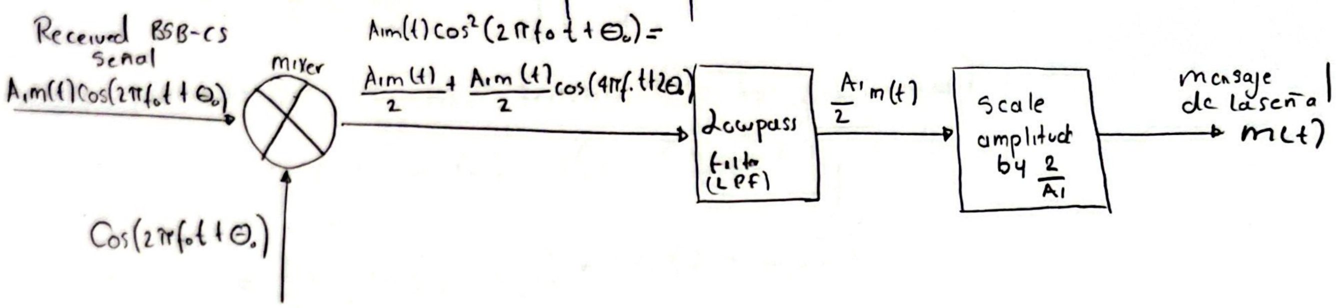
Parcial 2 Señales y sistemas

Arthur Alexander Portilla.

1 Sea el demodulador en amplitud presentado



Entrada $x(t) = A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta_0)$

Se asume sincronizacion de fase perfecta $\Theta_0 = 0$

$\therefore$

$$x(t) = A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

En el dominio de la frecuencia aplicando propiedade de modulacion de TF el espectro

$$X(f) = \frac{A_1}{2}\left[M(f - f_0) + M(f + f_0)\right]$$

Espectro mensaje $M(f)$ se desplaza centrado en las frecuencias $\pm f_0$

- Etapa de Mezcla (multiplicacion)

$x(t)$ – Entrada se multiplica por $c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$y(t) = x(t)\cdot c(t)$$

Sustituyendo $x(t)$:

$$y(t) = [A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t)]\,[\cos(2\pi f_0 t)]$$

$$y(t) = A_1 m(t)\cos^2(2\pi f_0 t)$$

utilizamos la identidad trigonometrica del angulo doble

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

aplicando la identidad $\cos\alpha = 2\pi f_0 t$

$$y(t) = A_1 m(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\cdot 2\pi f_0 t)\right]$$

Distribuyendo el termino $A_1 m(t)$:

$$y(t) = \underbrace{\frac{A_1}{2} m(t)}_{\text{componente Bandabase}} + \underbrace{\frac{A_2}{2} m(t)\cos(4\pi f_0 t)}_{\text{componente de alta frecuencia}}$$

- Analisis Espectral a la salida del Mezclador.

TF de $y(t)$ del paso anterior

1 transformada del primer termino (Banda Base)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{A_1}{2} m(t)\right\} = \frac{A_1}{2} m(f)$$ $f = 0Hz$

2 transformada del segundo termino (Alta frecuencia)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{A_1}{2} m(t)\cos(2\pi(2f_0)t)\right\}$$

$$= \frac{A_1}{4}\left[M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right]$$

termino centrado en $\pm 2f_0$

$\therefore$

Es espectro total en el punto $y(t)$:

$$y(f) = \frac{A_1}{2} M(f) + \frac{A_1}{4}\left[M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right]$$

Se observa que el Mezclador ha logrado traer una copia del espectro original $M(f)$ de vuelta al origen (0 Hz) pero ha generado un subproducto indeseado al bodel de la frecuencia de la portadora $(2f_0)$

- Estapa del filtrado (LPF)

Se utiliza un filtro pasa bajos ideal, definido:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_{corte} \\ 0 & \text{si } |f| > f_{corte} \end{cases}$$

Donde la frecuencia de corte tal que: $BW_{mensaje} < f_{corte} < 2f_0$

en la simulacion $BW_{audio} \approx 5KHz$ y $2f_0 = 30KHz$

elegimos $f_{corte} = 8KHz$

al aplicar el filtro:

$$Z(f) = y(f) \cdot H(f)$$

El termino de alta frecuencia en $\pm 2f_0$ es eliminado (multiplicado 0)

$$Z(f) = \frac{A_1}{2} M(f)$$

Regresando al dominio de (t)

$$Z(t) = \frac{A_1}{2} m(t)$$

- Etapa de escalado (Amplificacion)

Señal $z(t)$ se atenua por un factor $\frac{A_1}{2}$.

