

Versuch 7 – Wechselstromkreise

Lehrkräfte des Instituts für Experimentalphysik, Universität Innsbruck
Version 2022

Ziel des Versuchs

In dieser Übung werden Sie weiterhin mit elektrischen Komponenten arbeiten und insbesondere zusätzlich zu Widerständen auch Kondensatoren und Induktivitäten untersuchen. Wir werden uns mit Wechselstromkreisen befassen und dabei einen Tiefpassfilter und einen Resonanzkreis aufbauen und charakterisieren. Weitere Informationen finden Sie in [1].

Damit dieses Experiment ordnungsgemäß funktioniert ist es sehr wichtig, dass Sie die iOLab-Software auf die neueste Version aktualisieren. Download: <http://www.iolab.science/running-application.html>.

Abgesehen von Ihrem iOLab benötigen Sie:

- Einen PC, einen Laptop oder ein Smartphone mit einem Audioausgang
- Drähte
- Streckbrett
- 2 x 2,2 μF Kondensatoren
- 2 x 10 k Ω - und 2 x 10 Ω -Widerstände
- 1 x 100 mH Induktivität (Spule)
- 1 x 3,5 mm Audio-Verlängerungskabel
- 1 x 3,5 mm Klinken-Adapter

Kommentar zu Fehlern bei Spannungs- und Zeitmessungen:

Beachten Sie beim Messen einer Spannung mit dem iOLab, dass das Gerät einen Analog-Digital-Converter (ADC) verwendet. Dies bedeutet, dass jede einzelne Messung eine endliche Auflösung hat, welche Sie als Schätzung des Fehlers verwenden können. Um die Auflösung auf Ihrem Gerät zu ermitteln, zoomen Sie auf Ihre Daten, um den kleinsten Unterschied zu messen, den das Gerät anzeigen kann. Bedenken Sie auch, dass das Rauschen deutlich größer sein kann als die Auflösung des Geräts. Um das Rauschen abzuschätzen, messen Sie bei einer festen Spannung (unterhalb der Sättigung) die Standardabweichung.

Beachten Sie beim Messen der Zeiten mit dem iOLab, dass das Gerät eine endliche Abtastrate hat, wie im Menü angegeben. Die Zeit selbst weist einen sehr geringen Fehler auf. Überlegen Sie sich, wann es angemessen ist diese Auflösung als Fehler zu verwenden und wann nicht.

Aufgabe 1

Die erste Schaltung, die wir analysieren möchten, ist ein Tiefpassfilter, siehe Abb. 1. Er überträgt niedrige Frequenzen und dämpft hohe Frequenzen.

Erinnern wir uns zuerst daran, wie ein Kondensator funktioniert. Die grundlegende Eigenschaft eines Kondensators ist seine Kapazität, definiert als: $C = Q/V$, wobei Q die Ladung am Kondensator ist, wenn die beiden Platten bei einer Spannung V gehalten werden. Denken Sie daran, dass der Strom I als $I = dQ/dt$, definiert ist. Wir erhalten:

$$I = C \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

Wir wollen den Stromkreis sowohl zeitlich (Aufgabe 1) als auch im Frequenzbereich (Aufgabe 2) analysieren. Für den Zeitbereich verwenden wir die Tatsache, dass der Strom I durch den Widerstand und den Kondensator gleich ist:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R} = C \frac{dV_{out}}{dt} \quad (2)$$

Wenn wir $V_{in} = 0$ setzen, erhalten wir:

$$V_{out}(t) = V_{out}(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3)$$

Wenn wir also den Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ auf eine Spannung laden, können wir eine zeitliche Entladung mit einer Zeitkonstante $\tau = RC$ beobachten.

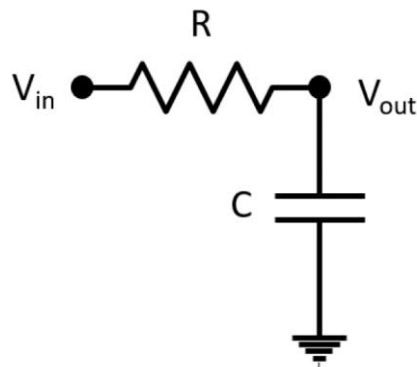


Abbildung 1 Grundlegende Darstellung eines Tiefpassfilters. Die Eingangsspannung V_{in} und die Ausgangsspannung V_{out} werden in Bezug auf Masse gemessen.

