

Grundpraktikum 1
Versuch 4 Schallgeschwindigkeit in Luft
Oktober 2022 / A. Denoth

1 Aufgaben

Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft mit 2 verschiedenen Methoden

- a) Messung der Laufzeit eines Schallpulses
- b) Erzeugung stehender Wellen in einem Rohr und Bestimmung der Resonanzfrequenzen.
- c) Ermittlung der Schallgeschwindigkeit aus der Laufzeitmessung und aus den Resonanzfrequenzen
Vergleich der gemessenen Schallgeschwindigkeit mit der berechneten 'adiabatischen' Schallgeschwindigkeit und Beantwortung der Zusatzfragen
Berechnung der Amplituden einiger Schallfeldgrößen für Normalbedingungen
Fehleranalyse (Angabe der Fehler zu den einzelnen Meßgrößen) und Diskussion möglicher systematischer Fehler

2 Einleitung

Ein Medium, sei es gasförmig, flüssig oder fest, wird elastisch genannt, wenn ein aus der Gleichgewichtslage verschobenes Massenelement eine Kraft erfährt, die es in das Gleichgewicht zurücktreibt. Zum Beispiel wirken in Festkörpern elastische Bindungskräfte zwischen den einzelnen Atomen, aber auch in Flüssigkeiten und Gasen zeigt sich ein elastisches Verhalten. An dieser Stelle soll im weiteren nur der Fall von (idealen) Gasen behandelt werden. Die rücktreibende Kraft kommt hier durch die Druckunterschiede in benachbarten Volumenelementen zustande, die nach einem gegenseitigen Ausgleich trachten. Infolge seiner Trägheit kommt ein in seine Gleichgewichtslage zurückgetriebenes Massenelement in dieser nicht zur Ruhe, sondern bewegt sich darüber hinaus. Dadurch erhält man eine longitudinale Schwingung und ein schwingendes Massenelement gibt die Bewegung auf ein anderes Element weiter: die zunächst lokale Schwingung breitet sich aus und es entsteht eine Welle. Im Gegensatz zu Festkörpern treten bei Gasen (und auch in Flüssigkeiten) nur longitudinale Wellen auf, da i.a. keine Scherkräfte wirken. An Grenzflächen zu anderen Medien, bei sehr großen Geschwindigkeiten (Ultraschall) oder bei nicht linearen Wechselwirkungen (z.B. große Amplituden) können sich auch andere Wellenformen ausbilden. Die longitudinalen Schwingungen in Gasen bewirken auch eine elastische Kopplung zwischen benachbarten Volumenelementen.

3 Ableitung der Wellengleichung

In einem Rohr (Querschnittsfläche A) kann sich – zumindest bei hinreichend großen Wellenlängen (niedere Frequenzen) – eine (Schall-) Druck-Welle nur in Richtung der Rohrachse, der x -Richtung, ausbreiten; Abb.1. Dadurch wird ein Volumenelement $V = A \cdot dx$ nicht nur verschoben, sondern auch wegen der Kompressibilität in seiner Größe um $dV = A \cdot d\zeta$ verändert. Die Teilchen im Volumen werden um $d\zeta$ verschoben; die Teilchengeschwindigkeit (Schallschnelle) ist: $v = d\zeta/dt$.

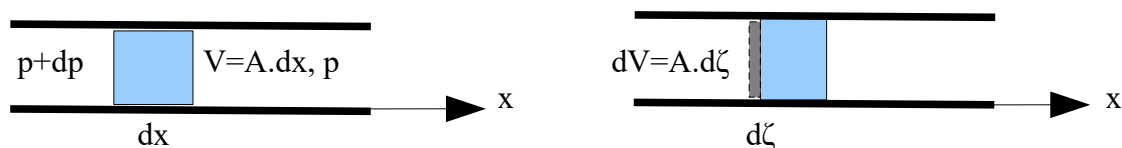


Abb.1 eine nach rechts laufende Druckwelle verschiebt und verändert ein Volumenelement V

Die Kraft $F = -A \cdot dp = -A \cdot dx \cdot (dp/dx)$ beschleunigt das Massenelement $\rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot dx$; somit gilt:

$$\begin{aligned} \rho \cdot A \cdot dx \cdot (dv/dt) &= -A \cdot dx \cdot (dp/dx) \\ \rho \cdot dv/dt &= -dp/dx \end{aligned} \quad \text{Gl(1)}$$

mit: ρ mittlere Gasdichte^{*}, $p(x,t)$ Gasdruck und $v(x,t)$ Teilchengeschwindigkeit (Schallschnelle). Die Größe der relativen Volumenänderung dV/V bei einer Druckänderung dp ist dabei durch den