El diagrama final muestra un bloque de ganancia K

$$K = \frac{2}{A_1}$$

la salida final $m_{rec}(t)$ sera:

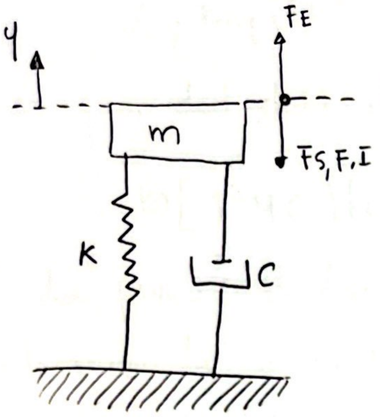
$$m_{rec}(t) = z(t) \cdot K$$

$$m_{rec}(t) = \left(\frac{A_1}{2} m(t)\right) \cdot \left(\frac{2}{A_1}\right)$$

$$m_{rec}(t) = m(t)$$

∴ m(t) tanto como en forma como en amplitud, eliminando la portadora y los armonicos generados durante el proceso de demodulacion recupera exitosamente la señal de mensaje m(t)

2. Encuentre la función de transferencia que caracterizan el siguiente sistema masa resorte, amortiguador presentado en la siguiente Figura (asuma condiciones iniciales cero):



Función de transferencia $H(s) = \frac{salida(s)}{entrada(s)}$.

- Analizar el diagrama de cuerpo libre (DCL)

Definiendo variables:

Entrada: Fuerza externa $FE(t)$ (Se llamara $u(t)$ o $F(t)$)

Salida: Desplazamiento vertical $y(t)$

Aplicamos segunda ley de Newton ($\sum F = ma$) sobre la masa m
Considerando que el desplazamiento positivo y es hacia arriba

1. Fuerza Externa (FE): actua hacia arriba (a favor del movimiento)
2. Fuerza del Resorte (F_K) se opone al desplazamiento. $F_K = -K \cdot y(t)$
3 Fuerza del amortiguador (F_C): se opone ala velocidad $F_C = -C \cdot \dot{y}(t)$

La sumatoria de fuerza es $\sum F_y = m\,a$

$$FE(t) - K \cdot y(t) - C \cdot \dot{y}(t) = m \cdot \ddot{y}(t)$$

- Ecuación diferencial del sistema.

(LTI) de que gobierna el sistema

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + Ky(t) = FE(t)$$

$\therefore$

- $m\ddot{y}$: inercia (oposición a la aceleración)
- $c\dot{y}$: Fricción viscosa (oposición ala velocidad)
- Ky: Rigidez (oposición al desplazamiento)

- Aplicamos la Transformada de laplace

hallamos la Funcion de transferencia con $\mathcal{L}\{\cdot\}$ a ambos lados asumiendo Condiciones iniciales Cero ($y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$)

$$\mathcal{L}\{m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+Ky(t)\}=\mathcal{L}\{FE(t)\}$$

Usando propiedad de la derivada:

$$m[s^2Y(s)]+c[sY(s)]+K[Y(s)]=FE(s)$$

∴ La funcion de transferencia:

Factorizamos la salida $Y(s)$:

$$Y(s)[ms^2+cs+K]=FE(s)$$

La funcion de transferencia $G(s)$ se define razon Salida / Entrada:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{FE(s)}$$

$$G(s)=\frac{1}{ms^2+cs+K}$$

Resultado final y forma canonica.

