

Hall Effekt und Leitfähigkeit

Versuch 092 - Fortgeschrittenenpraktikum

Stefan Frick, Benedikt Pressl, Gregor Weihs

Februar 2024

In diesem Versuch werden mittels Hall-Effekt verschiedene Eigenschaften eines unbekannten Halbleiters untersucht. Zunächst werden bei Raumtemperatur der spezifische Widerstand bzw. der Hall-Koeffizient genau vermessen bevor die Probe bis auf ca. 25 K abgekühlt wird. Während der Kühlphase werden laufend spezifischer Widerstand und Hall-Koeffizient gemessen. Aus der Temperaturreihe lassen sich Aussagen über die Dotierung, Beweglichkeit der Ladungsträger und die dominierenden Streumechanismen treffen.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Aufgaben | 2 |
| 1.1 Vorbereitung | 2 |
| 1.2 Versuchsdurchführung | 2 |
| 1.3 Auswertung | 3 |
| 2 Halbleiter Theorie | 4 |
| 2.1 Grundbegriffe | 4 |
| 2.2 Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration | 5 |
| 2.2.1 Das Massenwirkungsgesetz | 5 |
| 2.2.2 Der intrinsische Halbleiter | 7 |
| 2.2.3 Der extrinsische Halbleiter | 7 |
| 2.3 Beweglichkeit und Streumechanismen | 7 |
| 2.3.1 Phononen (Gitterschwingungen) | 8 |
| 2.3.2 Ionisierte Störstellen | 8 |
| 2.3.3 Matthiessensche Regel | 9 |
| 2.4 Zusammenfassung | 9 |
| 3 Experimentelle Betrachtungen | 9 |
| 3.1 Leitfähigkeit | 9 |
| 3.2 Hall-Effekt | 10 |
| 3.3 van der Pauw Methode | 10 |
| 3.3.1 Spezifischer Widerstand | 10 |
| 3.3.2 Hall-Koeffizient | 11 |
| 4 Aufbau | 12 |

1 Aufgaben

Der Versuch besteht aus drei Teilen: Die Vorbereitung, die Durchführung und die Auswertung. Die zugehörigen Aufgaben sind im Folgenden kurz zusammengefasst.

1.1 Vorbereitung

In diesem Praktikumsversuch sollen grundlegende Konzepte der Halbleiterphysik – und im weiteren Sinn der Festkörperphysik – vertieft werden. Da die Auswertung des Versuchs bereits sehr spezifisch ist, hier ein paar Leitfragen/Begriffe die für das Verständnis des Versuchs wichtig sind und im folgenden kurz wiederholt werden.

- Was ist die Bandstruktur, wie sind Leitungsband (*conduction band*) und Valenzband (*valence band*) definiert?
- Wie kann man aus der Bandstruktur auf die Art des Materials (Metall / Isolator / Halbleiter / Halbmetall) schließen?
- Was sind typische Halbleiter-Materialien/Materialkombinationen?
- Warum leitet ein voll gefülltes Band keinen elektrischen Strom?
- Was sind Valenzbandlücken, wie verhalten sich diese unter Einfluss äußerer elektrischer Felder?
- Was verursacht die intrinsische Leitfähigkeit eines Halbleiters und wie verhält sich diese mit der Temperatur?
- Wie erhöht Dotierung die Leitfähigkeit eines Halbleiters?
- Was verursacht den elektrischen Widerstand?
- Wodurch entsteht der Hall-Effekt? Macht die Art der Ladungsträger (Elektronen/Löcher) einen Unterschied?
- Was ist die *van der Pauw* Methode [1] und wie funktioniert sie? Welche physikalischen Größen lassen sich damit bestimmen?

Das alles wurde im Modul „Festkörperphysik“ behandelt und ist in zahlreichen Lehrbüchern ausgezeichnet dargestellt, z. B. Ibach & Lüth [2, Kapitel 12] oder Gross & Marx [3], beide online aus dem Uni-Netz im Volltext verfügbar.

