

# Задачи по Эконометрике временных рядов

Н.В. Артамонов

6 марта 2025 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Работа с рядами в Python. Визуализация</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ACF &amp; PACF</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Модель ARIMA</b>	<b>5</b>
3.1	Спецификация и базовые свойства . . . . .	5
3.2	ARIMA в Python . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Модель (*)ARCH</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Многомерные ряды. Модель VAR/VECM. Коинтеграция</b>	<b>14</b>
<b>A</b>	<b>Библиотеки Python</b>	<b>21</b>

## 1 Работа с рядами в Python. Визуализация

**№1.** Рассмотрим **квартальные** данные по ВВП США с 1990 Q1 по н.в. (ряд  $gdp$ ) и пусть  $y = \log(gdp)$

1. Задайте временной индекс
2. Визуализируйте ряд  $gdp_t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
3. Визуализируйте ряд  $\Delta^{1/2} y_t, \Delta^{3/2} y_t$  (ширина временного окна 5)
4. Постройте диаграмму рассеяния  $y_t$  vs  $y_{t-1}$

5. Постройте диаграмму рассеяния  $\Delta y_t$  vs  $\Delta y_{t-1}$

**№2.** Рассмотрим **месячные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в. (ряд  $m2$ ) и пусть  $y = \log(m2)$

1. Задайте временной индекс

2. Визуализируйте ряд  $m2, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$

3. Визуализируйте ряд  $\Delta^{1/2} y_t, \Delta^{3/2} y_t$  (ширина временного окна 7)

4. Постройте диаграмму рассеяния  $y_t$  vs  $y_{t-1}$

5. Постройте диаграмму рассеяния  $\Delta y_t$  vs  $\Delta y_{t-1}$

**№3.** Рассмотрим **недельные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в.

1. агрегируйте их в квартальные наблюдения (через усреднение)

2. задайте временной индекс

3. визуализируйте полученные наблюдения

**№4.** Рассмотрим месячные данные краткосрочной (3-х мес,  $rate1$ ) и долгосрочной (10-ти лет.,  $rate2$ )) ставкам для США с 1990-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд  $rates$ .

1. Задайте временной индекс

2. Визуализируйте ряд  $rates$  двумя способами

- отдельные графики
- общий график (два ряда на одном графике)

3. Визуализируйте ряд  $\Delta rates$  двумя способами

4. Визуализируйте ряд  $\Delta^2 rates$  двумя способами

5. Постройте гистограммы для  $rates, \Delta rates, \Delta^2 rates$  двумя способами

6. Постройте диаграмму рассеяния  $rate1$  vs  $rate2$

7. Постройте диаграмму рассеяния  $\Delta rate1$  vs  $\Delta rate2$

**№5.** Рассмотрим месячные данные по США

- краткосрочная (3-х мес) ставка
- долгосрочная (10-ти лет) ставка
- логарифм денежной массы M2

с 2000-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд

1. задайте временной индекс
2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую разность

**№6.** Из [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com) загрузите данные по S&P500 с 2005-01-01 по н.в.

1. Сформируйте месячный временной ряд из цены закрытия на последний день каждого месяца
2. Задайте для него временной индекс
3. Визуализируйте ряд
4. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности

**№7.** Из [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com) загрузите данные с 2005-01-01 по н.в. по ценам закрытия S&P500, Apple, Google

1. Сформируйте многомерный ряд из цен закрытия на последний день каждого месяца
2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности

## 2 ACF & PACF

Во всех задачах по умолчанию уровень значимости 5%.

**№1.** Рассмотрим **квартальные** данные по ВВП США с 1990 Q1 по н.в. (ряд  $gdp$ ) и пусть  $y = \log(gdp)$

1. Постройте графики ACF и PACF для  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Вычислите  $\{r(h)\}_{h=1}^3$  и  $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$  для  $\Delta y_t$
3. Значимы ли  $r(3), r_{part}(3)$  для  $\Delta y_t$ ?

**№2.** Рассмотрим **месячные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в. (ряд  $m2$ ) и пусть  $y = \log(m2)$

1. Постройте графики ACF и PACF для  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Вычислите  $\{r(h)\}_{h=1}^3$  и  $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$  для  $\Delta y_t$
3. Значимы ли  $r(4), r_{part}(4)$  для  $\Delta y_t$ ?

