Magnetisches Moment von Kernen

a) $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{j}^2 = (\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s})^2 = \boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{s}^2 + 2\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s} = \boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{s}^2 + 2\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{s}^2 - \boldsymbol{l}^2 + 2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{j}^2 + \boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{s}^2\right)$$

b)

$$\langle jm_j|\boldsymbol{j}^2|jm_j\rangle = j(j+1)$$

$$\begin{aligned}\langle jm_j|g_l\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l}|jm_j\rangle &= \langle jm_j|g_l\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{l}^2-\boldsymbol{s}^2\right)|jm_j\rangle = \\ &= \frac{g_l}{2}\Big[j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle jm_j|g_s\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j}|jm_j\rangle &= \langle jm_j|g_l\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{l}^2\right)|jm_j\rangle = \\ &= \frac{g_s}{2}\Big[j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)\Big]\end{aligned}$$

$$\langle jm_j|g_l\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l}+g_s\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j}|jm_j\rangle = \langle jm_j|g_l\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l}|jm_j\rangle + \langle jm_j|g_s\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j}|jm_j\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(g_l\Big[j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)\Big] + g_s\Big[j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)\Big]\Bigg)$$

$$\begin{aligned}g_{\text{Kern}} &= \frac{\langle jm_j|g_l\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{l}+g_s\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j}|jm_j\rangle}{\langle jm_j|\boldsymbol{j}^2|jm_j\rangle} = \\ &= \frac{g_l\big[j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)\big]+g_s\big[j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)\big]}{2j(j+1)}\end{aligned}$$

c) $\Delta_{lsj} := j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)$

$$\begin{aligned}g_{\text{Kern}} &= g_{\text{Kern}} + g_l - g_l = g_l + \frac{g_l(-\Delta_{lsj}+2j(j+1)) + g_s\Delta_{lsj} - g_l 2j(j+1)}{2j(j+1)} \\ &= g_l + \frac{g_l(-\Delta_{lsj}) + g_s\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = g_l + (g_s - g_l)\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)}\end{aligned}$$

d) $j = l \pm \frac{1}{2}; \quad s = \frac{1}{2}; \quad s(s+1) = \frac{3}{4}; \quad j(j+1) = l^2 + 2l + \frac{3}{4}$

Für $j = l + \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{l^2 + 2l + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - l^2 - l}{2l^2 + 4l + \frac{3}{2}}$$
$$= \frac{l + \frac{3}{2}}{2l^2 + 4l + \frac{3}{2}} = \frac{l + \frac{3}{2}}{(2l+1)\left(l + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2l+1}$$

Für $j = l - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{l^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - l^2 - l}{2l^2 - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-l + \frac{1}{2}}{2l^2 - \frac{1}{2}} = \frac{-l + \frac{1}{2}}{(-2l-1)\left(-l + \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2l+1}$$

$$\Rightarrow g_{\text{Kern}} = g_l \pm (g_s - g_l)\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = g_l \pm \frac{(g_s - g_l)}{2l+1}$$

e) $g_l = \begin{cases} 0 & \text{für Neutronen} \\ 1 & \text{für Protonen} \end{cases}; \quad g_s \approx \begin{cases} -3.8263 & \text{für Neutronen} \\ 5.5858 & \text{für Protonen} \end{cases}$

Für ^{17}O:
Leuchtnukleon ist Neutron

$$l = 2; j = \frac{5}{2}$$

$$g_{\text{Kern}} = g_l + \frac{(g_s - g_l)}{2l+1} = \frac{g_s}{5} \approx -0.76526$$

$$\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = g_{\text{Kern}} j = \frac{5}{2}\frac{g_s}{5} = \frac{g_s}{2} \approx \underline{\underline{-1.91315}}$$

Passt gut mit dem experimentellen Wert von $\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = -1.894$ zusammen.

Für ^{17}F:
Leuchtnukleon ist Proton

$$l = 2;\ j = \tfrac{5}{2}$$

$$g_{\text{Kern}} = g_l + \frac{(g_s - g_l)}{2l+1} = 1 + \frac{g_s - 1}{5} \approx 1.91716$$

$$\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = g_{\text{Kern}} j = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{g_s - 1}{5}\right) = \frac{4 + g_s}{2} \approx \underline{\underline{4.7929}}$$

Passt gut mit dem experimentellen Wert von $\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = 4.793$ zusammen.

