9,803 und 9,808 in sinnvollen Schritten und stellen Sie $p_{\mathrm{rel}}(y)$ graphisch dar.

b) Was fällt Ihnen im beim Vergleich Ihrer Graphik mit den Ergebnissen von 7.1 auf?

Aufgabe 9.3: Variation von Parametern einer Anpassung

Die Anpassung einer Geraden $y = ax + b$ an einen Satz von Messpunkten (Datensatz 09.03) liefert die optimalen Parameterwerte $\bar{a} = 1{,}014$ und $\bar{b} = 9{,}59$.

a) Halten Sie b auf dem optimalen Wert $\bar{b}$ fest und variieren Sie a im Intervall $0{,}9 \leq a \leq 1{,}13$. Berechnen Sie die Funktion $\chi^2(a, \bar{b})$ für sinnvolle Werte in diesem Intervall und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar. Was beobachtet man an der Stelle $a = \bar{a}$?

b) Halten Sie a fest auf dem optimalen Wert $\bar{a}$ und variieren Sie b im Intervall $8 \leq b \leq 11$. Berechnen Sie die Funktion $\chi^2(\bar{a}, b)$ für sinnvolle Werte in diesem Intervall und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar. Was beobachtet man an der Stelle $b = \bar{b}$?

Lektion 10: Anpassung von Kurven - Elementare Situationen

Aufgabe 10.1: Geradenanpassung mit und ohne Fehlergewichte

Gegeben sei ein Satz von 24 Messwerten x_i, y_i mit Fehlern α_i (Datensatz 10.01), an den mit Hilfe der linearen Regression eine Gerade $y(x) = a * x + b$ angepasst werden soll.

a) Berechnen Sie mit den in der Vorlesung angegebenen Formeln die Parameterwerte a und b unter Berücksichtigung der Fehlergewichte.

b) Berechnen Sie mit den in der Vorlesung angegebenen Formeln die Parameterwerte a und b ohne Berücksichtigung der Fehlergewichte.

c) Stellen Sie die Messwerte und die beiden Anpassungsgeraden graphisch dar. Wie erklärt sich der auffällige Unterschied?

d) Führen Sie nun mit Ihrem Datenauswertungsprogramm sowohl einen gewichteten als auch einen ungewichteten Fit durch. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für a und b mit den Ergebnissen aus den Regressionsformeln.

Aufgabe 10.2: Schwankungen um Literaturwert und Schätzwert

Eine physikalische Größe wird wiederholt gemessen, wodurch sich Datensatz 10.02. ergibt.

a) Hier nehmen wir an, dass uns ein sehr genauer Literaturwert $y_{\text{lit}} = 123{,}4567$ bekannt ist. Berechnen Sie den Wert für das χ^2, der die Schwankungen um diesen Literaturwert quantifiziert.

b) Hier nehmen wir an, dass uns kein Literaturwert bekannt ist und wir daher aus den gegebenen Messwerten einen Wert $\bar{y}$ abschätzen müssen. Berechnen Sie nun den Wert für das χ^2, der die Schwankungen um diesen Schätzwert quantifiziert. Warum ergibt sich hier ein kleinerer Wert als zuvor?

c) Vergleichen Sie die beiden Werte für das χ^2 mit der jeweiligen Anzahl der Freiheitsgrade.

d) Berechnen Sie schließlich für beide Fälle das χ^2_ν (reduziertes χ^2).

Aufgabe 10.3: Abschätzung des Messfehlers

Eine physikalische Größe y wird in Abhängigkeit von der Größe x gemessen, wodurch sich der Datensatz 10.03 ergibt. Unsere Modellvorstellung legt nahe, dass die Abhängigkeit durch eine Geradengleichung zu beschreiben ist. Die Unsicherheiten der individuellen Messungen sind nicht bekannt, doch kann zumindest angenommen werden, dass diese alle gleich groß sind.

a) Passen Sie eine Gerade an die Messwerte an und berechnen Sie die Quadratsumme der Abweichungen.

b) Welchen Wert können Sie daraus für die Unsicherheit der individuellen Messwerte abschätzen?

