

# Ein super toller Titel für eure Abschlussarbeit

Fakultät für Muster und Beispiele  
der Hochschule Musterhausen

## **Abschlussarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Engineering

vorgelegt von

**Max Mustermann**

geboren am 01.01.1900 in Musterhausen

im Dezember 2014

**Erstprüfer:** Prof. Dr. med. Dr.-Ing. M. Mustermann

**Zweitprüfer:** Prof. Dr.-Ing. F. Musterfrau

## Zusammenfassung

Ziel dieses Versuches ist es, ein Modell aufzustellen, welches die Federkonstante  $k$  eines Systems paralleler Federn zu vorhersagt. Dies erfolgt in drei Versuchen. Im Ersten wird die Federkonstante von einer Feder mit Hilfe drei verschiedener Massen bestimmt, daraufhin wird im zweiten Versuch die Federkonstante von zwei parallelen Federn bestimmt und dem ersten Versuch gegenübergestellt. Aus diesem Vergleich wird nun ein erstes Modell entwickelt, mit welchen man die Federkonstante  $k$  für ein System aus  $N$  parallelen Feder berechnen kann. Im letzten Versuch wird nun dieses Modell, mit Hilfe von einem System mit drei parallelen Federn, geprüft. Im gesamten wurde das Modell angenommen, dadurch folgt das die Versuchsreihe erfolgreich war.

# Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung . . . . .	II
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>2</b>
2.1 Newtons Grundsätze der Bewegungslehre . . . . .	2
2.2 Einfacher harmonischer Oszillator . . . . .	2
2.3 Statistische Grundlagen . . . . .	3
<b>3 Aufbau und Methoden</b>	<b>5</b>
3.1 Eine Feder mit drei Massen . . . . .	5
3.1.1 Bestimmung der Masse . . . . .	5
3.1.2 Bestimmung der Periodendauer . . . . .	5
3.1.3 Berechnung der Federkonstante $k$ . . . . .	6
3.2 Aufstellen eines Modells für parallele Federn . . . . .	6
3.3 Prüfen des Modell . . . . .	7
<b>4 Ergebnisse</b>	<b>8</b>
4.1 Massenbestimmung . . . . .	8
4.2 Federpendel 1 . . . . .	9
<b>5 Diskussion und Schlussfolgerung</b>	<b>12</b>
5.1 Grobkonzept der Sensorik . . . . .	12

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Versuchsaufbau der Massebestimmung . . . . .	5
3.2	Versuchsaufbau für eine Feder . . . . .	6
3.3	Versuchsaufbau mit mehrere Federn . . . . .	6
4.1	Bestimmung der Masse . . . . .	8
4.2	Oszillation mit einer Feder . . . . .	9
4.3	Zusammenhang zwischen $\omega$ und $\tilde{m}$ . . . . .	10
4.4	Zusammenhang zwischen $\omega$ und $\tilde{m}$ . . . . .	11

# Tabellenverzeichnis

4.1	Messdaten zur Massenbestimmung . . . . .	8
4.2	Messdaten zur Oszillation einer Feder . . . . .	9

# 1 Einleitung

Harmonische Oszillationen sind nicht nur, wie in diesem Versuch, in der Mechanik anzutreffen, sondern erstreckt sich von der Elektrodynamik bis hin zur Quantenphysik über alle Teilbereiche der Physik. Da sich das Modell des harmonischen Oszillators gut eignet, um nicht-mechanische Konzepte zu beschreiben und anzunähern, wie zum Beispiel die Bindungsenergien von Atomen. Aber auch im Alltag begegnet uns dies oft. Mit so vielen Anwendungen ist die physikalische Beschreibung des harmonischen Oszillators eine der wichtigsten Werkzeuge der Physik. Dadurch ist es lohnenswert, im Grundpraktikum eines dieser Modelle mit Hilfe eines Experimentes zu validieren. Hier prüfen wir das Hookesche Gesetz, beziehungsweise die Bestimmung einer Federkonstante  $k$ .

