

# Kalibrierung und das Pendel

Charly Beulenkamp

4. März 2022

## Ziel der Übung

In dieser Übung kalibrieren Sie Ihr iOLab für Kraft- und Positionsmessungen. Das Hauptziel dieser Übungen ist es, die letztwöchige Theorie der Fehleranalyse in der eigentlichen Laborarbeit umzusetzen und Ihnen den Kalibrierungsprozess näherzubringen.

Neben Ihrem iOLab stehen Ihnen an Ihrem Arbeitsplatz folgende Materialien zur Verfügung:

- ein Maßband,
- ein Stück Schnur, ca. 1 Meter lang,
- einige Büroklammern,
- Kleingeld, etwa 50g,
- einen leichten Behälter, wie ein Pappbecher.
- eine Stange zum Aufhängen des Pendels.

Die meisten Experimente befassen sich mit quantitativen Ergebnissen, bei denen Messwerte mit denen anderer Forscher/-innen auf der ganzen Welt verglichen werden können. Dieser Vergleich wird durch unser standardisiertes Einheitensystem ermöglicht. Statt die Geschwindigkeiten unserer Uhren vergleichen zu müssen, stellen wir alle unsere Uhren auf den gleichen Standard ein. Dieser Akt der „Uhreneinstellung“ wird als Kalibrierung bezeichnet.

Bevor wir uns mit den konkreten Beispielen der Kalibrierung in diesem Versuch befassen, sollten wir die Rolle der Kalibrierung bei Messungen abstrakter betrachten. Angenommen, Sie messen eine Messgröße  $s$  mit einem bestimmten Gerät. Das Gerät spuckt eine Zahl  $t$  für die Messung aus, die von  $s$  durch die Funktion  $t = f(s)$  abhängt. Ein ideales Messgerät wäre eines, bei dem  $f(s) = s$ . Das Beste, was wir in der realen Welt tun können, ist jedoch sicherzustellen, dass unsere Geräte so nah wie möglich an das Ideal herankommen und die Restunsicherheit zu beschreiben. Wie in Abbildung 1 gezeigt, kann die Charakterisierung des Geräts in zwei Teile unterteilt werden. Die Richtigkeit ist, wie der Mittelwert mit dem wahren Wert übereinstimmt. Die Präzision ist, wie nahe die einzelnen Messungen beieinander liegen.

In diesem Versuch kalibrieren Sie die Positions- und Kraftsensoren des iOLab Gerätes. Um den Umfang der Übung im Rahmen zu halten, werden wir bestimmte Annahmen treffen. Zunächst gehen wir davon aus, dass die iOLab-Uhr und Ihr Lineal gut kalibriert sind, mit Unsicherheiten, die in Ihrer Analyse vernachlässigbar sind. Zweitens gehen wir davon aus, dass die Ausgabewerte der Positions- und Kraftsensoren proportional zu ihren jeweiligen Variablen sind, d.h. in beiden Fällen hängt der Ausgang vom Messgrößen gemäß  $t = f(s) = a \cdot s$  ab, wobei  $a$  eine Konstante ist.

Während dieser Übung werden wir auch auf die folgenden Themen stoßen:

- Rechnen mit Daten und Vergleichen der Statistik der Ergebnisse mit den propagierten Fehlern.
- Vergleich gemessener Größen mit Literaturwerten/Referenzwerten.
- Wenn eine Annäherung in Experimenten verwendet werden kann.

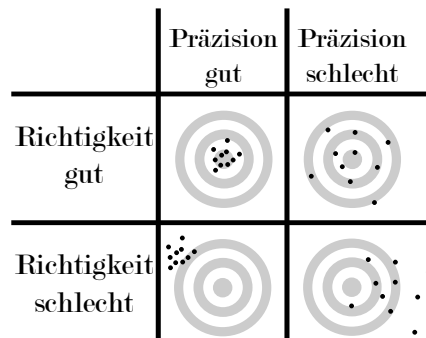


Abbildung 1: Eine grafische Darstellung von Richtigkeit und Präzision bei Messungen.

