

# Einfacher harmonischer Oszillator

Alexander Helbok,\* Clemens Bein<sup>†</sup>

12. Januar 2023

## Zusammenfassung

Ziel dieses Versuches ist es, ein passendes Modell für ein System mehrerer paralleler Federn mit gleicher Federkonstante aufzustellen. Dafür wurden mehrere Versuche mit verschiedenen Massen und Federkonfigurationen durchgeführt und statistisch ausgewertet. Wir sind zum Schluss gekommen, dass das Superpositionsprinzip auf Federsysteme zutrifft und sich die Federkonstanten in einer Parallelschaltung addieren.

---

\*alexander.helbok@student.uibk.ac.at

<sup>†</sup>clemens.bein@uibk.ac.at

---

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Theorie</b>  | <b>1</b>  |
| 2.1      | Newtons Grundsätze der Bewegungslehre . . . . .         | 1         |
| 2.1.1    | Einfacher harmonischer Oszillator . . . . .             | 1         |
| 2.2      | Statistische Grundlagen . . . . .                       | 2         |
| <b>3</b> | <b>Aufbau und Methoden</b>                              | <b>3</b>  |
| 3.1      | Eine Feder mit drei Massen . . . . .                    | 3         |
| 3.1.1    | Bestimmung der Masse . . . . .                          | 4         |
| 3.1.2    | Bestimmung der Winkelfrequenz . . . . .                 | 4         |
| 3.1.3    | Berechnung der Federkonstante $k$ . . . . .             | 5         |
| 3.2      | Aufstellen eines Modells für parallele Federn . . . . . | 5         |
| 3.3      | Prüfen des Modells . . . . .                            | 6         |
| <b>4</b> | <b>Ergebnisse</b>                                       | <b>6</b>  |
| 4.1      | Massenbestimmung . . . . .                              | 6         |
| 4.2      | Federpendel mit einer Feder . . . . .                   | 8         |
| 4.3      | Federpendel mit zwei Federn . . . . .                   | 10        |
| 4.4      | Testen des Modells . . . . .                            | 11        |
| <b>5</b> | <b>Diskussion und Schlussfolgerung</b>                  | <b>11</b> |

# 1 Einleitung

Harmonische Oszillationen sind nicht nur, wie in diesem Versuch, in der Mechanik anzutreffen, sondern erstreckt sich von der Elektrodynamik bis hin zur Quantenmechanik über alle Teilbereiche der Physik. Das aus der analytischen Mechanik abgeleitete Modell des harmonischen Oszillators eignet sich auch gut, um nicht-mechanische Konzepte zu beschreiben und anzunähern, wie zum Beispiel die Bindungsenergien von Atomen. Es wird nicht umsonst geschätzt, dass sich alles zu einem harmonischen Oszillator reduziert. Mit so vielen Anwendungen ist die physikalische Beschreibung des harmonischen Oszillators eine der wichtigsten Werkzeuge der Physik. Dadurch ist es lohnenswert, im Grundpraktikum eines dieser Modelle mit Hilfe eines Experimentes zu validieren. Hier wenden wir das Modell des einfachen harmonischen Oszillators auf das Federpendel an.

Dafür werden in Abschnitt 2 die benötigten physikalischen und statistischen Grundlagen aufgezeigt. Daraufhin wird in Abschnitt 3 der Aufbau und die Vorgehensweise der einzelnen Versuche beschrieben. Insbesondere wird auf die Massenbestimmung, die Berechnung der Federkonstante  $k$ , das Aufstellen eines Modells und anschließend auf die Überprüfung dieses Modells eingegangen. In Abschnitt 4 werden die Ergebnisse der drei Versuche dargestellt und mit der Theorie verglichen und zum Schluss werden die gewonnen Erkenntnisse diskutiert.

## 2 Theorie

Im nachfolgenden Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen des Versuches eingegangen.

### 2.1 Newtons Grundsätze der Bewegungslehre

Um die Masse des Pendelkörpers zu bestimmen, wird Newtons 2. Axiom herangezogen [1]. Dieses besagt, dass

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

also, dass die auf einen Körper wirkende Kraft  $F$  linear mit seiner Beschleunigung  $a$  skaliert, wobei seine Masse  $m$  gerade der Proportionalitätskonstante ist. In anderen Worten ausgedrückt ist das Verhältnis zwischen Kraft und Beschleunigung der Skalierungsfaktor, die Masse  $m$ .

Diese Tatsache wird herangezogen, um die Schwingmasse zu ermitteln. Kennt man beziehungsweise misst man nämlich alle wirkenden Kräfte und Beschleunigungen, ist die Masse der Quotient der beiden Größen.

#### 2.1.1 Einfacher harmonischer Oszillator

Der einfache harmonische Oszillator ist die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

wobei  $m$  die Masse des Oszillators,  $x$  die Position des Pendelkörpers und  $k$  eine Konstante ist und von der Natur der Schwingung stammt. In unserem Fall wird die Oszillation von einer Feder verursacht, welche durch das Hookesche Gesetz beschrieben wird. Dieses besagt, dass die Kraft, welche eine Feder ausübt, proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist und um einen Faktor  $k$  skaliert wird, der von den Materialeigenschaften der Feder abhängt. Es gilt also  $F_H = -k\Delta x$ , wobei  $\Delta x$  der Abstand zur Ruhelage

ist. Stellt man die Bewegungsgleichungen für ein Federpendel auf und wählt das Koordinatensystem so, dass der Ursprung in der Ruhelage des Federpendels (im Schwerfeld der Erde!) liegt, erhält man Gleichung (2). Die Größe  $k$  aus der Differentialgleichung ist also die Federkonstante aus dem Hookeschen Gesetz mit der Einheit N/m.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine trigonometrische Funktion und lautet