Dafür werden in [Kapitel 2](#) die benötigten Grundlagen und die Vorgehensweise bei der Fehlerrechnung aufgezeigt. Daraufhin wird in [Kapitel 3](#) der Aufbau und die Vorgehensweise der einzelnen Versuche beschrieben. Insbesondere wird auf die Massenbestimmung, die Berechnung der Federkonstante  $k$ , das Aufstellen eines Modells und anschließend auf die Überprüfung dieses Modells eingegangen. In [Kapitel 4](#) werden die Ergebnisse der drei Versuche dargestellt und mit der Theorie verglichen.

## 2 Theorie

Im nachfolgenden Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen des Versuches eingegangen.

### 2.1 Newtons Grundsätze der Bewegungslehre

Um die Masse des Pendelkörpers zu bestimmen, wird Newtons 2. Axiom herangezogen. [1] Dieses besagt, dass

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

also, dass die auf einen Körper wirkende Kraft linear mit seiner Beschleunigung skaliert, wobei seine Masse  $m$  gerade der Proportionalitätsfaktor ist. In anderen Worten ausgedrückt ist das Verhältnis zwischen Kraft  $F$  und Beschleunigung  $a$  der Skalierungsfaktor, die Masse  $m$ .

Diese Tatsache wird herangezogen, um die Schwingmasse zu eruieren. Wie in Kapitel 3 bereits beschrieben, wird das IOLab am Kraftsensor hochgezogen, sodass die einzige wirkende Kraft die Gravitationskraft  $F_G = mg$  ist. Diese

### 2.2 Einfacher harmonischer Oszillator

Der einfache harmonische Oszillator ist die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2.2)$$

wobei  $m$  die Masse des Oszillators und  $k$  vorerst eine bedeutungslose Konstante ist. **\*\*rückstellende Kraft\*\*** Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine trigonometrische Funktion und lautet

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.3)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Amplitude  $A$  und einem Phasenfaktor  $\varphi$ , wobei  $A$  und  $\varphi$  sich durch Anfangswerte bestimmen lassen. Für die Kreisfrequenz gilt aber

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{k} \sqrt{\frac{1}{m}} = \sqrt{k} \tilde{m} \quad (2.4)$$

und ist unabhängig von jeglichen Startpositionen und Geschwindigkeiten, weshalb sie als eine charakteristische Eigenschaft des Systems angesehen wird. Offensichtlich besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Winkelfrequenz  $\omega$  und der Wurzel des Kehrwerts der Masse  $\tilde{m} := \sqrt{1/m}$  (wurde aus Bequemlichkeitsgründen mit  $\tilde{m}$  abgekürzt), wobei die Wurzel der Konstante  $k$  aus Gleichung (2.2) der Skalierungsfaktor ist.

Der Konstante  $k$  können wir erst einen Sinn geben, wenn wir die rückstellende Kraft kennen. In einem Federpendel ist das die Rückstellkraft der Feder, welche durch das Hookesche Gesetz beschrieben wird. Dieses besagt, dass die Kraft, welche eine Feder ausübt, proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist und um einen Faktor  $k$  skaliert wird, der von den Materialeigenschaften der Feder abhängt.

Wir haben also eine Größe in der Rückstellkraft gefunden, die eine intrinsische Eigenschaft des Systems darstellt (und nicht durch Startwerte beeinflusst wird!). Durch Aufstellen der Bewegungsgleichungen eines Federpendels stellt man fest, dass die Konstante  $k$  aus [Gleichung \(2.2\)](#) gerade die Federkonstante aus dem Hookeschen Gesetz ist.

Aus der Winkelfrequenz lassen sich auch weitere Größen ableiten, wie zum Beispiel die Schwingungsdauer  $T$ , die durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.5)$$

gegeben ist.

## 2.3 Statistische Grundlagen

Hier werden kurz die Methoden erwähnt, welche für die statistische Aufbereitung der Daten essentiell sind.