1.2 Versuchsdurchführung

Folgende Messungen sollen durchgeführt werden:

1. Kalibration des angelegten Magnetfelds mit Teslameter
2. Bestimmung des spezifischen Widerstands und des Hall-Koeffizienten bei Raumtemperatur nach der *van der Pauw* Methode; Verbesserung durch Umkehrung der Polarität von Strom und Magnetfeld;

3. Kontinuierliches Abkühlen der Probe mittels Helium-Kryostat von Raumtemperatur auf ca. 25 K; Während des Abkühlens Messung des spezifischen Widerstands und des Hall-Koeffizienten in frei wählbaren Schritten;

Man sollte sich vorher überlegen *wie* die *van der Pauw* Methode in der Praxis funktioniert - was muss wann wo angelegt werden? Positiver und negativer Kontakt der Stromquelle. Positiver bzw. negativer Kontakt des Voltmeters? Idealerweise Tabelle für die Protokollierung der Messung vorbereiten. Wieviele Spannungen müssen für jeden Temperaturschritt gemessen werden?

1.3 Auswertung

1. Auswertung und Diskussion der *van der Pauw* Messung bei Raumtemperatur, mit Diskussion der Unsicherheiten und Begründung der Annahmen. Ist der Halbleiter *n* oder *p* Typ?
2. Aus der Temperaturreihe: je nach Typ des Halbleiters (*n* oder *p*):
 - a) Bestimmung der Ionisationsenergie der **Donatoren** bzw. **Akzeptoren** (E_d bzw. E_a) und des
 - b) **Ladungsträgerüberschusses** ($N_D - N_A$ oder $N_A - N_D$) durch Plotten von $\ln n$ in Abhängigkeit von $1/T$, siehe Abschnitt 2.2.
3. Bestimmung **Beweglichkeit** μ und Graph als Funktion der Temperatur.
4. Bestimmung der **dominierenden Streumechanismen** aus dem Diagramm $\ln \mu$ vs. $\ln T$ und Bestimmung der Exponenten im Nieder- und Hochtemperaturbereich, siehe auch Abschnitt 2.3. Woran zeigt sich die Matthiessensche Regel?
5. Zu welchem Halbleiter und welcher Dotierung passen die Werte für Beweglichkeit und Ionisationsenergie? Vergleich mit Literaturwerten.

2 Halbleiter Theorie

Während für die Durchführung des Versuchs vor allem die Kenntnis der *van der Pauw* Methode wichtig ist, braucht die Interpretation der Daten das Verständnis einiger grundlegenden Begriffe der Halbleiterphysik. Diese werden in diesem Abschnitt motiviert.

2.1 Grundbegriffe

Dotierung Als Dotierung bezeichnet man Fremdatome (Störstellen) im Kristall die entweder ein zusätzliches Elektron einbringen (Donator) oder ein zusätzliches „Loch“ (Akzeptor, „fehlendes Elektron“). Im Banddiagramm sitzen Donatoren leicht unter dem Leitungsband, während Akzeptoren über dem Valenzband liegen. Bei ausreichender thermischer Energie geben die Donatoren ihr zusätzliches Elektron in das Leitungsband ab, während Akzeptoren Elektronen aus dem Valenzband „einfangen“ („Löcher“ im Valenzband). Dadurch steigert sich in beiden Fällen die Leitfähigkeit.

Einen Halbleiter der überwiegend aus Donatoren besteht nennt man *n-Typ*, während man bei Akzeptoren vom *p-Typ* spricht. Im Versuch soll die Ionisierungsenergie der Donatoren (oder Akzeptoren) E_d bestimmt werden.

Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(E, T)$ Nachdem Elektronen (und Löcher) Fermionen sind, ist die Energieverteilung (= Wahrscheinlichkeit der Besetzung) durch die Fermi-Dirac-Verteilung (Abbildung 1) gegeben:

$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (1)$$

Dabei ist k_B die Boltzmannkonstante, T die Temperatur und μ_F das chemische Potential. In diesem Fall wird das chemische Potential auch *Fermi-Potential* oder *Fermi-Energie* genannt. Dies ist das Energieniveau, an dem die Fermi-Dirac-Verteilung ungefähr $1/2$ ist.

