

2) 1. $V_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$ $2(k) = \frac{4}{8} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3 k^3}{V_k} = \frac{L^3 \left(\frac{2mE}{\hbar}\right)^{3/2}}{3\pi^2}$
~~2. $V_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$~~

$$2(\epsilon) = \frac{1}{L^3} \frac{\partial 2(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon}$$

$\Rightarrow 1 = \int_0^\epsilon 2(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) d\epsilon = C \int_0^\epsilon \sqrt{\epsilon} \bar{n}(\epsilon) d\epsilon$, $C = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3}$

c) Partielle Integration

$$c) \bar{n}_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} + 1} \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \epsilon} = - \left(e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} + 1 \right)^{-2} \left[- \frac{\epsilon - \mu}{k_B T} e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} \right] = \frac{\beta e^{-\beta(\epsilon - \mu)}}{\left(e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1 \right)^2}$$

$$= \left(e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1 \right)^{-1}$$

$$= \int_0^\infty \frac{3}{2} \frac{\beta e^{-\beta(\epsilon - \mu)}}{\left(e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1 \right)^2} d\epsilon \stackrel{x = (\epsilon - \mu)\beta, dx = \beta d\epsilon}{=} \int_{-\mu\beta}^\infty \frac{e^{-x}}{(e^x + 1)^2} \left(\frac{x}{\beta} + \mu \right)^{3/2} dx$$

d) negative energien nicht möglich, macht also keinen Unterschied ob 0 oder $-\infty$ als Grenze

$$q \epsilon^{3/2} \approx \mu^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{\mu} (\epsilon - \mu) + \frac{3}{8\sqrt{\mu}} (\epsilon - \mu)^2 = \mu^{3/2} + \frac{3\sqrt{\mu}}{2\beta} x + \frac{3}{8\sqrt{\mu}\beta^2} x^2$$

e) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(e^x + 1)^2} \left(\mu^{3/2} + \frac{3}{2\sqrt{\mu}} \frac{x}{\beta} + \frac{3}{8\sqrt{\mu}\beta^2} x^2 \right) dx = \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}\beta^2}$

f) $1 = \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}\beta^2} + \dots$

3) a) Für $T \rightarrow 0$ $E_F \rightarrow \mu$

Für $T \neq 0$ Rand von Fermi Kugel „diffus“ \Rightarrow Für $T \rightarrow 0$ $E_F = \frac{\hbar^2 n_{\max}^2}{8mL^2}$ passt

b)
$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{3\pi^2 n N_A}{V} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{3\pi^2 \rho N_A}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \approx \underline{\underline{6.08 \cdot 10^{-5} \text{ eV}}}$$

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \underline{\underline{0.71 \text{ K}}}$$

c)

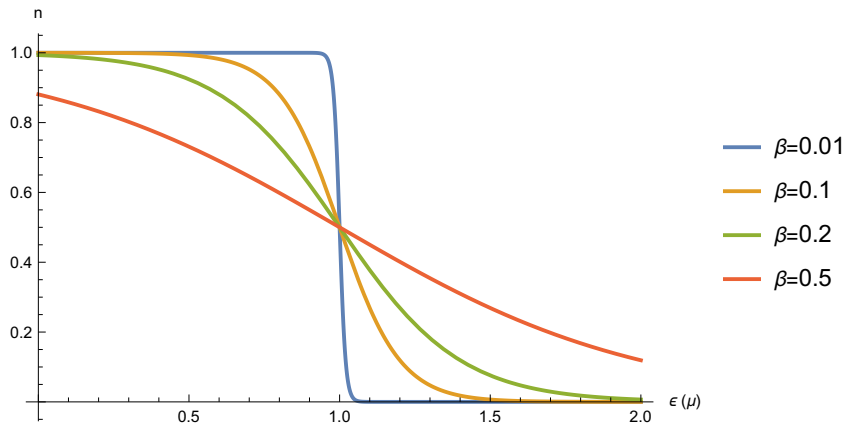
$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \frac{E_0}{V} + \frac{\pi^2}{6} \frac{N \hbar^2}{V E_F B^2} = \frac{2}{3} \frac{E_F N}{V} + \frac{\pi^2 N}{6 V E_F B^2} \approx 2.4596 \cdot 10^6 \text{ bar}$$

