T3 a)

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x^2+y^2=1} = y + \alpha, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ $\qquad u(x,y) \longleftrightarrow v(r,\varphi): \ u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r,\varphi)$

$u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi = v_r$

Задача примет вид:

(1) $\Delta v = r^2, \quad r < 1$

(2) $v_r|_{r=1} = \sin\varphi + \alpha$

Шаг 0:

частное реш. ищем в виде $\tilde{v} = br^4$

$$b \cdot 12r^2 + 4br^2 = r^2 \hookrightarrow b = \frac{1}{16}$$

Замена $v = w + \frac{r^4}{16}$, $v_r = w_r + \frac{r^3}{4}$

Получим следующую задачу:

$(1)'$ $\Delta w = 0$

$(2)'$ $w_r|_{r=1} = \alpha - \frac{1}{4} + \sin\varphi$ - попутно сделан шаг 1.

Шаг 2:

$$w = A + Br\sin\varphi$$

$w_r = B\sin\varphi \equiv \alpha - \frac{1}{4} + \sin\varphi$

Если $\alpha \neq \frac{1}{4}$, то нет решений

Если $\alpha = \frac{1}{4}$, то $w = A + r\sin\varphi$ и решение исходной задачи есть $u = \frac{(x^2+y^2)^2}{16} + A + y$

Т3б)

$$\Delta u = \frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad r>1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$u_r\big|_{r=1} = -2\sin\varphi - 4\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

u - ограничена

$$\frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{3\cos 2\varphi}{r^3} + \frac{\sin\varphi}{r^4}$$

Шаг 0.1:

$$\Delta u = \frac{3\cos 2\varphi}{r^3}$$

Частное решение ищем в виде $\tilde{u} = \frac{a\cos 2\varphi}{r}$

Откуда $\tilde{u} = -\frac{\cos 2\varphi}{r}$

Шаг 0.2:

$$\Delta u = \frac{\sin\varphi}{r^4} \to \tilde{\tilde{u}} = \frac{b\sin\varphi}{r^2} \to \tilde{\tilde{u}} = \frac{\sin\varphi}{3r^2}$$

Замена $u = v + \tilde{u} + \tilde{\tilde{u}}$

(1) $\Delta v = 0, \quad r > 1$

(2) $v_r\big|_{r=1} = -\frac{4}{3}\sin\varphi - \cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi$

(3) v ограничена

Шаг 3

$$v = A + \frac{B}{r}\sin\varphi + \frac{C}{r^2}\cos 2\varphi + \frac{D}{r^2}\sin 2\varphi$$

$$v_r = -\frac{B\sin\varphi}{r^2} - \frac{2C\cos 2\varphi}{r^3} - \frac{2D\sin 2\varphi}{r^3}$$

$$v_r\Big|_{r=1} = -B\sin\varphi - 2\cos 2\varphi\cdot C - 2D\sin 2\varphi \equiv$$

$$\equiv -\frac{4}{3}\sin\varphi - \cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi$$

$$B = \frac{4}{3},\quad C = 2,\quad D = -2.$$

Получим $v = A + \frac{4}{3r}\sin\varphi + \frac{2}{r^2}\cos 2\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi$

Решение исходной задачи есть

$$v = A + \frac{4}{3r}\sin\varphi + \frac{2}{r^2}\cos 2\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{\sin\varphi}{3r^2} - \frac{\cos 2\varphi}{r}$$

$$\cancel{A + \frac{4y}{3(x^2+y^2)} +}$$

16.26(2)

$$u\Big|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{1}{2} + \sin 2\theta\sin\varphi\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2\theta\cos\varphi\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= Y_1^{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}Y_1^{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y_2^{-1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}Y_2^{1}\frac{3}{2}$$

Шаг 2

$$u = (A_{11}Y_1^{-1} + A_{12}Y_1^{1})r + (Y_2^{-1}A_{21} + Y_2^{1}A_{22})r^2$$

Подставив гран. усл-ия $\hookrightarrow A_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ A_{12} = \frac{1}{2},\ A_{21} = \frac{3\sqrt{3}}{4},\ A_{22} = \frac{3}{4}$

Ответ: $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Y_1^{-1} + \frac{1}{2} Y_1^1\right) r + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} Y_2^{-1} + \frac{3}{4} Y_2^1\right) r^2 =$

$= \left(r \sin\theta + r^2 \sin 2\theta\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$

16.28(2)

$$u|_{r=1} = \cos^2\theta \sin\theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

Исходя из прошлой задачи, можно сделать замену $\psi = \varphi + \frac{\pi}{3}$ и искать решение обычными сферич. ф-циями.

$$u|_{r=1} = \cos^2\theta \sin\theta \sin\psi - \frac{1}{5}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta \sin\psi +$$

$$+ \frac{1}{5}\sin\theta \sin\psi = \frac{2}{15} Y_3^{-1} + \frac{1}{5} Y_1^{-1}$$

Решение ищем в виде:

$$u = A Y_1^{-1} \frac{1}{r^2} + B Y_3^{-1} \frac{1}{r^4}$$

Подставив гран. усл-ия: $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{15}$

Ответ: $u = \frac{1}{5} Y_1^{-1} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{15} Y_3^{-1} \frac{1}{r^4} =$