Kompressionsmodul des Gases bestimmt:

$$dp = -K \cdot dV/V \quad \text{oder} \quad dp = -K \cdot d\zeta/dx \quad \text{Gl(2)}$$

K ist der Kompressionsmodul des Gases ($1/K$ ist die Kompressibilität, $1/K = \kappa$). Für ein ideales Gas ist die isotherme Kompressibilität (Boyle-Mariotte-Gesetz) durch $\kappa_{\text{iso}} = 1/p$ gegeben, für die adiabatische (isentrop) Kompressibilität folgt gemäß der Adiabatangleichung [$p \cdot V^\gamma = \text{konst.}$] $\kappa_{\text{ad}} = 1/(\gamma \cdot p)$; γ : Adiabatenkoeffizient, p : mittlerer Druck (Luftdruck).

Für die Druckänderung dp/dx folgt aus Gl(2): $dp/dx = -K \cdot d^2\zeta/dx^2$

Mit der Abkürzung $c = \sqrt{K/\rho}$ und mit $v = d\zeta/dt$ folgt aus Gl(1) die eindimensionale (homogene) Wellengleichung

$$c^2 \cdot d^2\zeta/dx^2 = d^2\zeta/dt^2 \quad \text{Gl(3)}$$

c ist dabei die Phasen-Geschwindigkeit der Änderung eines Zustandes im Gas, z.B. des Druckes; sie wird als Schallgeschwindigkeit bezeichnet. c ist abhängig von der Gasart (Kompressionsmodul, der selbst wiederum druckabhängig sein kann), von der Art der Zustandsänderung (isotherm, adiabatisch,...) und von der Relation $p(\rho)$.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet

$$\zeta = f(x \pm c \cdot t)$$

wobei f eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion ist. Von besonderem Interesse sind die sogenannten harmonischen Wellen $\zeta(x,t) = \zeta_0 \cdot \sin(c \cdot t - x)$. Zweckmäßig ist es, die Zeit t in Einheiten der Schwingungsperiode T (mit $\omega = 2\pi/T$) und den Weg x in Einheiten der Wellenlänge λ (mit $k = 2\pi/\lambda$) zu erfassen:

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

für die Druckwelle – Schallwechseldruck – als Überlagerung zum Luftdruck p ergibt sich aus Gl(1)

$$p(x,t) = \rho \cdot c \cdot \zeta_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Jetzt stehen 2 einfache Methoden zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c zur Verfügung:

- a) eine direkte Laufzeitmessung eines Schallpulses, der als Überlagerung (Fourier-Synthese) vieler harmonischer Wellen unterschiedlicher Frequenzen dargestellt werden kann. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit einer solchen Gruppe von Wellen heißt Gruppengeschwindigkeit: $c_{\text{Gruppe}} = \Delta x / \Delta t$
- b) eine Messung der Druckverteilung in einem Resonator. Durch Überlagerung (Interferenz) einer vorlaufenden mit der reflektierten, rücklaufenden Welle führt (im Idealfall) zur Ausbildung von stehenden Wellen bei ganz bestimmten Frequenzen (Resonanzen). Für eine solche Resonanzfrequenz kann $p(x)$ durch eine Drucksonde gemessen werden; aus dem Abstand der Stellen maximalen Drucks läßt sich die Wellenlänge λ bestimmen, und mit der bekannten Frequenz die Schallgeschwindigkeit ermitteln. Siehe auch: Kundt'sche Röhre bzw. Sonometer.

Alternative Methode: Messung des Druckes $p(\tau)$ mit einer Drucksonde (Mikrophon) an einer bestimmten Stelle am Rand eines Resonators bei zeitlich veränderlichen Frequenzen $f(\tau)$. Das Spektrum der auftretenden Resonanzen kann dann durch Transformation von $p(\tau)$ in den Frequenzbereich (Fourier-Analyse; Fourier-Transformation) gefunden werden.

Die so ermittelte Schallgeschwindigkeit wird als Phasengeschwindigkeit bezeichnet. In dispersionsfreien Gebieten, in denen c_{phase} nicht von der Frequenz abhängt, gilt $c_{\text{phase}} = c_{\text{Gruppe}}$.