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Amplitude  $A$  und einem Phasenfaktor  $\varphi$ , wobei  $A$  und  $\varphi$  sich durch Anfangswerte bestimmen lassen. Für die Kreisfrequenz gilt aber

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{k} \sqrt{\frac{1}{m}} = \sqrt{k} \tilde{m} \quad (4)$$

und ist unabhängig von jeglichen Startpositionen und Geschwindigkeiten, weshalb sie als eine charakteristische Eigenschaft des Systems angesehen wird. Offensichtlich besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Winkelfrequenz  $\omega$  und der Wurzel des Kehrwerts der Masse  $\tilde{m} := \sqrt{1/m}$  (wird aus Bequemlichkeitsgründen mit  $\tilde{m}$  abgekürzt), wobei die Wurzel der Konstante  $k$  der Skalierungsfaktor ist.

Aus der Winkelfrequenz lassen sich auch weitere Größen ableiten, wie zum Beispiel die Schwingungsdauer  $T$ , die durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

gegeben ist. Diese Beziehungen lassen sich auf Seite 336 im Demtröder nachschlagen [2].

## 2.2 Statistische Grundlagen

Hier werden kurz die Methoden erwähnt, welche für die statistische Aufbereitung der Daten essentiell sind.

Das Arithmetische Mittel, auch Mittelwert oder Durchschnitt genannt, ist das wohl meist verwendete Werkzeug der Statistik. Es lässt sich sowohl für „exakte“, als auch für fehlerbehaftete Daten definieren. Im ersten Fall spricht man von einem ungewichteten Mittelwert und man schreibt

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

mit  $\bar{x}$  als Mittelwert von  $N$  Daten [3].

Sind die Daten fehlerbehaftet (mit Fehler  $\alpha_i$ ) muss man diesen berücksichtigen und erhält

$$\bar{x} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\alpha_i^2} \quad (7)$$

Haben alle Daten aber den selben Fehler, kürzt sich dieser weg und man landet wieder bei Gleichung (6). [3, S. 50] Aus diesem Grund wird in diesem Versuch großteils der ungewichtete Mittelwert angewandt, obwohl alle Daten fehlerbehaftet sind.

Die Standardabweichung ist ein direktes Maß für die Verteilung der Daten und gibt an, wie weit die

Daten im Mittel vom Durchschnitt abweichen. Sie berechnet sich wie folgt

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (8)$$

Wir dividieren hier durch  $N - 1$ , da der Mittelwert, der in der Berechnung der Standardabweichung herangezogen wird, die  $N$  Freiheitsgrade der  $N$  Daten um einen reduziert [3].

Die Kombination der Unsicherheiten von fehlerbehafteten Messdaten erfolgt mittels der Gaußschen Fehlerpropagation. Diese stellt einen Zusammenhang zwischen dem Fehler der Größe  $Z(x_i)$ , welche von  $x_i$  Variablen abhängt, und den partiellen Ableitungen nach  $x_i$  her. In allgemeiner Form sieht die Formel wie folgt aus

$$\alpha_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Z}{\partial x_i} \alpha_{x_i} \right)^2} \quad (9)$$

mit  $\alpha_{x_i}$  als Fehler der einzelnen Größen, von denen  $Z$  abhängt [3]. Oft wird für  $\alpha_{x_i}$  die Standardabweichung aus Gleichung (8) verwendet, das muss aber nicht der Fall sein. Die Propagation von Fehlern erfolgt in diesem Versuch automatisch und wird im Hintergrund gehalten.

Zuletzt wird noch das Chi-Quadrat eingeführt, welches ein Maß für die Güte einer Funktionsanpassung ist. Dafür wird die Quadratsumme der fehlernormierten Abweichungen gebildet und schaut in Summenschreibweise so aus

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i)}{\alpha_i} \right)^2 \quad (10)$$

$y_i$  sind dabei die gemessenen Werte, während  $y(x_i)$  die Funktionswerte an den Stellen  $x_i$  sind. [3, S. 65]

Generell gilt, je kleiner der Wert von  $\chi^2$ , desto besser passt das Modell, aber man erkennt, dass der Wert mit zunehmender Datenanzahl zwangsläufig auch zunehmen muss. Tatsächlich ist der Erwartungswert dieser Größe gerade die Anzahl der Freiheitsgrade. Das motiviert die Einführung des sogenannten reduzierten Chi-Quadrat

$$\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (11)$$

mit  $\nu$  als Anzahl der Freiheitsgrade [3]. Die so definierte Größe hat den Erwartungswert  $\langle \chi_v^2 \rangle = 1$ , man muss  $\nu$  also nicht mehr kennen, um die Güte einzuschätzen.

Eine kurze Anmerkung zur Notation:  $\sigma$  wird in diesem Bericht für die Standardabweichung eines Datensatzes verwendet, während  $\alpha$  der Fehler einer bestimmten Größe ist. Öfters fallen diese beiden zusammen (bzw.  $\alpha$  wird auf  $\sigma$  gesetzt), was für Verwirrung sorgen kann, weshalb dies im Text immer erwähnt wird. Als Faustregel kann man sich merken, dass  $\sigma$  die Eigenschaft eines Datensatzes ist und  $\alpha$  sich nur auf einzelne Werte bezieht.

### 3 Aufbau und Methoden

In diesem Kapitel wird der Aufbau der drei Einzelversuche erläutert.

