Materiewellen und Formfaktoren

a)

b)

$$F(\boldsymbol{q}^2) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\frac{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}{\hbar}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{iqr\cos(\theta)}{\hbar}} f(r)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} f(r)r^2 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\frac{iqr\cos(\theta)}{\hbar}}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{\infty} f(r)r^2\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\frac{iqru}{\hbar}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\int_0^{\infty} f(r)r^2\left(\mathrm{e}^{\frac{iqr}{\hbar}} - \mathrm{e}^{-\frac{iqr}{\hbar}}\right)\frac{\hbar}{2iqr}\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} f(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

c) $\langle r^2\rangle = 4\pi\int_0^{\infty} r^4 f(r)\,\mathrm{d}r;\qquad \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} \approx 1 + \frac{r^2q^2}{6\hbar^2}$

$$F(\boldsymbol{q}^2) \approx 4\pi\int_0^{\infty} f(r)\left(r^2 + \frac{r^4q^2}{6\hbar^2}\right)\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^{\infty} f(r)r^2\,\mathrm{d}r + \langle r^2\rangle\frac{6\hbar^2}{q^2} = 1 + \langle r^2\rangle\frac{6\hbar^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \langle r^2\rangle = \underline{\underline{F(\boldsymbol{q}^2)\frac{6\hbar^2}{r^4q^2} - 1}}$$

d) $f(r) = f_0\,\mathrm{e}^{-ar}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \overset{!}{=} 1 \iff \int_0^{\infty} f_0\,\mathrm{e}^{-ar}r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi} \iff \underline{\underline{f_0 = \frac{a^3}{8\pi}}}$$

e) $F(\boldsymbol{q}^2) = \left(1+\alpha^2\right)^{-2}$

$$F(\boldsymbol{q}^2) = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} f(r) r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{\hbar a^3}{2q} \int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \mathrm{e}^{-ar} r \,\mathrm{d}r = \frac{a^4\hbar^4}{\left(a^2\hbar^2+q^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha(q,a) = \underline{\underline{\frac{q}{a\hbar}}}$$

Diese Ladungsverteilung beschreibt Protonen.

---

f) $f(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R_0^3} & \text{für } 0 \le r \le R_0 \\ 0 & \text{für } R_0 < r \end{cases}$

$$F(\boldsymbol{q}^2) = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} f(r) r^2 \,\mathrm{d}r = 3\frac{\hbar}{qR_0^3} \int\limits_0^{R_0} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) r \,\mathrm{d}r =$$

$$= 3\frac{\sin\left(\frac{qR_0}{\hbar}\right) - \frac{qR_0}{\hbar}\cos\left(\frac{qR_0}{\hbar}\right)}{\frac{q^3R_0^3}{\hbar^3}} = 3\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} \qquad \text{, mit } x(q) = \frac{qR_0}{\hbar}$$

Diese Ladungsverteilung wird in der Natur nicht wiedergefunden, man kann schwerere Kerne aber dadurch approximieren.

---

g) $x(0) = 0$

$$F(0) = \lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\right) = 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Stabilstes Nuklid einer Isobare

---

a)

---

b)

---

c)

Luminosität des LHC

a)

b)