Лекция 4. Численные методы и символьные вычисления в Python

А. Н. Лата

МГИМО(У) МИД России

10 апреля 2024 г.

Содержание

Численные методы

Численные методы (вычислительные методы, методы вычислений)

Численные методы — раздел вычислительной математики, изучающий приближенные способы решения «типовых» математических задач, которые либо не решаются, либо трудно решаются точными аналитическими методами[a].

[a] вычислительная математика в узком смысле

Примеры «типовых» задач

- численное решение уравнений
- численные дифференцирование
- численные интегрирование и др.

Численные методы

Деление методов вычислений на аналитические и численные несколько условно.

Пример

Если квадратный корень из числа не извлекается точно (подкоренное выражение не является точным квадратом некоторого числа), то для получения численного значения корней потребуется численная процедура приближенного вычисления корня.

Даже в тех случаях, когда можно далеко продвинуться в аналитическом решении задачи, не исключено применение на каком-либо этапе численных методов для получения ответа в практически удобном виде.

Численные методы

Погрешность (относительная и абсолютная)

Поскольку численные методы предназначены для отыскания приближенного решения задач, не решаемых точными методами, такому решению всегда свойственна некоторая погрешность.

Источники погрешности

- Погрешность модели
- Погрешность исходных данных
- Погрешность метода
- Погрешность округления

Численные методы линейной алгебры

- методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
- методы обращения матрицы
- методы вычисления определителей
- методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц

Численное решение СЛАУ

Численные методы решения СЛАУ

- точные (прямые)
- приближенные (итерационные)

Пример

Для алгебраического уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ степени выше четвертой ($n > 4$) не существует формулы, выражающей корни через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечения корней[a]. Невозможность аналитического решения уравнений степени пятой и высших доказана трудами Абеля (1802-1829) и Галуа (1811-1832).

[a] в частных случаях, например для уравнения $x^{42} - 5x^{21} + 4 = 0$, такие формулы могут существовать, но в общем случае нет.

Содержание

Численные методы линейной алгебры в Python

Библиотека Numpy содержит большое количество функций для работы с матрицами, которые мы будем активно использовать.

```
1 # подключение библиотеки NumPy
2 import numpy as np
3
4 # Вывод на экран текущей версии библиотеки NumPy
5 print ('Текущая версия NumPy:', np.__version__)
```

Модуль numpy.linalg содержит алгоритмы линейной алгебры, в частности нахождение определителя матрицы, решений системы линейных уравнений, обращение матрицы, нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы, разложение матрицы на множители и т.д.

Содержание

Численные методы решения оптимизационных задач в Python

Модуль Optimize библиотеки SciPy содержит различные методы оптимизации.

```
1 # подключение модуля optimize библиотеки SciPy
2 from scipy.optimize import *
```

```
1 # подключение модуля optimize библиотеки SciPy
2 from scipy import optimize
```

Дополнительные материалы

- Официальный сайт библиотеки SciPy
- Документация по модулю Optimize библиотеки SciPy

Содержание

Символьные вычисления

Символьные вычисления

Символьные вычисления — это преобразования и работа с математическими равенствами и формулами как с последовательностью символов.

Они отличаются от численных расчётов, которые оперируют приближёнными численными значениями, стоящими за математическими выражениями.

Системы символьных вычислений[a] (их так же называют системами компьютерной алгебры) могут быть использованы для символьного интегрирования и дифференцирования, подстановки одних выражений в другие, упрощения формул и т. д.

[a] SageMath — это бесплатная математическая библиотека с открытым исходным кодом для Python

Содержание

Символьные вычисления в Python I

SymPy — это библиотека для символьных вычислений в Python.

Основные операции, реализованные в пакете SymPy:

- упрощение выражений, раскрытие скобок
- разложение в ряд функций
- вычисление сумм рядов (последовательностей)
- вычисление пределов
- вычисление производных функций
- вычисление интегралов
- работа с матрицами (модуль линейной алгебры)
- вычисление площадей фигур, образованных при пересечении прямых, отрезков и лучей (модуль геометрии)

Символьные вычисления в Python II

- получение случайных величин с заданной функцией распределения плотности вероятности (модуль статистики)
- построение графиков функций и трёхмерных поверхностей, заданных в виде уравнений с символьными переменными
- возможность красивой печати символьных выражений в различных форматах

Дополнительные материалы

- Официальный сайт библиотеки Sympy
- Документация по библиотеке Sympy
- SymPy Live Shell

Подключение библиотеки Sympy

Вариант 1

```
# подключаем библиотеку Sympy и добавляем все ее функции в текущее пространство имен, к ним можно обращаться без префикса Sympy
from sympy import *
init_printing()
```

Вариант 2

```
# подключаем библиотеку Sympy
import sympy
```