5a) $\varphi: V \to V$ $\quad v_1 \dots v_n \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von φ

z.z. $v_1, \dots, v_n$ linear Unabhängig

$L.U. := \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0 \Rightarrow c_1, \dots, c_n = 0$

Beweis mittels Induktion.

(IA) $n=1$

$c_1 \cdot v_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ✓, weil $v_1 \neq 0$

(IS) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $v_1, \dots, v_n$ L.U.

(IV) $n \to n+1$ $\quad v_{n+1} \neq 0$ Eigenvektoren von φ zu Eigenwerten $\lambda_{n+1} \notin \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$

$I := c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n + c_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow c_1 + \dots + c_{n+1} = 0$

$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_{n+1} v_{n+1}) = \varphi(0) = 0$

$c_1 \underbrace{\varphi(v_1)} + c_2 \underbrace{\varphi(v_2)} + \dots + c_{n+1} \underbrace{\varphi(v_{n+1})} = 0$

$II: c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$

$(\lambda_{n+1} I) - II = \lambda_{n+1} c_1 v_1 + \lambda_{n+1} c_2 v_2 + \dots + \lambda_{n+1} c_{n+1} v_{n+1} - \lambda_1 c_1 v_1 - \lambda_2 c_2 v_2 - \dots - \lambda_{n+1} c_{n+1} v_{n+1} = 0$

$$\underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_1)c_1}_{:= a_1} v_1 + \underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_2)c_2}_{:= a_2} v_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)c_n}_{:= a_n} v_n = 0$$

$\Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ (weil $v_1 \dots v_n$ laut IA L.U. sind)

$0 = a_1 = \underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_1)}_{\neq 0} c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$0 = a_2 = \underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}_{\neq 0} c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$0 = a_n = \underbrace{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}_{\neq 0} c_n \Rightarrow c_n = 0$

$\Rightarrow \underbrace{c_1 v_1}_{0} + \underbrace{c_2 v_2}_{0} + \dots + \underbrace{c_n v_n}_{0} + \overbrace{c_{n+1}}^{=0} \overbrace{v_{n+1}}^{\in V \setminus \{0\}} = 0 \Rightarrow v_{n+1} \neq 0 \Rightarrow c_{n+1} = 0$

52) $\mathbb{C}$-VR : $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Multiplikation ist?

Verknüpfung $\circ$:= Skalarmultiplikation

$\underset{\in\mathbb{R}}{r} := \underset{\in\mathbb{C}}{i} \circ \underset{\in\mathbb{R}}{1}$

$r \circ 1 = r$, weil für alle Zahlen $\in \mathbb{R}$ die übliche Multiplikation gilt

$r \circ 1 = r \circ i \circ 1 \Rightarrow r \circ 1 - i \circ 1 = (r-i) \circ 1 = 0$

$\Rightarrow r - i \neq 0$, weil $r \in \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl minus eine Complexe kann nicht 0 sein.

$\Rightarrow r - i \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{r-1}$ sodass gilt aber

$0 = (r-i) \circ 1 \circ \frac{1}{r-1} = \left(\frac{1}{r-1} \circ (r-1)\right) \circ 1 = 1 \circ 1 = 1$ ↯

Es gibt keine $\mathbb{C}$-VR Struktur die die Bedingung erfüllt.