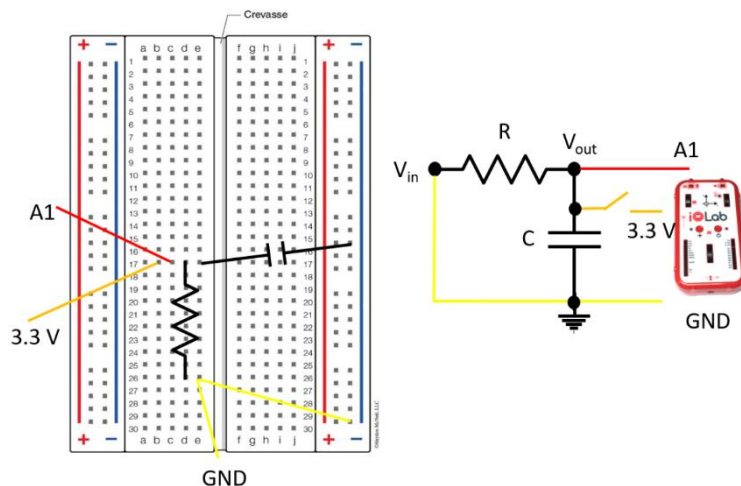


Abbildung 2 Durchführung der Entladungsmessung mit Hilfe des Steckbretts (links) und der schematischen Darstellung (rechts). Die Eingangsanschluss V_{in} ist geerdet, während die Ausgangsspannung V_{out} vom Analogeingang A1 gemessen wird. Zu Beginn des Experiments setzten wir V_{out} auf 3,3 V mit dem ioLab Ausgang.

Vorgehensweise:

- Bauen Sie eine Schaltung gemäß der Zeichnung in Abb.2 auf dem Steckbrett auf, um die Entladung des Kondensators zu messen. Benutzen Sie dazu die Komponenten: $R=10\text{ k}\Omega$ und $C=2,2\text{ }\mu\text{F}$.
- Verwenden Sie zum Erkennen der Widerstände den hier angegebenen Farbcode: [https://de.wikipedia.org/wiki/Widerstand_\(Bauelement\)#Farbkodierung_auf_Widerst%C3%A4nden](https://de.wikipedia.org/wiki/Widerstand_(Bauelement)#Farbkodierung_auf_Widerst%C3%A4nden).
Tipp: Der blaue Widerstand sollte der sein, den Sie brauchen.
- Schließen Sie Ihr iOLab gemäß Abb. 2 an und beginnen Sie mit der Aufzeichnung des analogen Eingangs A1.
- Trennen Sie den 3,3 V-Ausgang und zeichnen Sie die Entladung auf.
- Entnehmen Sie mindestens 5 Punkte entlang der Kurve und fitten Sie Ihre Daten an, um eine Schätzung für τ und die zugehörige Unsicherheit zu erhalten.
- Tipp: Gleichung 3 kann umgeformt werden, um eine lineare Beziehung zu erhalten:

$$\ln \frac{V_{out}(t)}{V_{out}(0)} = -\frac{t}{RC} \quad .$$

Anforderungen an die Datenauswertung:

- Eine kurze graphische Erklärung wie die Spannung gemessen wird.
- Ein Diagramm der Daten (min. 5 Punkte) und des Fits.
- Schätzung der Zeitkonstante τ inklusive Unsicherheit.
- Diskussion der Messwerte im Vergleich zu den erwarteten Werten
- Daten für die Entladekurve müssen hochgeladen werden.

Aufgabe 2

Eine sehr mächtige Möglichkeit, das Verhalten eines elektrischen Systems zu charakterisieren, besteht in der Beobachtung was am Ausgang passiert, wenn sinusförmige Wechselspannungen unterschiedlicher Frequenzen am Eingang anliegen. Dies liegt daran, dass nach den Regeln der Fourier-Analyse jedes Signal als eine Überlagerung sinusförmiger Wechselspannungen dargestellt werden kann. Wir werden uns nur mit passiven Elementen befassen, was bedeutet, dass die Energie des harmonischen Eingangs-Signals beim Durchgang nur verringert werden kann. Wir charakterisieren das System, indem wir die Amplitude und die Phase der Eingangs- und Ausgangsspannungen messen und das so genannte Bode-Diagramm erstellen (siehe Abschnitt 4.9 von [1]).

