

Практика 3. Повторение мать учения.

DM 1. Имеется произвольная последовательность a_1, \dots, a_n целых чисел, не обязательно различных. Доказать, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^l a_i$ делится на n .

DM 2. Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Доказать, что расстояние между хотя бы двумя из них меньше 0.5 сантиметров

DM 3. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

DM 4. На плоскости нарисовано n попарно не параллельных прямых. Доказать, угол между по крайней мере двумя из этих прямых меньше или равен величине π/n .

DM 5.

1. Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?
2. Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.
3. Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полу-плоскость. Это число называется числом Каталана c_n .
4. Покажите, что $c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots c_n c_1$.