23.1 Док-ть каноничн. пр-ия

$\tilde{q}_i = p_i$, $\tilde{p}_i = q_i$ $(i=\overline{1,n})$

Найти его валентн. c и произв. ф-цию $F(q,p,t)$

Критерий каноничн.: $\exists F(q,p,t)$: $\vec{\tilde{p}}^T \delta \vec{\tilde{q}} - c\,\vec{p}^T \delta \vec{q} = -\delta F$

$$\delta \vec{\tilde{q}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{\tilde{q}}}{\partial q_k}}_{=0} dq_k + \frac{\partial \vec{\tilde{q}}}{\partial p_k} dp_k \right) = d\vec{p}$$

$\vec{\tilde{p}}^T = \vec{q}^T$

$\vec{q}^T d\vec{p} - c\,\vec{p}^T \delta \vec{q} = -\delta F$ и т.к. $d\vec{p} = \delta \vec{p}$, $d\vec{q} = \delta \vec{q}$,

то можем записать так:

$\vec{q}^T \delta \vec{p} - c\,\vec{p}^T \delta \vec{q} = -\delta F$

Если взять $c = -1$, то $F = -\vec{p}^T \cdot \vec{q}$

удовл. нужному рав-ву.

Ответ: $c = -1$, $F(q,p,t) = -\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$

23.2 $\tilde{q} = \alpha q + \beta p \qquad \tilde{p} = \gamma q + \delta p$

пок-ть, что всегда явл-ся канонич. Найти его вал-сть C и произв. ф-цию $F(q, p, t)$

Критерий каноничности: $\exists F: \ \tilde{\vec{p}}^{\,T} \delta \tilde{\vec{q}} - C \vec{p}^{\,T} \delta \vec{q} = -\delta F$

$\delta \tilde{q} = \alpha \delta q + \beta \delta p \qquad \tilde{p} = \gamma q + \delta p$

$$(\gamma q+\delta p)(\alpha\delta q+\beta\delta p)-cp\delta q=-\delta F$$

$$\gamma\alpha q\delta q+\delta\beta p\delta p+\gamma\beta q\delta p+\delta\alpha p\delta q-$$

$$-cp\delta q=-\delta F$$

$$\delta(\gamma\alpha q^2+\delta\beta p^2)+\gamma\beta q\delta p+\delta\alpha p\delta q-cp\delta q=-\delta F.$$

Если $c=\delta\alpha-\gamma\beta$, то можно представить в таком виде:

$$\delta(\gamma\alpha q^2+\delta\beta p^2)+\gamma\beta\,\delta(p\cdot q)=-\delta F$$

Откуда $F=-\frac{1}{2}(\alpha\gamma q^2+\beta\delta p^2+2\gamma\beta pq)$

Ответ: $c=\delta\alpha-\gamma\beta\neq 0$, $F=-\frac{1}{2}(\alpha\gamma q^2+\beta\delta p^2+2\gamma\beta pq)$

23.48

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$$

Найти движение осцилл.

Док-ть, что закон движ. системы

$$q_i = q_i(q_0, p_0, t), \quad p_i = p_i(q_0, p_0, t) \qquad i = \overline{1, n}$$

можно рассм. как унивал каноние пр-ие нач. коорд. Найти произв. ф-цию этого пр-ия и гамильт. $H_0(p_0, q_0)$.

Ур-ия Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\omega_i^2 q_i \end{cases} \longrightarrow \ddot{q}_i = \dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i$$

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

Решением явл-ся $q_i = A\cos\omega_i t + B\sin\omega_i t$

$$p_i = \omega_i B\cos\omega_i t - A\omega_i \sin\omega_i t$$

В начальный момент времени

$$\begin{cases} A = q_{i0} \\ \omega_i B = p_{i0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} q_i = q_{i0}\cos\omega_i t + \dfrac{p_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t \\ p_i = p_{i0}\cos\omega_i t - q_{i0}\omega_i \sin\omega_i t \end{cases}$$

Покажем, что эту систему можно рассм.

$C = 1$

как унивалентное каноническ. пр-ие начальн. данных.

Критерий каноничности:

$$\exists F: \vec{p}^{\,T}\delta\vec{q} - C\vec{p}_0^{\,T}\delta\vec{q}_0 = -\delta F$$

$$\delta\vec{q} = \frac{\partial\vec{q}}{\partial\vec{q}_0^{\,T}}d\vec{q}_0 + \frac{\partial\vec{q}}{\partial\vec{p}_0^{\,T}}d\vec{p}_0$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{0i}} = \cos\omega_i t \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_{0i}} = \frac{\sin\omega_i t}{\omega_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_{0i}\cdot\cos\omega_i t\cdot\cos\omega_i t - \frac{q_{0i}\,\omega_i}{2}\sin 2\omega_i t - C p_{0i}\right)dq_{0i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{0i}}{2\omega_i}\sin 2\omega_i t - q_{0i}\sin^2\omega_i t\right)dp_{0i} = -\delta F$$

Ф-ция F будет $\exists$, если она явл-ся полным изохр. дифф.

