Magnetisches Moment von Kernen

a)
$$j = l + s$$

 $j^2 = (l + s)^2 = l^2 + s^2 + 2l \cdot s = l^2 + s^2 + 2l \cdot (j - l) = s^2 - l^2 + 2j \cdot l$
 $\Rightarrow j \cdot l = \frac{1}{2} (j^2 + l^2 - s^2)$

b)
$$\langle jm_{j}|\mathbf{j}^{2}|jm_{j}\rangle = j(j+1)$$

$$\langle jm_{j}|g_{l}\mathbf{j}\cdot\mathbf{l}|jm_{j}\rangle = \langle jm_{j}|g_{l}\frac{1}{2}(\mathbf{j}^{2}+\mathbf{l}^{2}-s^{2})|jm_{j}\rangle =$$

$$= \frac{g_{l}}{2} \left[j(j+1) + l(l+1) - s(s+1) \right]$$

$$\langle jm_{j}|g_{s}s\cdot\mathbf{j}|jm_{j}\rangle = \langle jm_{j}|g_{l}\frac{1}{2}(\mathbf{j}^{2}+s^{2}-\mathbf{l}^{2})|jm_{j}\rangle =$$

$$= \frac{g_{s}}{2} \left[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1) \right]$$

$$\langle jm_{j}|g_{l}\mathbf{j}\cdot\mathbf{l}+g_{s}s\cdot\mathbf{j}|jm_{j}\rangle = \langle jm_{j}|g_{l}\mathbf{j}\cdot\mathbf{l}|jm_{j}\rangle + \langle jm_{j}|g_{s}s\cdot\mathbf{j}|jm_{j}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \left(g_{l} \left[j(j+1) + l(l+1) - s(s+1) \right] + g_{s} \left[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1) \right] \right)$$

$$\begin{split} g_{\text{Kern}} &= \frac{\left\langle j m_{j} \left| g_{l} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{l} + g_{s} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{j} \right| j m_{j} \right\rangle}{\left\langle j m_{j} \right| \boldsymbol{j}^{2} \left| j m_{j} \right\rangle} = \\ &= \frac{g_{l} \left[j (j+1) + l (l+1) - s (s+1) \right] + g_{s} \left[j (j+1) + s (s+1) - l (l+1) \right]}{2 j (j+1)} \end{split}$$

c)
$$\Delta_{lsj} := j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)$$

$$g_{\text{Kern}} = g_{\text{Kern}} + g_l - g_l = g_l + \frac{g_l(-\Delta_{lsj} + 2j(j+1)) + g_s\Delta_{lsj} - g_l2j(j+1)}{2j(j+1)}$$

$$= g_l + \frac{g_l(-\Delta_{lsj}) + g_s\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = g_l + (g_s - g_l)\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)}$$

d)
$$j = l \pm \frac{1}{2}$$
; $s = \frac{1}{2}$; $s(s+1) = \frac{3}{4}$; $j(j+1) = l^2 + 2l + \frac{3}{4}$

Für $j = l + \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{l^2 + 2l + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - l^2 - l}{2l^2 + 4l + \frac{3}{2}}$$
$$= \frac{l + \frac{3}{2}}{2l^2 + 4l + \frac{3}{2}} = \frac{l + \frac{3}{2}}{(2l+1)(l+\frac{3}{2})} = \frac{1}{2l+1}$$

Für $j = l - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{l^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - l^2 - l}{2l^2 - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-l + \frac{1}{2}}{2l^2 - \frac{1}{2}} = \frac{-l + \frac{1}{2}}{(-2l-1)\left(-l + \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2l+1}$$

$$\Rightarrow g_{\text{Kern}} = g_l \pm (g_s - g_l) \frac{\Delta_{lsj}}{2j(j+1)} = g_l \pm \frac{(g_s - g_l)}{2l+1}$$

e)
$$g_l = \begin{cases} 0 & \text{für Neutronen} \\ 1 & \text{für Protonen} \end{cases}$$
; $g_s \approx \begin{cases} -3.8263 & \text{für Neutronen} \\ 5.5858 & \text{für Protonen} \end{cases}$

Für ¹⁷O:

Leuchtnukleon ist Neutron

$$l = 2; j = \frac{5}{2}$$

$$g_{\text{Kern}} = g_l + \frac{(g_s - g_l)}{2l + 1} = \frac{g_s}{5} \approx -0.76526$$

$$\mu_{\text{Kern}}$$
 g_s $g_$

$$\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = g_{\text{Kern}} j = \frac{5}{2} \frac{g_s}{5} = \frac{g_s}{2} \approx \underline{-1.91315}$$

Passt gut mit dem experimentellen Wert von $\frac{\mu_{\text{Kem}}}{\mu_N} = -1.894$ zusammen.

Für ¹⁷F:

Leuchtnukleon ist Proton

$$l = 2; j = \frac{5}{2}$$

$$g_{\text{Kern}} = g_l + \frac{(g_s - g_l)}{2l + 1} = 1 + \frac{g_s - 1}{5} \approx 1.91716$$

$$\frac{\mu_{\text{Kern}}}{\mu_N} = g_{\text{Kern}} j = \frac{5}{2} \left(1 + \frac{g_s - 1}{5} \right) = \frac{4 + g_s}{2} \approx \underline{4.7929}$$

Passt gut mit dem experimentellen Wert von $\frac{\mu_{\text{Kem}}}{\mu_N} = 4.793$ zusammen.