Betrachten wir nun Gleichung 1 im Frequenzbereich für periodische Ströme und Spannungen: $I(t) = \tilde{I}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ und $V(t) = \tilde{V}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$, wobei ω die Kreisfrequenz ist, \tilde{I} und \tilde{V} die Fourier-Transformationen von Strom und Spannung sind. Im Allgemeinen sind das komplexe Zahlen. Oft spricht man austauschbar über Spannung und Strom und deren Fourier-Transformationen. Wir werden versuchen die beiden getrennt zu halten. Wir finden

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{i\omega C} = Z_C \tilde{I} \quad (4)$$

Z_C ist die komplexe Impedanz des Kondensators in Analogie zum ohmschen Gesetz. Wenn wir Wechselstromkreise im Frequenzbereich analysieren, gelten alle Regeln, die Sie für Widerstände gelernt haben, ebenso für Kondensatoren und Induktivitäten, unter Berücksichtigung

der frequenzabhängigen Impedanz.

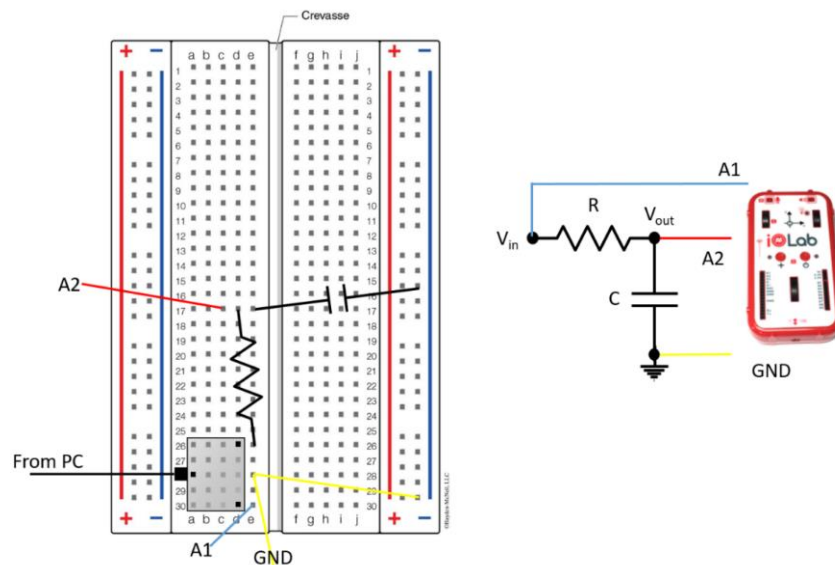


Abbildung 3 Durchführung der Frequenzanalyse mit Hilfe des Steckbretts (links) und der schematischen Darstellung der Verdrahtung (rechts). Die Eingangsspannung V_{in} wird vom A1-Analog gemessen, die Ausgangsspannung V_{out} wird vom A2-Analog gemessen.

Wir können nun den Stromkreis in Abb. 3 als Spannungsteiler analysieren:

$$\tilde{V}_{out} = \frac{Z_C}{R + Z_C} \tilde{V}_{in} = \frac{\tilde{V}_{in}}{1 + i\omega\tau} \quad (5)$$

Diese letzte Beziehung wird oft als Übertragungsfunktion der Schaltung bezeichnet. Sie gibt Ihnen das Ausgangssignal für einen gegebenen Eingang der mit der Kreisfrequenz ω schwingt. Wir können jetzt Amplitude und Phase des Ausgangs in Bezug auf den Eingang ausdrücken:

$$|\tilde{V}_{out}| e^{i(\omega t + \Phi_{out})} = \frac{|\tilde{V}_{in}|}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{i(\omega t + \Phi_{in} - \arctan(\omega\tau))} \quad (6)$$

Vorgehensweise:

- Geben Sie <https://www.szynalski.com/tone-generator/> in Ihren Browser ein. Auf dieser Webseite können Sie eine sinusförmige Niederfrequenz-Spannung mit variabler Frequenz erzeugen. Mit dem Schieberegler können Sie die Frequenz der Schwingung einstellen. Vergessen Sie nicht, die Lautstärke zu erhöhen, falls das Signal zu schwach ist.
- Platzieren Sie den Audio-Klinkenadapter in eine Ecke des Steckbretts, siehe Abb.3. Der Adapter hat drei Stifte: der mittlere ist die Masse, die anderen beiden entsprechen dem linken und rechten Hörer. **Der Adapter passt leider nicht genau. Halten Sie ihn mit Ihrem Finger gedrückt, um einen guten Kontakt herzustellen.** Um den Aufbau zu testen, bevor Sie den Tiefpassfilter einbauen, verbinden Sie den Mittelstift des Audioklinkenadapters mit GND am iOLab-Gerät, den linken Pin mit dem Analogeingang A1 und den rechten Pin mit dem Analogeingang A2. Versuchen Sie, einen Ton vom PC auszugeben und verbinden Sie den PC-Audioausgang mit dem Verlängerungskabel mit dem Klinkenadapter. Beobachten Sie das Signal sowohl bei A1 als auch bei A2.

Beachten Sie, dass die analogen Eingänge eine Abtastrate von 800 Hz haben (d.h. Sie erhalten alle 1,25 ms einen Mess-Punkt). Nach dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem (siehe Abschnitt 13.5 von [1]), können damit nur Signale bis zu 400 Hz dargestellt werden. Wenn Sie einen Ton von der Website abspielen, werden Sie feststellen, dass die beiden Analogeingänge das gleiche Signal erfassen, was bedeutet, dass die harmonischen Eingangsspannungen in Phase sind und die gleiche Amplitude haben. Sie werden auch merken, dass Sie nur den positiven Teil der Schwingung sehen können. Dies liegt daran, dass das iOLab nur positive Werte einliest. Wir könnten dieses Problem beheben, indem wir den Stromkreis auf eine anderes Bezugs-Potential als das iOLab-Gerät erden (überlegen Sie, wie Sie dies tun würden). Hier ist das nicht nötig.

Bei einigen PCs oder Laptops hängt die Amplitude der Schwingung von der Frequenz ab. Dies ist in unserem Fall kein Problem, da wir immer den Ein- und Ausgang der Schaltung vergleichen werden, aber Sie sollten das im Hinterkopf behalten.

- Verkabeln Sie den Stromkreis wie in Abb. 3. In dieser Konfiguration misst der Analogeingang A1 die vom PC erzeugte Eingangsspannung zum Tiefpassfilter, während A2 die Ausgangsspannung misst.
- Überprüfen Sie Gleichung (6) indem Sie die Amplituden auf den beiden Kanälen und die Phasenverschiebung zwischen ihnen für Frequenzen von 1, 3, 7, 10 und 20 Hz messen. Die Amplitude kann durch Messen des Maximalwerts ermittelt werden, während die Phasenverschiebung $\Phi = \omega\delta t$ durch die Zeitverzögerung δt zwischen den Kreuzungen der $V=0$ Linie, bestimmt wird. Achten Sie darauf, dass Sie das Vorzeichen von Φ korrekt aufzeichnen.
- Leiten Sie das Amplitudenverhältnis $|\tilde{V}_{in}|/|\tilde{V}_{out}|$ und die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz ab. Fitten Sie beide an, um 2 neue Schätzungen für τ zu erhalten. Wieder einmal können die Gleichungen umgeformt werden, um einfachere Beziehungen zu erhalten:

$$\left| \frac{\tilde{V}_{in}}{\tilde{V}_{out}} \right|^2 = 1 + (\omega\tau)^2 \quad ,$$

$$\tan(\Phi_{out} - \Phi_{in}) = -\omega\tau \quad .$$

- Besprechen Sie abschließend die Ergebnisse und kombinieren Sie die Schätzungen aus dieser und der vorherigen Aufgabe, um die beste Schätzung von τ zu erhalten. Überlegen Sie dabei, ob die Messungen untereinander konsistent sind. Wenn dies nicht der Fall ist, kommentieren Sie, was der Grund sein könnte. Wenn dies der Fall ist, prüfen Sie, ob die Fehlerbalken ähnlich sind. Wenn sie sich stark voneinander unterscheiden, kann ein gewichteter Durchschnitt angemessen sein.
- Schätzen sie den Wert der Kapazität C und dessen Unsicherheit in Anbetracht der Unsicherheit des Widerstands, wie sie durch den Farbcode angegeben ist. Kapazitäten sind notorisch ungenau, weshalb Kalibrierungen dieser Art durchgeführt werden müssen, wenn ihr Wert von Interesse ist.