Das Arithmetische Mittel, oder auch Mittelwert oder Durchschnitt, ist das wohl meist verwendete Werkzeug der Statistik. Es lässt sich sowohl für „exakte“, als auch für fehlerbehaftete Daten definieren. Im ersten Fall spricht man von einem ungewichteten Mittelwert und man schreibt

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.6)$$

mit  $\bar{x}$  als Mittelwert von  $N$  Daten. [\[2, S. 10\]](#)

Sind die Daten Fehlerbehaftet (mit Fehler  $\alpha_i$ ) muss man diesen Berücksichtigen und erhält

$$\bar{x} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\alpha_i^2} \quad (2.7)$$

Haben alle Daten aber den selben Fehler, kürzt sich dieser weg und man landet wieder bei [Gleichung \(2.6\)](#). Aus diesem Grund wird in diesem Versuch großteils der ungewichtete Mittelwert angewandt, obwohl alle Daten fehlerbehaftet sind. [\[2, S. 50\]](#)

Die Standardabweichung ist ein direktes Maß für die Verteilung der Daten und gibt an, wie weit die Daten im Mittel vom Durchschnitt abweichen. Sie berechnet sich wie folgt

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.8)$$

Wir dividieren hier durch  $N - 1$ , da der Mittelwert, der in der Berechnung der Standardabweichung herangezogen wird, die  $N$  Freiheitsgrade der  $N$  Daten um einen reduziert. [\[2, S. 12\]](#)

Die Kombination der Unsicherheiten von fehlerbehafteten Messdaten erfolgt mittels der Gaußschen Fehlerpropagation. Diese stellt einen Zusammenhang zwischen dem Fehler der Größe  $Z(x_i)$ , welche von  $x_i$  Variablen abhängt, und den partiellen Ableitungen nach  $x_i$  her. In allgemeiner Form sieht die



Formel wie folgt aus

$$\alpha_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Z}{\partial x_i} \alpha_{x_i} \right)^2} \quad (2.9)$$

mit  $\alpha_{x_i}$  als Fehler der einzelnen Größen, von denen  $Z$  abhängt.[2, S. 41] Die Propagation von Fehlern erfolgt in diesem Versuch automatisch und wird im Hintergrund gehalten.

Zuletzt wird noch das Chi-Quadrat eingeführt, welches ein Maß für die Güte einer Funktionsanpassung ist. Dafür wird die Quadratsumme der fehlernormierten Abweichungen gebildet und schaut in Summenschreibweise so aus

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i)}{\alpha_i} \right)^2 \quad (2.10)$$

$y_i$  sind dabei die gemessenen Werte, während  $y(x_i)$  die Funktionswerte an den Stellen  $x_i$  sind. [2, S. 65]

Generell gilt, je kleiner der Wert von  $\chi^2$ , desto besser passt das Modell, aber man erkennt, dass der Wert mit zunehmender Datenanzahl zwangsläufig auch zunehmen muss. Tatsächlich ist der Erwartungswert dieser Größe gerade die Anzahl der Freiheitsgrade. Das motiviert die Einführung des sogenannten reduzierten Chi-Quadrat

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (2.11)$$

mit  $\nu$  als Anzahl der Freiheitsgrade.[2, S. 107] Die so definierte Größe hat den Erwartungswert  $\langle \chi^2_\nu \rangle = 1$ , man muss  $\nu$  also nicht mehr kennen, um die Güte einzuschätzen.

Eine kurze Anmerkung zur Notation:  $\sigma$  wird in diesem Bericht für die Standardabweichung eines Datensatzes verwendet, während  $\alpha$  der Fehler einer bestimmten Größe ist. Öfters fallen diese beiden zusammen (bzw.  $\alpha$  wird auf  $\sigma$  gesetzt), was für Verwirrung sorgen kann, weshalb dies im Text immer erwähnt wird. Als Faustregel kann man sich merken, dass  $\sigma$  die Eigenschaft eines Datensatzes ist und  $\alpha$  sich nur auf einzelne Werte bezieht.

## 3 Aufbau und Methoden

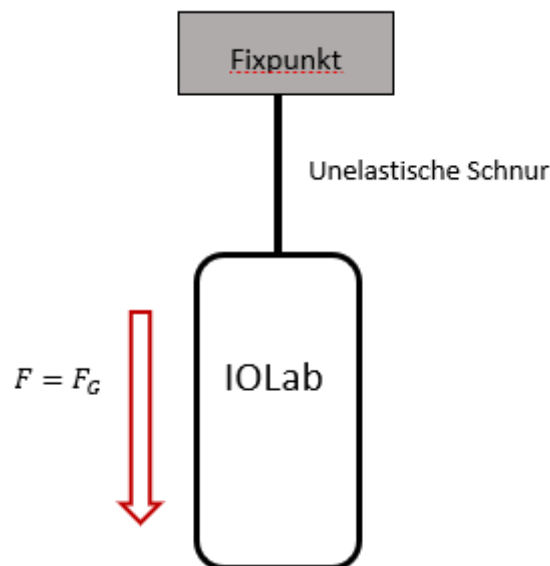
In diesem Kapitel wird der Aufbau der drei Einzelversuche erläutert.