Lektion 11: Unsicherheiten bei Kurvenanpassung - Grundlegendes zu Fitfehlern

Aufgabe 11.1: Suboptimale Anpassung

Im Grundpraktikum soll eine Kurve an einen Datensatz angepasst werden. Durch Ausprobieren und händisches Variieren der Parameter erhält Student/in A eine Anpassung mit $\chi^2 = 13{,}128$. Student/in B hingegen benutzt ein Fitprogramm, welches durch Anwendung eines numerischen Algorithmus den minimalen Wert $\chi^2_{\text{min}} = 10,872$ für die optimale Parameteranpassung liefert.

Um welchen Faktor ist es unwahrscheinlicher, dass die händische Anpassung A dem tatsächlichen Zusammenhang entspricht als das die optimale Anpassung B?

Aufgabe 11.2: Fehler bei einparametrigem Fit

Der Fitparameter c soll an einen Datensatz angepasst werden. Für die Abhängigkeit $\chi^2(c)$ ergibt sich

$$\chi^2 = 28{,}378 - 8{,}597\,c + 7{,}953\,c^2\,.$$

a) Geben Sie den optimalen Parameterwert $\bar{c}$ an.

b) Wie groß ist die Unsicherheit α_c der Anpassung?

Aufgabe 11.3: χ^2 bei zweiparametrigem Fit

Die Anpassung einer Geraden $y = ax+b$ an Datensatz 11.03 liefert die optimal angepassten Parameterwerte $\bar{a} = 2{,}9945$, $\bar{b} = 10{,}2752$ und die zugehörigen Unsicherheiten $\alpha_a = 0{,}0780$, $\alpha_b = 0{,}9591$.

a) Berechnen Sie die Werte für $\Delta\chi^2$ in der folgenden Tabelle:

$\Delta\chi^2(\bar{a}-\alpha_a, \bar{b}+\alpha_b)$	$\Delta\chi^2(\bar{a}, \bar{b}+\alpha_b)$	$\Delta\chi^2(\bar{a}+\alpha_a, \bar{b}+\alpha_b)$
$\Delta\chi^2(\bar{a}-\alpha_a, \bar{b})$	$\Delta\chi^2(\bar{a}, \bar{b})$	$\Delta\chi^2(\bar{a}+\alpha_a, \bar{b})$
$\Delta\chi^2(\bar{a}-\alpha_a, \bar{b}-\alpha_b)$	$\Delta\chi^2(\bar{a}, \bar{b}-\alpha_b)$	$\Delta\chi^2(\bar{a}+\alpha_a, \bar{b}-\alpha_b)$

b) Welche Schlüsse können Sie daraus über die Fehlerellipse ziehen?

Lektion 12: Fehlerellipse und Korrelation

Aufgabe 12.1: Korrelation bei Geradenanpassung

Gegeben sei Datensatz 12.01. Wir wollen hier eine Gerade anpassen und die Korrelation der beiden Fitparameter untersuchen.

a) Passen Sie durch einen gewichteten Fit ein Gerade $y = ax + b$ an und bestimmen Sie die optimalen Werte $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

b) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r aus der von Ihrem Fitprogramm ausgegebenen Kovarianzmatrix.

c) Berechnen Sie nun den Schwerpunkt der gegebenen Werte, wobei $x_{\mathrm{SP}} = \frac{1}{w_{\mathrm{ges}}} \sum_i w_i x_i$ und $y_{\mathrm{SP}} = \frac{1}{w_{\mathrm{ges}}} \sum_i w_i y_i$ mit $w_{\mathrm{ges}} = \sum_i w_i$ gilt.

