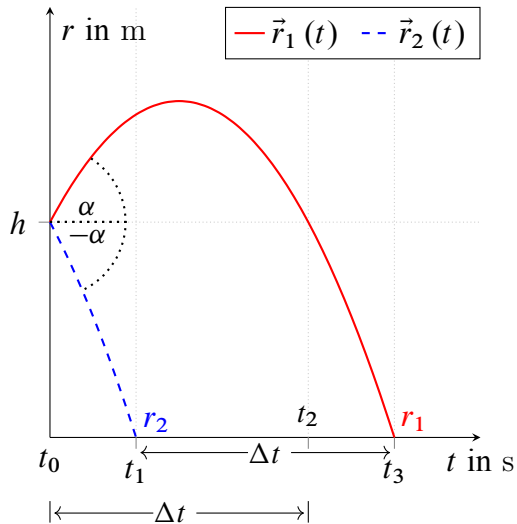


20. Wurf von einem Balkon



a)

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)t \\ h + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(-\alpha)t \\ h + v_0 \sin(-\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$r_x(t) = v_0 \cos(\pm\alpha)t$$

$$r_z(t) = h + v_0 \sin(\pm\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) - gt \end{pmatrix}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_z(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

b)

$$0 = r_z(t)$$

$$0 = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2}t^2$$

$$t_{i,ii} = \frac{-v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{-g}$$

$$t_3 = \frac{-v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{-g}$$

c)

$$|v_1| = \sqrt{v_x(t_3)^2 + v_z(t_3)^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt_3)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} =$$

$$|v_1| = \underline{\underline{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}}$$

d)

$$r_z(t) = h$$

$$h = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2$$

$$t_{i,ii} = \frac{-v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha}}{-g}$$

$$t_i = t_0 = \frac{-v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha}}{-g} = 0$$

$$t_{ii} = t_3 = \frac{-v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha}}{-g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\Delta t = t_3 - t_1 = t_2 - t_0$$

$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} - 0$$

$$\Delta t = \underline{\underline{\frac{2v_0 \sin \alpha}{g}}}$$

- e) Δt ist die Zeit, die die Kugel mit der steileren Trajektorie braucht, um wieder auf der Starthöhe h zu sein, weil ab dem Zeitpunkt t_2 die Bewegungen der zwei Kugeln ident sind. Hierbei ist es egal auf welcher Höhe man startet, da es nicht um den Betrag der Höhe geht, sondern nur darum, wieder auf der anfänglichen Höhe zu sein.

21. Golf

- a) $l = 220 \text{ m}, \quad v_0 = 50 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t \\ v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ z(t) &= v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

$$z(t) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

$$x(t_2) = l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{200g}{v_0^2}\right)}{2} = 29.84^\circ$$

$$\alpha_{1,2} = 45^\circ \pm (45^\circ - \alpha)$$

$$\alpha_1 = \underline{\underline{29.84^\circ}}, \quad \alpha_2 = \underline{\underline{60.16^\circ}}$$

b)

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{für } \alpha = 45^\circ$$

$$l_{\max} = \frac{50^2 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{255 \text{ m}}}$$

29. Beschleunigte Kreisbewegung

$$\text{a) } \vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \gamma t^2 \\ \sin \gamma t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \underline{\underline{2R\gamma t \begin{pmatrix} -\sin \gamma t^2 \\ \cos \gamma t^2 \end{pmatrix}}}$$

$$|v(t)| = \sqrt{(2R\gamma t \sin \gamma t^2)^2 + (2R\gamma t \cos \gamma t^2)^2} =$$

$$|v(t)| = \underline{\underline{2R\gamma t}}$$

$$s(t) = R\varphi(t) = \underline{\underline{R\gamma t^2}}$$

b)

$$\varphi(t) = \gamma t^2$$

$$\omega(t) = \underline{\underline{2\gamma t}}$$

$$\alpha(t) = \underline{\underline{2\gamma}}$$

c)

$$\vec{a}(t) = \overbrace{2R\gamma \begin{pmatrix} -\sin \gamma t^2 \\ \cos \gamma t^2 \end{pmatrix}}^{\text{Tangentialbeschleunigung}} + \overbrace{4R\gamma^2 t^2 \begin{pmatrix} -\cos \gamma t^2 \\ -\sin \gamma t^2 \end{pmatrix}}^{\text{Zentripetalbeschleunigung}}$$

$$|a(t)| = \sqrt{(-2R\gamma \sin \gamma t^2 - 4R\gamma^2 t^2 \cos \gamma t^2)^2 + (2R\gamma \cos \gamma t^2 - 4R\gamma^2 t^2 \sin \gamma t^2)^2} =$$

