appearance of relativistically expanding radio sources

Alexander Helbok*

28. Dezember 2023

*alexander.helbok@student.uibk.ac.at

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen und Theorie **1**

3 Diskussion **2**

1 Einleitung

In 60 Jahren kann sich das physikalische Weltbild stark verändern. Vor allem wenn man an die erste Hälfte des 20. Jahrhunder denkt, wo ein ganzer Teilbereich mit der Quantenmechanik neu aufgestellt wurde. Dennoch waren Physiker sich der Implikationen von Einsteins Relativitätstheorie auch nach 60 Jahren noch nicht ganz bewusst. Wie die Welt bei relativistischen Geschwindigkeiten aussieht, kann man nur aus mathematischen Formeln erahnen, so

So geschah es, dass 1966 (61 Jahre nach Veröffentlichung der speziellen Relativitätstheorie), die starken Helligkeitsschwankungen von entfernten Radioquellen durch ein simples geometrisches Argument erklärt werden konnten. Das geometrische Argument trägt aber auch ein scheinbares Paradoxon mit sich, und zwar sich mit Übberlichtgeschwindigket ausdehnende Körper.

2 Grundlagen und Theorie

Allgemein betrachtet können auf ein Ölteilchen in dem Kondensator vier verschiedene Kräfte wirken. Dazu zählen die Gewichtskraft $F_\text{g} = \rho_\text{Öl} \cdot V \cdot g$ und die entgegengesetzte Auftriebskraft $F_\text{A} = \rho_\text{Luft} \cdot V \cdot g$. Die daraus resultierende Kraft berechnet sich dann zu

$$F_\text{g, A} = F_\text{g} - F_\text{A} = (\rho_\text{Öl} - \rho_\text{Luft}) \cdot V \cdot g, \tag{1}$$

mit den jeweiligen Dichten von Luft ρ_Luft und Öl $\rho_\text{Öl}$, dem Volumen des Tropfens V und der Beschleunigung im Gravitationsfeld der Erde g. Darüber hinaus wirkt in einem eingeschalteten Plattenkondensator die elektrische Kraft F_el auf ein geladenes Öltröpfchen. Diese lautet:

$$F_\text{el} = Q \cdot E = Q \cdot \frac{U}{d} \tag{2}$$

Dabei steht E für die Stärke des elektrischen Feldes, U ist die angelegte Spannung und d der Abstand zwischen den zwei horizontalen Kondensatorplatten. Abschließend lässt sich eine Kraft, die Reibungskraft welche immer der Bewegung des Öltröpfchens entgegen wirkt, erkennen. Unter der Annahme, das Tröpfchen befindet sich in einer laminaren Strömung, wird der Luftwiderstand durch die Stokes'sche-Reibung charakterisiert und sieht wie folgt aus:

$$F_\text{R} = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v \tag{3}$$

Der Koeffizient η steht für die Viskosität der Luft, r für den Radius des Öltröpfchens und v dessen Geschwindigkeit.

Während der Versuchsdurchführung werden zwei verschiedene Zustände betrachtet. Zuerst fällt das Tröpfchen, der Kondensator ist ausgeschaltet. Nach einer gewissen Strecke, welche das Tröpfchen im Sinkflug zurückgelegt hat, wird der Kondensator eingeschalten und die elektrische Kraft beginnt zu wirken, das Öltröpfchen fängt an zu steigen.

Aus physikalischer Sicht wird das Tröpfchen während des Sinkfluges durch die Gewichtskraft beschleunigt, bis diese durch die Reibungskraft kompensiert wird und sich ein Kräftegleichgewicht einstellt. Dieses lautet:

$$F_\text{g, A} - F_\text{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_\text{g, A} = F_\text{R}$$

$$(\rho_\text{Öl} - \rho_\text{Luft}) \cdot V \cdot g = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_1 \tag{4}$$

Nimmt man an, die Öltropfen seien sphärisch, ist das Volumen $V = 4/3\pi r^3$ und die einzigen verbleibenden unbekannten in Gleichung (4) sind v_1 und r. Mithilfe der Messung der Sinkgeschwindigkeit v_1 ergibt sich für r

$$r = \sqrt{\frac{18\eta v_1}{4(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})g}} \tag{5}$$

Nach einer gewissen Zeit im Sinkflug wird der Kondensator eingeschalten, das Kräfteverhältnis wird um die elektrische Kraft F_{el} verändert. Ist diese groß genug, dreht sich die Bewegungsrichtung der Öltropfen um, was die Richtung der Reibungskraft invertiert. Das neue Kräftegleichung lässt sich folgend anschreiben:

$$F_{\text{g, A}} + F_{\text{R}} - F_{\text{el}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{g,A} + F_{\text{R}} = F_{\text{el}}$$
$$(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \cdot V \cdot g + 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_2 = Q \cdot \frac{U}{d} \tag{6}$$

