(16.1) Док-ть, что собств. частоты малых колеб. не зависят от выбора обобщ. коорд.

ω мы находим из следующего:

$|C - A\omega^2| = 0$

Осуществим переход между координатами, в кот. $\omega \to \omega_*$.

$|S^{-1}CS - S^{-1}AS\omega_*^2| = |S^{-1}| \cdot |S| \cdot |C - A\omega_*^2| = 0$

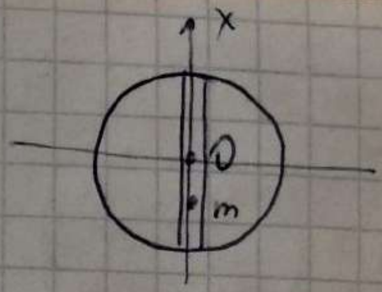
т.к. матр. S невырождена, то $|S| \neq 0$ и $|S^{-1}| \neq 0$.

Тогда получим исходное рав-во с ω_*^2:

$|C - A\omega_*^2| = 0.$

Откуда $\omega = \omega_*$.//

Задача 16.11



На точку действует

$$F(x) = \gamma \frac{M(x)\, m}{x^2} = \gamma \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 m}{x^2} \rho = \frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Ур-ие Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \text{ где у нас } q = x$$

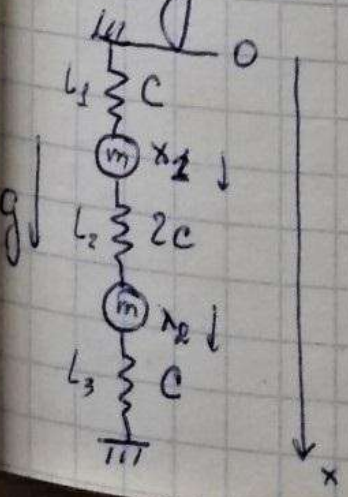
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = -\frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x$$

$$m\ddot{x} + \frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{3}\pi \gamma \rho x = 0 \hookrightarrow \omega^2 = \frac{4}{3}\pi \gamma \rho$$

Зная, что $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \gamma \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma \rho}} \simeq 5059\,с = 84\,мин.$

Задача 16.33



$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2}$$

$$\Pi = \frac{c x_1^2}{2} + \frac{c x_2^2}{2} + \frac{2c(x_1 - x_2)^2}{2} +$$

$$+ (l_1 + x_1)mg - (l_1 + l_2 + x_1 + x_2)mg =$$

$$= -mg(2l_1 + 2x_1 + l_2 + x_2) + \frac{3}{2}c x_1^2 + \frac{3}{2}c x_2^2 - 2c x_1 x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} 3c - \lambda m & -2c \\ -2c & 3c - \lambda m \end{vmatrix} = 0$$

$$(3c - \lambda m)^2 - 4c^2 = (3c - \lambda m - 2c)(3c - \lambda m + 2c) =$$

$$= (c - \lambda m)(5c - \lambda m) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{m} \qquad \lambda_2 = \frac{5c}{m}$$

Соответствующие векторы:

$$\begin{pmatrix} 3c - c & -2c \\ -2c & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3c - 5c & -2c \\ -2c & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\right) \\ C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{5c}{m}}t + C_4\right) \end{bmatrix}$$

Либо иначе можно записать так:

$$x_1 = C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t \cos C_2 + C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \sin C_2 +$$

$$+ C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t \cos C_4 - C_3 \cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t \sin C_4 =$$

$$= C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t + C_4 \cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t$$

$$x_2 = C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t \cos C_2 + C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \sin C_2 -$$

$$- C_1 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t \cos C_4 - C_3 \cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t \sin C_4 =$$

$$= C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t - C_4 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t$$

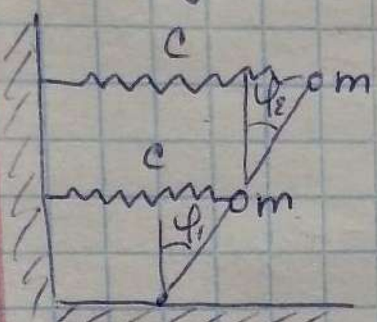
При $t-0$:

$$\begin{cases} x_1^\circ = C_2 + C_4 \\ x_2^\circ = C_2 - C_4 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{x_1^\circ + x_2^\circ}{2} \\ C_4 = \dfrac{x_1^\circ - x_2^\circ}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} + C_3\sqrt{\frac{5c}{m}} = \dot{x}_1^\circ \\ C_1 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} - C_3\sqrt{\frac{5c}{m}} = \dot{x}_2^\circ \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_1 = \sqrt{\frac{m}{c}} \; \dfrac{\dot{x}_1^\circ + \dot{x}_2^\circ}{2} \\ C_3 = \sqrt{\frac{m}{5c}} \; \dfrac{\dot{x}_1^\circ - \dot{x}_2^\circ}{2} \end{cases}$$

Движения на Марсе и Земле неразличимы, но в силу разных g происх. у разных полож. равновесия.