### 3.1 Eine Feder mit drei Massen

Für diesen Versuch wird eine Feder mit jeweils drei verschiedenen Massen  $m_i$  in Schwingung versetzt um aus der Schwingperiode die Federkonstante  $k$  zu berechnen. Um drei Verschiedene Massen zu erhalten wird der Versuch einmal nur mit dem IOLab durchgeführt. Für den zweiten Durchgang wird ein Stein mit Klebeband an dem IOLab befestigt und für den dritten Durchgang ein weiterer Stein. Ebenfalls benötigt man eine Feder, das IOLab an dem eine Ringschraube an dem Kraftsensor angebracht ist und eine Briefklammer, welche an einer Stuhllehne befestigt ist.

#### 3.1.1 Bestimmung der Masse

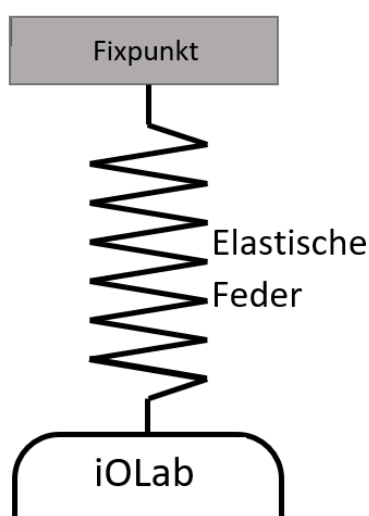
Um nun die einzelnen Massen  $m_i$  zu bestimmen wird das IOLab an dem Kraftsensor mit einer Schnur, an einem Fixpunkt aufgehängt. (Siehe [Abbildung 3.1](#)). Dies wird nun für die zwei weiteren Massen wiederholt. Aus den Daten des Beschleunigungs- und Kraftsensors lässt sich nun die jeweilige Masse bestimmen.



**Abbildung 3.1:** Schematischer Versuchsaufbau zur Bestimmung der Masse

#### 3.1.2 Bestimmung der Periodendauer

Nun wird das IOLab an eine Feder statt einer Schnur an dem Kraftsensor und Fixpunkt befestigt und aus dem Ruhezustand ausgelenkt. Während dessen wird die Kraft  $F$  die auf den Kraftsensor wirkt und die Beschleunigung  $a$  aufgezeichnet. Man erhält einen Sinus artigen Kraftverlauf aus dem man die Schwingungsperiode auslesen kann. In dem Man die Zeit zwischen fünf Maxima durch vierteilt.



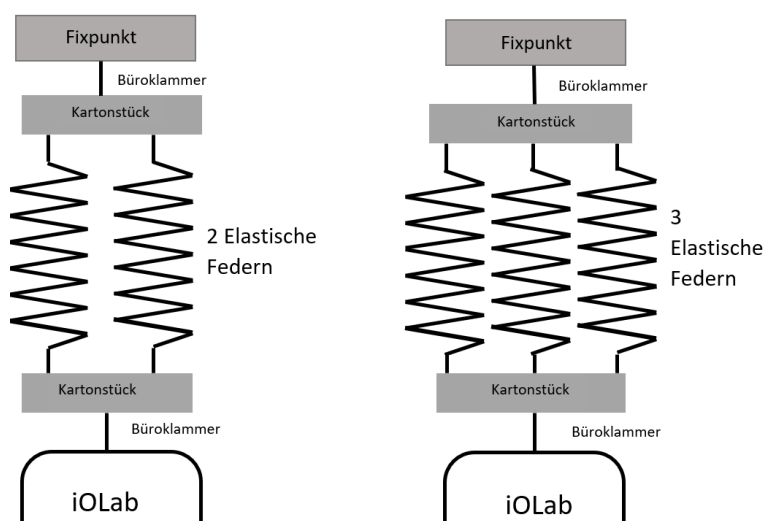
**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung des Versuchsaufbau zur Bestimmung der Schwingungsperiode

### 3.1.3 Berechnung der Federkonstante $k$

Wie in Kapitel [Kapitel 2](#) diskutiert lässt sich nun der Wert für  $k$  durch die Schwingungsperiode und der Masse  $m_i$  bestimmen.