Zustandsdichte $D_L(E)$, $D_V(E)$ **und Ladungsträgerkonzentration** n, p Während die Fermi-Dirac-Verteilung die besetzten Energieniveaus in Abhängigkeit von der Temperatur beschreibt, müssen für die Berechnung der Ladungsträgerkonzentration auch die Zustandsdichte des Halbleiters berücksichtigt werden. Abhängig vom Typ ergibt sich

$$n(T) = \int_{E_L}^{\infty} D_L(E) f_{FD}(E, T) dE \quad (2)$$

$$p(T) = \int_{\infty}^{E_V} D_V(E) [1 - f_{FD}(E, T)] dE \quad (3)$$

n und p sind die Ladungsträgerkonzentrationen der Elektronen und Löcher bzw., $D_L(E)$ und $D_V(E)$ die Zustandsdichten im Leiter bzw. Valenzband (Abbildung 1)). Für diese Gleichungen können Vereinfachungen getroffen werden, die es uns erlauben, unterschiedliche Bereiche der Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentrationen zu unterscheiden und Informationen zur Dotierung zu gewinnen.

Leitfähigkeit und Beweglichkeit Es stellt sich die Frage, wie sich die Ladungsträgerkonzentrationen n und p im Experiment äußern. Ein Beispiel, das wir später verwenden werden, ist die Leitfähigkeit σ (Abschnitt 3.1).

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \quad (4)$$

Hier ist $\mu_{n,p}$ die *Beweglichkeit* der Elektronen bzw. Löcher. Die Beweglichkeit (siehe auch Abschnitt 2.3) bestimmt die Driftgeschwindigkeit v_D der Ladungsträger bei einem angelegten elektrischen Feld E :

$$v_D = -\mu E \quad (5)$$

Durch (5) kann die Beweglichkeit mit dem Hall-Effekt in Verbindung gebracht werden.

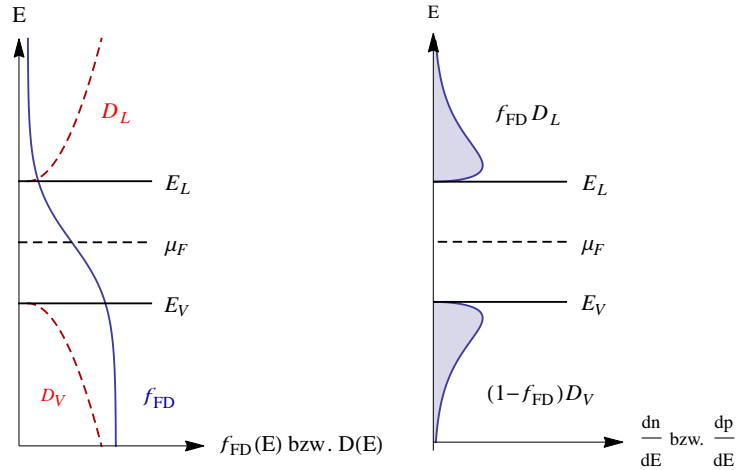


Abbildung 1: Fermi-Dirac-Funktion f_{FD} , Zustandsdichten D_L und D_V sowie die Integranden von (2) und (3). Die Lage des Fermi-Niveaus μ_F hängt von der Temperatur und Dotierung ab (nicht eingezeichnet).

2.2 Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die Ladungsträgerkonzentrationen (2.1) eingeführt. Nun soll die Temperaturabhängigkeit genauer untersucht werden. Dabei spielen die Störstellen (Donatoren bzw. Akzeptoren) eine fundamentale Rolle (siehe Abbildung 2): bei tiefen Temperaturen können sie „ausfrieren“ (Fall 1) und bei höheren werden sie bevorzugt ionisiert (Fall 2). Bei sehr hohen Temperaturen (= Raumtemperatur, auch bei sehr reinen Kristallen!) dominiert die Erzeugung von Elektronen-Loch-Paaren über die Bandlücke (Fall 3).

