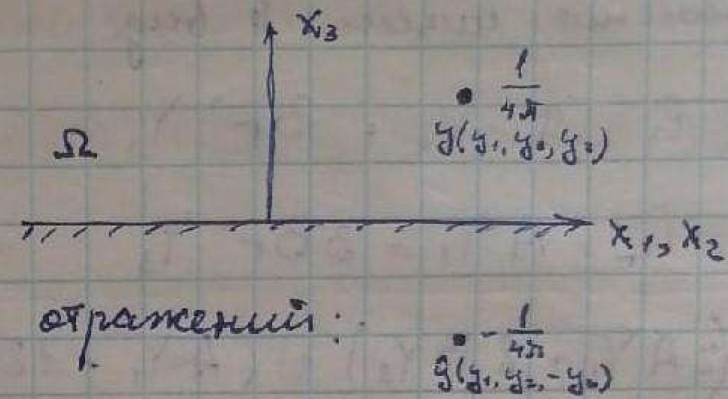
17.1(1, 2)

1) $x_3 > 0$



Используем метод отражений:

на том же расст. от оси поместим заряд противоп. знака $\hat{y}$: $G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi|x-\hat{y}(y)|}\right]}_{g(x,y)}$,

Покажем, что G – ф-ция Грина:

- ф-ция $\frac{1}{r}$ гармонич. в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{|x|}$ гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

и при фикс. $a \in \mathbb{R}^3$ ф-ция $\frac{1}{|x-a|}$ гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$.

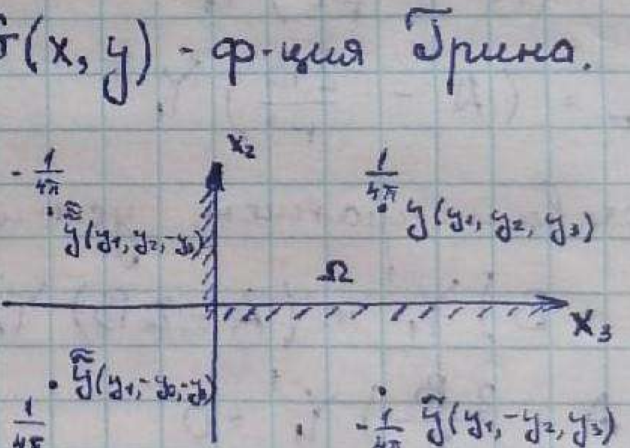
Поскольку $\hat{y} \notin \Omega$, то $g(x,y)$ гарм. в Ω и непр. в $\overline{\Omega}$ $\forall y \in \Omega$

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}$$

- $G(x,y)\big|_{x \in \partial\Omega} = G(x,y)\big|_{x_3=0} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0$ при $|x| \to \infty$

Откуда следует, что $G(x,y)$ – ф-ция Грина.

2) $x_2 > 0$, $x_3 > 0$



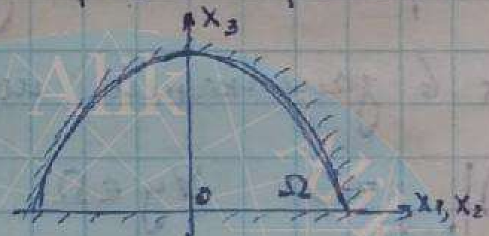
Аналогично методом отражений получаем:

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\hat{y}|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\hat{\hat{y}}|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\hat{\hat{\hat{y}}}|}\right]}_{g(x,y)},$$

Покажем, что G - ф-ция Грина:

- $g(x,y)$ гармонична в Ω, т.к. $\tilde{y} \notin \Omega, \tilde{\tilde{y}} \notin \Omega, \tilde{\tilde{\tilde{y}}} \notin \Omega$ и непр. в $\overline{\Omega}$ $\forall y \in \Omega$
- $G(x,y)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0$ при $|x| \to \infty$

Откуда следует, что $G(x,y)$ - ф-ция Грина.