Der Isospin des Deuterons

a)

$$T_z = 1: \psi_{pp} = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$T_z = 0$$
: $\psi_{pn} = |\uparrow\downarrow\rangle$

$$T_z = -1: \psi_{nn} = |\downarrow\downarrow\rangle$$

b)

$$\psi(T_z = 1) = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\psi_1(T_z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\psi_2(T_z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\psi(T_z=-1)=|\downarrow\downarrow\rangle$$

Symmetrie	ψ	T_z	T
Antisymmetrisch	$\psi = \frac{1}{2} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$	0	0

c)

Symmetrisch $\psi = |\uparrow\uparrow\rangle$

1 1

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right) \qquad 0 \qquad 1$$

$$\psi = |\!\downarrow\downarrow\rangle$$

- d) $|\Psi_{\rm Ort}\rangle$ ist symmetrisch, da $|\Psi_{\rm Ort}\rangle=Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ und die Parität von $Y_\ell^m(\theta,\varphi)=(-1)^L$ ist 1 für L=0
- e) $|\Psi_{Spin}\rangle |\Psi_{Isospin}\rangle$ muss symmetrisch sein, damit $|\Psi\rangle$ antisymmetrisch ist.
- f) Da S=1 ist die Spin-Wellenfunktion symmetrisch, weshalb die Isospin-Wellenfunktion antisymmetrisch sein muss.
- g) Nach obigen Überlegungen folgt, dass die Isospin-Wellenfunktion antisymmetrisch mit T=0 sein muss (Singulett-Zustand) für den Grundzustand mit L=0. Damit Triplett Zustände auftreten, muss L=1, was selten, aber doch vorkommt.

Quadrupolmoment der Kerne

$$x = ar \sin(\theta) \cos(\varphi)$$
$$y = ar \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$z = br \cos(\theta)$$

a)
$$\rho_{el} = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^2b}; \quad \|\mathbf{r}\|^2 = r^2 \left(a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)\right)$$

$$Q = \int_{V} \rho_{el}(\mathbf{r}) \left[3z^2 - \|\mathbf{r}\|^2\right] dV = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \rho_{el}a^2br^2 \sin(\theta) \left[3z^2 - \|\mathbf{r}\|^2\right] d\theta d\varphi dr$$

$$= 2\pi \rho_{el}ab^2 \int_{0}^{1} \int_{0}^{\pi} r^4 \sin(\theta) \left[-a^2 \sin^2(\theta) + 2b^2 \cos^2(\theta)\right] d\theta dr$$

$$= 2\pi \rho_{el}ab^2 \int_{0}^{1} r^4 dr \int_{0}^{\pi} \sin(\theta) \left[-a^2 \sin^2(\theta) + 2b^2 \cos^2(\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{2}{5}\pi \rho_{el}ab^2 \left[-a^2 \int_{0}^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta + 2b^2 \int_{0}^{\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta\right]$$

$$= \frac{2}{5}\pi \rho_{el}ab^2 \left[-a^2 \frac{4}{3} + b^2 \frac{4}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{5}(b^2 - a^2) \frac{4\rho_{el}\pi ab^2}{3}$$

$$= \frac{2}{5}Ze(b^2 - a^2)$$

a und b hier vertauscht (im Vergleich zur Angabe) wegen der Parametrisierung. Können aber durch neue Parametrisierung einfach getauscht werden. Der Übersichtlichkeit halber wird in der nächsten Aufgabe die Notation aus der Angabe übernommen.

b)
$$Q(\text{Ta}) = 6 \cdot 10^{-24} e \text{ cm}^2$$
; $Q(\text{Sb}) = -1.2 \cdot 10^{-24} e \text{ cm}^2$; $R = 1.3 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$

$$a = R(1+\epsilon)$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{1+\epsilon}}$$

$$a^2 - b^2 = (1+\epsilon)^2 R^2 - \frac{R^2}{1+\epsilon} \approx 3R^2 \epsilon$$

$$\frac{a}{b} = (1+\epsilon)^{3/2}$$

$$Q(\text{Ta}) = \frac{2}{5} Z_{\text{Ta}} e(a^2 - b^2) \approx \frac{2}{5} 73 e^3 R^2 \epsilon_{\text{Ta}} = \frac{438}{5} e R^2 \epsilon_{\text{Ta}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{Ta}} = \frac{5}{438} \frac{Q(\text{Ta})}{eR^2} = 0.146$$

$$Q(Sb) = \frac{2}{5} Z_{Sb} e(a^2 - b^2) \approx \frac{2}{5} 51 e^3 R^2 \epsilon_{Sb} = \frac{306}{5} e R^2 \epsilon_{Sb}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{Sb}} = \frac{5}{306} \frac{Q(\text{Sb})}{eR^2} = -0.053$$

$$\left. \frac{a}{b} \right|_{\epsilon_{\text{Ta}}} = \underline{1.227}$$

$$\left. \frac{a}{b} \right|_{\epsilon_{\mathrm{Sb}}} = \underline{0.921}$$