2.2.1 Das Massenwirkungsgesetz

Die Zustandsdichten $D_{V/L}(E)$ können folgendermaßen abgeschätzt werden: Wir wissen, dass die Bandstruktur eine Lücke der Breite $E_G = E_L - E_V$ aufweist in der die Zustandsdichte 0 ist. In der Nähe von Valenzbandmaximum und Leitungsbandminimum kann angenommen werden, dass die Bänder parabolisch sind mit bekannter Zustandsdichte:

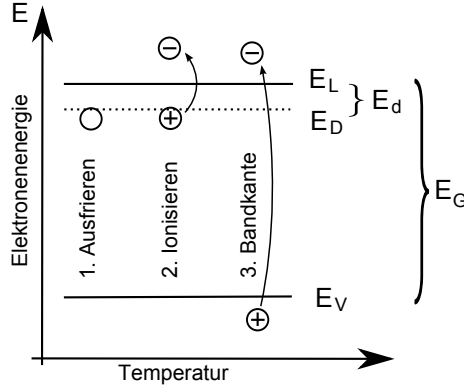


Abbildung 2: Temperaturabhängige Anregungsprozesse im Halbleiter: bei tiefen Temperaturen Ausfrieren (Fall 1), bei höheren Ionisierung (Fall 2) und bei hohen Temperaturen Anregung über die Bandlücke (Fall 3).

$$D_L(E) = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_L} \quad (E > E_L) \quad (6)$$

$$D_V(E) = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_V - E} \quad (E < E_V) \quad (7)$$

m_n^*, m_p^* ... effektive Masse der Elektronen bzw. Löcher. Der komplizierte Einfluss des Gitters kann damit abstrahiert werden. z.B. GaAs $m^* = 0,063 m_e$

E_L, E_V ... Energieniveau des Leitungs- und Valenzbandes

Damit können die Integrale (2) und (3) ausgeführt werden (Annahme für Fermi-Dirac-Verteilung: $E - \mu_F \gg k_B T$).

$$n = \underbrace{2 \left(\frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}}_{N_L} \exp \left[-\frac{E_L - \mu_F}{k_B T} \right] \quad (8)$$

Analog funktioniert das für p . Der Vorfaktor der Exponentialfunktion N_L ist die *effektive Zustandsdichte*. Multipliziert man n und p erhält man das *Massenwirkungsgesetz*:

$$np = \underbrace{4 \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^3 (m_n^* m_p^*)^{3/2}}_{N_L N_V} \exp \left[-\frac{E_G}{k_B T} \right] \quad (9)$$

Dieses Gesetz besagt, dass ein Halbleiter durch die effektive Massen der Elektronen im Leitungsband bzw. der Löcher im Valenzband und die Bandkante E_G vollständig charakterisiert ist. Wenn man alle Erhaltungssätze (Massenwirkungsgesetz, Neutralitätsbedingung, ...) berücksichtigt, erhält man den exakten Zusammenhang ([2, Kapitel 12.4]):

$$n = 2N_D \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_L} \exp \left[-\frac{E_d}{2k_B T} \right]} \right)^{-1} \quad (10)$$

Alle folgenden Fälle sind Näherungen von (10), die man aber auch „intuitiv“ aus dem Massenwirkungsgesetz motivieren kann.

2.2.2 Der intrinsische Halbleiter

Falls die Temperaturen so hoch sind, sodass die Störstellen keine Rolle spielen gilt $n = p$. Dies wird auch als *Eigenleitung* bezeichnet. Dabei können Elektronen über die Bandlücke angeregt werden um Elektronen-Loch-Paare zu erzeugen (Abbildung 2, Fall 3). Aus dem Massenwirkungsgesetz (9) erhalten wird dann die *intrinsische Ladungsträgerdichte* n_i :

$$n_i = p_i = \sqrt{N_L N_V} \exp \left[-\frac{E_G}{2k_B T} \right] \quad (11)$$

Über den Hall-Koeffizienten und den spezifischen Widerstand kann die Ladungsträgerdichte abgeleitet werden. Aus der Temperaturabhängigkeit von n kann dann wiederum die Bandlücke E_G bestimmt werden; im Praktikum ist das im Moment jedoch nicht vorgesehen.