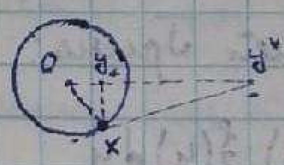


17.2(2)

$|x| < R, \ x_3 > 0$

Сначала построим ф-цию Грина для шара (при $|y| \neq 0$)

Поместим заряд q в точку y^* так, чтобы y^* был симм. y, т.е. $|y| \cdot |y^*| = R$ (y и y^* лежат на одной прямой)



$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{R} = \frac{R}{|y^*|} = \frac{|x|}{|y^*|}$$

Откуда ΔOxy и ΔOy^*x подобны $\hookrightarrow \dfrac{|y|}{R} = \dfrac{|x-y|}{|x-y^*|}$

Ф-ция $G^*(x,y)$ на сфере должна быть нулевой

$$G^*(x,y) = \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\bigg|_{|x|=R} = \left(\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\bigg|_{|x|=R} = 0$$

Откуда $q = \dfrac{R}{|y|}$

$$G^*(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y|\cdot|x-y^*(y)|}, \quad y^*(y) = y\frac{R^2}{|y|^2}$$

Для полусферы отразим полученные y и y^* относит.

плоскости Ox_1x_2: $y^{**} = (y_1, y_2, -y_3)$, $y^{***} = y^{**}\dfrac{R^2}{|y|^2}$

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{R}{4\pi|y|}\frac{1}{|x-y^*(y)|} - \frac{1}{4\pi|x-y^{**}(y)|} + \frac{R}{4\pi|y||x-y^{***}(y)|}\right]}_{g(x,y)}$$

Аналогично $G(x,y)$ - ф-ция Грина, т.к.

- $g(x,y)$ гармонична всюду, кроме y^*, y^{**}, y^{***}, которые не лежат в замыкании исслед. области
- $G(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0, \ |x| \to \infty$

17.4(1)

$$\Delta u = -f(x), \ x_3 > 0, \ u\big|_{x_3=0} = u_0(x)$$

f, u_0 непрерывны и ограничены.

Решение задачи задаётся ф-цией Грина:

$$u(x) = -\int_{\partial D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}_y} u_0(y)\, dS_y - \int_D G(x,y) f(y)\, dy$$

Из задачи 17.1(1)

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, $y_3 > 0$

Внешняя нормаль к границе области

$D = \{y \in \mathbb{R}^3, y_3 > 0\}$ направлена вдоль оси Oy_3 вниз

Откуда $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}_y} = -\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_3}\right|_{y_3=0} = \left[\frac{x_3-y_3}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{3/2}} - \frac{-(x_3+y_3)}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2\right)^{3/2}}\right]\Bigg|_{y_3=0} =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{3/2}}$$

Ответ: $u(x) = \dfrac{x_3}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3}\,dS_y + \frac{1}{4\pi}\int_D \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}\right) f(y)\,dy$

17.12(3)

$$\Delta u = 0,\ y>0,\ u|_{y=0} = u_0(x)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,b] \\ 0, & x\notin[a,b] \end{cases}$$

Найдём ф-цию Грина. Она получается аналогично задаче 17.1(1), но только тут случай двумерный:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|\xi-\eta| - \frac{1}{2\pi}\ln|\xi-\eta^*|,\ \text{где } \eta=(x',y'),\ \eta^*=(x',-y'),\ \xi=(x,y)$$

Решение имеет вид

$$u(x,y) = -\int_{y'=0} \frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial \vec{n}_\eta} u_0(\eta)\,dS_\eta$$

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{(x-x')^2+(y+y')^2}}$$

Внешняя нормаль направлена вниз вдоль Oy':

$$\left.\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial \vec{n}_\eta}\right|_{y'=0} = -\left.\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial y'}\right|_{y'=0} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}}\ \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\,\dfrac{-(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \ldots}{(x-x')^2+(y+y')^2} =$$

$$\left.\frac{-\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\;\dfrac{y+y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}}{}\right|_{y'=0} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{-2y}{(x-x')^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}$$

$$u(x,y) = -\int_a^b \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\,dx' = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x'-x}{y}\right)\Bigg|_b^a =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-x}{y}\right) + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{b-x}{y}\right)$$

Ответ: $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{b-x}{y}\right)\right)$

