(10 Punkte) Vertiefung Integrale mit Schnitten und Residuensatz

12.1 (*10 Punkte*) *Residuensatz mit erweiterter Kontur*
Im Folgenden wollen wir das reelle Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^3} dx \tag{1}$$

mithilfe des Residuensatzes berechnen. Dazu betrachten wir das Integral als geschlossenes Wegintegral in der komplexen Ebene

$$\oint_\gamma \frac{\ln z}{1+z^3} dz, \tag{2}$$

wobei die Kontur aus vier Teilen $\gamma = \gamma_A + \gamma_B + \gamma_r + \gamma_R$ besteht (siehe Abb. 1). Für $R \to \infty$ und $r \to 0$ enspricht das Wegintegral entlang γ_A dem Integral I.

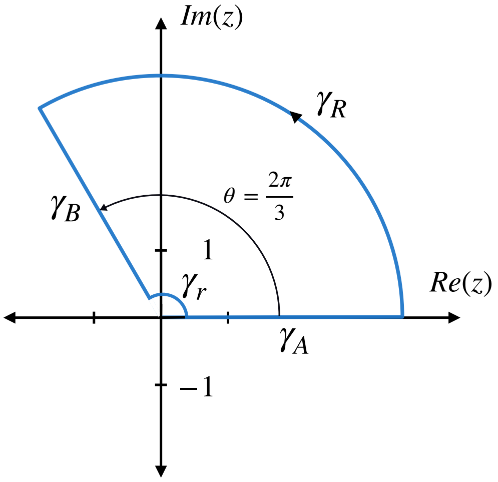

Abbildung 1: Integrationsweg zur Aufgabe, mit $z = x + iy$. Die Kurvenanteile γ_R und γ_r sind Kreisbögen mit Radien R und r mit Mittelpunktswinkel $\theta = 2\pi/3$.

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie auftretende Singularitäten und Verzweigungspunkte in der komplexen Ebene (als Verzweigungspunkte bezeichnet man unter anderem Endpunkte von Schnitten, siehe z.B. *Lang und Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, 3. Auflage, Kapitel 2.4*). Führen Sie gegebenenfalls einen geeigneten Schnitt ein, der die Kontur γ nicht kreuzt.

(b) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Integral Gl. (2) mithilfe des Residuensatzes.

(c) (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = 0 \tag{3}$$

Hinweis: Falls $\lim_{R\to\infty} z f(z) = 0$ für alle $z = Re^{i\phi}$ im Bereich $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$ erfüllt ist, gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z) dz = 0, \tag{4}$$

wobei C den Kreisbogen mit Radius R in der oberen Halbebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Winkelbereich von ϕ_1 bis ϕ_2 bezeichnet.

(d) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Integral

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_B} \frac{\ln z}{1+z^3} dz, \tag{5}$$

und verwenden Sie die Resultate aus (b)-(c), um das Integral I [Gl. (1)] zu berechnen.
Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \tag{6}$$