Stehende Wellen

Laufen in einem Medium gleichzeitig mehrere Wellen, so überlagern sich diese zu einer resultierenden Welle. Es kommt dabei - analog wie in der Optik - zu Interferenzerscheinungen. Hier soll der Spezialfall zweier zueinander entgegengesetzt laufender Wellen gleicher Frequenz, die in einem Rohr mit einem offenen Ende (schallweicher Abschluß) rechts und einem linksseitig geschlossenen Ende (schallharter Abschluß) laufen, beschrieben werden: Eine Über-Druckwelle läuft in einem Rohr der Länge L vom geschlossenen Ende nach rechts, und wird wegen des (Schall-) Impedanz-

sprunges am offenen Ende als Unter-Druckwelle bezüglich des 'außen' herrschenden Luftdruckes p_b reflektiert. Die Summe der Wechseldrucke ist dort also $\tilde{p}(L, t) = 0$, $p_{\text{gesamt}} = p_b$.

$$\tilde{p}(x, t) = p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) + p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x) = 2 \cdot p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(kx)$$

Diese Gleichung beschreibt eine stehende Welle: $\cos(\omega \cdot t)$ ist die Zeitabhängigkeit und $2 \cdot p_0 \cdot \cos(kx)$ die lokale Amplitude der Schwingung. Im Mittel wird daher durch eine solche 'Welle' keine Energie transportiert! Für welche Wellenlängen λ_n sich eine stehende Welle ausbilden kann, folgt aus der Bedingung $\tilde{p}(L, t) = 0 \rightarrow \cos(2 \cdot \pi \cdot L / \lambda_n) = 0$ oder $L = \lambda_n (2 \cdot n + 1) / 4$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Für die Resonanzfrequenzen f_n folgt damit:

$$f_n = (2 \cdot n + 1) \cdot c / (4 \cdot L) \quad \text{Gl(4)}$$

Abb.2 veranschaulicht die Druckverteilung der Grund- und 1. Oberschwingung einer stehenden Welle in einem einseitig geschlossenen Rohr.

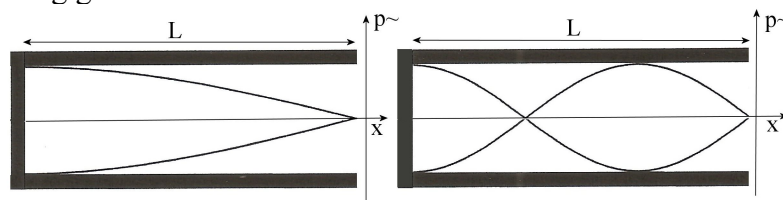


Abb.2 Grund- und 1. Oberschwingung eines einseitig geschlossenen Rohres

In den bisherigen Überlegungen wurde angenommen, daß der jeweilige Reflexionskoeffizient an den Rohrenden $|r| = 1$ ist; also keine Verluste, und keine nach außen laufende Welle! Für das schallharte Ende ist $|r| \sim 1$ gut erfüllbar, am offenen Ende läuft mit Sicherheit eine vom Rohrrand herrührende Kugelwelle auch nach außen. Das bedeutet aber auch, daß die Bedingung $\tilde{p}(x, t) = 0$ am offenen Rand nicht abrupt für $x = L$ sondern erst in einem etwas größeren Abstand $x = L_{\text{eff}}$ erfüllbar ist. L_{eff} bezeichnet man als akustische Rohrlänge; sie ist um die sogenannte Mündungskorrektur s [$s = L_{\text{eff}} - L$] größer als die geometrische Länge L . Die Größe s hängt für ein kreis-zylindrisches Rohr vom Durchmesser D und etwas auch von der Dicke und Form des Randes ab und liegt im Bereich $0,6 D \sim s < 0,8 D$. Ein Reflexionskoeffizient $|r| < 1$ bedeutet aber auch, daß im Rohr eine Überlagerung der stehenden Welle mit einer laufenden Welle vorliegt; der maximale Gesamtdruck wird geringer, der minimale Druck steigt, die Wechseldruckamplitude wird kleiner! Weiters wurde angenommen, daß im Rohr (im Resonator) die Schallwelle eine ebene Welle ist.

