1.

Si $d(x_1, x_2) = 0$ significan que las señales son iguales

Si $d(x_1, x_2)$ es grande, significa que las señales son muy distintas
d sera mayor que cero

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$ señales periodicas $(0, T)$

la diferencia $x_1(t) - x_2(t)$

$$x_1(t) - x_2(t) = Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jn\omega_0 t}$$

tenemos modulo cuadratico

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^*$$

Calculamos el producto

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = (x_1 x_1^*) + (x_2 x_2^*) - x_1 x_2^* - x_1^* x_2$$

Reemplazamos valores

$x_1 x_1^* = |x_1|^2 = A^2 \approx x_1 = Ae^{-jn\omega_0 t}$ y $|e^{j\theta}| = 1$

$x_2 x_2^* = |x_2|^2 = B^2$

$x_1 x_2^* = Ae^{-jn\omega_0 t} \cdot Be^{-jn\omega_0 t} = AB e^{-j(n+m)\omega_0 t}$

$x_1 x_2 = AB e^{j(n+m)\omega_0 t}$

∴ Reemplazando

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - ABe^{-j(n+m)\omega_0 t} - ABe^{j(n+m)\omega_0 t}$$

Simplificamos:

Si se sabe que $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)$$

Promediando el tiempo:

La distancia cuadratica:

$$d^2(x_1,x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1 - x_2|^2 \, dt$$

Sustituimos

$$d^2(x_1 x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t))\,dt$$

Separamos la integral por partes:

$$d^2 = \frac{1}{T}\left[A^2\int_0^T dt + B^2\int_0^T dt - 2AB\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt\right]$$

Calcular la integral, cada una

$$\int_0^T dt = T \quad \text{(Porque es una constante)}$$

$$\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt$$

Se sabe que $\int \cos(\alpha t)\,dt = \frac{\operatorname{Sen}(\alpha t)}{\alpha}$

Entonces:

$$\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt = \frac{\operatorname{Sen}((n+m)\omega_0 T)}{(n+m)\omega_0}$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$\therefore \operatorname{Sen}((n+m)\omega_0 T) = \operatorname{Sen}((n+m)2\pi) = 0$$

$$\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \operatorname{Sen}(n+m) \neq 0$$

$n+m=0$ argumento del coseno es cero

$$\cos((n+m)\omega_0 t) = \cos(0) = 1$$

$$\int_0^T \cos(0)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T$$

Sustituir Resultados.

Caso 1: $n+m \neq 0$

$$d^2 = \frac{1}{T}\left(A^2T + B^2T - 0\right) = A^2 + B^2 \approx d = \sqrt{A^2+B^2}$$

Caso 2: $n+m = 0$

$$d^2 = \frac{1}{T}\left(A^2T + B^2T - 2ABT\right) = (A-B)^2 -$$

$$d = |A-B|$$

$n+m=0$ componentes en fase opuesta $(e^{-jnw_0t}\ ;\ e^{+jnw_0t})$

La amplitud $A=B$ el conjugado complejo de la otra y su diferencia promedio es cero

$n+m \neq 0$ las dos señales oscilan a diferente frecuencia

R/

$$d(x_1,x_2) = \begin{cases} |A-B|, & si\ n+m=0 \\ \sqrt{A^2+B^2}, & si\ n+m \neq 0 \end{cases}$$

2. $x(t) \rightarrow$ periodica en T

Intervalo $[t_i; t_f]$ con $T = t_f - t_i$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) \rightarrow 2\, x(t)$$

$$x'(t) \rightarrow \text{Periodicas}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \quad . \quad n \in \mathbb{Z}$$

Derivamos con series de Fourier $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{jn\omega_0 t}$

$\therefore$ Derivando

$$x'(t) = \sum_n C_n (jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t} \; ;$$

$$x''(t) = \sum_n C_n (jn\omega_0)^2\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$(jn\omega_0)^2 = j^2 n^2 \omega_0^2 = -n^2\omega_0^2$$

$$x''(t) = \sum_n \left(-n^2\omega_0^2 C_n\right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$d_n = x''(t)$$

$$d_n = -n^2\omega_0^2\, C_n$$

definicion del coeficiente de x''

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Combinando ambas:

$$\frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = -n^2\omega_0^2 C_n$$

Despejando C_n (para $n \neq 0$)

$$C_n = -\frac{1}{n^2\omega_0^2} \cdot \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \,, \quad n \neq 0$$

C_n dela señal $x(t)$ se puede obtener integrando $x''(t)$ contra $e^{-jn\omega_0 t}$ y escalando por $\frac{-1}{n^2\omega_0^2}$