$= \frac{1}{5r^2} \sin\theta \sin\psi + \frac{2}{15} \frac{1}{r^4} \frac{3}{2} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) \sin\psi =$

$= \frac{1}{5r^2} \sin\theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left[1 + \frac{1}{r^2}(5\cos^2\theta - 1)\right]$

16.30(7)

$$u|_{r=1} = \cos\varphi \sin 2\theta, \quad u|_{r=2} = \sin\varphi \sin 2\theta$$

$$u|_{r=1} = \cos\varphi \cdot \frac{2}{3} \cancel{Y_2^1}\, 3\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{3} Y_2^1$$

$$u|_{r=2} = \sin\varphi \frac{2}{3}\, 3\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{3} Y_2^{-1}$$

Решение ищем в виде:

$$u = \left(Ar^2 + \frac{B}{r^3}\right) Y_2^1 + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^3}\right) Y_2^{-1}$$

Подставим граничные усл-ия:

$$\begin{cases} A + B = \frac{2}{3} \\ C + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + \frac{B}{8} = 0 \\ 4C + \frac{D}{8} = \frac{2}{3} \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} D = -\frac{16}{93} \\ C = \frac{16}{93} \\ B = +\frac{64}{93} \\ A = -\frac{2}{93} \end{cases}$$

Ответ: $u = \left(-\frac{2}{93} r^2 + \frac{64}{93 r^3}\right) Y_2^1 + \left(\frac{16}{93} r^2 - \frac{16}{93 r^3}\right) Y_2^{-1}$

16.31(1)

$$(3u + u_r)|_{r=1} = 5\sin^2\theta \sin 2\varphi = \frac{5}{3} Y_2^{-2}$$

$$u|_{r=2} = -\cos\theta = -Y_1^0$$

Решение ищем в виде

$$u = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) Y_1^0 + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^3}\right) Y_2^{-2}$$

$$u_r = \left(A - \frac{2B}{r^3}\right) Y_1^0 + \left(2C - \frac{3D}{r^4}\right) Y_2^{-2}$$

Подставим в граничн. усл-ия:

$$(3A+3B)Y_1^0+(3C+3D)Y_2^{-2}+(A-2B)Y_1^0+(2C-3D)\cdot Y_2^{-2}=$$
$$=-\frac{5}{3}Y_2^{-2}$$

$$\left(2A+\frac{B}{4}\right)Y_1^0+\left(4C+\frac{D}{8}\right)Y_2^{-2}=-Y_1^0$$

$$\begin{cases}4A+B=0\\ 2A+\frac{B}{4}=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}5C=-\frac{5}{3}\\ 4C+\frac{D}{8}=0\end{cases}\hookrightarrow \begin{cases}A=-1\\ B=4\\ C=\frac{1}{3}\\ D=-\frac{32}{3}\end{cases}$$

Ответ: $u=\left(-r+\frac{4}{r^2}\right)Y_1^0+\left(\frac{r^2}{3}-\frac{32}{3r^3}\right)Y_2^{-2}$

T4

$$\Delta u=0\ ,\quad x^2+y^2+z^2<4$$
$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=4}=yz^2,\quad x^2+y^2+z^2=4$$

Замена:

$$u(x,y,z)\longleftrightarrow \tilde{u}(r,\theta,\varphi)$$
$$u(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\equiv\tilde{u}(r,\theta,\varphi)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

Получим следующую задачу:

$$\Delta\tilde{u}=0\ ,\quad r<2$$
$$(\tilde{u}+\tilde{u}_r)\big|_{r=2}=2\sin\theta\cos\varphi\, r^2\cos^2\theta\big|_{r=2}=8\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi=$$
$$=\frac{8}{5}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+\frac{16}{15}P_3^1(\cos\theta)\cos\varphi=Y_1+Y_3$$

Решение ищем в виде

$$\tilde{u} = ArY_1 + Br^3 Y_3$$

$$\tilde{u}_r = AY_1 + 3Br^2 Y_3$$

$$(2AY_1 + 8BY_3) + (AY_1 + 12BY_3) = Y_1 + Y_3$$

$$3A = 1 \quad 20B = 1 \quad \hookrightarrow A = \frac{1}{3}, \; B = \frac{1}{20}$$

Ответ: $u = \frac{1}{3} r \left(\frac{8}{5} \sin\theta \cos\varphi\right) + \frac{1}{20} r^3 \left(\frac{16}{15} \frac{\sin\theta}{2} (15\cos^2\theta - 3) \cdot \cos\varphi\right)$

T5

$$\begin{cases} D: \; 1 < r < 2, \quad u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}) \\ \left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{r=1} = (u + u_r)\Big|_{r=1} = \sin\theta \sin\varphi = Y_1^{-1} \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=2} = u_r\Big|_{r=2} = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде

$$u = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) Y_1^{-1}$$

$$u_r = \left(A - \frac{2B}{r^3}\right) Y_1^{-1}$$

Подставим граничн. усл-ия:

$$\begin{cases} (A + B) Y_1^{-1} + (A - 2B) Y_1^{-1} = Y_1 \\ \left(A - \frac{2B}{8}\right) Y_1^{-1} = 0 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} 2A - B = 1 \\ 4A - B = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = -2$$

Ответ: $u = \left(-\frac{1}{2} r - \frac{2}{r^2}\right) \sin\theta \sin\varphi$