2.2.3 Der extrinsische Halbleiter

Im extrinsischen Bereich dominieren die Beiträge der Störstellen. Hier können zwei Fälle unterscheiden werden:

Alle Störstellen sind ionisiert Hier ist die Temperatur zwar hoch genug um alle Störstellen zu ionisieren, aber zu niedrig um Elektronen-Loch-Paare an der Bandlücke zu erzeugen (Abbildung 2, Fall 2). Die Ladungsträgerdichte ist in diesem Fall durch die Dichte der Störstellen N_D und N_A gegeben:

$$n = N_D - N_A \approx N_D = \text{const} \quad (\text{n-Typ}) \quad (12)$$

$$p = N_A - N_D \approx N_A = \text{const} \quad (\text{p-Typ}) \quad (13)$$

Ausfrieren von Ladungsträgern Bei tiefen Temperaturen sind nicht mehr alle Störstellen ionisiert (Abbildung 2, Fall 1). Für die Ladungsträgerdichte ergibt sich ein Zusammenhang ähnlich wie (9) oder (11):

$$n = \sqrt{N_D N_V} \exp \left[-\frac{E_d}{2k_B T} \right] \quad (14)$$

$$p = \sqrt{N_A N_L} \exp \left[-\frac{E_a}{2k_B T} \right] \quad (15)$$

Man beachte die unterschiedliche Notation E_d, E_D . Während E_D das Energieniveau der Donatoren angibt, wird mit E_d der Abstand $E_D - E_L$ bezeichnet (= Ionisierungsenergie).

2.3 Beweglichkeit und Streumechanismen

Neben der Ladungsträgerkonzentration ist die Beweglichkeit die zweite mikroskopische Variable, die wir benötigen um auf die Leitfähigkeit (4) zu kommen. Nachdem Gleichung (5) die Beziehung der Beweglichkeit mit der Driftgeschwindigkeit motiviert, suchen wir nun nach einer genaueren, mikroskopischen Beschreibung. Da die Driftgeschwindigkeit konstant bleibt, muss es eine „Reibungskraft“ geben, die die Kraft durch das elektrische Feld kompensiert. Diese Reibungskraft beruht auf Stößen des Elektrons im Festkörper.

$$F \stackrel{!}{=} -eE = m^* a \quad (16)$$

Integriert man Gleichung (16) bis zu einer gewissen, charakteristischen Zeit τ erhalten wir für die Driftgeschwindigkeit:

$$v = -\frac{e\tau}{m^*}E \quad (17)$$

Verglichen mit Gleichung (5) sehen wir, dass die Beweglichkeit μ durch

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} \quad (18)$$

gegeben ist. τ ist dabei die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, die sogenannte *Relaxationszeit*.

Wir betrachten nun mehrere verschiedene Streuprozesse. Da die Relaxationszeit die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen ist, kann über die mittlere freie Weglänge λ ein Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt $\Sigma \propto \frac{1}{\lambda}$ gefunden werden:

$$\lambda = \langle v \rangle \tau \Rightarrow \frac{1}{\tau} \propto \langle v \rangle \Sigma \quad (19)$$

Die mittlere Geschwindigkeit kann durch die Boltzmannverteilung abgeschätzt werden. Damit gilt

$$\langle v \rangle \propto \sqrt{T} \quad (20)$$

Welche Art von Streuung ist nun möglich? Wir beschränken uns in diesem Versuch auf zwei wichtige: Streuung an Phononen und an ionisierten Störstellen.

2.3.1 Phononen (Gitterschwingungen)

Diese Art von Streuung findet man hauptsächlich bei hohen Temperaturen. Der Streuquerschnitt kann über die mittlere Amplitude eines Phonons s abgeschätzt werden ($\Sigma = s^2$). Nach dem Äquipartitionstheorem ($\langle E \rangle = \frac{1}{2}k_B T$)

$$\frac{1}{2}M\omega^2\langle s^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

kann man ableiten, dass in diesem Fall

$$\langle s^2 \rangle \propto \Sigma_{\text{ph}} \propto T$$

und mit (19) bzw. (20)

$$\begin{aligned} \tau &\propto \frac{1}{\langle v \rangle \Sigma} && \text{bzw.} \\ \tau_{\text{ph}} &\propto T^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

2.3.2 Ionisierte Störstellen

Die Streuung an einer ionisierten Störstelle dominiert bei tiefen Temperaturen. Dieser Fall entspricht der Streuung zweier geladener Teilchen (Rutherford-Streuung). Hier ist der Wirkungsquerschnitt bekannt:

$$\Sigma_{\text{Ion}} \propto \frac{1}{\langle v \rangle^4}$$

Im thermischen Mittel (20) mit Gleichung (19) ergibt sich

$$\tau_{\text{Ion}} \propto \langle v \rangle^3 = T^{+\frac{3}{2}} \quad (22)$$

2.3.3 Matthiessensche Regel

Mehrere überlagerte Streuprozesse ergeben sich aus der Summe der Streuquerschnitte. Den Zusammenhang mit einer effektiven Relaxationszeit stellt die *Matthiessensche Regel* her:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau_i} \quad (23)$$

Mithilfe dieser Regel kann man den Einfluss der einzelnen Relaxationszeiten in eine Gesamtbeweglichkeit (18) zusammenfassen.