Anforderungen an die Datenauswertung:

- Eine graphische Erklärung wie die Amplitude und Phase gemessen werden
- Screenshot der Testmessung mit beiden Audiokanälen direkt am iOLab gemessen

- Diagramm der gemessenen Daten für 5 Frequenzen inklusive Fit
- Ergebnisse der beiden neuen Schätzungen der Zeitkonstante τ inklusive Berechnung der Unsicherheiten
- Kombinierte Schätzung von τ und C und deren Unsicherheit
- Eine Diskussion der Übereinstimmung der verschiedenen Messungen (Versuch 1 und 2) untereinander und mit den angegebenen Komponentenwerten
- Die für den Fit verwendeten Daten (Schwingungen in A1 und A2 für 5 Frequenzen) müssen hochgeladen werden.

Aufgabe 3

In der nächsten Aufgabe werden wir eine Induktivität hinzufügen, um eine resonante RLC-Schaltung zu erzeugen, siehe Abb. 4. Diese Schaltung überträgt nur Frequenzen in einem bestimmten Bereich.

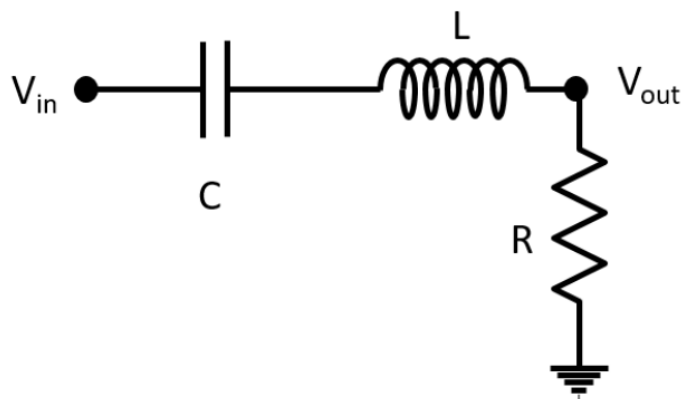


Abbildung 4 Grundlegende Darstellung einer resonanten RLC-Schaltung. Die Eingangsspannung V_{in} und die Ausgangsspannung V_{out} werden in Bezug auf Masse gemessen.

Erinnern Sie sich, dass die Definition der Induktivität lautet: $L = \Phi_B / I$ wobei Φ_B der Magnetfeldfluss durch die Induktivität ist, wenn ein Strom I fließt. Wenn wir das faradaysche Gesetz anwenden¹:

$$V = \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (7)$$

gelangen wir zur Gleichung, die das Verhalten der Induktivität beschreibt:

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

wenn wir eine periodische Funktion, wie für den Kondensator, betrachten, folgt:

$$\tilde{V} = i\omega L \tilde{I} = Z_L \tilde{I} \quad (9)$$

In einem Resonanzkreis oszilliert die Energie zwischen dem Kondensator - als elektrische Feld zwischen den Platten - und der Induktivität - in Form des Magnetfeldes. Gleichzeitig geht Ener-

¹ Beachten Sie, dass vor der Ableitung des Magnetfeldflusses kein Minuszeichen steht. Dies entspricht dem Lenz-Gesetz, da V einen Spannungsabfall an der Induktivität darstellt.

gie geht auch aufgrund der Verlustleistung im Widerstand als Wärme verloren. Die Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ist definiert als die Frequenz, bei der die Übertragung vom Eingang zum Ausgang maximal ist. Eine weitere wichtige Größe ist der Qualitätsfaktor $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Der ist definiert als das Verhältnis zwischen f_{res} und der Frequenz beim halben Maximum der vollen Breite (FWHM) des Resonanzpeaks für die am Widerstand umgesetzte Leistung, $P_R = |\tilde{V}_{\text{out}}|^2 / (2R)$. Der Qualitätsfaktor ist ein Maß dafür, wieviel Energie im Resonanzkreis gespeichert und wieviel davon in Wärme umgewandelt wird.

