Coulombterm des Tröpfchenmodells

a) $E = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{A^{-1/3}}{R_0} = a_C Z^2 A^{-1/3}; \quad a_\mathrm{C} \approx 0.714\ \mathrm{MeV}; \quad R_0 = 1.3(1)\ \mathrm{fm}$

$$\tilde{a}_\mathrm{C} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R_0} = 0.106(8)\ \mathrm{pJ} = \underline{\underline{0.66(5)\ \mathrm{MeV}}}$$

Der hier bestimmte Wert für $\tilde{a}_\mathrm{C}$ stimmt im Rahmen der Unsicherheit mit dem experimentell ermittelten von a_C überein.

Fermigasmodell + Weiße Zwerge

a) Der Fermi Impuls eines Kerns ist der Impuls, des energiereichsten Nukleons, welches im Fermigasmodell das höchste erlaubte Energieniveau besetzt.

b) $V_x = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad V_p = \frac{4}{3}\pi p_\mathrm{F}^3$

$$n = 2\frac{V_x V_p}{h^3} = \frac{4R^3 p_\mathrm{F}^3}{9\pi\hbar^3}$$

c) $N = \frac{A}{2}; \quad R = R_0 A^{1/3}; \quad R_0 = 1.3\ \mathrm{fm}$

$$\frac{A}{2} = \frac{4R_0^3 A^3 p_\mathrm{F}^3}{9\pi\hbar^3}$$

$$\Rightarrow p_\mathrm{F} = \frac{\hbar}{2R_0}\sqrt[3]{9\pi} \approx 1.24 \times 10^{-19}\ \mathrm{Ns} = \underline{\underline{231.21\ \mathrm{MeV/c}}}$$

d)

$$E_\mathrm{F} = \frac{p_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{N}} = \frac{\hbar^2}{8m_\mathrm{N}R_0^2}(9\pi)^{2/3} = \underline{\underline{28.49\ \mathrm{MeV}}}$$

e) $E_{\mathrm{kin}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{N}}}; \quad \rho(\boldsymbol{p}) = \rho_0 = \frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3}$

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_{\mathrm{N}}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{\rho_0}{2m_{\mathrm{N}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{p_{\mathrm{F}}} p^4 \sin(\theta) \,\mathrm{d}p \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi\rho_0 p_{\mathrm{F}}^5}{5m_{\mathrm{N}}} = \frac{3p_{\mathrm{F}}^2}{10m_{\mathrm{N}}}$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{3}{5} E_{\mathrm{F}}}}$$

---

f) $n = \frac{Vp_{\mathrm{F}}^3}{3\pi^2\hbar^3}$

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m_{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2m_{\mathrm{n}}} \left(\hbar \sqrt[3]{\frac{3n\pi^2}{V}} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{n}}} \left(\frac{3\pi^2 n}{V} \right)^{2/3}}}$$

---

g) $E_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}} \left(\frac{9\pi Z}{4R^3} \right)^{2/3}; \quad E_{\mathrm{G}} = -\frac{3}{5} G \frac{M}{R^2}; \quad E_{\mathrm{ges}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{G}}$

$$\frac{\partial E_{\mathrm{ges}}}{\partial R} = \frac{3 \left(4GM^2 m_{\mathrm{e}} - 3\hbar^2 RZ \left(\frac{12\pi^2 Zr}{R^6} \right)^{1/3} \right)}{20 m_{\mathrm{e}} R^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{3\hbar^2 \sqrt[3]{3\pi^2 Z^5}}{2\sqrt[3]{2} GM^2 m_{\mathrm{e}}} \propto M^{-2}$$

---

h) $M_{\mathrm{S}} = 1.99 \times 10^{30}$ kg; $\quad Z \approx \frac{A}{2} \Rightarrow Z = \frac{M_{\mathrm{S}}}{m_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{n}}}$

$$R = \frac{3\hbar^2 \sqrt[3]{3\pi^2 Z^5}}{2\sqrt[3]{2} GM_{\mathrm{S}}^2 m_{\mathrm{e}}} = \underline{\underline{7.15 \times 10^6 \ \mathrm{m}}}$$

$$\rho_{\mathrm{S}} = \frac{M_{\mathrm{S}}}{V} = \frac{3M_{\mathrm{S}}}{4\pi R^3} = \underline{\underline{1.3 \times 10^9 \ \mathrm{kg/m^3}}}$$

$$\rho_{\mathrm{E}} = 5515 \ \mathrm{kg/m^3} \approx 10^{-5} \rho_{\mathrm{S}}$$

Schalenmodell

a)

$$\Delta E = \left[E_\mathrm{B}(^{16}\mathrm{O}) - E_\mathrm{B}(^{17}\mathrm{O})\right] - \left[E_\mathrm{B}(^{15}\mathrm{O}) - E_\mathrm{B}(^{16}\mathrm{O})\right] = \underline{\underline{11.52\ \mathrm{MeV}}}$$

b) Protonen liegen aufgrund des Coulomb Potentials weniger tief bzw. die Energieniveaus stimmen weder in Höhe noch in Abstand mit denen von Neutronen überein. Deshalb kommt es zu einer Diskrepanz in der Energie, wenn man ein Neutron durch ein Proton ersetzt (was zur Entstehung neuer Teilchen führen kann,
zb. $^{17}_{8}\mathrm{O} \xrightarrow{\beta^-} {}^{17}_{9}\mathrm{F} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$).