d) Passen Sie die Gerade nun in der Form $y = A(x - x_{\mathrm{SP}}) + B$ an. Verifizieren Sie, dass für die optimal angepassten Parameter tatsächlich $\bar{a} = \bar{A}$ und $\bar{b} = \bar{B} - \bar{A}\, x_{\mathrm{SP}}$ gilt. Was fällt Ihnen beim Vergleich von B mit y_{SP} auf?

e) Bestimmen Sie nun den Korrelationskoeffizienten für den neuen Fit. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

Aufgabe 12.2: Fehlerellipse

Wir gehen wie in Aufgabe 12.1 von Datensatz 12.01 und der Geradenanpassung aus.

a) Stellen Sie die *normierte* Fehlerellipse graphisch dar.

b) Wie lang sind die beiden Halbachsen und welches Aspektverhältnis ergibt sich?

c) Konstruieren Sie nun die Fehlerellipse in der von a und b aufgespannten Ebene und stellen Sie diese graphisch dar.

Aufgabe 12.3: Festgehaltener Fitparameter

Wir gehen wie zuvor von Datensatz 12.01 und der Geradenanpassung aus.

a) Vergleichen Sie den Fitfehler für Parameter b für die beiden Fälle, dass Parameter a variiert oder auf dem optimalen Wert $\bar{a}$ festgehalten wird.

b) Vergleichen Sie den Fitfehler für Parameter a für die beiden Fälle, dass Parameter b variiert oder auf dem optimalen Wert $\bar{b}$ festgehalten wird.

c) Wie hängen die Ergebnisse von a) und b) mit dem Korrelationskoeffizienten r zusammen?

Aufgabe 12.4: Konfidenz

Wir gehen wiederum von Datensatz 12.01 und der Geradenanpassung aus.

a) Nehmen Sie an, dass die tatsächlichen Parameterwerte, wie sie sich aus einer perfekten Messung ergeben würden, bei $a^* = 2$ und $b^* = 10$ liegen. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine solche Abweichung der durch den Fit ermittelten Parameterwerte zu den perfekten Werten, durch reinen Zufall auftritt? Ist es plausibel, dass die genannten Werte tatsächlich bei der Simulation des Datensatzes verwendet wurden?

b) Mit welcher Konfidenz können Sie ausschließen, dass die tatsächlichen Parameterwerte bei $a^* = 2{,}03$ und $b^* = 10{,}1$ liegen? Würden Sie hier von einem signifikanten Unterschied zwischen a^*, b^* und $\bar{a}$, $\bar{b}$ sprechen?

Lektion 13: Korrelation und Kovarianz

Aufgabe 13.1: Analyse einer zweidimensionalen Gaußverteilung

Gegeben sei Datensatz 13.01 mit einer großen Stichprobe von $N = 600$ Wertepaaren, für die eine zweidimensionalen Gaußverteilung angenommen werden kann.

a) Bestimmen Sie die Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{y}$ und die Elemente der Kovarianzmatrix σ_{ij}.

b) Ermitteln Sie aus der Kovarianzmatrix die Werte für die Standardabweichungen σ_x und σ_y sowie für den Korrelationskoeffizienten r.

c) Welche Unsicherheit hat der ermittelte Wert von r ?

d) Stellen Sie die gegebenen Wertepaare als Punkte in der x, y-Ebene graphisch dar.

e) Tragen Sie in Ihre Graphik die Kontur mit $\rho = 1$ ein.

f) Welchen Erwartungswert hat die Zahl der Punkte innerhalb dieser Kontur?

g) Bei welchem Wert von ρ würden Sie 95% der Punkte innerhalb der entsprechenden Ellipse erwarten?

h) Wieviele der gegebenen Punkte liegen tatsächlich innerhalb der Kontur mit $\rho = 1$? Vergleichen Sie den Wert mit dem entsprechenden Erwartungswert.

i) Wieviele der gegebenen Punkte liegen tatsächlich innerhalb der Ellipse, in der Sie 95% der Punkte erwarten? Lassen sich Abweichungen ggfs. durch statistische Schwankungen erklären?

