2) $1 = \cancel{\mathcal{J}_2}$ $\quad V_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \quad Z(k) = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi k^3}{V_k} = \frac{L^3 \left(\frac{2mE}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}$

$\cancel{Z(\epsilon) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$

$\hat{=}$

$\hbar k = \sqrt{2mE}$

$$z(\epsilon) = \frac{1}{L^3} \frac{\partial Z(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\, m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon}}}$$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^{\epsilon} z(\epsilon)\, \bar{n}(\epsilon)\, d\epsilon = C \int_0^{\epsilon} \sqrt{\epsilon}\, \bar{n}(\epsilon)\, d\epsilon \quad , \quad \underline{\underline{C = \frac{\sqrt{2}\, m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3}}}$$

b) Partielle Integration

c) $\bar{n}_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon-\mu)}{k_B T}} + 1} \qquad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \epsilon} = -\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1\right)^{-2} \left[-\beta(\cancel{\epsilon-\mu})\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right] = \frac{\beta e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{\left(e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2}$

$= \left(e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + 1\right)^{-1}$

$x = (\epsilon-\mu)\beta, \quad dx = \beta\, d\epsilon$

$$= \int_0^{\infty} \epsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\beta e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{\left(e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2}\, d\epsilon = \int_{-\mu\beta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2} \left(\frac{x}{\beta} + \mu\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

d) negative energien nicht möglich, macht also keinen Unterschied ob 0 oder $-\infty$ als Grenze

$$\epsilon^{\frac{3}{2}} \approx \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,(\epsilon-\mu) + \frac{3}{8\sqrt{\mu}}(\epsilon-\mu)^2 = \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{3\sqrt{\mu}}{2\beta}\, x + \frac{3}{8\sqrt{\mu}\,\beta^2}\, x^2$$

e) $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2} \left(\mu^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,\frac{x}{\beta} + \frac{3}{8\sqrt{\mu}\,\beta^2}\, x^2\right) dx = \underline{\underline{\mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}\,\beta^2}}}$

f) $1 = \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}\,\beta^2} + \cancel{\frac{2}{3} C \epsilon^{\frac{3}{2}}}$

3) a) Für $T \to 0$ $\varepsilon_F \to \mu$

Für $T \neq 0$ Rand von Fermi Kugel „diffus" $\Rightarrow$ Für $T \to 0$ $\varepsilon_F = \frac{4h^2 n_{max}^2}{8mL^2}$ passt

b) $$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{3\pi^2 n N_A}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{3\pi^2 \rho N_A}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \approx \underline{\underline{6.08 \cdot 10^{-5}\,\text{eV}}}$$

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \underline{\underline{0.71\,K}}$$

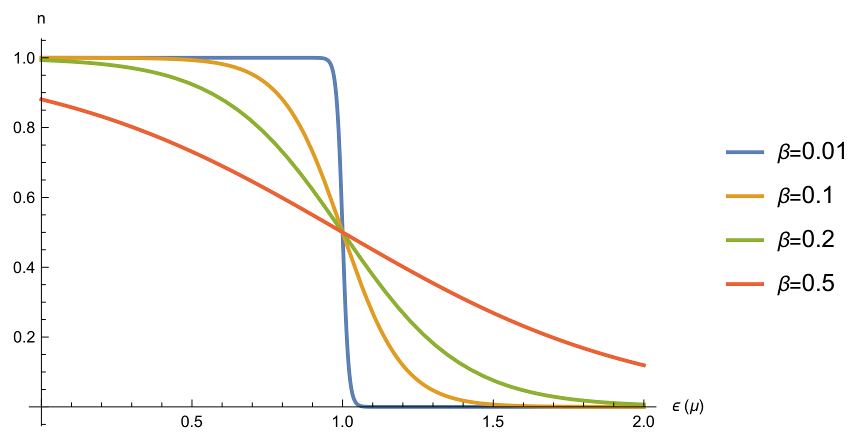
c) $$p = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{2}{3}\frac{E_0}{V} + \frac{\pi^2}{6}\frac{N}{VE_F\beta^2} = \frac{2}{5}\frac{E_F N}{V} + \frac{\pi^2 N}{6VE_F\beta^2} \approx 2.4596 \cdot 10^6\,\text{bar}$$

$$B = -V\frac{\partial p}{\partial V} =$$

# Ex.3 a)

In[67]:=
```
n[e_, T_] := 1 / (Exp[(e - 1) / T] + 1)
Plot[{n[e, 0.01], n[e, 0.1], n[e, 0.2], n[e, 0.5]}, {e, 0, 2},
 PlotLegends → {"β=0.01", "β=0.1", "β=0.2", "β=0.5"}, AxesLabel → {"ϵ (μ)", "n"}]
```

Out[68]=



In[173]:=

```
m := copper ELEMENT [atomic mass]
M := copper MINERAL [molar mass]
rho := copper ELEMENT [mass density]
hbar := ℏ
NA := N_A
k := k
T := 300 K
EF = UnitConvert[hbar^2 / (2 m) * (3 Pi^2 rho NA / M)^(2 / 3), "eV"]
TF = UnitConvert[EF / k]
```

Out[180]=

0.0000608113 eV

Out[181]=

0.705686 K

In[152]:=

```
P = UnitConvert[2 / 5 * EF * rho / M * NA + Pi^2 rho * NA * k^2 * T^2 / (6 * M * EF), "bar"]
```

Out[152]=

$2.45927 \times 10^{6}$ bar

# Ex.4

In[382]:=

```
ClearAll["Global`*"]
Upot := -3 / 5 G * M^2 / R
EF := (9 Pi n / 4)^(2 / 3) hbar^2 / (2 m R^2)
Ukin := 3 / 5 n * EF
sol = Solve[D[Ukin + Upot, R] == 0, R][[1]][[1]]
```

Out[386]=

$$R \to \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \text{hbar}^2\, n^{5/3}\, \pi^{2/3}}{2\, G\, m\, M^2}$$

In[418]:=

```
m := neutron PARTICLE [ mass ]
hbar := ℏ
k := k
G := G
c := c
M := Sun STAR [ mass ]
n := M / m
R /. sol // UnitConvert
UnitConvert[EF /. sol, "MeV"]
UnitConvert[EF / k /. sol]
β = UnitConvert[Sqrt[EF * 2 / m] / c /. sol]
```

Out[425]=

$1.234 \times 10^{4}$ m

Out[426]=

56.2 MeV

Out[427]=

$6.5 \times 10^{11}$ K

Out[428]=

0.346

Bei $\beta = 0.346$ (maximalgeschwindigkeit im fermigas) müsste man relativistische Effekte berücksichtigen

# Täglich grüßt der harmonische Oszillator

Max Koppelstätter, Alexander Helbok

June 9, 2024

Betrachten wir ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden, unterscheidbaren harmonischen oszillatoren mit den Energieeigentwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ im großkanonischen Ensemble

1. Ermitteln Sie die Zustandssumme eines einzelnen Oszillators und vereinfachen Sie diese.
2. Berechne die großkanonische Zustandssumme des Systems. Falls Sie die vorige Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie
$$Z_1 = e^{-\beta\hbar\omega}/(1 + e^{-\beta\hbar\omega}).$$
3. Was würde sich hier ändern, wären die Oszillatoren ununterscheidbar und warum?
4. Berechnen Sie die mittlere Energie des Systems. Falls sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie
$$Y = e^{-\beta\hbar\omega}/(1 + e^{-\beta\hbar\omega}).$$