Задача 16.47



Подсчитаем потенц. энергию и т.к. колебания малы, то Δx пружин $\Delta x = l\sin\varphi \approx l\varphi$.

Поэтому

$$\Pi_1 = mgl\cos\varphi_1 + \frac{c}{2}l^2\varphi_1^2 = mgl - mgl\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{cl^2\varphi_1^2}{2}$$

$$\Pi_2 = mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2 + \frac{c}{2}(l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2)^2 =$$
$$= 2mgl - lmg\left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \frac{c}{2}l^2(\varphi_1 + \varphi_2)^2$$
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{mgl}{2}\left(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) + 3mgl + \frac{c}{2}l^2\left(\varphi_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2)^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} -2mgl + 2cl^2 & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \frac{m\dot\varphi_1^2 l^2}{2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \dot{\vec\varphi}_2 \times \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\varphi_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\varphi_2 \\ l\cos\varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot\varphi_1 l\cos\varphi_1 \\ \dot\varphi_1 l\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot\varphi_2 l\cos\varphi_2 + \dot\varphi_1 l\cos\varphi_1 \\ -\dot\varphi_2 l\sin\varphi_2 + \dot\varphi_1 l\sin\varphi_1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2^{\,2} = \dot\varphi_1^2 l^2 + \dot\varphi_2^2 l^2 + 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 l^2 \overset{\approx 1}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} 2cl^2 - 2mgl - 2\lambda ml^2 & cl^2 - \lambda ml^2 \\ cl^2 - \lambda ml^2 & cl^2 - mgl - \lambda ml^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(cl^2 - mgl - \lambda ml^2)^2 - (cl^2 - \lambda ml^2)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}cl^2 - \sqrt{2}mgl - \sqrt{2}\lambda_1 ml^2 - cl^2 + \lambda_1 ml^2 = 0$$

$$\sqrt{2}cl^2 - \sqrt{2}mgl - \sqrt{2}\lambda_2 ml^2 + cl^2 - \lambda_2 ml^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}mgl + cl^2(1-\sqrt{2})}{ml^2(1-\sqrt{2})} = \frac{c}{m} - (\sqrt{2}+2)\frac{g}{l}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}mgl - cl^2(1+\sqrt{2})}{-ml^2(1+\sqrt{2})} = \frac{c}{m} - (2-\sqrt{2})\frac{g}{l}$$

Для соответствующих векторов: $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

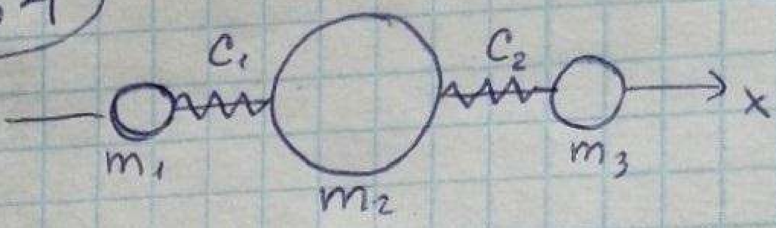
$$\begin{pmatrix} (2+2\sqrt{2})mgl & (2+\sqrt{2})mgl \\ (2+\sqrt{2})mgl & (1+\sqrt{2})mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \cancel{u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Второй вектор найдем из ортогон-сти с матр. A

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}\, t + \psi_1\right) \cdot C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}\, t + \psi_2\right) C_2$$

16.64



$c_1 = c_2 = c$

$m_1 = m_3 = m$

$m_2 = nm$

$$\Pi = \frac{c(x_1 - x_2)^2}{2} + \frac{c(x_2 - x_3)^2}{2}$$

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{nm\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & nm & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} c-\lambda m & -c & 0 \\ -c & 2c-\lambda nm & -c \\ 0 & -c & c-\lambda m \end{vmatrix} =$$

$$= (c-\lambda m)\left((2c-\lambda nm)(c-\lambda m) - c^2\right) + c\left(-c(c-\lambda m)\right) =$$

$$= (c-\lambda m)\left(2c^2 - 2c\lambda m - c\lambda nm + \lambda^2 nm^2 - c^2 - c^2\right) =$$

$$= (c-\lambda m)(\lambda m)(-2c - cn + \lambda nm) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{c}{m} \qquad \lambda_3 = \frac{(2+n)c}{mn}$$

Тогда для соотв. векторов:

$$\begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ -c & -2c^2n & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Из усл. ортог. с матр. A получим $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{n} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(0t+\psi_1)\cdot C_1 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\psi_2\right)\cdot C_2 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{2+n}{m}\cdot\frac{c}{n}}t+\psi_3\right)\cdot C_3 \end{pmatrix}$$