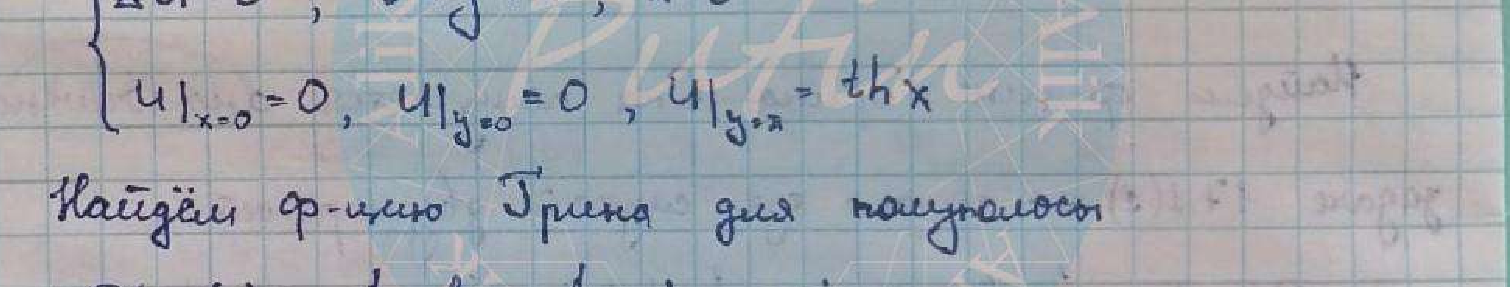
17.15(4)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0<y<\pi,\ x>0 \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x \end{cases}$$

Найдём ф-цию Грина для полуполосы

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z,\zeta)|}$$

где $w(z,\zeta)$ - конформное отображение полуполосы на внутренность единичного круга, переводящее точку ζ в центр круга



$$w_2 = e^z + e^{-z} = 2\operatorname{ch} z$$

Точка ζ перейдёт в $2\operatorname{ch}\zeta$

Верхняя полуплоск. переводится во внутр. окр-сти с помощью ДЛО:

$$w = \frac{w_2(z) - w_2(\xi)}{w_2(z) - \overline{w_2(\xi)}} = \frac{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\xi}}$$

$$G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \xi} \right|$$

Перейдём к действит. перем.: $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$

$$|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\xi}| = 2 \left| \operatorname{sh} \frac{z + \bar{\xi}}{2} \operatorname{sh} \frac{z - \bar{\xi}}{2} \right| = 2 \operatorname{sh} \left| \frac{z + \bar{\xi}}{2} \right| \operatorname{sh} \left| \frac{z - \bar{\xi}}{2} \right| =$$

$$= 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{(x + x')^2 + (y - y')^2}}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y + y')^2}}{2}$$

$$|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \xi| = 2 \operatorname{sh} \left| \frac{z + \xi}{2} \right| \operatorname{sh} \left| \frac{z - \xi}{2} \right| = 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2}}{2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}{2}$$

Решение имеет вид

$$u(\xi, \eta) = - \int_{y' = \pi} \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial \vec{n}_2} \operatorname{th} x' \, dx'$$

$$\left. \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial \vec{n}_2} \right|_{y' = \pi} = \left. \frac{\partial G}{\partial y'} \right|_{y' = \pi}$$

$$G(x, x', y, y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2}{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4}$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y'} \right|_{y' = \pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4}{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2} \cdot \frac{(p_1' \operatorname{ch} p_1 \operatorname{sh} p_2 + p_2' \operatorname{ch} p_2 \operatorname{sh} p_1) \operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4 -}{}$$

$$\left. \frac{- (p_3' \operatorname{ch} p_3 \operatorname{sh} p_4 + p_4' \operatorname{ch} p_4 \operatorname{sh} p_3) \operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2}{(\operatorname{sh} p_3)^2 (\operatorname{sh} p_4)^2} \right|_{y' = \pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{p_1' \operatorname{ch} p_1 \operatorname{sh} p_2 + p_2' \operatorname{ch} p_2 \operatorname{sh} p_1}{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2} - \frac{1}{2\pi} \frac{p_3' \operatorname{ch} p_3 \operatorname{sh} p_4 + p_4' \operatorname{ch} p_4 \operatorname{sh} p_3}{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(p_1' \operatorname{cth} p_1 + p_2' \operatorname{cth} p_2 - p_3' \operatorname{cth} p_3 - p_4' \operatorname{cth} p_4 \right) \Big|_{y' = \pi}$$

Осталось посчитать интеграл

18.6(1)

$$\rho = \rho(|x|) \in C$$

$$|x| < R$$

$$V(x) = \int\limits_{|y|<R} \frac{\rho(|y|)\,dy}{|x-y|}$$

Зафиксируем x. Тогда $\exists$ ортог. матрица S: $x = S\begin{pmatrix}0\\0\\|x|\end{pmatrix}$.

