(21) N белых, M черн, k - потеряем

Достать белый шар $P(A_k)$ - ?

Пусть $B_k^б$ - {потерять белый шар на k-том шаге}

$B_k^ч$ - {потерять черный шар на k-том}

A_k - {вытащить белый шар ~~на k-том шаге~~ после потери k шаг.}

Покажем, что $P(A_k) = \frac{N}{N+M}$ по индукции.

База:

$$P(A_1) = P(B_1^б)\, P(A_1 | B_1^б) + P(B_1^ч)\, P(A_1 | B_1^ч) =$$

$$= \frac{N}{N+M} \cdot \frac{N-1}{N+M-1} + \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1} = \frac{N}{N+M}$$

Переход:

Предположим, что ~~для~~ после потери k-го шага верно $P(A_k) = \frac{N}{N+M}$. Далее учтём, что вер-сть потерять ~~на~~ $k+1$ шар равна вер-сти вытащить соотв. шар после потери k шар, то есть $\frac{N}{N+M}$ - для б. и $\frac{M}{N+M}$ - для ч.

Шаг индукции:

$$P(A_{k+1}) = P(B_{k+1}^б)\, P(A_{k+1} | B_{k+1}^б) + P(B_{k+1}^ч)\, P(A_{k+1} | B_{k+1}^ч) =$$

$$= \frac{N}{N+M} \cdot \frac{N-1}{N+M-1} + \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1} = \frac{N}{N+M}$$

(22) n ключей с откладыванием.

B_k = { откроем с k-той попытки }

A_i = { i-той подошёл }

$P(B_k)$ - ?

$P(B_1) = \frac{1}{n}$

на 1 не подош.

$P(B_2) = P(\bar{A}_1)\,P(A_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

на 2 под.

$P(B_3) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot P(A_3 | \bar{A}_2 \bar{A}_1) =$

по ф-ле умнож.

$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{n-2}} = \frac{1}{n}$

И так далее (по индукции понятно), то будет $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$

Получим $P(B_k) = \frac{1}{n}$

(23) Пусть α и β знач. на 2х костях

$$P(\alpha = 3 \mid \alpha < \beta) = \frac{P(\alpha < \beta \mid \alpha = 3) \cdot P(\alpha = 3)}{\sum_i P(\alpha = i) \cdot P(\alpha < \beta \mid \alpha = i)} =$$

$$= \frac{3/6 \cdot 1/6}{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{6}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(24) $A, B,$ и A, C - пары незав. событ.

$C \subset B$. Док-ть A и $B \setminus C$ независ.

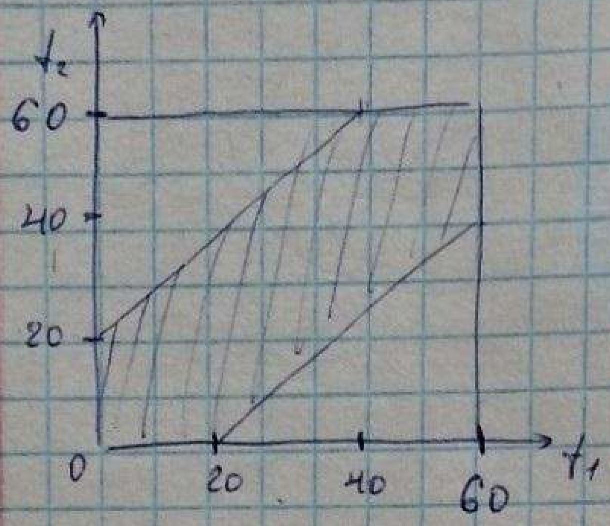
т. к. $C \subset B$, то $P(B \setminus C) = P(B) - P(C)$

$P(A \cdot (B \setminus C)) = P(AB) - P(AC) = P(A) P(B) - P(A) P(C) =$

$= P(A) (P(B) - P(C)) = P(A) \cdot P(B \setminus C)$ //

ч.т.д.

(IV) (27) Рассмотрим геометрич. интерпр.:



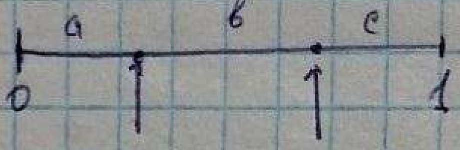
Нас устраивает

$\forall$ точка из закр. точки,

т.е. $|t_1 - t_2| < 20$.

$$P(A) = \frac{60 \cdot 60 - 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$ //

28



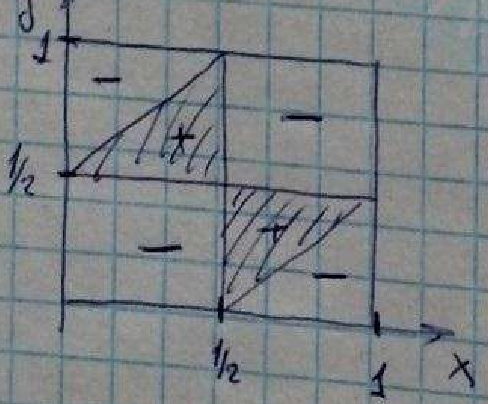
разлом в 2х точках.

Условие, что можно сложить Δ, это

$a + в \geq c$.

Обозначим x - коорд. 1 т. разлома, y - 2 т. разл.

$$\begin{cases} \min(x, y) < \frac{1}{2} \\ \max(x, y) > \frac{1}{2} \\ |x - y| < \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow$$ условия, при кот. сложим Δ.



$P(A) = \frac{1}{4}$.