## 1. Kalibrierung des Rades

Legen Sie das iOLab auf die Räder. Bewegen Sie das iOLab und zeichnen Sie die Bewegung mit dem Radsensor auf. Messen Sie dann mit Ihrem Lineal den Abstand zwischen Ausgangs- und Endpunkt Ihres iOLab. Beide Messungen werden eine Unsicherheit haben. Für den vom iOLab gemeldeten Abstand können sie die Unsicherheit auf  $\pm 1$  mm schätzen. Geben Sie eine Schätzung zu Ablesefehlern (siehe Abschnitt 3.4.1 des Leitfadens) und der möglichen Krümmung Ihres Lineals/Maßbandes an. Übertragen Sie die Fehler (Fehlerfortpflanzung), wenn Sie die Gesamtentfernung als Summe mehrerer Messungen ermitteln. Wiederholen Sie diesen Vorgang mindestens zehn Mal, um statistische Fehler in Ihren Messungen zu berücksichtigen.

**Gehen Sie in Ihrem Bericht auf die folgenden Punkte ein:**

- **Experimentelles Verfahren (0,5 pt):** Erwähnen Sie kurz (ein oder zwei Sätze sind oft genug), was Ihr Messprozess war.
- **Datenberichtgebung und -analyse (1 pt):**
  - Berichten Sie Ihre Ergebnisse ordnungsgemäß.
  - Berechnen Sie für jedes Paar von Entfernungsmessungen das entsprechende  $a$  und seinen Fehler unter Verwendung der Fehlerfortpflanzung.
  - Berechnen Sie aus Ihrer Menge von  $a$  die Standardabweichung  $\sigma_a$ , den (ungewichteten) Mittelwert  $\bar{a}$  und die Standardabweichung des (ungewichteten) Mittelwerts  $\sigma_{\bar{a}}$ .
- **Beantworten Sie folgende Fragen (2 pt) :**
  - Vergleichen Sie Ihre propagierten Fehler für  $a$  mit der Standardabweichung für  $a$ . Stimmen sie überein? Welches ist im Allgemeinen eine zuverlässigere Schätzung der experimentellen Unsicherheit?
  - Ist der Radsensor “gut kalibriert”? Mit anderen Worten, ist das  $\bar{a}$  gleich 1 innerhalb der experimentellen Unsicherheit?
  - Welche Ihrer Ergebnisse repräsentieren die Richtigkeit des Radsensors? Erklären Sie, wie Sie dieses Ergebnis verwenden können, um zukünftige Messergebnisse zu korrigieren und dadurch die Richtigkeit zu verbessern.
  - Welche Ihrer Ergebnisse repräsentieren die Präzision des Radsensors? Was können Sie tun, um mit schlechter Präzision umzugehen?

## 2. Kalibrierung des Kraftsensors

Um den Kraftsensor zu kalibrieren, benötigen Sie eine bekannte Kraft, die als Referenz verwendet werden soll. Eine, die leicht zugänglich ist, ist die Gravitationskraft, die auf eine bekannte Masse  $m$  einwirkt und zwar mit der Kraft

$$F = -mg. \quad (1)$$

Um diese Referenzkraft zu berechnen, müssen wir die Erdbeschleunigung  $g$  und die Masse  $m$  unserer Kalibriermasse kennen.

### 2.1. Bemessung von $g$

Die Erdbeschleunigung kann durch die Durchführung eines Pendelversuchs bestimmt werden. Eine Masse, die an einer Schnur hängt, schwingt unter dem Einfluss der Schwerkraft mit einer Periode  $T$ . Diese Periode hängt vom Anfangswinkel  $\theta_0$  ab, aber oft nur wenig. Vereinfachende Annäherungen werden häufig in experimentellen Verfahren verwendet und sind gültig, solange der systematische Fehler, den sie verursachen, viel kleiner ist als Ihre statistische Unsicherheit. Unter der Annahme dass der Anfangswinkel  $\theta_0$  klein bleibt ( $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ ), kann die Periodendauer durch

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

näherungsweise bestimmt werden, wobei  $L$  der Abstand vom Drehpunkt zum Massenschwerpunkt ist. Korrekturen dieser Näherung können berechnet werden, die Polynome in  $\theta_0$  sind. Für diesen Versuch werden wir nur die obige Annäherung und die Korrektur der führenden Ordnung berücksichtigen, die gegeben ist durch:

$$T_2 = 2\pi\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3)$$

Sie werden die Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung in diesem Experiment untersuchen, indem Sie die  $g$  vergleichen, die Sie aus den Gleichungen 2 und 3 berechnen.

