41) a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= (1\,7\,6\,3\,5\,4\,2)$

$= (1\,7)(7\,6)(6\,3)\overset{(3\,5)}{}(5\,4)(4\,2)$

$\text{sign}(\sigma_1) = 1$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\,3)(2\,4\,5\,7)$

$= (1\,3)(2\,4)(4\,5)(5\,7)$

$\text{sign}(\sigma_2) = 1$

$\sigma_3 = (2\,1\,3\,4)(5\,7\,6)$

$= (2\,1)(1\,3)(3\,4)(5\,7)(7\,6)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\text{sign}(\sigma_3) = -1$

$\sigma_4 = (1\,4\,3\,2)(5\,6\,7\,4)(1\,2)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$= (2\,4\,7\,3)(5\,6)$

$= (2\,4)(4\,7)(7\,3)(5\,6)$

$\text{sign}(\sigma_4) = 1$

$\sigma_5 = (1\,2)(2\,3)(4\,5)(2\,7)(2\,4)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= (1\,2\,5\,4\,7\,3)$

$= (1\,2)(2\,5)(5\,4)(4\,7)(7\,3)$

$\text{sign}(\sigma_5) = -1$

$\sigma_6 = \sigma_4\,\sigma_1\,\sigma_3$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$= \cancel{(1\,6\,7\,2\,3\,4)}\ (1\,6\,5\,4\,2)$

$= \cancel{(1\,6)(6\,7)(7\,2)(2\,3)(3\,4)}\ (1\,6)(6\,5)(5\,4)(4\,2)$

$\text{sign}(\sigma_6) = +1$

b)

42) a) $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} I = III \\ \rightsquigarrow \\ II = II - 5I \\ III = III - 9I \\ IV = IV - 5I \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \\ 0 & -10 & -30 & -24 \\ 0 & -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} II = II \cdot (-\frac{1}{6}) \\ \rightsquigarrow \\ III = III + 10 II \\ IV = IV + 4 II \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Det}(A) = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

b) Det hängt im Allgemeinen vom Körper ab

zb. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\mathbb{R}$: $\det(A) = 3$

für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $\det(A) = 0$

c) $A \in \text{Mat}_m(\mathbb{Z})$. $A \in Gl_m(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow A \in Gl_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle bis auf endliche Primzahlen

Wenn $A \in Gl_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ $\forall$ bis auf endliche Primzahlen, dann $\exists\, p$, das Primfaktor von $\det(A)$ in $\mathbb{Q}$ ist. $\exists$ aber auch ~~kein~~ ein p, für welches A invertierbar ist wodurch $\det(A)$ in $\mathbb{Q}$ nicht 0 ist, da sie sonst in allen Körpern 0 wäre

$\Rightarrow A \in Gl_m(\mathbb{Q})$

43)

$$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ 2 & 1 & 3 \\ \lambda+2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} = \mathrm{III} \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda+2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \lambda & -\lambda & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \lambda+2 & 1 & 2 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right.$$

$$\det(A) = 2 + 3\lambda^2 + 6\lambda \cancel{-2\lambda} - 3 - 4\lambda + \lambda^2 \cancel{+2\lambda} =$$

$$= 4\lambda^2 + 2\lambda - 1 = \underline{(2\lambda+1)^2 - 2}$$

$$(2\lambda+1)^2 - 2 = 0$$

$$2\lambda + 1 = \sqrt{2}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \neq \frac{\sqrt{2}+1}{2} : A \text{ invertierbar}$$

44) 22. $\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ C & D \end{array}\right)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{m} A_\sigma$$

falls $i \geq m_1 + 1$ und $j \leq m_1 \Rightarrow A_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{m} A_{\sigma(i)i} = 0 \quad \text{falls } \sigma(i) \leq m_i$$

$I_1 := \{1, \dots, m\}$ $\quad I_2 := \{m+1, \dots, m\}$

wähle $M := \{\sigma \in S_m \mid \sigma(i) \in I_1 \text{ für } i \in I_1\}$

M bijektiv $\Rightarrow S_{m_1} \times S_{m_2}$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{m_1} A_{\sigma_i} \cdot \prod_{i=m_1+1}^{m} A_{\sigma_i} =$$

$$= \sum_{\substack{\omega \in S_{I_1} \\ \delta \in S_{I_2}}} \operatorname{sign}(\omega) \cdot \prod_{i=1}^{m_1} A_{\omega_i} \cdot \operatorname{sign}(\delta) \prod_{m_1+1}^{m} A_{\delta_i} =$$

$$= \sum_{\omega \in S_{I_1}} \operatorname{sign}(\omega) \prod_{i=1}^{m_1} A_{\omega_i} \cdot \sum_{\delta \in S_{I_2}} \operatorname{sign}(\delta) \prod_{m_1+1}^{m} A_{\delta_i} =$$

$$= \underline{\det(B) \cdot \det(D)}$$