4 Durchführung der Experimente

Geräte und Zubehör

iOLab Grundgerät, Kopfhörer, Maßband, Signalgenerator (online sweeper generator), Taschenlampe, A3 oder A4 Papier, Klebeband, kleine (ca $15 \times 10 \text{ cm}^2$) harte undurchsichtige Platte (Holz, Metall, Plastik,.....), Thermometer (da die Schallgeschwindigkeit auch von der Temperatur abhängig ist!) **Unterstützende Anleitungen auf YouTube: siehe iOLab-Linkliste / Versuch 4**

a) Messung der Schallgeschwindigkeit nach dem Laufzeitverfahren

iOLab Grundgerät am besten am Boden hinstellen und im Abstand von ca $3 \dots 3,5 \text{ m}$ (oder auch größer) eine Taschenlampe in Richtung zum Lichtsensor des iOLab positionieren (muß nicht genau sein!). iOLab in den Modus 'Mikrophon' + 'Light' setzen. Licht einschalten und 'Record' am iOLab. Dann den Lichtstrahl schlagartig durch die Platte unterbrechen; das Aufschlagen an der (zweckmäßigerweise) vorher markierten Stelle am Boden erzeugt einen kurzen Schallpuls. Am iOLab sollte nach geeigneter Wahl der Skalierung ein ähnliches Bild, wie in Abb.3 gezeigt, erscheinen.

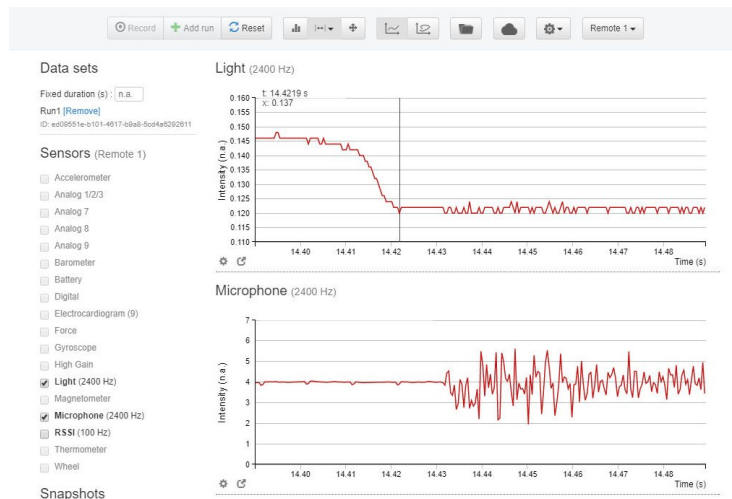


Abb.3 Laufzeitmessung mit dem iOLab

Aus der Zeitdifferenz 'Licht aus' und Ankunft des Schallsignals folgt bei gegebener Strecke (Aufschlagstelle der Platte – iOLab) die Schallgeschwindigkeit.

Hinweis: der Lichtsensor im iOLab befindet sich etwas über dem Bodenniveau: 'Licht aus' ist also etwas früher als der Start des Schallpulses !

b) Messung der Schallgeschwindigkeit nach dem Resonanzverfahren

- 1) die beiden Kopfhörer möglichst knapp nebeneinander durch ein Klebeband fixieren
- 2) A3 oder A4-Bogen zu einem Rohr aufrollen mit einem Durchmesser von ungefähr 3 ...3,5 cm
Beide Kopfhörer ungefähr mittig am Rohrende mit Klebeband fixieren. Da hier das offene Rohrende ist: nur sehr sparsam mit Klebeband abdecken!
Rohrlänge: Breitseite A4, Breit- oder Längsseite des A3-Bogens
- 3) Das iOLab (Stelle des Mikrophons) unmittelbar vor das andere Ende des Rohres stellen, so daß die Rohröffnung vollständig abgedeckt (verschlossen) wird: schallhartes Rohrende !
- 4) Kopfhörer an PC anschließen, Online-tone-generator einstellen: lineare Frequenzänderung zwischen 500 Hz und 5000 Hz innerhalb 60 sek. Die Box 'continue playing' offen lassen !!!
iOLab auf Modus 'Microphon' setzen
Ein Anleitung gibt's auch unter: <https://www.youtube.com/embed/Hm4NszGuOEo>
- 5) iOLab auf 'Record' setzen und Tongenerator auf 'Play'. Ein Muster für eine Messung ist in Abb.4 gegeben.