$$B = -V \frac{\partial P}{\partial V}$$

Ex.3 a)

```
In[67]:= n[e_, T_] := 1 / (Exp[(e - 1) / T] + 1)
Plot[{n[e, 0.01], n[e, 0.1], n[e, 0.2], n[e, 0.5]}, {e, 0, 2},
PlotLegends -> {"β=0.01", "β=0.1", "β=0.2", "β=0.5"}, AxesLabel -> {"ε (μ)", "n"}]
```

Out[68]=



In[173]:=

$$m := \text{copper ELEMENT} [\text{atomic mass}]$$

$$M := \text{copper MINERAL} [\text{molar mass}]$$

$$\rho := \text{copper ELEMENT} [\text{mass density}]$$

$$\hbar := \hbar$$

$$N_A := N_A$$

$$k := k$$

$$T := 300 \text{ K}$$

$$EF = \text{UnitConvert}[\hbar^2 / (2 m) * (3 \pi^2 \rho N_A / M)^{2/3}, \text{"eV"}]$$

$$TF = \text{UnitConvert}[EF / k]$$

Out[180]=

$$0.0000608113 \text{ eV}$$

Out[181]=

$$0.705686 \text{ K}$$

In[152]:=

$$P = \text{UnitConvert}[2/5 * EF * \rho / M * N_A + \pi^2 \rho * N_A * k^2 * T^2 / (6 * M * EF), \text{"bar"}]$$

Out[152]=

$$2.45927 \times 10^6 \text{ bar}$$

Ex.4

In[382]:=

$$\text{ClearAll}["Global`*"]$$

$$U_{\text{pot}} := -3/5 G * M^2 / R$$

$$EF := (9 \pi n / 4)^{2/3} \hbar^2 / (2 m R^2)$$

$$U_{\text{kin}} := 3/5 n * EF$$

$$\text{sol} = \text{Solve}[D[U_{\text{kin}} + U_{\text{pot}}, R] == 0, R][[1][1]]$$

Out[386]=

$$R \rightarrow \frac{3 \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \hbar^2 n^{5/3} \pi^{2/3}}{2 G m M^2}$$

In[418]:=

```

m :=  PARTICLE [] ... ✓

hbar :=  ... ✓

k :=  ✓

G :=  ... ✓

c :=  ✓

M :=  STAR [] ... ✓

n := M / m
R /. sol // UnitConvert
UnitConvert[EF /. sol, "MeV"]
UnitConvert[EF / k /. sol]
β = UnitConvert[Sqrt[EF * 2 / m] / c /. sol]

```

Out[425]=

 $1.234 \times 10^4 \text{ m}$

Out[426]=

56.2 MeV


Out[427]=

 $6.5 \times 10^{11} \text{ K}$

Out[428]=

0.346

Bei $\beta = 0.346$ (maximalgeschwindigkeit im fermigas) müsste man relativistische Effekte berücksichtigen



Täglich grüßt der harmonische Oszillator

Max Koppelstätter, Alexander Helbok

June 9, 2024

Betrachten wir ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden, ununterscheidbaren harmonischen Oszillatoren mit den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ im großkanonischen Ensemble

1. Ermitteln Sie die Zustandssumme eines einzelnen Oszillators und vereinfachen Sie diese.
2. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems. Falls Sie die vorige Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie

$$Z_1 = e^{-\beta\hbar\omega} / (1 + e^{-\beta\hbar\omega}).$$

3. Was würde sich hier ändern, wären die Oszillatoren ununterscheidbar und warum?
4. Berechnen Sie die mittlere Energie des Systems. Falls Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie

$$Y = e^{-\beta\hbar\omega} / (1 + e^{-\beta\hbar\omega}).$$