## 3.2 Aufstellen eines Modells für parallele Federn

Um ein Modell zur Bestimmung für  $k$  aufzustellen wird der Versuch mit der schwersten Masse  $m_3$  mit zwei parallelen Federn wiederholt. Dazu werden mit Hilfe von zwei Kartonstücken parallel aufgehängt. Die Kartonstücke werden mit einer Büroklammer an dem Kraftsensor und dem Fixpunkt befestigt, wie in [Abbildung 3.3](#) zeigt. Anschließend wird da iOLab aus dem Ruhepunkt ausgelenkt und für 20s die Kraft  $F$  und die Beschleunigung  $a$  aufgezeichnet.



**Abbildung 3.3:** Schematischer Versuchsaufbau von zwei parallelen Federn(links) und drei Federn (rechts), zur Bestimmung der Periodendauer

Aus dem Vergleich der Federkonstante  $k_1$  und der Konstante  $k_2$  aus [Abschnitt 3.2](#) lässt sich nun ein

Modell für  $N$  Federn aufstellen.

### 3.3 Prüfen des Modell

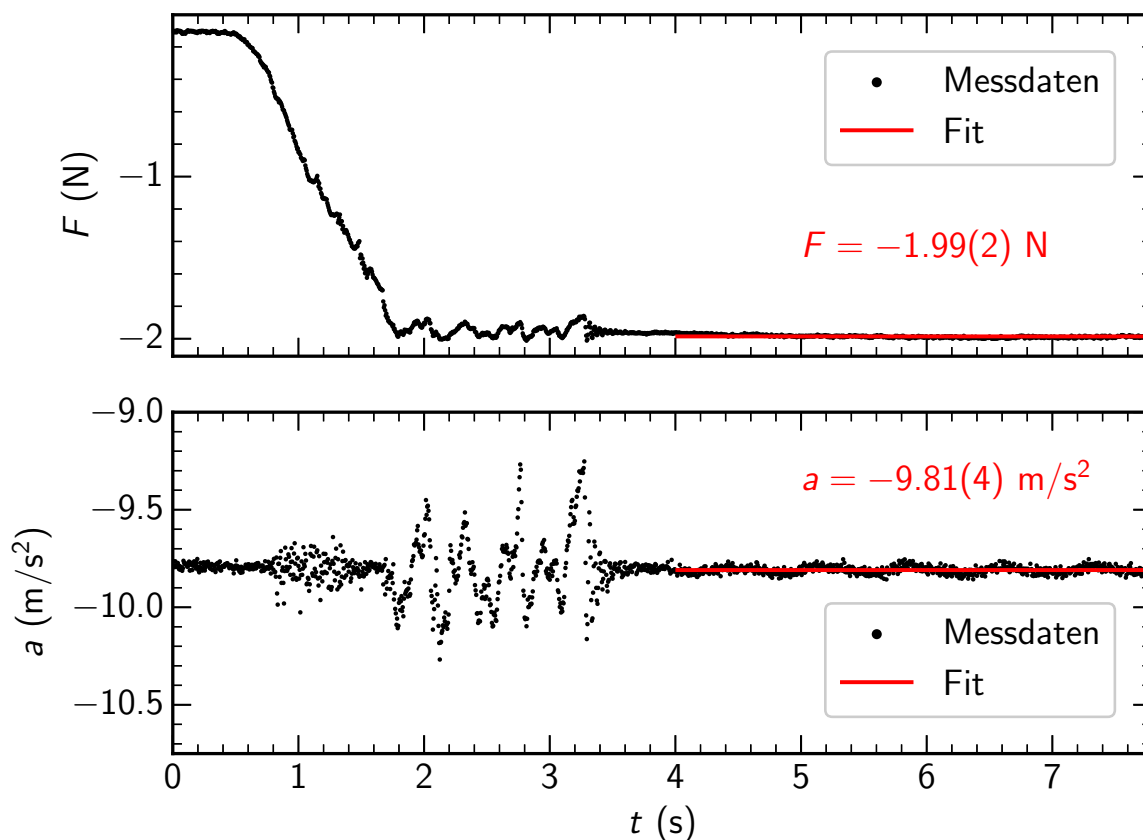
Um nun das Modell überprüfen zu können bauen wir ein analoges System mit drei parallelen Federn und der Masse  $m_3$ , siehe [Abbildung 3.3](#). Diesmal muss die Auslenkung geringer sein da es sonst zur Überschwingung kommt. Und berechnen  $k$  wie in den vorherigen Versuchen.