$$\frac{\partial\left(p_{0i}\cos^2\omega_i t - q_{0i}\,\omega_i \sin 2\omega_i t\cdot\frac{1}{2} - C p_{0i}\right)}{\partial p_{0i}} =$$

$$= \frac{\partial\left(p_{0i}\sin 2\omega_i t\cdot\frac{1}{2\omega_i} - q_{0i}\sin^2\omega_i t\right)}{\partial q_{0i}} \qquad \forall i=\overline{1,n}$$

$$\cos^2\omega_i t - C = -\sin^2\omega_i t \qquad \forall i=\overline{1,n} \qquad C=1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_{0i}} = -p_{0i}\cos^2\omega_i t + \frac{q_{0i}\,\omega_i}{2}\sin 2\omega_i t + p_{0i} \qquad \forall i=\overline{1,n}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(-p_{0i}\,q_{0i}\cos^2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2}{4}\omega_i\sin 2\omega_i t + p_{0i}\,q_{0i}\right) + f(\vec{p},t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0i}} = -\frac{p_{0i}}{2\omega_i}\sin 2\omega_i t + q_{0i}\sin^2\omega_i t = q_{0i}\sin^2\omega_i t + \frac{\partial f}{\partial p_{0i}}$$

Откуда находим $f = -\frac{p_{0i}^2}{4\omega_i}\sin 2\omega_i t$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(p_{0i}\,q_{0i}\sin^2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\,\omega_i^2 - p_{0i}^2}{4\omega_i}\sin 2\omega_i t\right)$$

Найдем гамильтониан. Ф-ла пр-ия:

$$H = \overset{1}{C} H_0 + \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\vec{p}\,\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}}_{=\sum_{i=1}^{n} p_i^2,\ \text{т.к.}\ \dot{q}_i = p_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i\,p_{0i}\,q_{0i}\sin 2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\,\omega_i^2 - p_{0i}^2}{2}\cos 2\omega_i t\right)$$

$$H_0 = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \vec{p}\,\frac{\partial\vec{q}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i\,p_{0i}\,q_{0i}\sin 2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\,\omega_i^2 - p_{0i}^2}{2}\cos 2\omega_i t\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i^2 q_i^2 - p_i^2) - \sum_{i=1}^{n} \left(2\omega_i p_{0i} q_{0i} \sin 2\omega_i t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (q_{0i}^2 \omega_i^2 - p_{0i}^2) \cdot \cos 2\omega_i t \right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left((\omega_i^2 q_{0i}^2 - p_{0i}^2) \cos 2\omega_i t + \right.\right.$$

$$\left. + 2\omega_i p_{0i} q_{0i} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(2\omega_i p_{0i} q_{0i} \sin(2\omega_i t) + (q_{0i}^2 \cdot \omega_i^2 - \right.$$

$$\left.\left. - p_{0i}^2) \cos 2\omega_i t \right)\right) = \underline{\underline{0}}$$

23.100

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{3p_1+q_2}{a} - q_1\right) \qquad \tilde{p}_1 = -2(3p_1+q_2)$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{1}{3}\left(\arccos\frac{3p_2+q_1}{b} - q_2\right) \qquad \tilde{p}_2 = -3(3p_2+q_1)$$

Выразим $\vec{p}$ и $\vec{\tilde{p}}$ через $\vec{q}$ и $\vec{\tilde{q}}$:

$$\vec{p} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a\cos(2\tilde{q}_1+q_1) - q_2 \\ b\cos(3\tilde{q}_2+q_2) - q_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} -2a\cos(2\tilde{q}_1+q_1) \\ -3b\cos(3\tilde{q}_2+q_2) \end{pmatrix}$$

Для канонич. свод. пр-я необх. и дост. чтобы $\exists\, S(\vec{q},\vec{\tilde{q}},t)$ и $c \neq 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{\tilde{q}}} = -\vec{\tilde{p}}, \quad \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = c\vec{p}$$

Приравняем смешанные произв.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{\tilde{q}}\, \partial \vec{q}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{q}\, \partial \vec{\tilde{q}}}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{\tilde{q}}\, \partial \vec{q}} = c\, \frac{\partial}{\partial \vec{\tilde{q}}} \vec{P} = -\frac{c}{3} \begin{pmatrix} a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) \cdot 2 & 0 \\ 0 & 3b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{q}\, \partial \vec{\tilde{q}}} = -\frac{\partial \vec{\tilde{P}}}{\partial \vec{q}} = -\begin{pmatrix} 2a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) & 0 \\ 0 & 3b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) \end{pmatrix}$$

Матрицы будут равны при $C = 3$.

$$S = c \int p_1\, dq_1 = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + A(q_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = c p_2 = b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) - q_1 = 0 - q_1 + \frac{\partial A}{\partial q_2}$$

Откуда $A = b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + B(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$

$$S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + B(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_1} = -\tilde{p}_1 = 2a \cos(2\tilde{q}_1 + q_1) = 2a \cos(2\tilde{q}_1 + q_1) + \frac{\partial B}{\partial \tilde{q}_1}$$

Откуда $B = D(\tilde{q}_2, t)$

$$S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + D(\tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_2} = -\tilde{p}_2 = 3b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) = 3b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) + \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_2}$$

Откуда $D = E(t) = 0$

Ответ: $c = 3$, $S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2)$