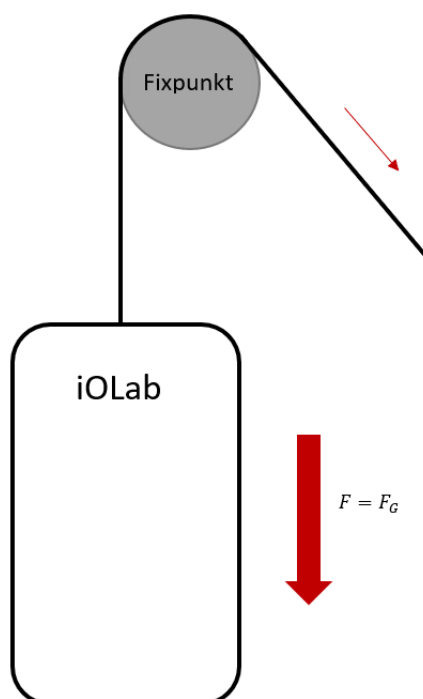
#### 3.1 Eine Feder mit drei Massen

Für diesen Versuch wird eine Feder mit jeweils drei verschiedenen Massen  $m_i$  in Schwingung versetzt, um aus der Winkelfrequenz die Federkonstante  $k$  zu berechnen. Um drei verschiedene Massen zu er-

halten, wird der Versuch einmal nur mit dem IOLab durchgeführt. Für den zweiten Durchgang wird ein Stein mit Klebeband an dem IOLab befestigt und für den dritten Durchgang ein weiterer Stein. Ebenfalls benötigt man eine Feder, das IOLab an dem eine Ringschraube an dem Kraftsensor angebracht ist und eine Briefklammer, welche an einer Stuhllehne befestigt ist.

### 3.1.1 Bestimmung der Masse

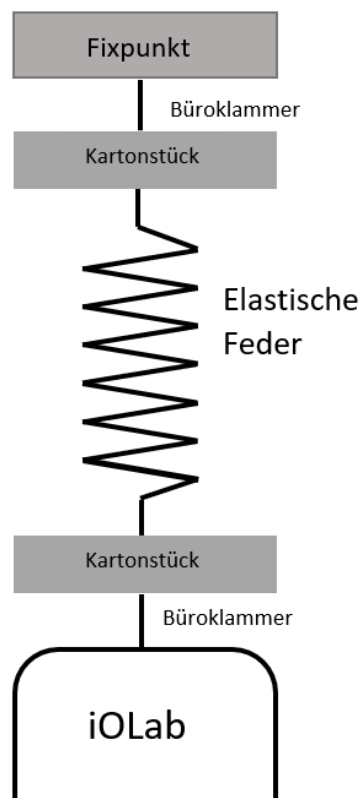
Um nun die einzelnen Massen  $m_i$  zu bestimmen wird das IOLab an dem Kraftsensor mit einer Schnur, über einen Fixpunkt (in unserem Fall ein horizontaler Stab) hochgezogen (Siehe Abbildung 1). Dies wird nun für die zwei weiteren Massen wiederholt. Aus den Daten des Beschleunigungs- und Kraftsensors lässt sich die jeweilige Masse bestimmen.



**Abbildung 1:** Schematischer Versuchsaufbau zur Bestimmung der Masse

### 3.1.2 Bestimmung der Winkelfrequenz

Nun wird die unelastische Schnur durch eine Feder ersetzt und das IOLab wird aus dem Ruhezustand ausgelenkt. Währenddessen wird die Kraft  $F$  die auf den Kraftsensor wirkt und die Beschleunigung  $a$  aufgezeichnet. Man erhält einen Sinus-artigen Verlauf in beiden Messungen, aus welchen man die Kreisfrequenz mit einem Sinus-Fit bestimmen kann.



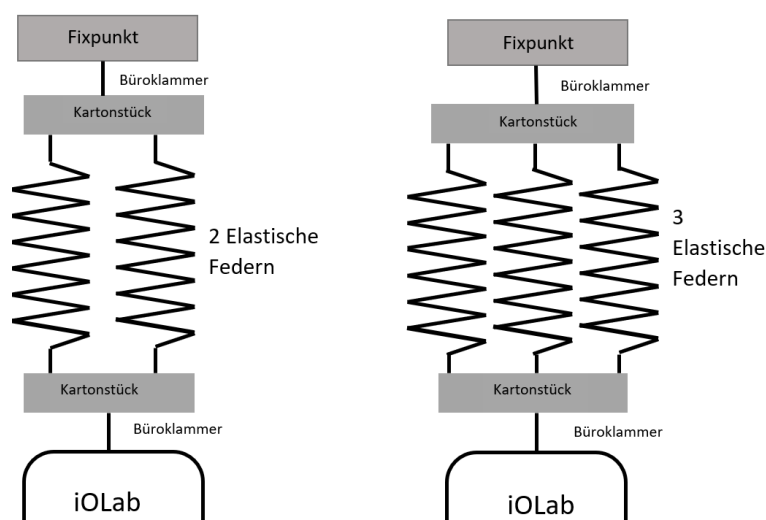
**Abbildung 2:** Schematische Darstellung des Versuchsaufbau zur Bestimmung der Kreisfrequenz

### 3.1.3 Berechnung der Federkonstante $k$

Wie in Abschnitt 2 diskutiert lässt sich nun der Wert für  $k$  durch die Kreisfrequenz und der Masse  $m_i$  bestimmen.