## 4 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Massenbestimmungen und der anschließenden Versuchen mit einer und mehrerer Federn. Alle Fehlerangaben beziehen sich auf statistische Fehler; Systematische werden gegebenenfalls separat diskutiert.

### 4.1 Massenbestimmung

Die Masse des Pendelkörpers wurde über eine simultane Kraft- und Beschleunigungsmessung und Newtons Axiom [Gleichung \(2.1\)](#) bestimmt. In [Abbildung 4.1](#) sind die Messdaten auf die Zeit aufgetragen. In der ersten halben Sekunde befindet sich das Gerät am Tisch in Ruhe und ab  $t = 4$  s ist das IOLab komplett in der Luft. Ab diesem Zeitpunkt wird eine Konstante an die Messdaten angepasst.



**Abbildung 4.1:** Vom oben nach unten sind Kraft  $F$  und Beschleunigung  $a$  aufgetragen. Die Fehlerbalken der Daten sind zu klein, um sie auszumachen und werden daher nicht eingetragen. Die zwei Grafiken teilen sich die horizontale Achse. Zudem sind in Rot Geraden von  $t = 4$  s bis  $t = 8$  s angepasst.

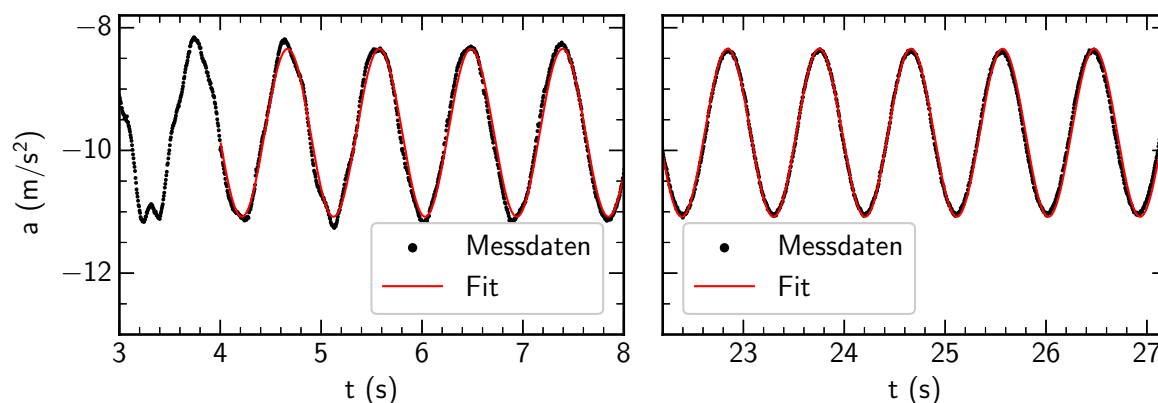
Der bestimmte Wert mit Fehler ist sowohl in der Abbildung, als auch in [Tabelle 4.1](#) zu sehen. Die Unsicherheit wurde auf die Standardabweichung der Daten gesetzt, da dann (per Definition) Zwei Drittel der Daten innerhalb des  $1\sigma$  Intervalls liegen.