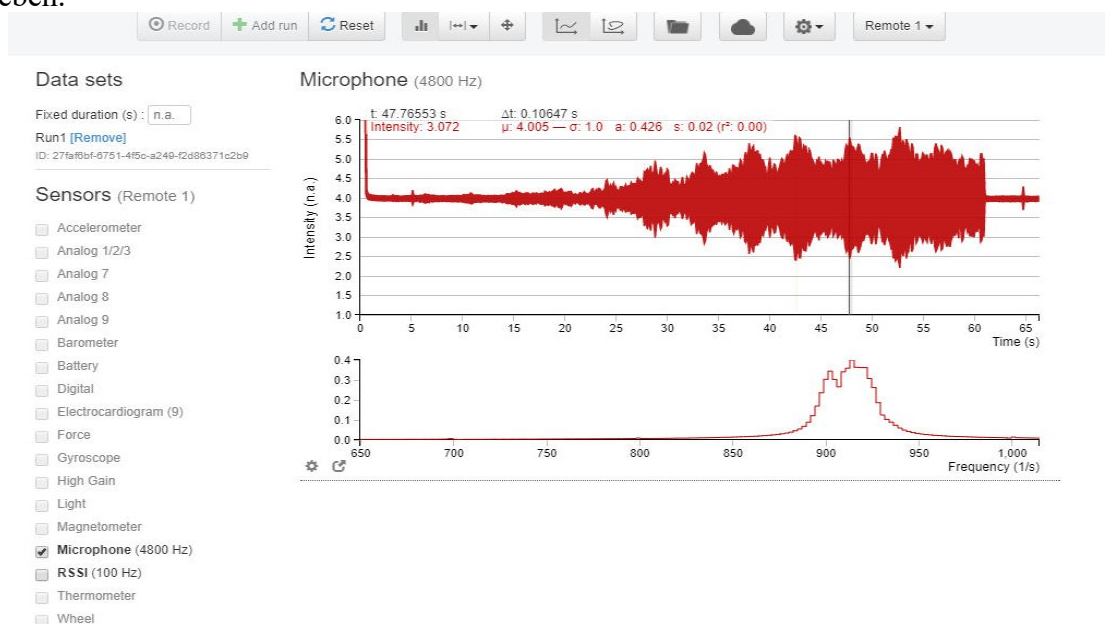


Abb.4 oben: Intensität der Schallwelle $I(\tau)$, unten: 3. Peak von rechts, Analyse mit FFT

Für (mindestens) 2 Messungen sollen viele Peaks und die dazugehörigen Resonanzfrequenzen ermittelt werden: dazu die Box 'FFT' [Fast Fourier Transformation] öffnen und eine Anzahl von Digitalisierungsschritten wählen. Eine kurze Anleitung dazu gibt's unter:

<https://www.youtube.com/embed/gzqtWvqbamI>

Die 'richtigen' Frequenzen müssen der Relation $f_n = (2n+1) \cdot c / (4 \cdot L_{\text{eff}})$ genügen, daraus folgt ein Satz von 'n' und damit auch die Grundfrequenz $f_0 (n=0) = c / (4 \cdot L_{\text{eff}})$. Einfacher für die Auswertung ist die Differenz aufeinanderfolgender Resonanzen; sie genügt der Beziehung

$$f_{n+1} - f_n = c / (2 \cdot L_{\text{eff}}) = 2 \cdot f_0$$

Daraus folgt ein Mittelwert für f_0 und daraus die Schallgeschwindigkeit c ; L_{eff} ist dabei abzuschätzen: L (geometrische Rohrlänge), für die Mündungskorrektur s wird $s = 0,6 D$ angenommen.

Achtung:

Beim Auswerten der Messung mittels des FFT-Tools im Beispiel der Abb.4 fällt auf, daß an der ausgewählten Stelle eine Frequenz von ca 910 Hz angegeben wird. Bei einer zwischen 500 Hz und 5000 Hz linearen Frequenzänderung wäre zum gewählten Zeitpunkt (ca 46 s nach Start des Ton-generators; vergl. Abb.4) eine Frequenz von ca 3900 Hz zu erwarten. Oder: wie und warum ist der Ausgabewert zu korrigieren ?