**№3.** Рассмотрим месячные данные по 3-х месячной ставке США с 2000-01 по н.в. (ряд  $y$ )

1. Постройте графики ACF и PACF для  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Вычислите  $\{r(h)\}_{h=1}^3$  и  $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$  для  $\Delta y_t$
3. Значимы ли  $r(3), r_{part}(3)$  для  $\Delta y_t$ ?

**№4.** Рассмотрим данные по S&P500 с 2000-01 по н.в. (ряд  $sp500$ ) и пусть  $y = \log(sp200)$

1. Постройте графики ACF и PACF для  $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Вычислите  $\{r(h)\}_{h=1}^3$  и  $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$  для  $\Delta y_t$
3. Значимы ли  $r(5), r_{part}(5)$  для  $\Delta y_t$ ?

## 3 Модель ARIMA

### 3.1 Спецификация и базовые свойства

№1. Рассмотрим модель ARIMA

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)u_t \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

для следующих многочленов

№	$d$	$\phi(z)$	$\theta(z)$
1	0	$1 - z + 0.25z^2$	$1 + 0.8z$
2	0	$1 + 0.8z - 0.7z^2$	$1 + 0.5z - 0.8z^2$
3	1	$1 - 0.2z + 0.08z^2$	$1 - 0.3z - 0.88z^2$
4	2	$1 + 1.9z - 0.2z^2$	$1 - 1.6z - 0.36z^2$

Для каждого случая проверьте условия стационарности и обратимости. Запишите спецификацию модели без использования лагового оператор.

### 3.2 ARIMA в Python

№1. Пусть  $y_t$  – логарифм US GDP (квартальные данные) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/trend	спецификация
ARIMA(1,0,1)	+	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,1,0)	+	$\Delta y_t = \alpha_0 + \phi \Delta y_{t-1} + u_t$
ARIMA(1,1,1)	-	$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,2,0)	-	$\Delta^2 y_t = \phi \Delta^2 y_{t-1} + u_t$

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№2.** Пусть  $y_t$  – логарифм US M2 (**месячные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(1,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№3.** Пусть  $y_t$  – логарифм US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№4.** Пусть  $y_t$  – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity **месячные данные**) с 2000 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
3. Подгонка «оптимальной модели»
  - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№5.** Пусть  $y_t$  – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity) (**дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка
  - (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
  - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
3. Подгонка «оптимальной модели»
  - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№6.** Пусть  $y_t$  – 3-месячная ставки (treasury bill, **месячные данные**) с 2000 по н.в.



1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

(a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA

(b) проведите её диагностику

(c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№7.** Пусть  $y_t$  – 3-месячная ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
  - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
  3. Подгонка «оптимальной модели»
    - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
    - (b) проведите её диагностику
    - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№8.** Пусть  $y_t$  – логарифм S&P500 (**дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка
  - (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
  - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
  3. Подгонка «оптимальной модели»
    - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
    - (b) проведите её диагностику
    - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

**№9.** Запишите спецификации следующих моделей

1. ARIMA(0,1,1) без сноса и со сном
2. ARIMA(0,1,2) без сноса и со сном
3. ARIMA(1,1,0) без сноса и со сном
4. ARIMA(2,1,0) без сноса и со сном
5. ARIMA(0,2,0) без сноса и со сном
6. ARIMA(1,2,0) без сноса и со сном
7. ARIMA(0,2,1) без сноса и со сном

## 4 Модель (\*)ARCH

**№1.** Пусть  $y_t$  – лог-доходность US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(2)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(2)-GARCH(1,1)	$x$
AR(2)-GARCH(1,1)	$\sqrt{x}$

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

**№2.** Пусть ряд  $y_t$  – первая разность 3-месячной ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\sqrt{x}$

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

**№3.** Пусть ряд  $y_t$  – первая разность 10-летней ставки (treasury securities with constant maturity, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
- Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
- Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\sqrt{x}$

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

**№4.** Пусть ряд  $y_t$  – лог-доходность S&P500 (дневные данные) с 2010 по н.в.

- Подгоните модели

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(1)-GARCH(1,1,1)	2
AR(1)-GARCH(1,1,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$x$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\sqrt{x}$