Mithilfe der Messung der Steiggeschwindigkeit v_2 und der Berechnung des Radius r kann die Ladung Q des steigenden Öltröpfchens bestimmt werden und es ergibt sich

$$Q = \left(\frac{4\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})g}{3} + 6\pi\eta r v_2 \right) \frac{d}{U} \tag{7}$$

Als Spezialfall der oberen Gleichung kann wenn die Spannung gerade richtig gewählt ist, dass das Tröpfchen zum Schweben gebracht wird und somit $v_2 = 0$ gilt. Damit vereinfacht sich Gleichung (7) zu

$$Q = \left(\frac{4\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})g}{3} \right) \frac{d}{U} \tag{8}$$

Dabei zeigt die Erfahrung, die aus mehreren Versuchsdurchführungen und Berechnungen der Elementarladung e gezogen werden konnte, dass die experimentell bestimmten Werte etwas zu groß ausfallen. In der Theorie wird das Stokessche-Gesetz für die Beschreibung der Reibungskraft verwendet, jedoch gilt diese Gesetzmäßigkeit nicht mehr exakt für die Größenordnung der Tröpfchenradien zwischen 10^{-3} mm und 10^{-4} mm. Dies ist durch die Übereinstimmung der Größe der Radien mit der mittleren freien Weglänge der Luftmoleküle zu begründen. Die Korrektur, welche auch schon von Millikan selbst verwendet wurde, kann mathematisch wie folgt definiert werden:

$$Q_k = \frac{Q}{(1 + \frac{b}{rp})^{2/3}} \quad \Leftrightarrow \quad Q^{2/3} = Q_k^{2/3} \left(1 + \frac{b}{rp}\right) \tag{9}$$

mit der korrigierten Ladung Q_k, dem Luftdruck p, dem Radius der Tropfen r und einem zu bestimmenden Parameter b. Dies kann durch eine lineare Geradengleichung der Form:

$$y = y_0(1 + bx) \tag{10}$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnet $y_0 = Q_k^{2/3}$ den Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse des Koordinatensystems, die Geradensteigung entspricht dem konstanten Parameter b.

3 Diskussion

Es wurden insgesamt 90 Datenpunkte aufgenommen, welche jedoch in drei getrennten Gruppen analysiert werden mussten. Das ist zwar besser als nur 30 Messdaten von einem Versuchsteilnehmer zu haben, da dann drei Teilmessungen der Elementarladung kombiniert werden können und somit der statistische Fehler ungefähr halbiert wird. Allerdings wären 90 Messdaten von einem Versuchsteilnehmer besser, da dann mehr Daten in den einzelnen Ladungsgruppen liegen und damit die Kernels im KDE kleiner gewählt werden können, was den statistischen Fehler (aus der Breite der KDE) verringert.

Wir erhalten für die Elementarladung ohne Cunningham Korrektur $e_{\text{unkorr}} = 1.8(3) \cdot 10^{-19}$ C. Vergleicht man das mit dem CODATA 2018 Wert $e_{\text{lit}} = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C [1], erkennt man dass der Literaturwert innerhalb einer Standardabweichung von unserem Wert liegt.

Die Cunningham-Korrektur kann nur sinnvoll auf die Daten angewendet werden, wenn man für den Parameter b einen Literaturwert hernimmt. Für die Bestimmung über eine Geradenanpassung sind die Fehler zu klein abgeschätzt und weiters zu wenige Datenpunkte vorhanden, um einen klaren linearen Trend ausmachen und quantifizieren zu können. Als korrigierten Wert für die Elementarladung erhalten wir $e_{\text{korr}} = 1.6(3) \cdot 10^{-19}$ C. Die Korrektur hat den Fehler unmerklich beeinflusst, der nominelle Wert hingegen ist etwas kleiner geworden. Die korrigierte Elementarladung ist hier wieder mit dem Literaturwert vereinbar.

Die Unsicherheit der hier bestimmten Werte setzt sich zum Großteil aus der Streuung der Messwerte in den einzelnen Ladungsgruppen zusammen. Um den Fehler zu minimieren müsste man in einem Folgeexperiment die Zeitmessungen akkurater durchführen, zum Beispiel unter Verwendung einer Digitalkamera, die die Tröpfchenbewegung aufnimmt. Da könnte man dann im Nachhinein die Zeitmessung entweder automatisieren oder über eine verlangsamte Aufnahme händisch durchführen.

Literatur

[1] E. Tiesinga u. a. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018“. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 50.3 (2021), S. 033105.