Radiokarbonmethode

$t_{1/2} \approx 5730\ \text{yr}; \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}; \quad M = 15.7\ \text{g}; \quad m_{\text{C}} \approx 12\ \text{u}; \quad n = \frac{M}{m_{\text{C}}}$

$$N_0 = \frac{n}{8 \cdot 10^{11}}$$

$$\frac{1}{3}\ \text{Bq} = \lambda N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1\ \text{Bq}}{3\lambda N_0}\right)}{\lambda} = \underline{\underline{9.85 \cdot 10^{11}\ \text{s}}} \approx 20070\ \text{yr}$$

Theorie des Alpha-Zerfalls und Alternative

a)

$$\begin{aligned} \text{I}: \ & {}^{228}\text{Th} \longrightarrow {}^{224}\text{Ra} + \alpha \longrightarrow {}^{220}\text{Rn} + \alpha \longrightarrow {}^{116}\text{Po} + \alpha \\ \text{II}: \ & {}^{228}\text{Th} \longrightarrow {}^{116}\text{Po} + {}^{12}\text{C} \end{aligned}$$

b)

$$\Delta M_{\text{I}} = M_{^{228}\text{Th}} - 3M_\alpha - M_{^{116}\text{Po}} = \underline{\underline{17.71\ \text{MeV}/\text{c}^2}}$$

$$\Delta M_{\text{II}} = M_{^{228}\text{Th}} - M_{^{12}\text{C}} - M_{^{116}\text{Po}} = \underline{\underline{24.99\ \text{MeV}/\text{c}^2}}$$

Der ^{12}C-Zerfall sollte häufiger vorkommen, da in Summe mehr Energie freigesetzt wird und das Endprodukt somit einen energetisch niedrigeren Zustand einnimmt.

c) $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}; \quad R_0 = 1.3\ \text{fm}$

$$V_{\text{I}} = k\, \frac{e^2 Z_\alpha Z_{\text{Ra}}}{R_0 \sqrt[3]{A_\alpha + A_{\text{Ra}}}} = \underline{\underline{25.45\ \text{MeV}}}$$

$$V_{\text{II}} = k\, \frac{e^2 Z_{\text{C}} Z_{\text{Po}}}{R_0 \sqrt[3]{A_{\text{C}} + A_{\text{Po}}}} = \underline{\underline{115.60\ \text{MeV}}}$$

d) $G = \frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m(V_i(r) - E_i)}\, \mathrm{d}r; \quad r_i = k\frac{e^2 Z_i Z_j}{E_i} = \frac{K_i}{E_i}; \quad V_i(r) = k\frac{e^2 Z_i Z_j}{r} = \frac{K_i}{r}$

$$G_i = \frac{2}{\hbar}\int_R^{r_i} \sqrt{2m(V_i(r) - E_i)}\, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{8m}}{\hbar}\int_R^{r_i} \sqrt{\frac{K_i}{r} - E_i}\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\sqrt{8mE_i}}{\hbar}\int_R^{r_i} \sqrt{\frac{r_i}{r} - 1}\, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{8mE_i}}{\hbar}\left[r\sqrt{\frac{r_i}{r} - 1} - r_i \arctan\left(\sqrt{\frac{r_i}{r} - 1}\right)\right]_R^{r_i}$$

$r_\alpha = 4 \cdot 10^{-14}$ m; $\quad E_\alpha = 5.9$ MeV; $\quad r_\mathrm{C} = 4.01 \cdot 10^-14$ m; $\quad E_\mathrm{C} = 24.99$ MeV

$G_\alpha = \underline{\underline{64.52}}$

$G_\mathrm{C} = \underline{\underline{205.26}}$

---

e) $\lambda = \lambda_0\, \mathrm{e}^{-G}$

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = E_i + V_0 \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{\frac{2(E_i + V_0)}{m_i}}$$

$$\lambda_0(i) = \frac{v_i}{2R} = \sqrt{\frac{E_i + V_0}{2m_i R^2}}$$

$$\lambda_0(\alpha) = \underline{\underline{2.36 \cdot 10^{21}\ 1/\mathrm{s}}}$$

$$\lambda_0(^{12}\mathrm{C}) = \underline{\underline{1.86 \cdot 10^{21}\ 1/\mathrm{s}}}$$

---

f)

$$t_{1/2}(\alpha) = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda_0}\, \mathrm{e}^{G} = \underline{\underline{1.47 \cdot 10^6\ \mathrm{s}}}$$

$$t_{1/2}(^{12}\mathrm{C}) = \underline{\underline{5.16 \cdot 10^{67}\ \mathrm{s}}}$$

Der ^{12}C-Zerfall ist energetisch zwar günstiger, wird aber so gut wie nicht beobachtet, da die Halbwertszeit sehr sehr groß ist.

Energieversorgung des Perseverance Rovers

a) Der MMRTG startet mit einer Leistung von 110 W und hat eine operational lifetime von 14 Jahren.

b)

$$^{238}\mathrm{Pu} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{U} + \alpha + \Delta E$$

$$\Delta E = (M(^{238}\mathrm{Pu}) - M(^{234}\mathrm{U}) - M(\alpha))c^2 = \underline{\underline{5.59\ \mathrm{MeV}}}$$

c)

$$P = 0.06 A \Delta E = 0.06 N_0 \lambda \Delta E \stackrel{!}{=} 110\ \mathrm{MeV}$$

$$N_0 = \frac{110\ \mathrm{MeV}}{0.06 \lambda \Delta E} = \underline{\underline{8.17 \cdot 10^{24}}}$$

d)

$$N_0 M_{\mathrm{PuO}_2} = N_0 (M_{\mathrm{Pu}} + 2 M_{\mathrm{O}}) = \underline{\underline{3.66\ \mathrm{kg}}}$$

Website: 4.8 kg

e) $t_1 = 14\ \mathrm{d}; \quad t_2 = 14\ \mathrm{yr}$

$$P_1 = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t_1} 0.06 \lambda \Delta E = \underline{\underline{109.52\ \mathrm{W}}}$$

$$P_2 = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t_2} 0.06 \lambda \Delta E = \underline{\underline{98.48\ \mathrm{W}}}$$

f) $P_1 = 0.9\ \mathrm{kWh}; \quad P_2 = 110\ \mathrm{W}; \quad A_1 = 1.3\ \mathrm{m}^2; \quad t = 1\ \mathrm{Marstag} = 88642.66\ \mathrm{s}$

$$\frac{P_1}{t} = 36.55\ \mathrm{W}$$

$$A_2 = \frac{P_2 t}{P_1} A_1 = \underline{\underline{3.91\ \mathrm{m}^2}}$$