## 3.2 Aufstellen eines Modells für parallele Federn

Zur Bestimmung eines Modells für die Gesamtfederkonstante  $k_{\text{ges}}$  wird der Versuch mit der schwersten Masse  $m_3$  und zwei parallelen Federn wiederholt. Dazu werden mit Hilfe von zwei Kartonstücken die Federn parallel aufgehängt. Die Kartonstücke werden mit einer Büroklammer an dem Kraftsensor und dem Fixpunkt befestigt, wie Abbildung 3 zeigt. Anschließend wird das iOLab aus dem Ruhezustand ausgelenkt und für 20s die Kraft  $F$  und die Beschleunigung  $a$  aufgezeichnet.



**Abbildung 3:** Schematischer Versuchsaufbau von zwei parallelen Federn(links) und drei Federn (rechts), zur Bestimmung der Periodendauer

Aus dem Vergleich der Federkonstanten  $k_1$  und  $k_2$  aus Unterabschnitt 3.2 lässt sich nun ein Modell für  $N$  Federn aufstellen.

### 3.3 Prüfen des Modells

Um nun das Modell zu überprüfen, erweitern wir obigen Versuch auf drei parallelen Federn mit selbiger Masse  $m_3$  (Siehe Abbildung 3). Bei der Durchführung dieses Versuches muss auf die anfängliche Auslenkung geachtet werden, da es zu Überdehnung der Federn kommen kann und das System dann nicht mehr durch einen harmonischen Oszillator beschrieben wird. Anschließend wird wie im vorherigen Versuch die Federkonstante  $k_3$  ausgerechnet und mit dem Modell abgeglichen.

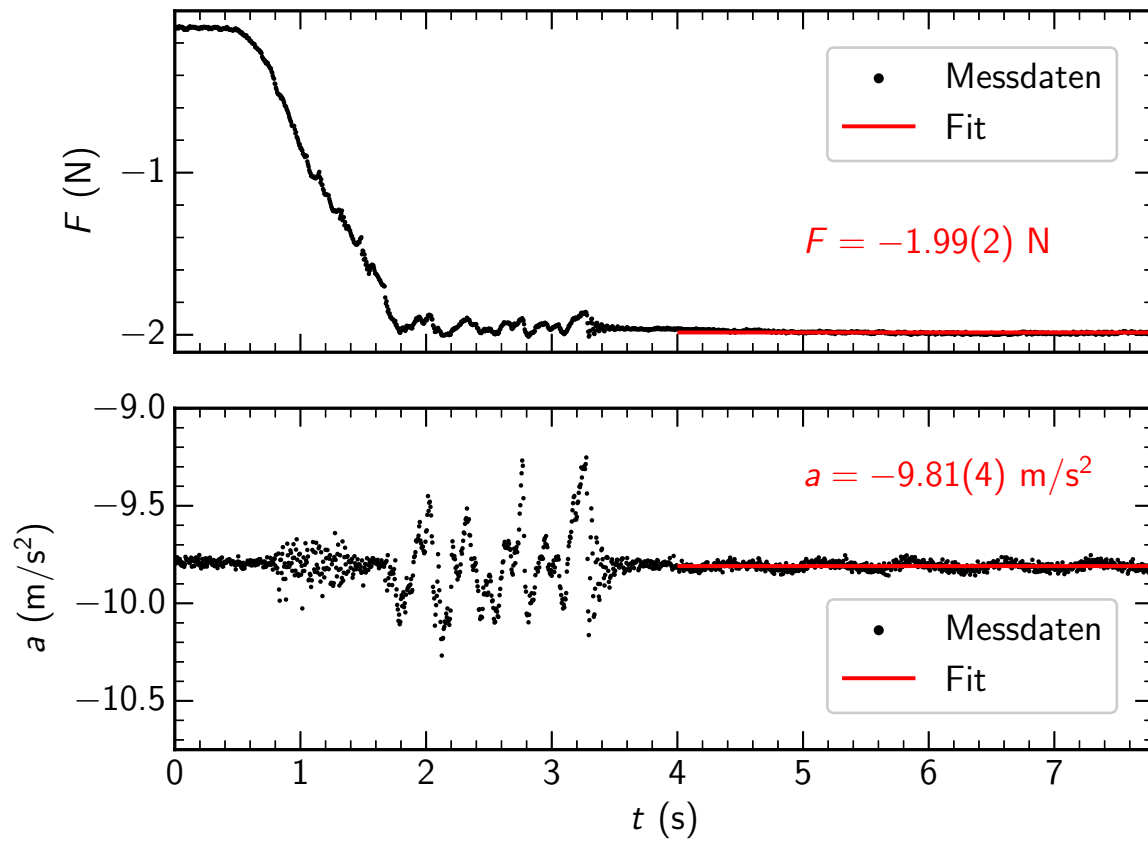
## 4 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Massenbestimmungen und der anschließenden Versuchen mit einer und mehrerer Federn. Alle Fehlerangaben beziehen sich auf statistische Fehler; Systematische werden gegebenenfalls separat diskutiert.

### 4.1 Massenbestimmung

Die Masse des Pendelkörpers wurde über eine simultane Kraft- und Beschleunigungsmessung und Newtons Axiom Gleichung (1) bestimmt. In Abbildung 4 sind die Messdaten auf die Zeit aufgetragen. In der ersten halben Sekunde befindet sich das Gerät am Tisch in Ruhe und ab  $t = 4$  s ist das iOLab komplett in der Luft. Ab diesem Zeitpunkt wird eine Konstante an die Messdaten angepasst.





**Abbildung 4:** Vom oben nach unten sind Kraft  $F$  und Beschleunigung  $a$  aufgetragen. Die Fehlerbalken der Daten sind zu klein, um sie auszumachen und werden daher nicht eingetragen. Die zwei Grafiken teilen sich die horizontale Achse. Zudem sind in rot Geraden von  $t = 4 \text{ s}$  bis  $t = 8 \text{ s}$  angepasst.

