15.15 $z = \alpha x^2 + \beta y^2$, $\omega$ = const

Усл-ие, при котором $(0,0,0)$ - устойчивое отн. равн.

Подсчитаем потенциальную энергию нашей консервативной системы:

$$\Pi = mgz - \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\Pi^{\text{пер.}}} = mg(\alpha x^2 + \beta y^2) - \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2}$$

По т. Лагранжа об устойчивости консервативных систем, если $\Pi$ непрер. в $(0,0,0)$ и имеет строгий минимум, то оно устойчиво.

Для строгого min $\Pi$ достаточно строгой положит. опред. матрицы $C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{q}\, \partial \vec{q}^T}\right|_{\vec{q}^0}$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 2mg\alpha - m\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 2mg\beta - m\omega^2 \hookrightarrow C = \begin{pmatrix} 2mg\alpha - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2mg\beta - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Delta_1 = 2mg\alpha - m\omega^2 > 0 \hookrightarrow \omega^2 < 2g\alpha$$

$$\Delta_2 = (2mg\alpha - m\omega^2)(2mg\beta - m\omega^2) > 0$$

$$\omega^2 < 2g\beta$$

Ответ: $\omega^2 < 2g \cdot \{\min(\alpha, \beta)\}$.

(15.18) Док-ть, что усл-ия т. Лагранжа об уст. полож. равн. консерв. системы с кинет. энергией $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geq 0$, $a_{ik}$ - const и пот. эн. $\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \geq 0$, $c_{ik}$ = const явл-ся необх. и достаточными.

Т.к. т. Лагранжа явл-ся достаточным условием устойчивости полож. равновесия, то докажем только необходимость.

Из курса линейн. алгебры воспользуемся приведением двух квадратичных форм одновременно к диаг. виду, причём 1 из них имеет даже канонич. вид. Т.е.:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{\theta}_k^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\theta_k^2.$$

В консервативн. системе $E = T + \Pi$ = const

$$\dot{E} = 0 \hookrightarrow \sum_{k=1}^{n}(\ddot{\theta}_k\dot{\theta}_k + \mu_k\theta_k\dot{\theta}_k) = 0$$

Это распадается на $n$ ур-ий:

$\ddot{\theta}_k + \mu_k\theta_k = 0$ (если $\dot{\theta}_k = 0$, то $\Pi$ = const - перенесём в (0,0) и очевидно ($\Pi = 0$))

Если $\mu_k < 0$, то решением дифф. ур-ия будет $\theta_k = e^{\sqrt{-\mu_k}t}$ - возрастает неогранич. - не удовлетв. ~~условию~~ опред. устойчивости.

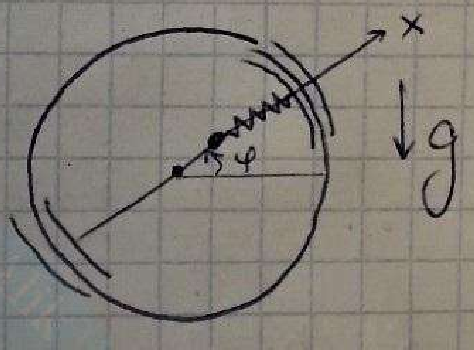
Если $\mu_k = 0$, то $\Theta_k = C_1 t + C_2$ - линейно возраст. и также не явл. устойчивым.

При $\mu_k > 0$ $\Theta_k = e^{-\mu_k t}$ - стремится к 0 и выполнено опр. устойчивого полож. равнов.

То есть $\mu_k > 0$, $k = \overline{1, n}$

То есть П - строго положит. опр. форма $\left(\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu_k \Theta_k^2\right)$ и имеет строгий минимум в т. 0. $\rightarrow$ выполнены усл-ия т. Лагранжа об уст. полож. равн. консерв. сист.

15.21 $\quad c \neq 2\dfrac{mg}{R}$




Введём обобщ. координаты $x$ и $\varphi$.

$$\Pi = mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(R - x - \frac{R}{2}\right)^2 = mgx\sin\varphi +$$
$$+ \frac{c}{2}\left(\frac{R}{2} - x\right)^2$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = mg\sin\varphi - c\left(\frac{R}{2} - x\right) = mg\sin\varphi + cx - c\frac{R}{2} = 0$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = mgx\cos\varphi = 0$$

При $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \pm mg - \frac{cR}{2} + cx \longrightarrow x = \frac{R}{2} \mp \frac{mg}{c}$$

1) $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \left( x = \frac{R}{2} - \frac{mg}{c} \right)$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mg\left(\frac{R}{2} - \frac{mg}{c}\right) > 0$$

если $R < \frac{2mg}{c}$, то устойчиво

если $R > \frac{2mg}{c}$, то неустойчиво

2) $\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \left( x = \frac{R}{2} + \frac{mg}{c} \right)$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi = mg\left(\frac{R}{2} + \frac{mg}{c}\right) > 0$$

полож. устойчиво.

3) $x = 0 \qquad \varphi = \arcsin\frac{cR}{2mg}$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} = mg\cos\varphi$$

неустойчиво

Ответ: $x_1 = \frac{R}{2} + \frac{mg}{c}$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ устойчиво

$x_2 = \frac{R}{2} - \frac{mg}{c}$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ при $R < \frac{2mg}{c}$ устойч, при $R > \frac{2mg}{c}$ неуст., $x_3 = 0$ $\varphi_3 = \arcsin\frac{cR}{2mg}$ неустойчиво