Zur korrekten Rekonstruktion eines Signals muß die Abtastfrequenz mindestens dem Doppelten der höchsten interessierenden Signalfrequenz entsprechen (Nyquist-Shannon Theorem). Die halbe Abtastfrequenz wird als Nyquist-Frequenz bezeichnet. In der FFT zeigen sich Signale oberhalb der Nyquistfrequenz als sog. Spiegelfrequenzen, also Frequenzen, die an dieser 'imaginären' Grenze in das sog. Nutz-Frequenzband gespiegelt werden. Genau das trifft beim FFT-System des iOLab zu: Abtastfrequenz 4800 Hz, Nyquist-Grenze $f_N = 2400$ Hz. Bereich der Signalfrequenzen: 500 ... 5000 Hz; alle Frequenzen $f > f_N$ werden gespiegelt und werden als $f^* = 4800 - f$ angezeigt.

c)

1) Berechnung der Schallgeschwindigkeit

Mit $c = \sqrt{(K/\rho)}$ läßt sich für ein gegebenes Gas die Schallgeschwindigkeit berechnen; mit dem adiabatischen Kompressionsmodul und der Zustandsgleichung für ein ideales Gas folgt für

$$c_{\text{ad}} = \sqrt{(\gamma \cdot R \cdot T / M)}$$

T: absolute Temperatur [K], M: molare Masse des Gases [$M_{\text{Luft}} \sim 0,028973$ kg/mol], R: allgemeine Gaskonstante [$R = 8,3143$ J.K⁻¹.mol⁻¹], $\gamma_{\text{Luft}} \sim 1,4$

Dieser berechnete Wert soll mit den experimentell gefundenen Werten verglichen werden.

Die nach den beiden Methoden ermittelten Schallgeschwindigkeiten sind fehlerbehaftet.

Geben Sie eine klare Fehlerabschätzung und diskutieren Sie auch mögliche systematische Fehler.

2) Zusatzfragen:

Was ist der wesentliche Unterschied zwischen der Geschwindigkeit nach dem Laufzeit- und nach dem Resonanzverfahren ?

Wovon hängt der Adiabatenkoeffizient γ ab ?

Warum und unter welchen Bedingungen gilt für Luft $\gamma_{\text{Luft}} \sim 1,4$

3)

Berechnung einiger Schallfeldgrößen in Luft

für einen Schallwechseldruck der Amplitude $p_0 = 100$ Pa bei einer Frequenz $f = 1$ kHz.

Das entspricht einem Schalldruck in unmittelbarer Nähe zu einem großen Düsentriebwerk !!

Die Hörschwelle beim menschlichen Ohr liegt in etwa bei 20 μ Pa ! Gehörschäden können ab 20 Pa auftreten.

- Amplitude der Teilchenbewegung (Schallausschlag): ζ_0

- Amplitude der Teilchengeschwindigkeit (Schallschnelle): $v_0 = \zeta_0 \cdot \omega$

- Amplitude der Dichteschwankung ρ_0

Angaben: mittlere Dichte der Luft $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$
mittlerer Luftdruck $p = 10^5 \text{ Pa}$
Lufttemperatur $T = 20^\circ\text{C}$

*) Bei der Ableitung der Wellengleichung wurde die Dichte $\rho(x,t)$ durch die mittlere Dichte ρ ersetzt. Das ist gerechtfertigt, da im Vergleich zur Normaldichte der Luft selbst bei sehr großen Schalldruckwerten nur äußerst kleine Dichteänderungen auftreten!

Punktevergabe

Die Punktevergabe erfolgt gemäß den Richtlinien im Praktikums-Teil 'iOLab-Einführung'. Für dieses Labor 'Schallgeschwindigkeit' stehen insgesamt 10 Punkte zur Verfügung, die ausschließlich auf Grundlage der 'Datenauswertung' vergeben werden, die im Anschluss an die Laborarbeit eingereicht wird.

Es gibt drei (3) Punkte für Aufgabe 4a, fünf (5) Punkte für Aufgabe 4b und zwei (2) Punkte für Aufgabe 4c.

Fragen zur Vorbereitung

- was sind Schallwellen und wie werden sie erzeugt ?
- Wellen transportieren Energie und Impuls: wie merkt man das bei Schallwellen ?
- was sind stehende Wellen und wie werden sie erzeugt ?
- Wovon hängt die Schallgeschwindigkeit in Gasen ab ?

Versuchsaufbau mit iOLab, Resonanzrohr, PC und Bildschirm