Замена $y = S\tilde{y}$

$$V(x) = \int\limits_{|S\tilde{y}|<R} \frac{\rho(|S\tilde{y}|)\,|\det S|\,d\tilde{y}}{\left|S\left(\begin{pmatrix}0\\0\\|x|\end{pmatrix} - \tilde{y}\right)\right|} = \int\limits_{|\tilde{y}|<R} \frac{\rho(|\tilde{y}|)\,d\tilde{y}}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - |x|)^2}}$$

Перейдём в сферич. координаты:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ \tilde{y}_2 = r\sin\theta\cos\varphi \\ \tilde{y}_3 = r\cos\theta \end{cases} \qquad V(x) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho(r)\,r^2 dr \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta}}}_{I(x)}$$

① $x = \vec{0}$

$$I(\vec{0}) = \frac{2}{r} \hookrightarrow V(\vec{0}) = 4\pi \int\limits_0^R \rho(r)\,r\,dr$$

② $x \neq \vec{0}$

$$I(x) = \frac{1}{2r|x|} \int\limits_0^{\pi} \frac{d(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta)}{\sqrt{r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta}} = -\frac{1}{r|x|} \sqrt{r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta}\,\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{r + |x| - |r - |x||}{r|x|}$$

a) $|x| \geq R \hookrightarrow |r - |x|| = |x| - r \quad \forall r \leq R$

$$I(x) = \frac{r + |x| - (|x| - r)}{r|x|} = \frac{2}{|x|}, \quad V(x) = \frac{4\pi}{|x|} \int\limits_0^R \rho(r)\,r^2 dr$$

б) $0<|x|<R$

$$I(x)=\begin{cases}\frac{2}{|x|}, & r\le|x|\\ \frac{2}{r}, & r>|x|\end{cases}$$

$$V(x)=\frac{4\pi}{|x|}\int_0^{|x|}\rho(r)r^2dr+4\pi\int_{|x|}^{R}\rho(r)r\,dr$$

18.16 Потенциал простого слоя на сфере $|x|=R$:

$$V^{(0)}(x)=\int_{|y|=R}\frac{\mu_0}{|x-y|}dS_y$$

Параметризуем сферу:

угол между $\vec{x}$ и $\vec{y}$ есть θ, φ - полярный угол в плоск. $\perp\vec{x}$

Учитывая, что $|y|=R$:

$$|x-y|=\sqrt{|x|^2+R^2-2|x|R\cos\theta}$$

$$V^{(0)}(x)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\mu_0R^2\sin\theta}{\sqrt{|x|^2+R^2-2|x|R\cos\theta}}d\theta=2\pi\mu_0R^2\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{|x|^2+R^2-2|x|R\cos\theta}}=$$

$$=2\pi\mu_0R^2\left.\frac{\sqrt{|x|^2+R^2-2|x|R\cos\theta}}{|x|R}\right|_0^{\pi}=\frac{2\pi\mu_0R^2}{|x|R}\left(R+|x|-|R-|x||\right)$$

1) $|x|\geq R$

$$V^{(0)}(x)=\frac{2\pi\mu_0R}{|x|}\left(R+|x|+R-|x|\right)=4\pi\mu_0\frac{R^2}{|x|}$$

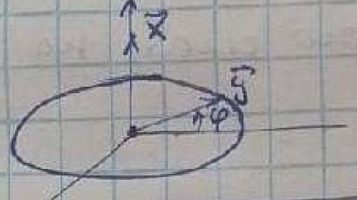
2) $|x|<R$

$$|x|<R\hookrightarrow V^{0}(x)=4\pi\mu_0R$$

18.18(4)

$$V^{(0)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \frac{\mu(\varphi)}{|x-y|}\, dS_y$$

Параметриз. диск полярн. координатами:



т.к. на оси диска

$$|x-y|\Big|_{|y|=r} = \sqrt{|x|^2+|y|^2}\Big|_{|y|=r} = \sqrt{|x|^2+r^2} = \sqrt{x_3^2+r^2}$$

$$V^{(0)}(x) = \int\limits_0^{2\pi} \mu(\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{x_3^2+r^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^R \frac{dr^2}{\sqrt{x_3^2+r^2}} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\varphi)\, d\varphi =$$

