

**Домашнее задание 4. Группа перестановок и разбиения числа в сумму слагаемых.**

**DM 1.** (1 балл) Число Стирлинга 1-го рода без знака  $c(n, k)$  — это количество перестановок из  $S_n$ , имеющих в точности  $k$  циклов. Доказать равенство:

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot c(n - 1, k).$$

**DM 2.** (1 балл) Найдите рекуррентную формулу для числа перестановок, куб которых — тождественная перестановка.

**DM 3.** (2 балла) Какова вероятность того, что  $k$  заданных элементов принадлежат одному циклу в случайной перестановке на  $n$  элементах?

**DM 4.** (2 балла) Назовём матрицами перестановок матрицы, в которых на каждой строке и в каждом столбце стоит ровно по одной единице, причём все элементы кроме этих единиц — нули. Какое минимальное количество матриц перестановок нужно зафиксировать, чтобы перемножением этих матриц (взятых в любом количестве) можно было получить любую другую матрицу перестановки?

**DM 5.** (1 балл) Докажите, что разбиений числа  $n$ , в которых все слагаемые не превосходят  $k$ , столько же, сколько разбиений  $n$  на не более  $k$  не нулевых слагаемых.