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

## 5 Многомерные ряды. Модель VAR/VECM. Коинтеграция

**№1.** Рассмотрим **недельные** данные с 2000 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)
- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок
  - (a) Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
  - (b) постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
  - (c) Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
2. «Оптимизация» порядка
  - (a) Подгоните модель VAR «оптимального» порядка

- (b) Проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- (d) Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- (e) Проведите тест Гренджера на причинность

**№2.** Рассмотрим **дневные** данные с 2000 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)
- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок

- (a) Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
- (b) постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
- (c) Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

2. «Оптимизация» порядка

- (a) Подгоните модель VAR «оптимального» порядка
- (b) Проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- (d) Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- (e) Проведите тест Гренджера на причинность

**№3.** Рассмотрим **месячные** данные с 1995 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)

- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)
- лог-доходность US M2

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок

- Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
- постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
- Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

2. «Оптимизация» порядка

- Подгоните модель VAR «оптимального» порядка
- Проведите её диагностику
- Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- Проведите тест Гренджера на причинность

**№4** (VECM). Рассмотрим **недельные** данные с 2005 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

- Найдите ранг коинтеграции
- Оцените модель VECM «оптимального» порядка



3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

**№5** (VECM). Рассмотрим **месячные** данные с 2005 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Найдите ранг коинтеграции
2. Оцените модель VECM «оптимального» порядка
3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

**№6** (VECM). Рассмотрим **месячные** данные с 1995 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)
- лог-M2

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Найдите ранг коинтеграции
2. Оцените модель VECM «оптимального» порядка
3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

**№7.** Рассмотрим VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

где

$$\mathbf{u}_t \sim WN(0, \Sigma) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{pmatrix} > 0$$

т.е.  $u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$ ,  $v_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$ ,  $\text{cov}(u_t, v_t) = \sigma_{uv}$ .

Проверить условие стационарности для следующих матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**№8.** Рассмотрим VAR-модели

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = y_{t-1} + v_t \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = cx_t + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = 3x_{t-1} - 7y_{t-1} + u_t \\ y_t = x_{t-1} - 2.5y_{t-1} + v_t \end{cases}$$

1. Запишите в матричном виде.
2. Проверить условие стационарности.
3. Какие ряды коинтегрированы?

- Если ряды коинтегрированы, то запишите VECM модель и найдите коинтеграционные соотношения
- Если ряды не коинтегрированы, то запишите VAR-модель для дифференцированных рядов.

**№9.** Рассмотрим VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim WN(0, \Sigma)$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

**№10.** Рассмотрим VAR(2)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim WN(0, \Sigma)$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \\ 2) \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**№11.** Рассмотрим модели

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t \\ y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = 1.5x_{t-1} + y_{t-1} - 0.5x_{t-2} - y_{t-2} + u_t \\ y_t = -x_{t-1} - 0.5y_{t-1} + x_{t-2} + 1.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \\ z_t = x_t + y_{t-1} + w_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = y_{t-1} + u_t \\ y_t = z_{t-1} + v_t \\ z_t = x_{t-1} + w_t \end{cases}$$

1. Запишите в матричном виде.
2. Проверить условие стационарности.
3. Какие ряды коинтегрированы?
  - Если ряды коинтегрированы, то запишите VECM модель и найдите коинтеграционные соотношения
  - Если ряды не коинтегрированы, то запишите VAR-модель для дифференцированных рядов.

## А Библиотеки Python

Библиотека	Описание
pandas	Табличные данные (кросс-секции, панели, временные ряды)
numpy	Работа с массивами, преобразование данных
yfinance	Загрузка данных с <a href="https://finance.yahoo.com">finance.yahoo.com</a>
pandas-datareader	Загрузка данных из внешних БД (FRED, <a href="https://finance.yahoo.com">finance.yahoo.com</a> etc)
statsmodels	Регрессионный анализ, базовые модели временных рядов
arch	Тесты и модели временных рядов
pmdarima	ARIMA-модель
scikit-learn	Методы машинного обучения
sktime	анализ временных рядов и ML
scipy.stats	Статистические методы (распределения и др)
seaborn	Визуализация статистических данных
matplotlib	Визуализация данных
plotly	Визуализация данных

Таблица 1: Основные библиотеки Python для анализа временных рядов