**Домашнє завдання 1.**

Кожне питання оцінюється в 1 бал. Наприклад, повністю розв'язана задача 1 коштує 2 бали.

Задачі з позначкою $^0$, наприклад, пункт (а) задачі 3, не оцінюються, але їх розв'язання є корисним для розуміння теорії ймовірностей та математичної статистики. Результати цих задач можна використовувати як довідковий матеріал та використовувати при розв'язку інших задач.

Цю домашню роботу слід здати до 3.3.17 в паперовому вигляді. На всяк випадок залиште в себе електронну копію.

## Точкові оцінки невідомих параметрів. Метод моментів.

1. Нехай $X_1, ..., X_n$ – вибірка, $\mathrm{E}X_k^2 < \infty$.

   а) Довести, що оцінка $\hat{T} = c_1X_1 + \ldots c_nX_n$ є незміщеною оцінкою для $\mathrm{E}X_1$ тоді й тільки тоді, коли $c_1 + \ldots c_n = 1$.

   б) При яких $c_1, \ldots, c_n$ досягається мінімум $\min_{c_k} \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^n c_kX_k - \mathrm{E}X\right)^2$?

2. Дискретна випадкова величина $X$ має розподіл

   $$\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 0) = \alpha,\ \mathrm{P}(X = 1) = 1 - 2\alpha,$$

   де $\alpha \in [0, 1/2]$.

   Побудуйте незміщені та консистентні оцінки $\alpha$, якщо

   а) відома вся вибірка $X_1, ..., X_n$;

   б) відоме лише вибіркове середнє $\bar{X}_n$;

   в) відома лише випадкова величина $\nu_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=0}$ – кількість нулів у виборці;

   г) відома лише випадкова величина $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$.

   Порівняйте дисперсії одержаних оцінок.

3. Припустимо, що проводиться серія незалежних однакових випадкових експериментів, які закінчуються успіхом з ймовірністю $p \in (0, 1)$ та

невдачею з ймовірністю $q = 1 - p$. Нехай $X$ – номер експерименту, в якому з'явився перший успіх.

а)$^0$ Доведіть, що

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}, \tag{.0.1}$$

б)$^0$ Доведіть, що

$$\mathrm{E}X = 1/p, \ DX = q/p^2.$$

Будемо казати, що випадкова величина має *геометричний розподіл* з параметром $p$, якщо її розподіл задається формулою (.0.1).

**Позначення.** $Geom(p)$.

в) Побудуйте консистентну оцінку для $p$, якщо відомо вибіркове середнє для вибірки з геометричного розподілу.

г) Побудуйте незміщену та консистентну оцінку для $p$, якщо відома вся вибірка.

д) Побудуйте ще одну консистентну оцінку для $p$, відмінну від оцінок попередніх пунктів.

4. Наведіть приклади:

   а) незміщеної та консистентної оцінки параметру $\lambda$ *розподілу Пуассона* $Pois(\lambda)$:

   $$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

   б) зміщеної та консистентної оцінки;

   в) незміщеної та неконсистентної оцінки;

   г) зміщеної та неконсистентної оцінки.

   Наведіть приклад консистентної оцінки параметру $\lambda$, якщо відома лише випадкова величина $\nu_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k = 0}$ – кількість нулів у виборці.

   Наведіть приклад незміщеної та консистентної оцінки параметру $\lambda^2$.

   Чи буде $(\bar{X}_n)^2$ консистентною оцінкою для $\lambda^2$? Незміщеною оцінкою?

   **Вказівка.** $\mathrm{E}X = \lambda$, $DX = \lambda$.

5. **Біноміальний розподіл $B(m, p)$.**

   Припустимо, що проводиться $m$ незалежних однакових випадкових експериментів, які закінчуються успіхом з ймовірністю $p \in (0, 1)$ та невдачею з ймовірністю $q = 1 - p$. Нехай $X$ – кількість успіхів.

   а)[0] Доведіть, що

   $$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n,$$

   б)[0] Доведіть, що

   $$\mathrm{E}X = mp, \ DY = mpq.$$

   **Вказівка.** Нехай $Y_k = 1$, якщо $k$-й експеримент закінчився успіхом, та $Y_k = 0$ в супротивному випадку. Помітьте, що $X = Y_1 + \cdots + Y_m$, $\mathrm{E}Y_k = p$.

   в) Побудуйте незміщену та консистентну оцінку для $p$, якщо відома вся вибірка (вважати, що $m$ відоме).

   г) Побудуйте ще одну незміщену та консистентну оцінку для $p$, відмінну від оцінки попереднього пункту.

   д) Побудуйте консистентну оцінку для параметрів $p, m$, якщо вони невідомі.