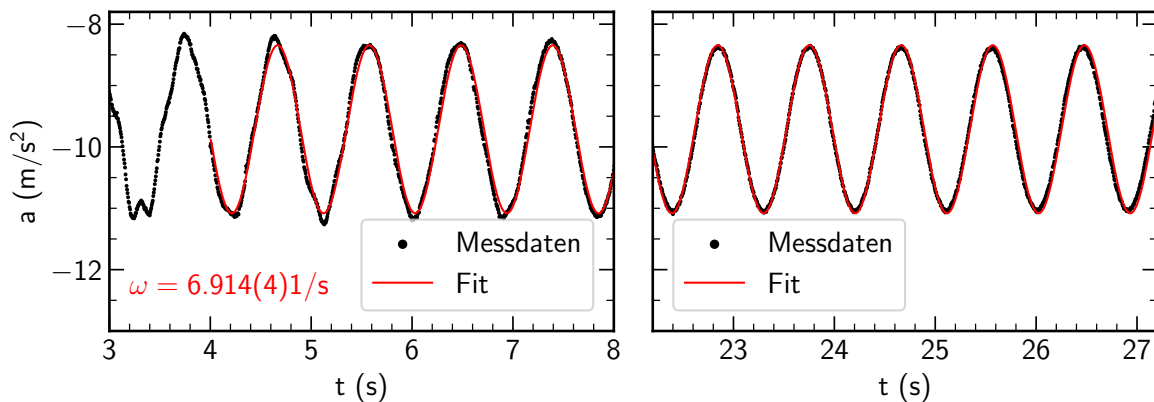
Der bestimmte Wert mit Fehler ist sowohl in der Abbildung, als auch in Tabelle 1 zu sehen. Die Unsicherheit wurde auf die Standardabweichung der Daten gesetzt, da dann (per Definition) zwei Drittel der Daten innerhalb des  $1\sigma$  Intervalls liegen.

**Tabelle 1:** Gemessene Beschleunigung und Kraft und die daraus errechnete Masse der drei Versuche.

|                         | Versuch 1 | Versuch 2 | Versuch 3 |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $a$ (m/s <sup>2</sup> ) | -9.81(4)  | -9.73(6)  | -9.81(8)  |
| $F$ (N)                 | -1.99(2)  | -2.78(2)  | -3.93(7)  |
| $m$ (kg)                | 0.202(2)  | 0.286(3)  | 0.400(7)  |

## 4.2 Federpendel mit einer Feder

Für die Analyse der Oszillation wurde der Beschleunigungssensor verwendet, da dieser eine höhere Auflösung als der Kraftsensor besitzt. In Abbildung 5 sind die Schwingungsdaten der zweiten Masse  $m_2$  dargestellt. Links sind die ersten fünf Sekunden, in welchen „schöne“ Schwingungen auftreten, zu sehen, während rechts die letzten Sekunden der Messung aufgetragen sind. In rot wurde eine Sinuskurve der Form  $f(x) = A \sin(\omega x + \phi) + d$  an die gesamten Messdaten von  $t = 4$  s bis  $t = 27$  s angepasst.



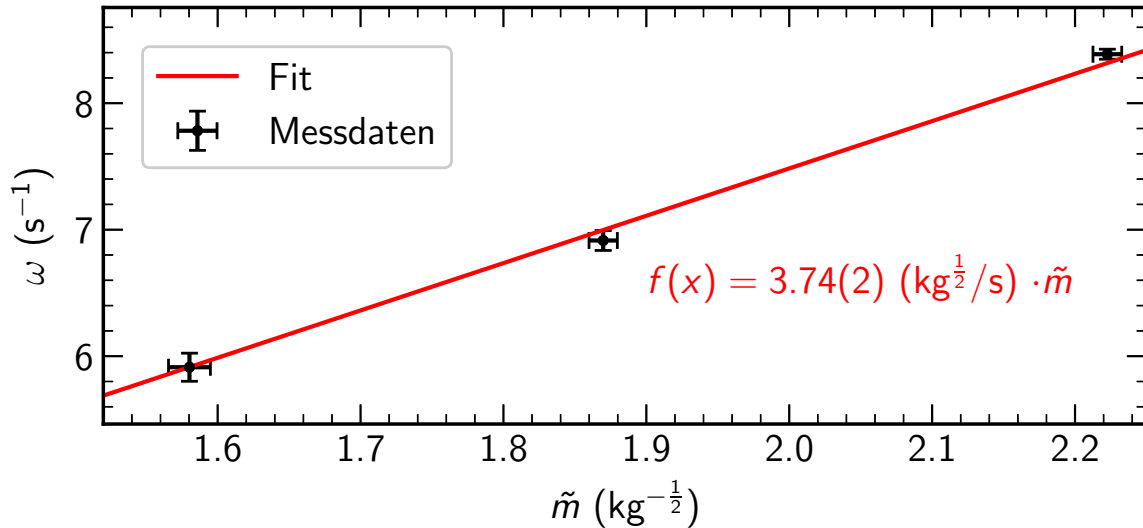
**Abbildung 5:** Die Beschleunigung wurde auf die Zeit aufgetragen und eine durchgehende Sinuskurve in rot wurde an die Daten ab  $t = 4$  s (bis  $t = 27$  s) angepasst. Dargestellt werden aber nur ersten 5 Sekunden (links) beziehungsweise letzten 5 Sekunden (rechts). Die Fehlerbalken der Daten sind zu klein, um sie auszumachen und werden daher nicht eingetragen.

