

**Домашнее задание 1. Формула включений исключений и формула обращения Мебиуса.**

**DM 1.** (1 балл) В школе три спортивных команды. Для любых двух учеников найдётся команда, в которой они состоят оба. Докажите, что найдётся команда, в которой состоят по меньшей мере  $2/3$  учеников.

**DM 2.** (1 балл) Сколькими различными способами можно переставить цифры  $\{1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\}$  так, чтобы никакие две одинаковые цифры не стояли рядом?

**DM 3.** (1 балл) Через  $[n]$  будем обозначать множество натуральных чисел от единицы до  $n$ . Функция Эйлера  $\varphi(n)$  определяется как количество чисел из  $[n]$ , взаимно простых с  $n$ . Найдите формулу для  $\varphi(p^k)$ , если  $p$  — простое.

**DM 4.** (1 балл) Найдите  $\varphi(210)$ .

**DM 5.** (1 балл) Докажите или опровергните, что для любых натуральных  $n, m$  верна формула:

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$