Aufgabe 13.2: Signifikanz von Korrelation

Gegeben sind 5 Datensätze (13.02) mit Stichproben von Wertepaaren.

a) Ermitteln Sie jeweils die Werte des linearen Korrelationskoeffizienten r und die entsprechenden Unsicherheiten.

b) In welchen Fällen liegt eine statistisch signifikante Korrelation vor?

c) Welche Fälle sind gut mit der Annahme von unkorreliertem Verhalten verträglich?

Lektion 14: Fehlerfortpflanzung mit Korrelation

Aufgabe 14.1: Fläche unter einer Geraden

Passen Sie eine Gerade an die gegebenen Punkte (Datensatz 14.01) an. Die Gerade bildet mit der x- und der y-Achse ein Dreieck. Wir interessieren uns für die Fläche A dieses Dreiecks.

a) Passen Sie eine Gerade in der üblichen Form $y = ax + b$ an. Welcher beste Schätzwert ergibt sich daraus für die Fläche A und welche Unsicherheit ergibt sich unter Berücksichtigung der Korrelation beider Fitparameter ?

b) Wählen Sie nun eine Parametrisierung der Geraden, welche die Fläche A enthält. Führen Sie eine Anpassung durch. Vergleichen Sie die Werte für A und die entsprechende Unsicherheit mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 14.2: Vermessung einer Wurfbahn

Eine Stahlkugel wird im Koordinatenursprung unter dem Anstellwinkel θ mit der Geschwindigkeit v_0 abgeschossen und folgt dann im Gravitationsfeld ($g = 9{,}805\,\mathrm{m/s^2}$) reibungsfrei einer Wurfbahn. In 10 verschiedenen horizontalen Entfernungen (x-Koordinate) werden die jeweiligen Höhen y gemessen. Die entsprechenden Messwerte und Messunsicherheiten finden Sie als Datensatz 14.02.

a) Bestimmen Sie die besten Schätzwerte für v_0 und θ, die zugehörigen Unsicherheiten α_{v_0} und α_θ und den Korrelationskoeffizienten r.

b) Bestimmen Sie den besten Schätzwert für die Reichweite R und die zugehörige Unsicherheit α_R.

c) Bestimmen Sie den besten Schätzwert für die maximale Höhe h, welche die Kugel erreicht, und die zugehörige Unsicherheit α_h.

d) Berechnen Sie die untere und obere Grenze des 95%-Konfidenzbands.

e) Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar.

Lektion 15: Chi-Quadrat-Verteilung

Aufgabe 15.1: Simulation mit Zufallsgenerator

Datensatz 15.01 enthält eine Simulation von 500 Messreihen mit jeweils 11 Datenpunkten, wobei der Fehler jedes Datenpunktes gleich eins ist. Berechnen Sie zunächst für jede Messreihe das χ^2 für die Schwankungen um den jeweiligen Mittelwert. Sie erhalten so 500 Werte für das χ^2, die Sie nun statistisch untersuchen sollen.

a) Berechnen Sie den Mittelwert aller 500 χ^2-Werte. Vergleichen Sie diesen mit Ihrer Erwartung für eine χ^2-Verteilung.

b) Berechnen Sie die Standardabweichung aller 500 χ^2-Werte. Vergleichen Sie diese mit Ihrer Erwartung für eine χ^2-Verteilung.

c) Stellen Sie die Statistik der 500 Werte in einem Histogramm dar.

d) Ergänzen Sie Ihre Graphik um die berechnete χ^2-Verteilung und vergleichen Sie diese mit dem Histogramm.

Aufgabe 15.2: Wahrscheinlichkeiten zufälliger Abweichungen

Gegeben sind zwei Datensätze (15.02), an die jeweils ein Polynom dritten Grades angepasst werden soll.

a) Berechnen Sie für beide Datensätze die resultierende Werte für χ^2 und vergleichen Sie diese mit den Erwartungswerten $\langle\chi^2\rangle$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_+, mit der rein zufällige Schwankungen Werte von χ^2 verursachen, die mindestens so groß sind wie die unter a) ermittelten Werte.

c) Würden Sie die unter a) festgestellten Abweichungen von den Erwartungswerten als statistisch signifikant bezeichnen? Welche Schlussfolgerungen können Sie daraus ziehen?

