Домашнее задание 5. Методы линейной алгебры в комбинаторике и реккурентные последовательности.

$\boxed{\textbf{DM 1.}}$ (2 балла) Пусть F — набор подмножеств n-элементного множества, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $\forall A \in F : |A| \equiv 1 \pmod 2$.
2. $\forall A, B \in F : A \neq B \Rightarrow |A \cap B| \equiv 0 \pmod 2$.

Доказать, что $|F| \leq n$.

$\boxed{\textbf{DM 2.}}$ (3 балла) В чёрном ящике лежит две битовых строки A и B длины r^2. Наша задача — установить, равны они или нет. Для этого можно выполнять запросы следующего вида. Для каждого $i \in [r^2]$ мы решаем, хотим мы узнать i-й бит в строке A или в строке B. В ответ нам возвращается строка C длины r^2, в которой на i-й позиции стоит i-й бит одной из строк A и B, согласно нашему запросу.

После каждого запроса мы можем проанализировать полученную строку C и записать какую-то информацию в *неперезаписывемую* память. Затем мы можем перейти к новому запросу; при этом строка C исчезает и никакой информации о строках A и B кроме той, которая была ранее сохранена в неперезаписываемой памяти, мы в начале нового запроса не имеем.

Как проверить равенство строк A и B, используя $r+1$ запрос и r бит неперезаписываемой памяти?

$\boxed{\textbf{DM 3.}}$ (1 балл) Сколько битовых строк длины n не содержат ни подстроки 000, ни подстроки 111?

$\boxed{\textbf{DM 4.}}$ (1 балл) Докажите, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующему соотношению:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

$\boxed{\textbf{DM 5.}}$ (2 балла) Докажите, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.