(14) Док-ть, что сист. ф-ций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пр-вах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

Рассмотрим $f^*(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi}t)$ $0 \le t \le \pi$

Продолжим $f^*(t)$ на $[-\pi, 0]$ чётным образом, т.е. $f^*(-t) = f^*(t)$ $0 \le t \le \pi$.

Если продолжить f^* на всю числовую прямую с периодом 2π, то к полученной ф-ции можно применить первую теорему Вейерштрасса. Значит $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригоном. многочлен $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ такой, что $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |f^*(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2$

А т.к. $P_n(t)$ - аналитич. ф-ция с радиусом сх-сти ряда Тейлора по степеням t, равным $+\infty$. Тогда этот ряд Тейлора равномерно сх-ся на $\forall$ конечном отрезке. Т.к. частичные суммы ряда Тейлора - алгебраич. многочлены, то посл-сть $Q_n(x)$ этих частичн. сумм равномерно сх-ся к $P_n(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Значит $\exists Q_n(x)$: $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |P_n(x) - Q_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Окончательно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ алгебр. многочлен

$Q_n(t)$: $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |f^*(t) - Q_n(t)| \leq |f^*(t) - P_n(t)| +$
$+ |P_n(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Выберем t: $a + \frac{b-a}{\pi} t = x \in [a, b]$

$$t = \frac{x-a}{b-a}\pi \qquad f^*\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) = f(x)$$

Тогда получим.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$: $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \left| f(x) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)\right| < \varepsilon.$

т.е. сист. ф-ций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$ на $\forall$ отрезке $[a,b]$

Из $\underline{\underline{T.3}}$ следует, что из полноты в $C[a,b]$ следует полнота в $CL_2[a,b]$ и отсюда следует полнота в $CL_1[a,b]$. (т.к. равномерная метрика - более сильное утв-не)

$\left(\text{т.к. } 0 < \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int\limits_a^b |f|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f| \sqrt{b-a}\right)$

§19 116)

① В подпр-ве $C^*[-\pi, \pi]$ пр-ва $C[-\pi, \pi]$:

состоит из $x(t)$: $x(-\pi) = x(\pi)$, система

1) $\{1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx, \dots\}$ полна, а сист.

2) $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos nx\}$ не полна

• Первое утв. следует из 1 теоремы Вейерштрасса. т.е $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\text{триг. мн.}}{T_n(x)} : \forall x \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow$

$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$

• Для этого покажем, что $\exists f_0(x)$ $\exists \varepsilon > 0$

$\exists x_0 \in [-\pi, \pi] : \forall P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \hookrightarrow \left| f_0(x_0) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx_0 \right| \geq \varepsilon$

Предположим противное:

пусть система полна на $[-\pi, \pi]$. Тогда для не равной тождественно 0 нечётной непрерывной $f(x)$ $\exists x_0 \in (0, \pi)$:

$f(x_0) = A > 0$ и $\forall \varepsilon > 0$ $|f(x_0) - P_n(x_0)| < \varepsilon$,

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$. Заметим, что $P_n(x)$ – чётная ф-ция по построению

При этом $\exists\, x' = -x_0 \in (-\pi, 0)$ где в силу нечёт. $f(x)$ и чётн. $P_n(x)$ справедливо:

$$|f(x') - P_n(x')| = |f(x_0) + P_n(x_0)|$$

А в силу предыдущ. нер-ва $|P_n(x_0)| > A_0 - \varepsilon$

Значит

$$|f(x') - P_n(x')| > 2A_0 - \varepsilon$$

Значит система не полна на $[-\pi, \pi]$

Если же $f(x) < 0 \ \forall x \in [0, \pi)$, то проводим аналогичные рассуждения для ф-ции непрерывной, четной $g(x) = -f(x)$.

2 В подпр-ве простр-ва $C[0, \pi/2]$ ф-ций, удовл. условию $f(0) = 0$ система $\{\sin x, \sin 3x, \ldots, \sin(2n+1)x\}$ полна.

Продолжим ф-ции из $C[0, \frac{\pi}{2}]$ так, что $f(\pi - x) = f(x)$ на $[0, \pi]$ и продолжим затем на $[-\pi, 0]$ так, что $f(x) = -f(-x)$

Наша ф-ция непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$ по построению.

Тогда можем воспол-ся т. Фейера и ряд Фурье ф-ции f будет равномерно сх-ся к своей сумме. Но по построению все $a_k = 0$ и $b_{2k} = 0$. Значит останутся только $\sin x, \sin 3x \ldots$

Значит всякая ф-ция из нашего мн-ва может быть приближена тригоном. многочленом от $\sin x, \sin 3x$. Значит исходная система полна в $C[0, \frac{\pi}{2}]$.

(T5) Полна ли $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$ в пр-ве

а) $C([1,2])$

Продолжим ф-ции из $C([1,2])$ непрерывно на $[0,\pi]$ так, чтобы $f(0) = f(\pi) = 0$. После этого по нечётности на $[-\pi, 0]$, и $f(-\pi) = -f(\pi) = 0$

Значит $f(x)$ удовл. теореме 2 Вейерштрасса

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \alpha_k x^k \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow$

$\hookrightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$

Но также $|f(-x) - P_n(-x)| < \varepsilon$

$$R_n(x) = \frac{P_n(x) - P_n(-x)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1} \cdot 2/2 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1}$$

$f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$ в силу нечётн.

из тожд-ва

$2f(x) = f(x) - f(-x)$ т.к. $f(x) = -f(-x)$

Значит $\left| f(x) - R_n(x) \right| = \left| \frac{f(x) - f(-x)}{2} - \frac{P_n(x) - P_n(-x)}{2} \right| \le$

$\le \frac{1}{2} \left| f(x) - P_n(x) \right| + \frac{1}{2} \left| f(-x) - P_n(-x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$

В частности $\forall x \in [1, 2]$.

Значит система полна в $C[1,2]$

б) в пр-ве $C([0,1])$.

Пусть система полна. Тогда $\forall f \in C[0,1]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P(x)$: $\| f(x) - P(x) \| < \varepsilon$.

Возьмем $f(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0,1]$.

$\| f(x) - P(x) \|_{C[0,1]} = \sup\limits_{x \in [0,1]} \left| f(x) - P(x) \right| \ge \left| f(0) - \overset{0}{P(0)} \right| = \frac{1}{2}$.

$P(0) = 0$, т.к. это есть линейная комбинация степеней x^{n}, $n \ge 1$, без свободного члена

Получили противоречие, т.к. $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ для кот. $\sup \ge \varepsilon$. Значит система не полна.

(T6) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пр-ве

а) $C([0,\pi/2])$

Пусть система полна. Тогда $\forall f \in C([0,\frac{\pi}{2}])$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T(x): \|f(x) - T(x)\| < \varepsilon.$

Рассмотрим $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$.

$\| f(x) - P(x) \| = \sup\limits_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} | f(x) - P(x) | \geqslant | f(\frac{\pi}{2}) - P(\frac{\pi}{2}) | = | 1 - 0 | = 1$

Получим противоречие. Значит система <u>не полна</u>.

б) $C([0, 2])$.

Аналогично возьмём $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$\| f(x) - P(x) \| = \sup\limits_{x \in [0, 2]} | f(x) - P(x) | \geqslant | f(\frac{\pi}{2}) - P(\frac{\pi}{2}) | = | 1 - 0 | = 1$

Получим противоречие. Значит система <u>не полна</u>.