6. [0] Доведіть граничну теорему Пуассона. Якщо $Y_n \sim B(n, p_n)$ та $n\ p_n \to \lambda > 0, \ n \to \infty$, то

   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

7. В деякому місті за рік відбулось 1825 пожеж. Оцінити ймовірність того, що завтра в цьому місті буде а) менше 4 пожеж, б) рівно 5 пожеж.

   Вважати, що ймовірність пожежі не залежить від дня чи пори року, та ймовірність пожеж в різних квартирах однакова.

   **Вказівка.** Використайте граничну теорему Пуассона.

8. Випадкова величина $X$ має *рівномірний розподіл на* $[a,b]$, $X \sim U(a,b)$, якщо її щільність дорівнює
$$p(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$
а)$^0$ Доведіть, що $\mathrm{E}X = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}$.

б) Знайдіть консистентні оцінки для параметрів $a, b$.

9. Нехай $X_1, ..., X_n$ – вибірка з рівномірного розподілу на $[0,a]$. Знайдіть незміщену та консистентну оцінку $\hat{a}_n$ для параметру $a$. Знайдіть $\mathrm{E}(\hat{a}_n - a)^2$.

10. Розв'яжіть попередню задачу для рівномірного розподілу $U(a, 2a)$. Порівняйте дисперсії відповідних оцінок.

11. Випадкова величина $X$ має *показниковий (або експоненційний) розподіл* $Exp(\alpha)$, де $\alpha > 0$, якщо її щільність дорівнює
$$p(x|\alpha) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
а)$^0$ Доведіть, що $\mathrm{E}X = 1/\alpha, DX = 1/\alpha^2$.

б) Знайдіть незміщені та консистентні оцінки для параметрів $1/\alpha$ та $1/\alpha^2$.

в) Знайдіть $\mathrm{E}(1/\bar{X}_n)$.

**Вказівка.** Щільність розподілу $X_1 + \cdots + X_n$ дорівнює $\frac{\alpha^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}, x \geq 0$.

г) Знайдіть незміщену та консистентну оцінку для параметру $\alpha$.

д)$^0$ Доведіть, що експоненційний розподіл має ефект відсутності післядії
$$\forall s, t > 0 \;\; \mathrm{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathrm{P}(X > t). \qquad (.0.2)$$
Можна перевірити, що якщо випадкова величина задовольняє (.0.2), то ця величина має експоненційний розподіл, можливо з $\alpha = 0$ або $\alpha = +\infty$. Останнє відповідає випадкам $X = +\infty$ або $X = 0$, відповідно.

12. Час безвідмовної роботи приладу має розподіл $Exp(\alpha)$ з невідомим параметром $\alpha > 0$. Протягом року тестувалось 1000 приладів, з них за рік зламалось 100. Оцініть параметр $\alpha$.

    **Вказівка.** Розгляньте випадкові величини $Y_k = 1$, якщо $k$-й прилад зламався протягом року, та $Y_k = 0$ в супротивному випадку.

13. Випадкова величина $X$ має щільність

$$p(x|\lambda) = \lambda x^{\lambda-1},\ x \in [0,1],$$

    де $\lambda > 0$ – невідомий параметр.

    а) Оцініть $\lambda$ по виборці 0.1, 0.2, 0.6, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.9.

    б) Побудуйте консистентну оцінку для $\lambda$ по виборці $X_1, ..., X_n$.

14. Досліджувалась вага цукерок, що вироблялись на новій лінії. Оцініть математичне сподівання та дисперсію ваги цукерки по спостереженням 15.12, 15.16, 14.99, 14.54, 15.54, 15.13, 15.21, 14.97, 14.90, 15.84.

15. Випадкова величина $X$ має щільність

$$p(x|\alpha, x_0) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-x_0)}, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

    де $\alpha > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ – невідомі параметри.

    Побудуйте консистентні оцінки для $\alpha, x_0$.

16. Смартфон фірми АБВ мав невдалу конструкцію та часто випадав з рук користувачів. Було опитано 20 користувачів. Статистика кількості тижнів використання смартфону до розбиття скла така: 12, 5, 7, 42, 24, 36, 43, 51, 14, 12, 48, 55, 18, 18, 19, 27, 10, 39, 67, 9.

    Сформулюйте гіпотезу про використання цього смартфону та оцініть ймовірність того, що скло розбивається за один тиждень.

## Список литературы


[1] *Ивченко, Г. И., & Медведев, Ю. И.* (2009). Введение в математическую статистику. –М.: ЛКИ.–2010.–600 с.

[2] *Колемаев, В. А., Староверов, О. В., & В.Б. Турундаевский* (1991).Теория вероятностей и математическая статистика. М. - Высшая школа-1991. – 400 с.