5.25(2)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x)\, \varphi(y)\, dy + ax + b$$

(1) $\varphi(x) = \lambda x a_1 + \lambda a_2 \cos x + ax + b$

$$a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, \varphi(y)\, dy \qquad a_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(y)\, dy$$

$$a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda x a_1 \sin x\, dx + \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \lambda a_2 \cos x \sin x\, dx} + \int_{-\pi}^{\pi} a x \sin x\, dx + \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} b \sin x\, dx}$$

$$a_2 = \lambda a_1 \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx} + \lambda a_2 \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx} + a \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx} + b \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$a_1 = \lambda a_1 2\pi + a 2\pi$

$a_2 = 2\pi b$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1-2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ 2\pi b \end{pmatrix}$$

Откуда собств. ч. $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} x$$ – собств. ф-ция

<u>Случай 1</u>:

$$\lambda \neq \frac{1}{2\pi} \qquad a_1 = \frac{2\pi a}{1-2\pi\lambda} \qquad a_2 = 2\pi b$$

$$\varphi(x) = \lambda \frac{2\pi a}{1-2\pi\lambda} x + \lambda 2\pi b \cos x + ax + b$$

Случай 2: $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ 2\pi b \end{pmatrix}$$

Если $a \neq 0$, то решений системы нет $\hookrightarrow$ нет решений исх. интегр. ур-ия.

Если $a = 0$, то $a_1 = C_1$, $a_2 = 2\pi b$.

Тогда $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} C_1 x + \frac{1}{2\pi} 2\pi b \cos x + b$

(T4)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin|x| + |x| y) \varphi(y) dy + a|x| + bx$$

$$\varphi(x) = \lambda \sin|x| \, a_1 + \lambda |x| a_2 + a|x| + bx$$

$$a_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| \varphi(y) dy \qquad a_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \varphi(y) dy$$

$$a_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_1 |x| \lambda \sin|x| dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda a_2 |x|^2 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a|x|^2 dx + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b \cancel{x|x|} dx}_{0}$$

$$a_2 = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_1 \lambda \cancel{x \sin|x|} dx}_{0} + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda \cancel{|x| x} a_2 dx}_{0} + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cancel{|x| x} dx}_{0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b x^2 dx$$

$$a_1 = 2 a_1 \lambda + \lambda a_2 \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} a$$

$$a_2 = \frac{\pi^3}{12} b$$

Получим сист.: $\begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & -\lambda \frac{\pi^3}{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^3 a/12 \\ \pi^3 b/12 \end{pmatrix}$

Откуда собств. ч. $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \varphi(x) = \frac{1}{2}\sin|x| \text{ — собств. ф-ция}$$

<u>Случай 1:</u>

$$\lambda \neq \frac{1}{2}. \qquad a_2 = \frac{\pi^3 b}{12} \qquad a_1 = \frac{\frac{\pi^3 a}{12} + \lambda \frac{\pi^6 b}{12^2}}{1 - 2\lambda}$$

$$\varphi(x) = \lambda \sin|x| \frac{\pi^3}{12} \frac{a + \lambda \frac{\pi^3 b}{12}}{1 - 2\lambda} + \lambda |x| \frac{\pi^3 b}{12} + a|x| + bx$$

<u>Случай 2:</u>

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi^3}{24} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^3 a/12 \\ \pi^3 b/12 \end{pmatrix}$$

Если $a = -\frac{\pi^3 b}{24}$, то система имеет решения

и $a_1 = C_1$, $a_2 = \frac{\pi^3 b}{12}$. Иначе решений нет.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} C_1 \sin|x| + \cancel{\frac{1}{2}|x| \frac{\pi^3 b}{12}} - \cancel{\frac{\pi^3 b}{24}|x|} + bx$$