Lektion 16: Chi-Quadrat-Tests

Aufgabe 16.1: Polynom wievielten Grades?

Datensatz 16.01 soll durch ein Polynom n-ten Grades angepasst werden.

a) Berechnen Sie das reduzierte chi-Quadrat für $n = 2...7$ im jeweils optimal angepassten Fall.

b) Berechnen Sie für jeden dieser fünf Fälle auch die Wahrscheinlichkeit P_+ für das zufällige Auftreten eines solchen χ^2_ν-Werts.

c) Tragen Sie die Werte in das χ^2_ν-Konfidenzdiagramm (siehe Vorlesungsunterlagen) ein.

d) Welcher Grad des Polynoms erweist sich für die Anpassung als sinnvoll?

Aufgabe 16.2: Ein Isotop oder zwei?

Im Kasan-Praktikum wird der radioaktive Zerfall einer neutronenaktivierten Silberprobe beobachtet (siehe Lektion 17). Der Datensatz 16.02 enthält die Anzahl der Zählereignisse, die in 100 Zeit-Bins über 1000 s registriert wurden. Für die Bestimmung der Fehler können Sie von einer Poissonverteilung in Gauß'scher Näherung ausgehen („statistische“ Gewichte bei der Anpassung).

a) Wir nehme nun an, dass nur ein einziges Isotop aktiviert wurde und dass es sich daher um einen einfachen exponentiellen Zerfall mit Hintergrund handelt. Berechnen Sie zum Test dieser Hypothese den Wert des reduzierten chi-Quadrats sowie den Wert P_+ der rechtsseitig kumulierten χ^2-Verteilung. Können sie die einfache Hypothese bestätigen oder verwerfen?

b) Wir nehme nun an, dass zwei Isotope mit unterschiedlichen Halbwertszeiten aktiviert wurden und dass es sich daher um einen doppelt-exponentiellen Zerfall mit Hintergrund handelt. Berechnen Sie zum Test dieser alternativen Hypothese den Wert des reduzierten chi-Quadrats sowie den Wert P_+ der rechtsseitig kumulierten χ^2-Verteilung. Können sie die alternative Hypothese bestätigen oder verwerfen?

Aufgabe 16.3: Thermisch oder Fermi-entartet?

Von einem ultrakalten Gas aus ^{40}K-Atomen wird nach einer Flugzeit von einigen Millisekunden eine Absorptionsaufnahme gemacht, so wie es eine Routineprozedur in unseren Laboren mit kalten Atomen ist. Daraus wird ein eindimensionales Dichteprofil gewonnen, welches Sie in dem Datensatz 16.03 finden.

Wenn es sich um ein thermisches Gas handelt (Boltzmann-Statistik), sollte sich die Verteilung durch eine Gaußfunktion beschreiben lassen:

$$y_{\mathrm{th}} = A \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Wenn es sich hingegen um ein tief entartetes Fermigas handelt (Fermi-Dirac-Statistik), sollte das Profil einer sogenannten Thomas-Fermi-Verteilung folgen:

$$y_{\mathrm{TF}} = A \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{x_{\mathrm{TF}}^2}\right)^2 \quad \text{falls} \quad |x - x_0| \leq x_{\mathrm{TF}} .$$

Welche Verteilung passt besser? Und wie können Sie das quantifizieren?