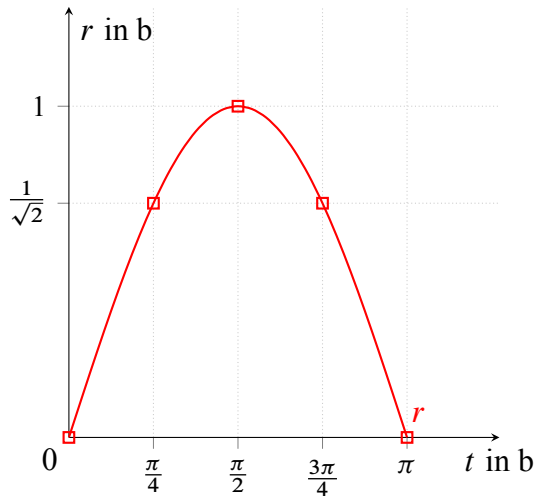
$$|a(t)| = \sqrt{\underbrace{4R^2\gamma^2}_{\text{Tangentialbeschl.}} + \underbrace{16R^2\gamma^4 t^4}_{\text{Zentripetalbeschl.}}}$$

d)

$$\begin{array}{ll} 4R^2\gamma^2 < 16R^2\gamma^4 t^4 & | \sqrt{} \\ 2R\gamma < 4R\gamma^2 t^2 & | : 2R\gamma \\ 1 < 2\gamma t^2 & | : 2\gamma \quad | \sqrt{} \\ t > \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{2\gamma}}}} \end{array}$$

für $t > \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$ liefert die Zentripetalbeschleunigung den Hauptteil der Beschleunigung.

31. Zweidimensionale Bahnkurve



$$\text{a) } \vec{r}(t) = b \begin{pmatrix} \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$r(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(t_1) = \begin{pmatrix} b\pi/4 \\ b/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$r(t_2) = \begin{pmatrix} b\pi/2 \\ b \end{pmatrix}$$

$$r(t_3) = \begin{pmatrix} 3b\pi/4 \\ b/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$r(t_4) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}(t) = b\omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$|v(t)| = \sqrt{(b\omega)^2 + (b\omega \cos \omega t)^2} = \underline{\underline{b\omega \sqrt{1 + \cos^2 \omega t}}}$$

c)

$$\vec{a}(t) = b\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$|a(t)| = \sqrt{(0b\omega^2)^2 + (-b\omega^2 \sin \omega t)^2} = \underline{\underline{b\omega^2 |\sin \omega t|}}$$

d)

$$|a_{\parallel}(t)| = \frac{d|v(t)|}{dt} = \underline{\underline{-\frac{b\omega^2 \sin 2\omega t}{2\sqrt{1+\cos^2 \omega t}}}}$$

e)

$$|\vec{a}_{\parallel}| = \sqrt{\left(-\frac{b\omega^2 \sin 2\omega t_1}{2\sqrt{1+\cos^2 \omega t_1}}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{b\omega^2}{\sqrt{6}}}}$$

$$|a_{\perp}(t_1)| = \sqrt{|a(t_1)|^2 - |a_{\parallel}(t_1)|^2} = \sqrt{(b\omega^2 \sin \omega t_1)^2 - \left(-\frac{b\omega^2 \sin 2\omega t_1}{2\sqrt{1+\cos^2 \omega t_1}}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2\omega^4}{2} - \frac{b^2\omega^4}{6}} =$$

$$|a_{\perp}(t_1)| = \frac{b\omega^2}{\sqrt{3}}$$

$$\rho(t_1) = \frac{|v(t_1)|^2}{|a_{\perp}(t_1)|} = \frac{\left(b\omega \sqrt{1+\cos^2 \omega t_1}\right)^2}{\frac{b\omega^2}{\sqrt{3}}} = \frac{b^2\omega^2 \frac{3}{2}}{\frac{b\omega^2}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}b^2\omega^2}{2b\omega^2} =$$

$$\rho(t_1) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{27}b}{2}}}$$