Integrar por partes para observar que no aparecen terminos frontera

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\left(u = x'(t) \,, \quad dv = e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right)$$

$$\int x'' e^{-jn\omega_0 t} = \left[x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \right]_{t_i}^{t_f} + jn\omega_0 \int_{t_i} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\int x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t} = \left[x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \right]_{t_i}^{t_f} + jn\omega_0 \int_{t_i}^{t_f} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Sustituyendo:

$$\int x'' e^{-jn\omega_0 t} = \left[x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \right]_{t_i}^{t_f} + jn\omega_0 \left[x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \right]_{t_i}^{t_f} + (jn\omega_0)^2 \int$$

x y x' $\rightarrow$ periodicas $\rightarrow$ se anulan

$$\int x'' e^{-jn\omega_0 t}\, dt = (jn\omega_0)^2 \int x e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

a forma trigonometrica: Para obtener a_n y b_n

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad ; \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$a_n = C_n + C_{-n} = 2\,\mathbb{R}\{C_n\}$$

$$b_n = j\,(C_n - C_{-n}) = -2\,\mathbb{I}\{C_n\}$$

Sustituimos

$$C_n = -\frac{1}{n^2\omega_0^2} d_n \quad \text{con } d_n = \frac{1}{T}\int x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Para $n \neq 0$

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = -\frac{d_n}{n^2\omega_0^2}$$

Reales y imaginarios.

$$a_n = 2\mathbb{R}\{C_n\} = -\frac{2}{n^2\omega_0^2}\mathbb{R}\{d_n\}$$

$$\mathbb{R}\{d_n\} = \frac{1}{T}\int x''(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{n^2\omega_0^2}\cdot\frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt}$$

b_n

$$b_n = -2\mathbb{R}\{C_n\} = -2\mathbb{R}\left(-\frac{d_n}{n^2\omega_0^2}\right) = \frac{2}{n^2\omega_0^2}\mathbb{R}\{d_n\}$$

$$\mathbb{R}\{d_n\} = -\frac{1}{T}\int x''(t)\,\text{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{n^2\omega_0^2}\cdot\frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)\,\text{Sen}(n\omega_0 t)\, dt}$$

4. señal Periodica $x(t)$ forma triangular simetrica

$T = 4$, $A = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$x''(t) = \sum_k \Delta_k \delta(t - t_k)$$

Δ_k son los saltos de pendientes

$$t_k \in \{-d_2, -d_1, -0, d_1, d_2\}$$

$$-d_2 = \frac{A}{d_1 - d_2} \; ; \quad -d_1 = \frac{-A}{d_1 - d_2} - \frac{A}{d_1}$$

$$0 = \frac{2A}{d_1} \; ; \quad d_1 = \frac{-A}{d_1} - \frac{A}{d_1 - d_2}$$

$$d_2 = \frac{A}{d_1 - d_2}$$

Sustituyendo $A = d_1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$

$\Delta_{-2} = 1$, $\Delta_{-1} = 2$, $\Delta_0 = 2$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -1$

Coeficientes de Fourier de $x''(t)$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Usando las deltas

$$d_n = \frac{1}{T} \sum_k \Delta_k e^{-jn\omega_0 t_k}$$

Relacion d_n y C_n

$x''(t)$ es la segunda derivada $x(t)$

$$d_n = (jn\omega_0)^2 c_n = -n^2 \omega_0^2 C_n$$

$\therefore$

$$C_n = \frac{-d_n}{n^2\omega_0^2} \quad , \quad n \neq 0$$

Sustituyendo

$$d_n = \frac{1}{T}\left[-e^{jn\omega_0 d_2} + 2e^{jn\omega_0 d_1} + 2 + 2e^{-jn\omega_0 d_1} - e^{-jn\omega_0 d_2}\right]$$

Simplificando.

$$d_n = \frac{2}{T}\left[-\cos(n\omega_0 d_2) + 2\cos(n\omega_0 d_1) + 1\right]$$

Reemplazando en Cn

$$C_n = -\frac{2}{Tn^2\omega_0^2}\left[-\cos(n\omega_0 d_2) + 2\cos(n\omega_0 d_2) + 1\right]$$

Simplificando

$$C_n = \frac{2}{Tn^2\omega_0^2}\left[\cos(n\omega_0 d_2) - 2\cos(n\omega_0 d_1) - 1\right], n \neq 0$$

Sustituyendo.

$$T = 4, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad d_1 = 1 \quad , \quad d_2 = 2$$

$$Tn^2\omega_0^2 = 4n^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = n^2\pi^2$$

$$\therefore \boxed{C_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]}$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int x(t)\,dt = \frac{Ad_2}{T} = \frac{1.2}{4} = 0{,}5$$