2.4 Zusammenfassung

| | Ladungsträgerkonzentration | Streuung |
|----------------------------|--|--|
| tiefe Temperaturen | extrinsisch (2.2.3), $n = \sqrt{N_D N_V} \exp \left[-\frac{E_d}{2k_B T} \right]$ | durch ionisierte Störstellen (2.3.2), $\tau \propto T^{+3/2}$ |
| ... | $n = N_D - N_A \approx N_D = \text{const}$ | |
| hohe Temperaturen (> 300K) | intrinsisch (2.2.2), $n_i = \sqrt{N_L N_V} \exp \left[-\frac{E_G}{2k_B T} \right]$ | durch Phononen (2.3.1), $\tau \propto T^{-3/2}$ |

Tabelle 1: Zusammenfassung der für die Auswertung relevanten Ergebnisse für einen n-Typ Halbleiter.

3 Experimentelle Betrachtungen

Es stellt sich nun die Frage wie wir die mikroskopischen Größen Ladungsträgerkonzentration n und Beweglichkeit μ makroskopisch messbar machen. Die Leitfähigkeit (4) gibt bereits einen ersten Hinweis.

3.1 Leitfähigkeit

Sie kann aus Gleichung (17) hergeleitet werden, wenn man beide Seiten mit der Ladungsträgerkonzentration n und der Elektronenladung $-e$ multipliziert. Dadurch erhält man auf der linken Seite die Definition der Stromdichte j

$$\underbrace{(-en)v}_j = \underbrace{-(-en)\mu_n}_\sigma E \quad (24)$$

$$\sigma_n = en\mu_n \quad (25)$$

Wir erhalten dadurch die Leitfähigkeit σ_n der Elektronen. Analog können die Löcher behandelt werden. Addiert man die Beiträge von Elektronen und Löchern erhalten wir Formel (4)

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = e(n\mu_n + p\mu_p) \quad (26)$$

Im Versuch wird die Leitfähigkeit über den spezifischen Widerstand ρ bestimmt. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{1}{\rho} = \sigma \quad (27)$$

3.2 Hall-Effekt

Ladungsträger werden im Magnetfeld durch die Lorentzkraft abgelenkt. Legt man ein Magnetfeld B an den Halbleiter an und prägt einen Strom I normal dazu ein, bildet sich durch die Ladungsträgertrennung die sogenannte Hall-Spannung U_H . Diese ist gegeben durch

$$U_H = R_H \frac{BI}{d} \quad (28)$$

$d = 500(1) \mu\text{m}$ ist hier die Dicke der Probe. R_H ist der in der Einleitung erwähnte *Hall-Koeffizient*. Dieser bildet neben der Leitfähigkeit die zweite Größe, die wir benötigen um die Ladungsträgerkonzentration bzw. die Beweglichkeit zu bestimmen. Unter der Annahme, dass das Magnetfeld schwach ist, ergibt sich R_H für Elektronen und Löcher jeweils zu

$$R_H^{(n)} = -\frac{1}{en} \quad (29)$$

$$R_H^{(p)} = +\frac{1}{ep}. \quad (30)$$

Für die Auswertung ist wichtig, dass das Vorzeichen des gemessenen Hall-Koeffizienten die dominierenden Ladungsträger anzeigt. Mit dem Hall-Koeffizienten und dem spezifischen Widerstand (27) kann die Beweglichkeit μ_n bestimmt werden (p-Typ analog)

$$\frac{1}{\rho} = \sigma = en\mu_n \Rightarrow \mu_n = \frac{1}{\rho en} = \frac{R_H}{\rho}. \quad (31)$$

3.3 van der Pauw Methode

Mit der *van der Pauw* - Methode [1] können wir ρ und R_H gleichzeitig für eine beliebige (zusammenhängende) Probe konstanter Dicke messen. Dafür werden vier Messpunkte - bezeichnet mit ABCD - auf der Probe benötigt.