**Tabelle 4.1:** Gemessene Beschleunigung und Kraft und die daraus errechnete Masse der drei Versuche.

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3
$a$ (m/s <sup>2</sup> )	-9.81(4)	-9.73(6)	-9.81(8)
$F$ (N)	-1.99(2)	-2.78(2)	-3.93(7)
$m$ (kg)	0.202(2)	0.286(3)	0.400(7)

## 4.2 Federpendel 1

Für die Analyse der Oszillation wurde der Beschleunigungssensor verwendet, da dieser eine höhere Auflösung als der Kraftsensor besitzt. In [Abbildung 4.2](#) sind die Schwingungsdaten der zweiten Masse dargestellt. Links sind die ersten fünf Sekunden, in welchen „schöne“ Schwingungen auftreten, zu sehen, während rechts die letzten Sekunden der Messung aufgetragen sind. In rot wurde eine Sinuskurve der Form  $f(x) = A \sin(\omega x + \phi) + d$  an die gesamten Messdaten von  $t = 4$  s bis  $t = 27$  s angepasst.



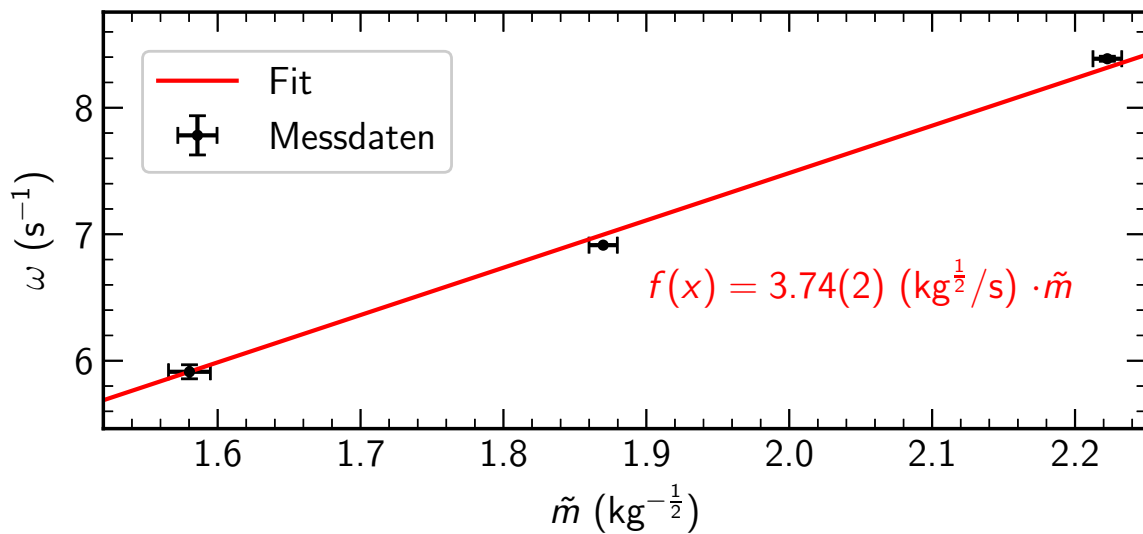
**Abbildung 4.2:** Die Beschleunigung wurde auf die Zeit aufgetragen und eine durchgehende Sinuskurve in Rot wurde an die Daten ab  $t = 4$  s (bis  $t = 27$  s) angepasst. Dargestellt werden aber nur ersten 5 Sekunden (links) beziehungsweise letzten 5 Sekunden (rechts). Die Fehlerbalken der Daten sind zu klein, um sie auszumachen und werden daher nicht eingetragen.

Aus dem Fit lässt sich direkt die Winkelfrequenz  $\omega$  herauslesen. Aus dieser kann man wiederum mit [Gleichung \(2.5\)](#) die Schwingungsdauer berechnen. In [Tabelle 4.2](#) sind charakteristische Eigenschaften der Schwingung, wie die Kreisfrequenz oder die Masse, eingetragen.

