Домашнє завдання 3.

Цю домашню роботу слід здати до 31.03.17 в паперовому вигляді. На всяк випадок залиште в себе електронну копію.

Оцінка за завдання обчислюється за формулою

$$\max(2.5 * \text{Кількість набраних балів},\ 100)\%$$

Гаусовий розподіл. Центральна гранична теорема. Довірчі інтервали

1. (7 балів) Знайти ймовірності

$$\mathrm{P}(N(0,1) < 1.23),\ \mathrm{P}(N(0,1) > -2.08),\ \mathrm{P}(|N(0,1)| < 1.36),$$
$$\mathrm{P}(-0.4 < N(0,1) < 1.23),\ \mathrm{P}(N(1,25) > 1.4),$$
$$\mathrm{P}(N(1,2) < 3),\ \mathrm{P}(N(2,4) > 1.5).$$

2. (6 балів) Знайдіть x такий, що

   $\mathrm{P}(N(0,1) < x) = 0.98,\ \mathrm{P}(N(0,1) \geq x) = 0.75,\ \mathrm{P}(|N(0,1)| < x) = 0.85,$
   $\mathrm{P}(|N(0,1)| > x) = 0.5,\ \mathrm{P}(N(2,4) \leq x) = 0.96, \mathrm{P}(|N(1,4)| < x) = 0.95.$

3. (3 бали) При дослідженні ваги 100 курчат було одержано наступні дані $\bar{X}_{100} = 1.6$ кг., $S^2_{100} = 0.04$. Знайти приблизно ймовірність того, що вага 1000 курчат перевищить 1.5 т. Яка кількість курчат забезпечить 1 т. живої ваги?

4. (5 балів) Вага певного фрукту (в кг.) є випадковою вличиною з щільністю

$$p(x) = \begin{cases} x,\ x \in [0,1]; \\ 2 - x,\ x \in (1,2]; \\ 0,\ x \notin [0,1]. \end{cases}$$

   а) Знайти приблизно ймовірність того, що вага 1000 фруктів перевищить 1050 кг.

б) Знайти приблизно таке x, що вага 1000 фруктів буде більше x з ймовірністю більшою 0.97.

в) Яка кількість фруктів забезпечить 1 т. з ймовірністю більшою 0.97.

Вважати, що вага різних фруктів незалежна.

5. (5 балів) Члени бадмінтонного клубу, що складає 400 членів, купують волани Youhe та Aerosensa. Розподіл кількості коробок Youhe та Aerosensa, які покупає кожен з членів клуба за місяць, є випадковою величиною (X, Y) з розподілом

$y_k \setminus x_k$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.3
1	0.1	0.2	0.1

Використайте центральну граничну теорему й знайдіть приблизно ймовірності наступних подій:

а) кількість коробок Youhe, куплених за місяць, перевищує 500;

б) загальна кількість куплених коробок, куплених за місяць, перевищує 630.

Знайдіть таке x, що кошти витрачені на волани не перевищать x з ймовірністю 0.92, якщо коробка Youhe коштує 9 у.о, а коробка Aerosensa коштує 15 у.о.

Вважати, що бадмінтоністи купують волани незалежно один від одного.

6. (2 бали) За виборкою $X_1, ..., X_n$ побудувати асимптотичний довірчій інтервал для невідомого параметру $\alpha > 0$ показникового розподілу $Exp(\alpha)$ з рівнем довіри 0.95.

7. (2 бали) Побудувати довірчій інтервал для невідомого параметру $\lambda > 0$ пуассонового розподілу $Pois(\lambda)$ з рівнем довіри 0.99, якщо $\bar{X}_{400} = 5$.

8. (3 бали) В місті N в минулому році відбулось 1000 пожеж. Який приблизно розподіл та з якими параметрами має кількість пожеж за а) день, б) рік? Знайдіть приблизно ймовірність того, що наступного року буде а) не більше 1050 пожеж, б) не менше 980 пожеж.

Вважати, що ймовірність пожежі однакова для всіх квартир та не залежить від пори року.

Вказівка. Використайте граничну теорему Пуассона та центральну граничну теорему.

9. (3 бали) В банку AAA кожен день відбувається 1000000 транзакцій. В середньому 400 з них неправильні. День називається критичним, якщо відбувається більше 420 неправильних транзакцій. Застосуйте центральну граничну теорему та знайдіть приблизно ймовірність критичності дня. Знайдіть ймовірність того, що за рік буде не менше 70 критичних днів.

   Вважайте, що помилки в різних транзакціях та днях незалежні.

10. (5 балів) Випадкові величини X_1, X_2 дорівнюють кількості проданих за місяць смартфонів типу 1 та 2 (в млн. шт.), відповідно. Випадковий вектор (X_1, X_2) приблизно має гаусовий розподіл із середнім $m = (15, 4)$ та матрицею коваріацій $\Sigma = \begin{Vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

    Смартфон типу 1 коштує 200 у.о., а смартфон типу 2 коштує 800 у.о. Знайти ймовірність того, що покупці витратили на смартфон 1 більше грошей, ніж на смартфон 2.

    Знайти c таке, що випадкові величини X_1 та $X_1 - cX_2$ незалежні. Знайти $D(X_1 + X_2)$, $E(X_1^2 + X_2^2)$. Знайдіть розподіл вектору $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

11. (3 бали) Дослідник вивчає середню енергію певної реакції за допомогою двох технологій. Було проведено $n = 100$ незалежних експериментів. Нехай X_k – результат вимірювання у k-му експерименті за технологією 1, Y_k – результат вимірювання у k-му експерименті за технологією 2 (пари $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ незалежні, але випадкові величини X_k і Y_k можуть бути залежними). Припустимо, що $\mathrm{E}X_k = \mathrm{E}Y_k = \theta$, $DX_k = 1, DY_k = 4, cov(X_k, Y_k) = 0.5$. Знайти такі α, β, що математичне сподівання $\mathrm{E}(\alpha\bar{X}_n + \beta\bar{Y}_n - \theta)^2$ мінімальне. Побудуйте довірчій інтервал (якщо можливо, то найменшої ширини) для θ з рівнем довіри 0.99.