Befestigen Sie den Haken an der Kraftsonde und binden Sie ein Ende Ihrer Schnur daran fest. Binden Sie das andere Ende der Schnur an einem stabilen Punkt fest. Stellen Sie sicher, dass die Knoten und die Konstruktion stark genug sind. Das iOLab ist nicht unzerstörbar! Um die Periodendauer zu messen, können Sie den Kraftmesser verwenden. Für diese Messung muss der Kraftmesser nicht kalibriert werden, da wir nur die relative Änderung der Kraft über der Zeit wissen müssen. Lassen Sie das Pendel in kleinen Winkeln ( $\sim 10^\circ$ ) schwingen und zeichnen Sie die Kraft auf. Wenn das Pendel eine Geschwindigkeit von Null hat, ist die Spannung innerhalb der Schnur und damit die gemessene Kraft der Komponente der Gravitationskraft entlang der Schnur entgegengesetzt,  $F(\theta_0) = -mg \cos(\theta_0)$ . Wenn keine Schwingung vorliegt, ist  $F_0 = -mg$ , und so haben wir  $\cos(\theta_0) = F(\theta_0)/F_0$ . So können Sie anhand der Kraftmessungen die Schwingungsperiodendauer  $T$  und den Anfangswinkel  $\theta_0$  bestimmen.

Gehen Sie in Ihrem Bericht auf die folgenden Punkte ein:

- **Experimentelles Verfahren (0,5 pt):** Erwähnen Sie kurz was Ihr Messprozess war. Erwähnen Sie, wie Sie  $L$ ,  $T$  und  $\theta_0$  bestimmen.
- **Datenberichterstattung und -analyse (1,5 pt):**
  - Berichten Sie Ihre Ergebnisse (in Form von Werten die im Text angegeben sind, in Tabellen oder in Abbildungen ) ordnungsgemäß.
  - Berechnen Sie  $g$  und seine Unsicherheit mit Gleichung 2.
- **Beantworten Sie folgende Fragen (1,5 pt):**
  - Stimmt Ihr Wert von  $g$  mit dem Literaturwert überein?
  - Berechnen Sie nun  $g$  mit der Gleichung 3. Ist die Kleinwinkel-Näherung innerhalb Ihrer experimentellen Unsicherheit gültig? Mit anderen Worten, ist Ihre Messung genau genug, dass der Fehler der Näherung signifikant ist?
  - Was ist die größte Quelle der statistischen Unsicherheit für Ihre Messung von  $g$ ? (Tipp: vergleichen Sie die verschiedenen Terme in Ihrer Formel für  $\sigma_g$ )

## 2.2. Vorbereitung einer Kalibrierungsmasse

Hier verwenden Sie Ihr Kleingeld als Kalibrierungsmasse. Stellen Sie fest, wie viele Münzen Sie von jedem Wert haben. Verwenden Sie Tabelle 1, um die Gesamtmasse m Ihrer Münzen zu berechnen.

Tabelle 1: Massen von Euro-Münzen [1]

Gehen Sie in Ihrem Bericht auf die folgenden Punkte ein:

- **(0.5 pt)** Geben Sie an, welche Münzen Sie verwendet haben und deren entsprechenden Gesamtmasse. Berechnen Sie die Unsicherheit bezüglich der Gesamtmasse unter der Annahme, dass die Masse einer Münze nach einer Gaußschen Verteilung mit einem durch Tabelle 1 gegebenen Mittelwert und einer Standardabweichung von 1% verteilt wird [2].
- **(0.5 pt)** Wie hängen absolute und relative Unsicherheit bezüglich der Gesamtmasse von der Anzahl der Münzen ab? Sie können vereinfachen, indem Sie einen Fall annehmen, in dem nur Münzen derselben Art verwendet werden. Antworten mit Gleichungen. Welche Münzsammlung mit einer Masse von rund 100 g würden die bestmögliche Kalibrierungsmasse darstellen? Argumentieren Sie, warum es die „beste“ ist, indem Sie Ihre Antwort für die vorangehende Frage verwenden.