3.3.1 Spezifischer Widerstand

Wie in Abbildung (3) dargestellt werden zwei Messungen durchgeführt:

1. zunächst wird ein Strom $I_{AB} \approx 500 \mu\text{A}$ von A nach B eingeprägt und U_{CD} gemessen (Konvention: technische Stromrichtung)
2. dann wird I_{BC} angesetzt und U_{DA} gemessen
3. zur Erhöhung der Genauigkeit (Kontaktfehler, ...) sollte die Messung noch einmal bei umgedrehter Stromrichtung durchgeführt werden.

Aus den Messwerten werden die „Widerstände“

$$R_{AB,CD} = \left| \frac{U_{CD}}{I_{AB}} \right| \quad (32)$$

$$R_{BC,DA} = \left| \frac{U_{DA}}{I_{BC}} \right| \quad (33)$$

Wie im Artikel beschrieben, kann der spezifische Widerstand aus folgender Gleichung berechnet werden:

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R_{AB,CD} + R_{BC,DA}}{2} f, \quad (34)$$

wobei der Faktor f im Falle einer asymmetrischen Probe (wie in unserem Fall) durch die transzendente Gleichung

$$\cosh\left(\frac{\ln 2}{f} \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln 2}{f}\right) \quad (35)$$

$$x = \frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}} \quad (36)$$

bestimmt ist. Diese Gleichung ist notorisch schwierig zu lösen deshalb zwei Tipps:

1. **WolframAlpha**

2. Mathematica:

```
FindRoot[ (Cosh[Log[2]/f*(x-1)/(x+1)] /. x->0.3) == 0.5*Exp[Log[2]/f], {f, 1}]
```

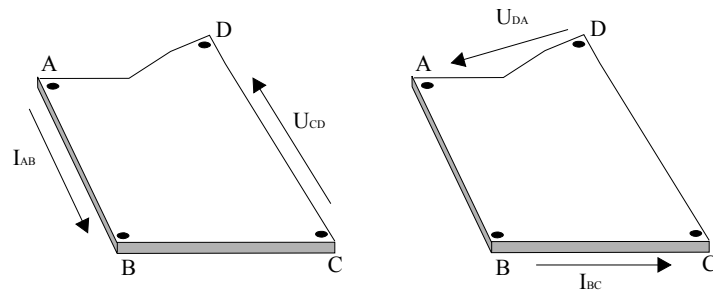


Abbildung 3: Messung des spezifischen Widerstands nach *van der Pauw*. Ein Strom wird entlang der Kanten A-B und B-C eingeprägt und die Spannung entlang der Kanten C-D und D-A gemessen.

3.3.2 Hall-Koeffizient

Analog kann der Hall-Koeffizient wie in Abbildung (4) gemessen werden.

1. Strom I_{AC} zwischen A und C anlegen.
2. Spannung U_{BD} *ohne* Magnetfeld B messen.
3. Spannung U_{BD} *mit* Magnetfeld B messen (Magnetfeld kann sowohl positiv als auch negativ eingestellt werden)

Der Hall-Koeffizient ist dann

$$R_{AC,BD} = \frac{U_{BD}}{I_{AC}} \quad (\text{ohne Betrag!})$$

$$R_H = \frac{d}{B} (R_{AC,BD}(B) - R_{AC,BD}(0)) \quad (37)$$

Um das richtige Vorzeichen des Hall-Koeffizienten zu finden, müssen alle Messrichtungen richtig beachtet werden. In unserem Fall muss das Magnetfeld positiv genommen werden um der Zeichnung zu entsprechen. Um systematische Unsicherheiten (z.B. Kontaktfehler) auszuschließen kann die Strom- und Magnetfeldrichtung umgedreht werden; die vier Kombinationen sollten denselben Koeffizienten ergeben.