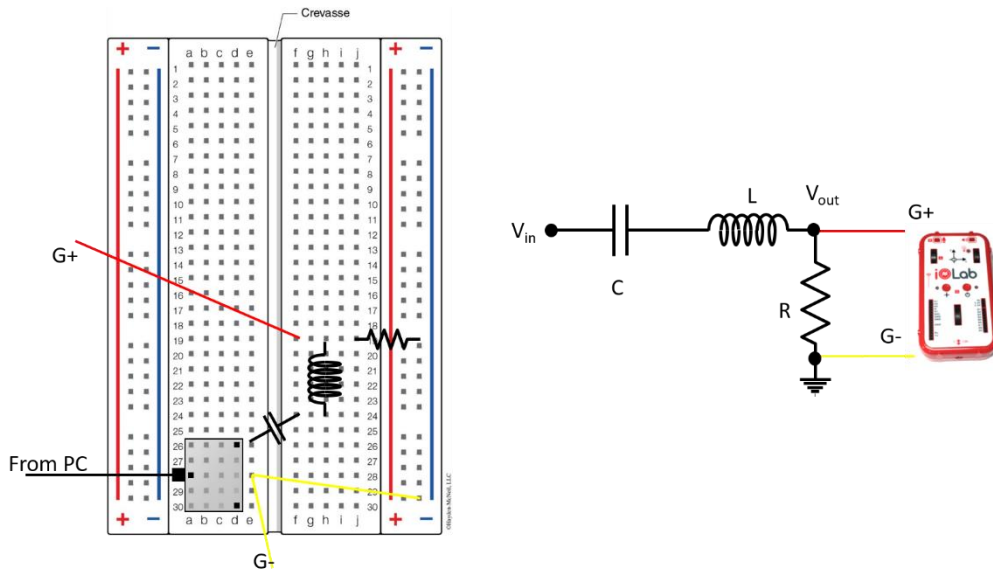


Abbildung 5 Durchföhrung der Messung der Resonanz mit dem Steckbrett (links) und schematischer Zeichnung der Verkabelung (rechts). Die Ausgangsspannung wird mit dem analogen G₊-Eingang mit hoher Verstärkung (high gain) gemessen, der auf G₋ bezogen wird.

Vorgehensweise

- Bauen Sie auf dem Steckbrett eine Schaltung gemäß Abbildung 5 auf. Verwenden Sie dazu die folgenden Komponenten: $L = 100 \text{ mH}$, $R = 10 \text{ } \Omega$, $C = 2,2 \text{ } \mu\text{F}$ (derselbe Kondensator wie zuvor).
- Da $\omega_{\text{res}}/(2\pi)$ im Bereich von hunderten Hertz liegt, müssen wir für diese Messung eine andere Strategie anwenden. Anstatt die analogen Eingänge zu verwenden, verwenden wir die hoch verstärkenden Eingänge (high gain) G₊ und G₋. Verbinden Sie V_{out} zu G₊ und die Masse auf G₋. Der hoch verstärkende Eingang lässt sich leicht sättigen, stellen Sie sicher, dass Sie eine geeignete Lautstärke auf Ihrem PC verwenden. Testen Sie die Lautstärke, indem Sie die Frequenz auf die erwartete Resonanzfrequenz einstellen und verstellen Sie die Verstärkung, bis das Signal unter der Sättigung liegt.
- Ermitteln Sie zunächst ungefähr die Frequenz, die die maximale Leistung liefert, sowie die Frequenzen, für die es auf beiden Seiten einen Rückgang um einen Faktor 2 gibt. Nehmen Sie etwa 10 Datenpunkte in diesem Bereich auf. Zeichnen Sie die Amplitude der Ausgangs-Spannungen bei verschiedenen Frequenzen auf (Annahme: die Eingangsamplitude ist konstant).
- Zeichnen Sie ein Diagramm, in dem die Amplitude der Ausgangs-Spannungen gegen die Frequenz ersichtlich sind. Machen Sie eine Schätzung der Resonanzfrequenz und des Qualitätsfaktors Q. Ein Fit ist nicht erforderlich, aber Sie können einen machen, wenn Sie Zeit haben.