Aus dem Fit lässt sich direkt die Winkelfrequenz  $\omega$  mitsamt Fehler herauslesen. Der statistische Fehler der Winkelfrequenz wird hier vom Fitprogramm berechnet. Aus dieser kann man wiederum mit Gleichung (5) die Schwingungsdauer berechnen. In Tabelle 2 sind charakteristische Eigenschaften der Schwingung, wie die Kreisfrequenz oder die Masse, eingetragen.

**Tabelle 2:** Gemessene Masse, Schwingungsdauer, Winkelfrequenz und Federkonstante der drei Versuche.

|                                      | Versuch 1 | Versuch 2  | Versuch 3 |
|--------------------------------------|-----------|------------|-----------|
| $m$ (kg)                             | 0.202(2)  | 0.286(3)   | 0.400(7)  |
| $\tilde{m}$ ( $\sqrt{1/\text{kg}}$ ) | 2.223(10) | 1.8698(99) | 1.580(15) |
| $T$ (s)                              | 0.749(2)  | 0.909(5)   | 1.063(10) |
| $\omega$ (1/s)                       | 8.387(40) | 6.915(79)  | 5.91(11)  |
| $k$ (N/m)                            | 14.2(2)   | 13.7(3)    | 14.0(6)   |

Das Modell des harmonischen Oszillators (Siehe Gleichung (4)) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen  $\omega$  und der angepassten Masse  $\tilde{m}$  her mit  $\sqrt{k}$  als Proportionalitätskonstante. Dies wird in Abbildung 6 anhand der in Tabelle 1 angegebenen Werten illustriert. Zusätzlich zu den drei Datenpunkten wurde eine Gerade, wie sie das Modell vorhersagt, angepasst, wodurch man für die Steigung der linearen Funktion  $\sqrt{k} = 3.74(2) \sqrt{\text{kg}/\text{s}^2}$  erhält. Nachdem wir kein Indiz dafür haben, dass die Gerade die Ordinate nicht im Ursprung schneidet, wurde der Fit gezielt mit nur einem Parameter (der Steigung) durchgeführt, um die Anzahl der Freiheitsgrade von 1 auf 2 zu erhöhen.

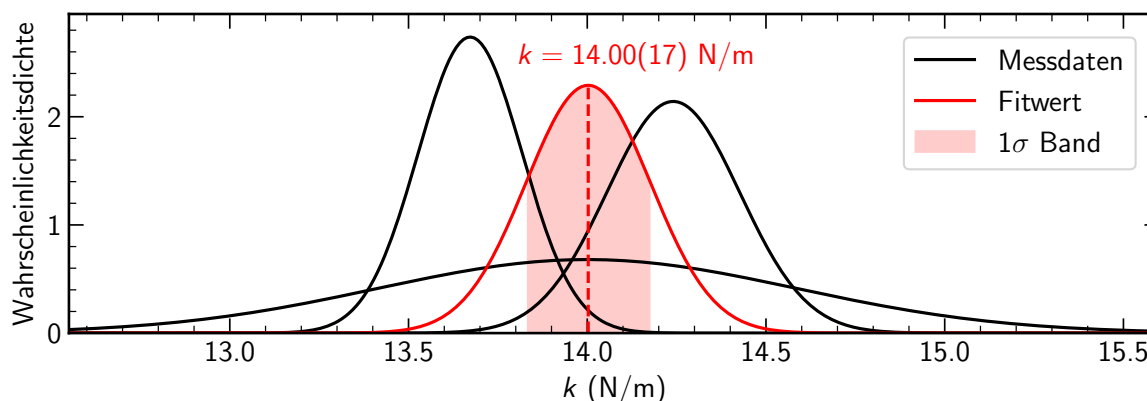


**Abbildung 6:** Die Winkelfrequenz der Schwingungen auf die angepasste Masse aufgetragen. In rot wurde eine lineare Funktion durch den Ursprung angepasst. Die Fehlerbalken stellen den  $1\sigma$  Fehler dar.

Für den Fit wurden die Fehler in  $\omega$  berücksichtigt und man erhält einen Chi-Quadrat Wert von  $\chi^2 = 4.22$ , woraus sich für das reduzierte Chi-Quadrat  $\chi^2_{\nu} = 2.11$  ergibt. Dieser Wert weicht zwar vom Erwartungswert ab, was aber rein statistischer Natur sein kann.

Quadriert man nun den erhaltenen Fitparameter  $\sqrt{k} = 3.74(2) \sqrt{\text{kg}/\text{s}^2}$  erhält man die Federkonstante  $k = 14.00(17) \text{ N/m}$ . Wie in Abschnitt 2 diskutiert ist die Federkonstante eine intrinsische Größe der Feder und hängt daher nicht von der angehängten Masse ab. Mittels Gleichung (4) kann man  $k$  für die drei Messungen mit unterschiedlichen Massen berechnen und man erwartet, dass sich die gleiche Konstante ergibt, was im Rahmen der Unsicherheit auch der Fall ist (Werte Tabelle 2 entnehmen).

In Abbildung 7 wurden in schwarz die Federkonstanten der drei Massen als normalisierte Gaußkurven aufgetragen. In rot ist die Federkonstante dargestellt, welche aus der Anpassung der linearen Funktion hervorgegangen ist.



**Abbildung 7:** Die berechneten Federkonstanten der drei Massen wurden als normalisierte Gaußkurven in schwarz auf die Federkonstante aufgetragen. In Rot wurde das Quadrat der Steigung aus dem linearen Fit eingezeichnet. Das  $1\sigma$  Intervall des Mittelwerts wurde farblich hinterlegt.