Wert	Masse
1 Cent	2.30 g
2 Cent	3.06 g
5 Cent	3.92 g
10 Cent	4.10 g
20 Cent	5.74 g
50 Cent	7.80 g
€1	7.50 g
€2	8.50 g

### 2.3. Schwerkraft, die auf die Kalibrierungsmasse wirkt.

Wenn Sie dies noch nicht getan haben, führen Sie zuerst das Standard-Kraftkalibrierungsverfahren durch. Klicken Sie auf die Schaltfläche mit dem Zahnradsymbol, wählen Sie unter Kalibrierung „Kraft“ und führen Sie die einzelnen Schritte aus. Sie prüfen die Ergebnisse des Standardkalibrierungsverfahrens mit einer manuellen Kalibrierung unter Verwendung der Kalibrierungsmasse. Beachten Sie, dass die Ergebnisse dieser Übung einer bestimmten Kalibrierung entsprechen, die einem bestimmten iOLab und Computer entspricht. Daher sollten Sie während dieses Experiments den Kraftsensor nicht neu kalibrieren oder den Computer wechseln.

Hängen Sie das iOLab so auf, dass die Kraftsonde nach unten hängt. Hängen Sie die Behälter mit Hilfe einer Büroklammer an dem Haken auf, der in die Kraftsonde geschraubt wurde. Messen Sie die Kraft der leeren Behälter und die Kraft, die von der Behälter ausgeübt wird, nachdem die Münzen hinzugefügt wurden.

**Gehen Sie in Ihrem Bericht auf die folgenden Punkte ein:**

- **Experimentelles Verfahren (0,5 pt):** Erwähnen Sie kurz was Ihr Messprozess war.
- **Datenberichtgebung und -analyse (1,5 pt):**
  - Berichten Sie Ihre Ergebnisse (in Form von Werten die im Text angegeben sind, in Tabellen oder in Abbildungen ) ordnungsgemäß.
  - Verwenden Sie die in Übung 2.2 ermittelte Erdbeschleunigung  $g$  und die Masse der Münzen  $m$ , um die Gravitationskraft zu berechnen, welche auf die Kalibrierungsmasse einwirkt.
  - Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante  $\bar{a}$  und ihre Unsicherheit.
  - Ist der Kraftsensor „gut kalibriert“?

## Benotung

**Allgemeines:** Jeder gemessene Wert, den Sie angeben, sollte eine Unsicherheit und richtige Einheiten aufweisen. Das gleiche gilt für Werte, die Sie mit Messwerten berechnen. In diesem Fall müssen Sie die Unsicherheiten übertragen (Fehlerfortpflanzung).

**Die Datenauswertung** kann als eine Reihe von Antworten auf die im Skript angegebenen Punkte strukturiert werden. Viele der Fragen lassen sich mit einem einzigen Satz beantworten. Die Punkte werden gemäß den oben angegebenen Punktzahlen verteilt.

**Der vollständige Bericht** sollte für sich allein stehen und so geschrieben sein, dass er für jemanden verständlich ist, der das Skript nicht gelesen hat. Wenn Sie sich mit den Diskussionspunkten für jede Übung befassen, versuchen Sie, einen kohärenten Text und nicht stichwortartig zu schreiben. Die Punkte werden gemäß dem Bewertungsmodell für die vollständigen Berichte verteilt.

## Literatur

- [1] [https://ec.europa.eu/info/business-economy-euro/euro-area/euro-coins-and-notes/euro-coins/common-sides-euro-coins\\_en](https://ec.europa.eu/info/business-economy-euro/euro-area/euro-coins-and-notes/euro-coins/common-sides-euro-coins_en).
- [2] Z. Shkedy, M. Aerts, and H. Callaert. The weight of euro coins: Its distribution might not be as normal as you would expect. *Journal of Statistics Education*, 14(2), 2006.