- Geben Sie für Ihre Schätzungen Fehlerindikatoren an und begründen Sie diese.
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den erwarteten Werten von f_{res} und Q . Kombinieren Sie Ihre beste Schätzung für C und die Genauigkeit von R (wie im Farbcode angegeben), um eine Schätzung von L abzugeben, ausschließlich unter Berücksichtigung der Messung von f_{res} . Entspricht das gemessene Q Ihren Erwartungen? Diskutieren Sie wahrscheinliche Erklärungen für die Diskrepanz.

Anforderungen an die Datenauswertung:

- Ein Diagramm der Daten mit Angabe der Resonanzfrequenz und des FWHM.
- Ihre beste Schätzung der Resonanzfrequenz, des Qualitätsfaktors, und deren Unsicherheiten.
- Schätzung von L inklusive Unsicherheit
- Diskussion der beobachteten Abweichungen in Bezug auf das theoretische Modell.
- Für diese Aufgabe ist kein Hochladen von Daten erforderlich

1 Punktevergabe

Für dieses Labor stehen insgesamt 10 Punkte zur Verfügung, die vollständig auf der Grundlage der nach den Laborarbeiten eingereichten Datenauswertung bewertet werden. Drei Punkte stehen für Aufgabe 1 zur Verfügung, drei Punkte für Aufgabe 2, zwei Punkte für Aufgabe 3, und zwei Punkte für die allgemeine Klarheit und Reproduzierbarkeit Ihrer Datenauswertung. Die Beschreibung muss so klar sein, dass die Experimente und Auswertungen von Ihren Kollegen nachvollzogen und reproduziert werden könnten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Grundlagen (1.5 Punkte)	(Fast) Vollständige Beherrschung (3 Punkte)
Die Datenauswertung enthält: Eine nachvollziehbare Erklärung der durchgeführten Experimente, ein Diagramm der Daten, die Zeitkonstante τ mit Einheiten und mit vernünftiger und begründeter Unsicherheit	Die Erklärung ist klar, die Darstellungen sind aussagekräftig und die Ergebnisse enthalten korrekte Fehlerbehandlung. Ein Fit an die Daten mit Angabe der Fitparameter ist vorhanden. Eine Diskussion der Messwerte und Unsicherheiten im Vergleich zu den erwarteten Werten ist vorhanden.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Grundlagen (1.5 Punkte)	(Fast) Vollständige Beherrschung (3 Punkte)
Die Datenauswertung enthält: Eine nachvollziehbare Erklärung der durchgeführten Experimente, ein Diagramm der Daten, Schätzungen für τ und C mit Einheiten und begründeten Unsicherheiten.	Die Erklärung ist klar, die Darstellungen sind aussagekräftig und die Ergebnisse enthalten korrekte Fehlerbehandlung. Fits an die Daten mit Angabe der Fitparameter sind vorhanden. Eine Diskussion der verschiedenen Methoden zur Abschätzung von τ ist vorhanden und die finalen Ergebnisse werden in Bezug auf ihre Unsicherheiten und auf die erwarteten Werte diskutiert.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Grundlagen (1 Punkte)	(Fast) Vollständige Beherrschung (2 Punkte)
Die Datenauswertung enthält: Eine nachvollziehbare Erklärung der durchgeführten Experimente, ein Diagramm der Daten, Schätzungen für die Resonanzfrequenz, FWHM, und Q mit Einheiten und begründeten Unsicherheiten.	Die Erklärung ist klar, die Darstellungen sind aussagekräftig und die Ergebnisse enthalten korrekte Fehlerbehandlung. Eine Bestimmung von L inklusive Unsicherheit ist vorhanden. Eine Diskussion der Unsicherheiten sowie der Gründe für eventuelle Abweichungen von der Theorie ist vorhanden.

Literatur

- [1] P. Horowitz, W. Hill. The Art of Electronics 3rd edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.