Der Isospin des Deuterons

a)

$$\begin{aligned} T_z &= 1: \ \psi_{pp} = |\uparrow\uparrow\rangle \\ T_z &= 0: \ \psi_{pn} = |\uparrow\downarrow\rangle \\ T_z &= -1: \ \psi_{nn} = |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \psi(T_z = 1) &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ \psi_1(T_z = 0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ \psi_2(T_z = 0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ \psi(T_z = -1) &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

c)

Symmetrie	ψ	T_z	T
Antisymmetrisch	$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|\uparrow\downarrow\rangle - \|\downarrow\uparrow\rangle\right)$	0	0
Symmetrisch	$\psi = \|\uparrow\uparrow\rangle$	1	1
	$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|\uparrow\downarrow\rangle + \|\downarrow\uparrow\rangle\right)$	0	1
	$\psi = \|\downarrow\downarrow\rangle$	−1	1

d) $|\Psi_{\text{Ort}}\rangle$ ist symmetrisch, da $|\Psi_{\text{Ort}}\rangle = Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ und die Parität von $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^L$ ist 1 für $L = 0$

e) $\left|\Psi_{\text{Spin}}\right\rangle \left|\Psi_{\text{Isospin}}\right\rangle$ muss symmetrisch sein, damit $|\Psi\rangle$ antisymmetrisch ist.

f) Da $S = 1$ ist die Spin-Wellenfunktion symmetrisch, weshalb die Isospin-Wellenfunktion antisymmetrisch sein muss.

g) Nach obigen Überlegungen folgt, dass die Isospin-Wellenfunktion antisymmetrisch mit $T = 0$ sein muss (Singulett-Zustand) für den Grundzustand mit $L = 0$. Damit Triplett Zustände auftreten, muss $L = 1$, was selten, aber doch vorkommt.

Quadrupolmoment der Kerne

$$
\begin{aligned}
x &= ar\sin(\theta)\cos(\varphi) \\
y &= ar\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
z &= br\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

a) $\rho_{\text{el}} = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^2 b}$; $\quad \|\boldsymbol{r}\|^2 = r^2\left(a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right)$

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_V \rho_{\text{el}}(\boldsymbol{r})\left[3z^2 - \|\boldsymbol{r}\|^2\right]\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho_{\text{el}} a^2 b r^2 \sin(\theta)\left[3z^2 - \|\boldsymbol{r}\|^2\right]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho_{\text{el}} a b^2 \int_0^1\int_0^{\pi} r^4\sin(\theta)\left[-a^2\sin^2(\theta) + 2b^2\cos^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho_{\text{el}} a b^2 \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi}\sin(\theta)\left[-a^2\sin^2(\theta) + 2b^2\cos^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{5}\pi\rho_{\text{el}} a b^2\left[-a^2\int_0^{\pi}\sin^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta + 2b^2\int_0^{\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{2}{5}\pi\rho_{\text{el}} a b^2\left[-a^2\frac{4}{3} + b^2\frac{4}{3}\right] \\
&= \frac{2}{5}(b^2 - a^2)\frac{4\rho_{\text{el}}\pi a b^2}{3} \\
&= \frac{2}{5}Ze(b^2 - a^2)
\end{aligned}
$$

a und b hier vertauscht (im Vergleich zur Angabe) wegen der Parametrisierung. Können aber durch neue Parametrisierung einfach getauscht werden. Der Übersichtlichkeit halber wird in der nächsten Aufgabe die Notation aus der Angabe übernommen.

---

b) $Q(\text{Ta}) = 6 \cdot 10^{-24} e \ \text{cm}^2; \quad Q(\text{Sb}) = -1.2 \cdot 10^{-24} e \ \text{cm}^2; \quad R = 1.3 \cdot A^{\frac{1}{3}} \ \text{fm}$

$$\begin{aligned} a &= R(1+\epsilon) \\ b &= \frac{R}{\sqrt{1+\epsilon}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a^2 - b^2 &= (1+\epsilon)^2 R^2 - \frac{R^2}{1+\epsilon} \approx 3R^2\epsilon \\ \frac{a}{b} &= (1+\epsilon)^{3/2} \end{aligned}$$

$$Q(\text{Ta}) = \tfrac{2}{5} Z_{\text{Ta}} e(a^2 - b^2) \approx \tfrac{2}{5} 73 e 3 R^2 \epsilon_{\text{Ta}} = \tfrac{438}{5} e R^2 \epsilon_{\text{Ta}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{Ta}} = \tfrac{5}{438} \tfrac{Q(\text{Ta})}{eR^2} = 0.146$$

$$Q(\text{Sb}) = \tfrac{2}{5} Z_{\text{Sb}} e(a^2 - b^2) \approx \tfrac{2}{5} 51 e 3 R^2 \epsilon_{\text{Sb}} = \tfrac{306}{5} e R^2 \epsilon_{\text{Sb}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{Sb}} = \tfrac{5}{306} \tfrac{Q(\text{Sb})}{eR^2} = -0.053$$

$$\left.\frac{a}{b}\right|_{\epsilon_{\text{Ta}}} = \underline{\underline{1.227}}$$

$$\left.\frac{a}{b}\right|_{\epsilon_{\text{Sb}}} = \underline{\underline{0.921}}$$