(5)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x e^{x^2} \cos^3 t + \frac{1 - \cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t)\, dt + f(x)$$

$$\varphi(x) = \lambda x e^{x^2} a_1 + \lambda \frac{1 - \cos x}{x} a_2 + f(x)$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} \cos^3 t\, \varphi(t)\, dt \qquad a_2 = \int_{-1}^{1} e^{t^2} \varphi(t)\, dt$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} \cancelto{0}{\lambda x e^{x^2} a_1 \cos^3 x}\, dx + \int_{-1}^{1} \lambda \cancelto{0}{\frac{1 - \cos x}{x} a_2 \cos^3 x}\, dx +$$

$$+\underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\cos^3 x\,dx}_{f_1}$$

$$a_2 = \int_{-1}^{1} \cancel{\lambda x e^{x^2} a_1 e^{x^2}}\,dx + \int_{-1}^{1} \cancel{\lambda \frac{1-\cos x}{x} a_2 e^{x^2}}\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x) e^{x^2}\,dx}_{f_2}$$

Получаем $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[E - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Видно, что ур-ие разрешимо при $\forall \lambda$ и имеет единств. решение $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$. Соотв. $f(x)$ - произв. $\in C[-1,1]$.

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} x e^{x^2} f(x) \cos^3 x\,dx + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{1-\cos x}{x} f(x) e^{x^2}\,dx + f(x)$$

Мн-во характеристич. чисел сопр. ядра есть $\overline{\lambda}$, где λ - хар. ч. исходн. ядра. В силу произв. $\lambda \hookrightarrow$ мн-во характеристич. чисел сопр. ядра совп. с мн-вом характеристич. чисел исходн. ядра.

(6)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2)\,\varphi(y)\,dy + |x|^2 + \alpha$$

$$\varphi(x) = \lambda 6 |x|^2 a_1 - \lambda 2 a_2 + |x|^2 + \alpha$$

$$a_1 = \int_{|y|<1} \varphi(y)\,dy \qquad a_2 = \int_{|y|<1} |y|^2 \varphi(y)\,dy$$

$$a_1 = \lambda 6 \int\limits_{|x|<1} |x|^2 a_1 dx - \lambda 2 \int\limits_{|x|<1} a_2 dx + \int\limits_{|x|<1} |x|^2 dx + \int\limits_{|x|<1} \alpha dx$$

$$a_2 = \lambda 6 \int\limits_{|x|<1} |x|^4 a_1 dx - \lambda 2 \int\limits_{|x|<1} a_2 |x|^2 dx + \int\limits_{|x|<1} |x|^4 dx + \int\limits_{|x|<1} \alpha |x|^2 dx$$

$$a_1 = \lambda 6 \cdot 2\pi a_1 \cdot \frac{1}{4} - 2\lambda a_2 \cdot 2\pi \frac{1}{2} + 2\pi \frac{1}{4} + \alpha 2\pi \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \lambda 6 \cdot 2\pi a_1 \frac{1}{6} - 2\lambda a_2 2\pi \frac{1}{4} + 2\pi \frac{1}{6} + \alpha 2\pi \frac{1}{4}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1-3\pi\lambda & 2\pi\lambda \\ -\lambda\pi\cdot 2 & 1+\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi\frac{1}{4} + \pi\alpha \\ 2\pi\frac{1}{6} + 2\pi\frac{1}{4}\alpha \end{pmatrix}$$

$$(1-3\pi\lambda)(1+\pi\lambda) + 4\pi^2\lambda^2 = 1 - 2\pi\lambda - 3\pi^2\lambda^2 + 4\pi^2\lambda^2 =$$

$$= 1 - 2\pi\lambda + \pi^2\lambda^2 = (1-\pi\lambda)^2 = 0 \hookrightarrow \lambda = \frac{1}{\pi}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = \frac{6}{\pi}|x|^2 - \frac{2}{\pi}$ - собств. ф-ция

Случай 1: $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$

$$a_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi\alpha\right)(1+\pi\lambda) - 2\pi\lambda\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{(1-\pi\lambda)^2}$$

$$a_2 = \frac{(1-3\pi\lambda)\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + 2\pi\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \pi\alpha\right)}{(1-\pi\lambda)^2}$$

$$\varphi(x) = \lambda 6 |x|^2 a_1 - \lambda 2 a_2 + |x|^2 + \alpha$$

Случай 2: $\lambda = \frac{1}{\pi}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \pi\alpha \\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\alpha \end{pmatrix} \hookrightarrow \frac{\pi}{2} + \pi\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\alpha$$

$$\frac{\pi}{2}\alpha = -\frac{\pi}{6} \to \alpha = -\frac{1}{3}$$

Если $\alpha = -\frac{1}{3}$, то решение системы $\exists$:

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = \left(\frac{1}{6}\pi + 2C_1\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} + C_1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\cdot 6|x|^2 \cdot C_1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{12} + C_1\right) + |x|^2 - \frac{1}{3}$$

5.34

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2 + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda(a_1 x_1 x_2 + a_2 \cdot 1) + f(x_1, x_2)$$

где $a_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$, $\quad a_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$

$$a_1 = \lambda a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1 x_2\,dx_1 dx_2}_{0} + \lambda a_2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx_1 dx_2 + \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2}_{f_1}$$

$$a_2 = \lambda a_1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1^2 x_2^2\,dx_1 dx_2 + \lambda a_2 \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1 x_2\,dx_1 dx_2}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2}_{f_2}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx_1 dx_2 = \left(\int_{-1}^{1} dx_1\right)\cdot\left(\int_{-1}^{1} dx_2\right) = 2\cdot 2 = 4$$

$$\left(\int_{-1}^{1} x_1^2\,dx_1\right)\cdot\left(\int_{-1}^{1} x_2^2\,dx_2\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$a_1 = \lambda a_2 \cdot 4 + f_1, \quad a_2 = \lambda a_1 \cdot \frac{4}{9} + f_2$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{16}{9}\lambda^2 = 0 \hookrightarrow \lambda = \pm\frac{3}{4}$$

$$\lambda = \frac{3}{4}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\cdot 3x_1x_2 + \frac{3}{4} \text{ - собств. ф-ция}$$

$$\lambda = -\frac{3}{4}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\cdot 3x_1x_2 - \frac{3}{4} \text{ - собств. ф-ция}$$

<u>Случай 1:</u> $\lambda \neq \pm\frac{3}{4}$

$$a_1 = \frac{f_1 + f_2\cdot 4\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}, \quad a_2 = \frac{f_2 + f_1\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda\frac{f_1 + f_2 4\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}x_1x_2 + \lambda\frac{f_2 + f_1\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2} + f(x_1, x_2)$$

<u>Случай 2а:</u> $\lambda = \frac{3}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ $f_1 = -3f_2 \hookrightarrow a_1 = 3C + f_1, \; a_2 = C$

$\searrow$ $f_1 \neq -3f_2 \hookrightarrow$ нет решений

Если $f_1 = -3f_2$, то реш. есть:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(3C + f_1)x_1x_2 + \frac{3}{4}C + f(x_1, x_2)$$

Случай 2б:

$$\lambda = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$f_1 = 3f_2 \hookrightarrow a_1 = -3C + f_1, \ a_2 = C$

$f_1 \neq 3f_2 \hookrightarrow$ нет решений.

Если $f_1 = 3f_2$, то реш. есть:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(3C - f_1)x_1x_2 - \frac{3}{4}C + f(x_1, x_2)$$

5.41(2)

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(1-x), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

Можем записать в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x y(1-x)\varphi(y)\,dy + \lambda\int_x^1 x(1-y)\varphi(y)\,dy$$

Вычислим производные по x:

$$\varphi'_x = -\lambda\int_0^x y\varphi(y)\,dy + \cancel{\lambda x(1-x)\varphi(x)} + \lambda\int_x^1 (1-y)\varphi(y)\,dy - \cancel{\lambda x(1-x)\varphi(x)}$$

$$\varphi''_{xx} = -\lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x) = -\lambda\varphi(x)$$

Учитывая то, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$, получим

след. систему:

$$\begin{cases} \varphi'' = -\lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \varphi_{общ} = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

$$\varphi(0) = C_2 = 0$$

$$\varphi(1) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x = 0 \hookrightarrow \underline{\underline{\sqrt{\lambda} = \pi k}},\ k \in \mathbb{Z}$$

Получаем: $\varphi(x) = \sin\pi k x$, $k \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}$