Funcion de transferencia:

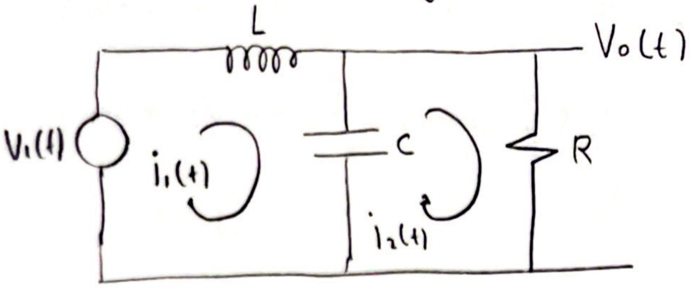
$$\frac{Y(s)}{FE(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+K}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{K}{m}}}$$

Frecuencia $(\omega_n)=\sqrt{\frac{K}{m}}$

Coeficiente amortiguamiento $(2\zeta\omega_n)=\frac{c}{m}$

Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito electrico:



Función de transferencia del circuito usando el metodo de impedancias (Divisor de voltaje)

- Impedancia serie $Z_L = Ls$
- Impedancia paralelo (Carga) $Z_p = Z_C \| Z_R = \dfrac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \dfrac{R}{RCs+1}$

Función de transferencia electrica $H_E(s)$:

$$H_E(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_p}{Z_L + Z_p} = \frac{\frac{R}{RCs+1}}{Ls + \frac{R}{RCs+1}}$$

Resolviendo algebraicamente

$$H_E(s) = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

forma canonica

$$H_E(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Comparando con el sistema Mecanico

$$G_m(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}}$$

igualamos los coeficientes (ω_n y ζ)

- Frecuencia natural ($\omega^2 n$): $\frac{k}{m} = \frac{1}{LC}$

- Termino de amortiguamiento ($2\zeta\omega_n$):

Analogía directa: $\frac{c}{m} = \frac{1}{RC}$

asumiendo masa unitaria $m=1$

posición $(y) = (V_o)$ tensión

Fuerza $(F) = (V_i)$ Fuente

masa $(m) \longrightarrow L$ y C

Resorte $(k) \longrightarrow L.C$

Amortiguador $(c) \longrightarrow RC$

Se propone valores para el diseño

Fijamos $m = 1kg$ y $k = 4$ N/m (así $\omega_n = \sqrt{4} = 2 \frac{rad}{s}$)

Se variará el amortiguador c (y por ende la resistencia R)

$C = 0{,}1F$

Ecuación rigidez: $\frac{K}{m} = \frac{1}{LC} \Rightarrow 4 = \frac{1}{L(0{,}1)} \Rightarrow L = 2{,}5$ H

Ecuación de fricción: $\frac{c}{m} = \frac{1}{RC} \Rightarrow c = \frac{1}{R(0{,}1)} \Rightarrow R = \frac{10}{c}$

Caso 1 Subamortiguado ($\zeta < 1$)

$\zeta = 0{,}25$ (muy oscilatorio)

$c = 2\zeta\omega_n \cdot m = 2(0{,}25)(2)(1) = 1$

mecanico: $m = 1$, $k = 4$ $c_1 = 1$

Electrico: $L = 2.5H$, $C = 0{,}1F$. Resistencia $R = \frac{10}{1} = 10\Omega$

Caso 2. Criticamente amortiguado ($\zeta = 1$)

$\zeta = 1$ (El limite de oscilación)

$C = 2(1)(2)(1) = 4$

mecanico: $m=1$, $K=4$, $c=4$

Electrico: $L = 2{,}5H$, $C = 0{,}1F$ Resistencia $R = \frac{10}{4} = 2{,}5\Omega$

caso 3: Sobreamortiguado ($\zeta > 1$)

objetivo $\zeta = 2$ (lento)

$C = 2(2)(2)(1) = 8$

Mecanico: $m = 1$, $K = 4$, $c = 8$

Electrico: $L = 2{,}5H$, $C = 0{,}1F$. Resistencia $R = 10/8 = 1{,}25\Omega$