Lektion 17: Analyse einer radioaktiven Zerfallskurve

Aufgabe 17.1: Analyse von 10 Zerfallskurven

Im Datensatz 17.01 finden Sie 10 Zerfallskurven von neutronenaktiviertem Silber. Die 10 Kurven wurden unter identischen Bedingungen aufgenommen.

a) Passen Sie die Kurven mit einer geeigneten Fitfunktion an und bestimmen Sie die Halbwertszeiten der beiden beteiligten Isotope. Fassen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

b) Isotop ^{110}Ag: Sind Ihre 10 Ergebnisse für die Halbwertszeit konsistent? Kombinieren Sie die Ergebnisse zu einem Gesamtergebnis. Ist dieses mit dem Literaturwert verträglich?

c) Isotop ^{108}Ag: Sind Ihre 10 Ergebnisse für die Halbwertszeit konsistent? Kombinieren Sie die Ergebnisse zu einem Gesamtergebnis. Ist dieses mit dem Literaturwert verträglich?

Lektion 18: Student'sche t-Verteilung

Aufgabe 18.1: Kleinste Stichprobe

Die kleinste Stichprobe, aus der wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den „wahren Wert“ abschätzen können, besteht aus nur zwei Werten (y_1, y_2). Dazu nehmen wir an, dass die Streuung einzelner Messwerte um den wahren Wert einer Gauß'schen Normalverteilung folgt (deren Parameter wir aber nicht kennen).

a) Welches ist der beste Schätzwert für den wahren Wert y?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der wahre Wert zwischen y_1 und y_2 liegt?

c) Wir nehmen $\Delta y = y_2 - y_1 > 0$ an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert größer ist als $y_2 + 2\Delta_y$?

Aufgabe 18.2: Stichprobe mit 10 Messungen

Datensatz 18.1 enthält eine Stichprobe von 10 Messungen. Wir können annehmen, dass die Streuung einzelner Messwerte um den wahren Wert einer Gauß'schen Normalverteilung folgt (deren Parameter wir aber nicht kennen).

a) Wie groß ist das Intervall, in dem mit 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit der wahre Wert liegt?

b) Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der üblichen Näherung (Lektion 4), die man unter der Annahme einer sehr großen Anzahl von Messwerten macht.

Lektion 19: Chi-Quadrat-Skalierung

Aufgabe 19.1: Inkonsistente Messungen der Efimov-Periode

Die Efimov-Periode ist ein zentraler Faktor in der Mehrteilchen-Quantenphysik, für den der Wert 22.7 bereits im Jahre 1970 theoretisch vorhergesagt wurde. Wir nehmen an, dass nun 11 unabhängige Messungen dieses Faktors vorliegen (Datensatz 19.01).

a) Zeigen Sie, dass die vorliegenden Messergebnisse inkonsistent sind.

b) Kombinieren Sie die vorliegenden Messergebnisse zu einem Gesamtergebnis mit Fehler, wobei Sie der Inkonsistenz durch die chi-Quadrat-Skalierung Rechnung tragen.

c) Ist das Ergebnis mit der theoretischen Vorhersage vereinbar? Wäre es dies auch ohne Anwendung der chi-Quadrat-Skalierung?

Lektion 20: Verwerfen von Daten

Aufgabe 20.1: Radioaktive Zerfallskurve mit Störimpulsen

Aus der Zerfallskurve eines radioaktiven Isotops (Datensatz 20.01) soll dessen Halbwertszeit bestimmt werden. Erst nach der Datenaufnahme wird festgestellt, dass durch einen Wackelkontakt in der Elektronik gelegentlich Störimpulse aufgetreten sind. Leider kann das Experiment zu diesem Zeitpunkt nicht mehr wiederholt werden, so dass wir nun versuchen wollen, die Messung durch gezieltes Verwerfen von Ausreißern zu bereinigen.

a) Passen Sie den erwarteten einfachen exponentiellen Zerfall mit Hintergrund an und stellen Sie die normierten Residuen graphisch dar.

b) Welcher Punkt zeigt die größte Abweichung? Kann dieser gemäß Chauvenets Kriterium verworfen werden?

c) Können weitere Punkte durch wiederholte Anwendung von Chauvenets Kriterium verworfen werden?

d) Wie ändert sich das Ergebnis für die Halbwertszeit durch das Verwerfen von Ausreißern?