**Tabelle 4.2:** Gemessene Masse, Schwingungsdauer, Winkelfrequenz und Federkonstante der drei Versuche.

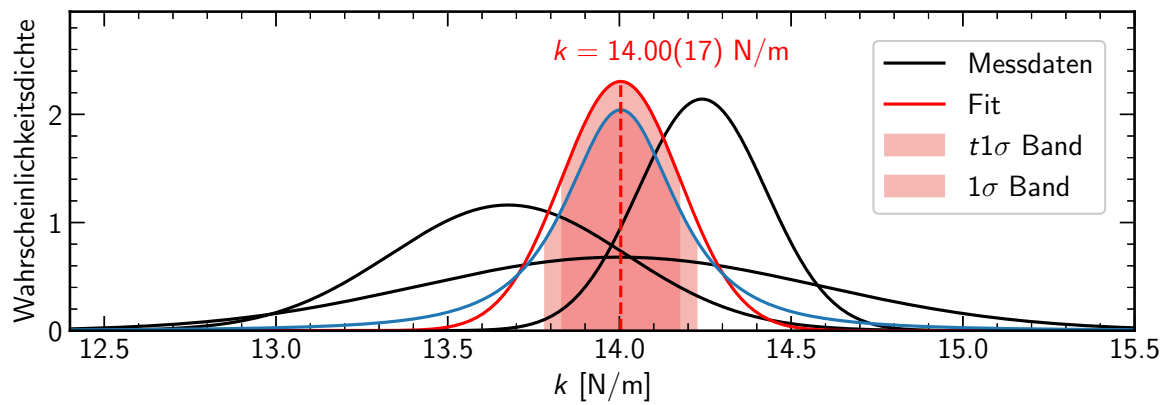
	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3
$m$ (kg)	0.202(2)	0.286(3)	0.400(7)
$\tilde{m}$ ( $\sqrt{1/\text{kg}}$ )	2.223(10)	1.8698(99)	1.580(15)
$T$ (s)	0.749(2)	0.909(5)	1.063(10)
$\omega$ (1/s)	8.387(40)	6.915(79)	5.91(11)
$k$ (N/m)	14.2(2)	13.7(3)	14.0(6)

Das Modell des harmonischen Oszillators (Siehe [Gleichung \(2.4\)](#)) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen  $\omega$  und der Wurzel des Kehrwerts der Masse  $\tilde{m}$  her mit  $\sqrt{k}$  als Proportionalitätskonstante. Dies wird in [Abbildung 4.3](#) anhand der in [Tabelle 4.1](#) angegebenen Werten illustriert. Zusätzlich zu den drei Datenpunkten wurde eine Gerade, wie sie das Modell vorhersagt, angepasst, wodurch man für die Steigung der linearen Funktion  $\sqrt{k} = 3.74(2) \sqrt{\text{kg}/\text{s}^2}$  erhält. Nachdem wir kein Indiz dafür haben, dass die Gerade die Ordinate nicht im Ursprung schneidet, wurde der Fit gezielt mit nur einem Parameter (der Steigung) durchgeführt, um die Anzahl der Freiheitsgrade von 1 auf 2 zu erhöhen.



**Abbildung 4.3:** Winkelfrequenz für drei unterschiedliche Massen. In rot wurde eine lineare Funktion durch den Ursprung angepasst. Die Fehlerbalken stellen den  $1\sigma$  Fehler dar; die Unsicherheit in  $\omega$  ist so gering, dass sie kaum sichtbar ist.

Für den Fit erhält man ein Chi-Quadrat Wert von  $\chi^2 = 4.22$ , woraus sich für das reduzierte Chi-Quadrat  $\chi^2_{\nu} = 2.11$  ergibt. Dieser Wert weicht zwar vom Erwartungswert ab, aber nicht signifikant. Es könnte aber darauf hindeuten, dass die Fehler zu klein abgeschätzt wurden, beziehungsweise Fehlerquellen nicht berücksichtigt wurden.



**Abbildung 4.4:** Winkelfrequenz für drei unterschiedliche Massen. In rot wurde eine lineare Funktion durch den Ursprung angepasst. Die Fehlerbalken stellen den  $1\sigma$  Fehler dar; die Unsicherheit in  $\omega$  ist so gering, dass sie kaum sichtbar ist.



# **5 Diskussion und Schlussfolgerung**

## **5.1 Grobkonzept der Sensorik**

# Literatur

- [1] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Bd. 1. G. Brookman, 1833.
- [2] I. Hughes und T. Hase. *Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis*. OUP Oxford, 2010.

## Erklärung

Hiermit versichern wir, dass der vorliegende Bericht selbständig verfasst wurde und alle notwendigen Quellen und Referenzen angegeben sind.

.....

Student 1                      Date

.....

Student 2                      Date