Der Fitparameter aus Abbildung 6 in rot (kann man sich als Art Mittelwert der drei schwarzen Kurven vorstellen) passt gut zu den Daten, da alle Daten auf jeden Fall innerhalb des  $2\sigma$  Intervalls liegen. Er schließt die Messungen nicht aus und bestätigt soweit die Annahme, dass es sich beim Federpendel um einen harmonischen Oszillator handelt.

Eine Federkonstante von  $k_1 = 8(1) \text{ N/m}$ , welche ein anderer Kursteilnehmer gemessen hat, ist nicht mit den hier präsentierten Ergebnissen vereinbar. Die beiden Werte liegen mehrere Standardabweichungen voneinander entfernt und können daher nicht durch statistische Schwankungen erklärt werden. Eine mögliche Erklärung für diese Situation ist, dass die Annahme, dass alle Federn im Labor gleich sind, falsch ist, da zum Beispiel durch Überdehnung einer Feder dessen Federkonstante permanent reduziert wird. Der andere Kursteilnehmer könnte eine solche Feder für seinen Versuch verwendet haben.

### 4.3 Federpendel mit zwei Federn

Im folgenden Versuch wurde die Masse  $m_3 = 0.400(7) \text{ kg}$  an zwei Federn gehängt. Die Schwingungsdaten wurden analog wie mit einer Feder analysiert, sprich es wurde eine Sinuskurve an die Beschleunigungsdaten angepasst, aus welcher sich die Kreisfrequenz  $\omega$  samt Fehler ablesen lässt. Mittels Gleichung (4) wurde anschließend die Gesamtfederkonstante des Systems ausgerechnet. In Tabelle 3 sind die Daten dargestellt.

**Tabelle 3:** Gemessene Schwingungsdauer, Winkelfrequenz, Federkonstante und normierte Federkonstante bei einer und zwei Federn

|         | $T \text{ (s)}$ | $\omega \text{ (1/s)}$ | $k \text{ (N/m)}$ | $k/N \text{ (N/m)}$ |
|---------|-----------------|------------------------|-------------------|---------------------|
| 1 Feder | 1.063(10)       | 5.91(11)               | 14.00(17)         | 14.00(17)           |
| 2 Feder | 0.758(2)        | 8.29(2)                | 27.5(5)           | 13.8(3)             |

Wenn man die Federkonstanten der beiden Systeme vergleicht, fällt auf, dass die Konstante  $k_2$  von zwei Federn im Rahmen der Unsicherheit doppelt so groß ist wie die einer Feder. Teilt man die Federkonstante durch die Anzahl der Federn  $k/N$  erhält man für beide Systeme den gleichen Wert (innerhalb der statistischen Abweichungen). Man könnte daher annehmen, dass das Superpositionsprinzip anwendbar ist

und sich daher ergibt

$$k_{\text{ges}} = \sum_i^N k_i \quad (12)$$

In diesem Versuch wird angenommen, dass alle Federn die gleichen Materialeigenschaften und daher die gleiche Federkonstante besitzen, wodurch sich Gleichung (12) zu

$$k_{\text{ges}} = Nk \quad (13)$$

vereinfacht, wobei  $k = 14.00(17)$  N/m die in Unterabschnitt 4.2 ermittelte Federkonstante ist. In einem System mit identen Federn skaliert also die Gesamtfederkonstante linear mit der Anzahl  $N$  der Federn.

#### 4.4 Testen des Modells

Der letzte Versuch hat darauf abgezielt, das erstellte Modell mit einem System von drei Federn zu testen. Es wurde die gleiche Masse  $m_3 = 0.400(7)$  kg wie mit zwei Federn verwendet und die Analyse der Schwingungen verlief analog. Es wurde eine Winkelfrequenz von  $\omega = 0.6193(10)$  1/s ermittelt.

Bei  $N = 3$  Federn sagt das Modell einen Wert von  $\hat{k}_3 = 42.0(5)$  N/m vor, wobei empirisch ein Wert von  $k_3 = 41.2(8)$  N/m ermittelt wurde. Sieht man sich die Differenz dieser beiden Größen an findet man, dass

$$\hat{k}_3 - k_3 = 0.8(9) \text{ N/m} \quad (14)$$

die Abweichung vom Modell nimmt im Rahmen der Unsicherheit den Wert 0 an und kann daher reiner statistischer Natur sein. Das Modell wird somit für Federn mit gleicher Federkonstante bestätigt.

### 5 Diskussion und Schlussfolgerung

In diesem Kapitel werden die Beobachtungen und Berechnungen der Versuche diskutiert, mit besonderem Augenmerk auf das Kernthema diesen Berichtes, das vorgeschlagene Modell.

In Tabelle 4 wurden die gemessenen und theoretisch bestimmten Werte eingetragen. Da das Modell auf dem experimentell bestimmten Wert für  $k_1$  basiert wird kein theoretisch bestimmter Wert angegeben, da das ein Zirkelschluss wäre, jedoch den Anschein hätte, es würde unser Modell unterstützen.