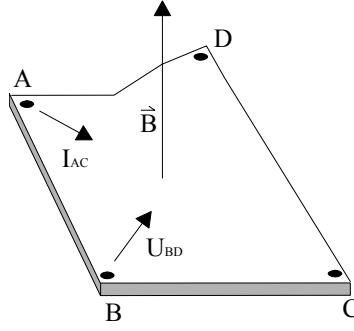


Abbildung 4: Messung des Hall-Koeffizienten. Ein Strom wird entlang der Diagonalen A-C eingeprägt und die Spannung entlang der Diagonalen B-D wird bei verschiedenen Magnetfeldstärken gemessen. Das Magnetfeld B ist senkrecht zur Probenoberfläche.

4 Aufbau

In Abbildung (5) ist der experimentelle Aufbau zu sehen. Die Temperatur der Probe wird mit einem Pt100-Widerstand mit einer Vierleitermessung bestimmt. Die Kalibrierungskurve ist ungefähr

$$T(R) = \frac{509}{8} - \frac{89}{2R} + \frac{43}{30}\sqrt{R} + \frac{161}{113}R^{\frac{11}{10}}$$

mit $[T] = \text{K}$ und $[R] = \Omega$. Die Unsicherheit ist ca. 0,2% über 70 K und darunter ca. 1%. Da die Temperatur der Probe während des Versuchs konstant abnimmt sollte die Temperaturmessung oft genug durchgeführt werden. Es empfiehlt sich die Temperaturmessung sowohl vor der Messung des spezifischen Widerstands als auch vor der Messung des Hall-Koeffizienten durchzuführen. So lässt sich der Fehler der Temperaturmessung abschätzen.

Die Probe befindet sich in einem Kryostaten mit geschlossenem Helium-Kühlkreislauf, welcher vor der Messung auf weniger als 1×10^{-2} mbar evakuiert werden muss. Eine zusätzlich angebrachter Heizdraht erlaubt es die Temperatur zu stabilisieren, was v. a. im Temperaturbereich unter 70 K nützlich ist, weil durch die dort reduzierte Wärmekapazität fast aller Materialien die Kühlung dann sehr schnell abläuft.

Die unterschiedlichen Messkonfigurationen der *van-der-Pauw*-Messung werden durch ein Drehschalter eingestellt. Der Drehschalter hat 6 Messpositionen welche in Tabelle (2) aufgelistet sind.

| Konfiguration | A | B | C | D |
|---------------|------------------|------------------|------------------|---------|
| 1a | I_{in} | I_{out} | U_{-} | U_{+} |
| 1b | I_{out} | I_{in} | U_{-} | U_{+} |
| 2a | U_{+} | I_{out} | I_{in} | U_{-} |
| 2b | U_{+} | I_{in} | I_{out} | U_{-} |
| 3a | I_{in} | U_{-} | I_{out} | U_{+} |
| 3b | I_{out} | U_{-} | I_{in} | U_{+} |

Tabelle 2: Verbindungen für unterschiedliche Drehschalterpositionen 1a bis 3b. Jede Position stellt eine Konfiguration für die *van-der-Pauw*- oder Hallmessung dar. Die Tabelle zeigt welche Kontakte der Probe mit welchen Anschlüssen der Messgeräte verbunden werden. Dabei beschreibt I_{in} bzw. I_{out} , den positiven bzw. negativen Kontakt der Stromquelle und U_{+} bzw. U_{-} den positiven bzw. negativen Kontakt des Spannungsmessgerätes.

Es ist wichtig, sich genau zu überlegen welche Messkonfiguration für welche Messung verwendet wird und welche werde in der Messtabelle festgehalten werden müssen.

Literatur

- [1] L. J. van der Pauw. A method of measuring specific resistivity and hall effect of discs of arbitrary shape. *Philips Research Reports*, 13(1):1–9, 1958.
- [2] H. Ibach and H. Lüth. *Festkörperphysik*. Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85795-2. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85795-2>.
- [3] Rudolf Gross and Achim Marx. *Festkörperphysik*. De Gruyter Oldenbourg, 2014. ISBN 9783110358704. doi: 10.1524/9783110358704. URL <https://doi.org/10.1524/9783110358704>.
- [4] Walter Seidenbusch. *Fortgeschrittenenpraktikum Aufgabe 92: Hall-Effekt und Leitfähigkeit*. Universität Innsbruck, 2007.



Abbildung 5: Experiment (Stand: Februar 2023)