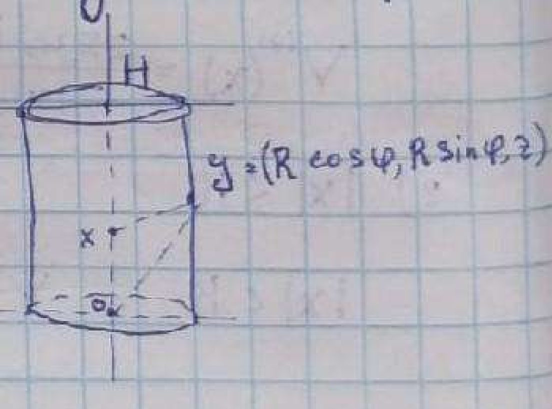
$$= \left(\sqrt{x_3^2+R^2} - |x_3|\right) \int\limits_0^{2\pi} \mu(\varphi)\, d\varphi$$

18.19(1)

$$V^{(0)}(x) = \mu_0 \int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\, dS_y$$

$$S = \{x_1^2 + x_2^2 = R,\ 0 \le x_3 \le H\}$$

Пов-сть S параметризуем полярным углом и вертик. координатой z



$$|x-y| = \sqrt{(z-x_3)^2 + R^2}$$

$$V^{(0)}(x) = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H \frac{R\,dz}{\sqrt{(z-x_3)^2+R^2}} =$$

$$= 2\pi\mu_0 R \ln\left|R\sqrt{(z-x_3)^2+R^2} + R(z-x_3)\right|\Bigg|_0^H = 2\pi\mu_0 R \ln \frac{H-x_3+\sqrt{R^2+(H-x_3)^2}}{\sqrt{R^2+x_3^2} - x_3}$$

18.20

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y$$

$$\nabla_y \frac{1}{|x-y|} = \nabla_y \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} = \frac{x-y}{|x-y|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right)$$

Обозначим $\vec{a} = \frac{x-y}{|x-y|^3}$.

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y$$

1) $]\ |x| > R$

$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \nabla_y \frac{1}{|x-y|} = 0$

По ф-ле Гаусса-Остроградского $V^{(1)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \nu_0 \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0$

2) $]\ |x| < R$

Рассмотрим область $G_\varepsilon = \{|y|<R \setminus \{|y-x| \leq \varepsilon\}$

$\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в G_ε аналогично 1)

По т. Острогр.-Гаусса для обл. G_ε

$$\underbrace{\int\limits_{|y|=R} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y}_{V^{(1)}(x)} + \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y = 0$$

$$V^{(1)}(x) = -\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y = -\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \frac{(x-y, x-y)}{|x-y|^3 \varepsilon} dS_y =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0\, dS_y = -\frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 \nu_0 = -4\pi \nu_0$$

③] $|x| = R$

По св-ву потенциала двойного слоя:

$$V^{(1)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| > R}} V^{(1)}(x) = 2\pi \nu_0 + V_3^{(1)}(x_0), \text{ где } |x_0| = R$$

$$V^{(1)}(x_0) = 2\pi \nu_0 - 4\pi \nu_0 = -2\pi \nu_0 \quad \forall x_0 : |x_0| = R$$

Ответ:
$$V^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > R \\ -2\pi \nu_0, & |x| = R \\ -4\pi \nu_0, & |x| < R \end{cases}$$

18.22(3)

$$V^{(1)}(x) = \int_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y$$

Аналогично прошлой задаче

$$V^{(1)}(x) = \int_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y$$

$\vec{n}_y = -\vec{k}$ – против оси x_3, по условию

$$V^{(1)}(x) = \int_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \frac{-x_3+y_3}{|x-y|^3} dS_y$$

Аналогично 18.18(4) параметризуем диск и получаем

$$V^{(1)}(x) = \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi \int_0^R \frac{(y_3-x_3)\, r\, dr}{(x_3^2 + r^2)^{3/2}}$$

При этом $x_3 - y_3 = x_3 - 0 = x_3$

$$V^{(1)}(x) = \frac{-x_3}{2} \int_0^R \frac{d r^2}{(x_3^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi = x_3\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} - \frac{1}{|x_3|}\right) \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi, \; x_3 \neq 0$$