**Tabelle 4:** Gegenüberstellung der experimentell bestimmten und theoretisch berechneten Werte für  $k_i$

|                      | $k_1$ (N/m) | $k_2$ (N/m) | $k_3$ (N/m) |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| Experimenteller Wert | 14.00(17)   | 27.5(5)     | 41.2(8)     |
| Theoretischer Wert   |             | 28.0(2)     | 42.0(5)     |

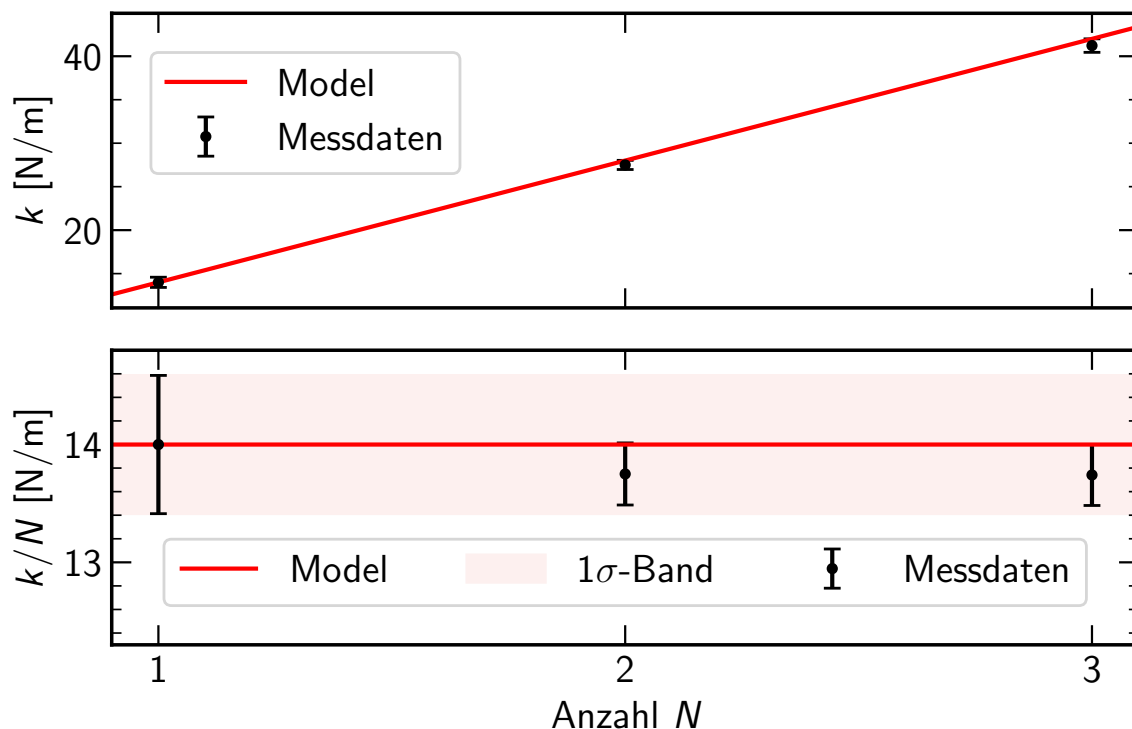
Vergleicht man nun die aus vorigen Kapiteln berechneten Werte für  $k_i$ , erkennt man, dass die experimentell bestimmten Werte für  $k_i$  mit denen von uns entwickelten Modell:

$$k_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N k_i \quad \text{bzw. bei identischen Federn} \quad k_{\text{ges}} = N * k \quad (15)$$

im Rahmen der Unsicherheit übereinstimmen.

In Abbildung 8 wurden in der oberen Abbildung die Federkonstante auf die Anzahl der Federn aufgetragen. In rot ist das lineare Modell (basierend auf  $k_1$ ) zu als Vergleich zu sehen. Die Werte sind weniger

als eine Standardabweichung vom Modell entfernt und lassen unterstützen es daher. Dies wird noch deutlicher wenn man die Federkonstante durch die Anzahl der Federn teilt (Siehe untere Graphik), um aus einer linearen Zunahme eine Konstante zu machen. Die Werte für  $k_2$  und  $k_3$  liegen mitsamt Fehler innerhalb des  $1\sigma$ -Bandes des Modells.



**Abbildung 8:** Oben wurde die gemessene Federkonstante auf die Anzahl der Federn aufgetragen. Unten wurde die Federkonstante durch die Anzahl der Federn geteilt. In beiden Graphiken ist in rot das Modell aufgetragen.

Die hier präsentierten Resultate sind konsistent und unterstützen das Modell, die Fehler jedoch sind recht groß, da die statistische Unsicherheit alleine circa 2% des Nennwertes beträgt. Hinzu kommen noch systematische Abweichungen, die in diesem Bericht nicht im Detail diskutiert wurden, sich aber zum Beispiel durch die Verwendung eines (gering) elastischen Stückes Hartpapier eingeschlichen haben. Um den statistischen Fehler zu reduzieren, müsste man die Masse genauer bestimmen, am Besten über eine geeichte Waage, und die Schwingungen länger aufzeichnen, da die Unsicherheit im Fit so minimiert werden kann.

Erwähnenswert ist auch, dass hier zwar ein allgemein gültiges Modell für die Kombination von parallelen Federn präsentiert wurde, es jedoch nur auf einen Spezialfall geprüft wurde, nämlich der, wo alle Federn gleich sind. Man müsste weitere Versuche mit Federn mit unterschiedlichen Federkonstanten oder sogar Federn unterschiedlicher Natur (Metallfeder, Dämpfer) durchführen, um die Gültigkeit dieses Modells auszuweiten.

## Literatur

- [1] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Bd. 1. G. Brookman, 1833.
- [2] W. Demtröder. *Experimentalphysik*. Bd. 1. Springer, 1998.

- [3] I. Hughes und T. Hase. *Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis*. OUP Oxford, 2010.

## Erklärung

Hiermit versichern wir, dass der vorliegende Bericht selbständig verfasst wurde und alle notwendigen Quellen und Referenzen angegeben sind.



..... 12. Januar 2023  
Student 1 Date

..... 12. Januar 2023  
Student 2 Date