① Упражнения

а) • Вычислим обратный оператор по отнош. к $\hat{\mathbb{I}}$:

по опред.: $\hat{\mathbb{I}}\hat{\mathbb{I}}^{-1} = \hat{1}$ $\hookrightarrow$ $\underbrace{\hat{\mathbb{I}}\hat{\mathbb{I}}}_{\hat{1}}\hat{\mathbb{I}}^{-1} = \hat{\mathbb{I}}\hat{1} \longrightarrow \hat{\mathbb{I}}^{-1} = \hat{\mathbb{I}}$

То есть $\hat{\mathbb{I}}^{-1} = \hat{\mathbb{I}}$

• Найдём эрмитово сопряжённый к $\hat{\mathbb{I}}$:

по опред.: $\langle \varphi | \hat{\mathbb{I}} \psi \rangle = \langle \hat{\mathbb{I}}^{+} \varphi | \psi \rangle$

$$\langle \varphi | \hat{\mathbb{I}} \psi \rangle = \int \varphi^*(\vec{r}) \underbrace{\hat{\mathbb{I}} \psi(\vec{r})}_{\psi(-\vec{r})} dV \overset{\vec{r}\,' = -\vec{r}}{=\!=} \int \varphi^*(-\vec{r}\,') \psi(\vec{r}\,') dV =$$

$$= \int \left(\hat{\mathbb{I}} \varphi(\vec{r}\,')\right)^* \psi(\vec{r}\,') dV = \langle \hat{\mathbb{I}} \varphi | \psi \rangle \hookrightarrow \hat{\mathbb{I}}^{+} = \hat{\mathbb{I}}$$

То есть $\hat{\mathbb{I}}^{+} = \hat{\mathbb{I}}$

б) • Найдём обратной оператор по отнош. к $\hat{\mathbb{T}}_{\vec{a}}$

по опр.: $\hat{\mathbb{T}}_{-a} \hat{\mathbb{T}}_{a} f(\vec{r}) = f(\vec{r})$ (т.к. $\hat{\mathbb{T}}_{\vec{a}} f(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a})$)

То есть $\hat{\mathbb{T}}_{a}^{-1} = \hat{\mathbb{T}}_{-a}$

• Найдём $\hat{\mathbb{T}}_{a}^{+}$: $\underbrace{\langle \varphi | \hat{\mathbb{T}}_{a} \psi \rangle}_{\langle \hat{\mathbb{T}}_{a}^{+} \varphi | \psi \rangle} = \int \varphi^*(\vec{r}) \hat{\mathbb{T}}_{a} \psi(\vec{r}) dV = \int \varphi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r} - \vec{a}) dV =$

$$= [\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}] = \int \varphi^*(\vec{r}\,' + \vec{a}) \psi(\vec{r}\,') dV = \langle \hat{\mathbb{T}}_{-a} \varphi | \psi \rangle$$

То есть $\hat{\mathbb{T}}^{+} = \hat{\mathbb{T}}_{-a}$

И, смотря предыдущий пункт: $\hat{\mathbb{T}}_{a}^{-1} = \hat{\mathbb{T}}^{+}$

② Оператор инверсии: $\hat{\mathbb{I}} f(\vec{r}) = f(-\vec{r})$

Чтобы найти собств. значения и собств. состояния, решим ур-ие $\hat{\mathbb{I}} f = \lambda f$

$$\hat{\mathbb{I}}^2 f = \hat{\mathbb{I}}(\lambda f) = \lambda^2 f = f \hookrightarrow \lambda^2 = 1 \hookrightarrow \lambda_\pm = \pm 1$$

Для $\lambda_+ = 1$:

$$\hat{\mathbb{I}} f_+(\vec{r}) = \underbrace{f_+(-\vec{r})}_{\text{по опред. операт. инверс.}} = \underbrace{f_+(\vec{r})}_{\text{т.к. } \lambda = 1} \hookrightarrow f_+ \text{ - чётная функц.}$$

Для $\lambda_- = -1$:

$$\hat{\mathbb{I}} f_-(\vec{r}) = f_-(-\vec{r}) = -f_-(\vec{r}) \hookrightarrow f_- \text{ - нечётная ф-ция}$$

③ $$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x-a) = \psi(x) - \psi'(x)\cdot a + \frac{1}{2}\psi''(x)a^2 + \ldots =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-a\frac{d}{dx}\right)^n\right]\psi(x) = e^{-a\frac{d}{dx}}\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}a\cdot\hat{p}}\psi(x)$$

Т. е. формально $\hat{T}_a = e^{-\frac{i}{\hbar}a\cdot\hat{p}}$, где $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ - операт. имп.

Собственные ф-ции и собств. значения $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ суть $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ и $p = \hbar k$, где $k \in \mathbb{R}$ - волновое число

Значит оператор $\hat{T}_a$ имеет те же собств. ф-ции, что и $\hat{p}$, т. к. по опред. ф-ции от оператора $\hat{A}\psi_a(x) = a\psi_a(x) \overset{def}{\longleftrightarrow}$

$\overset{def}{\longleftrightarrow} f(\hat{A})\psi_a(x) = f(a)\psi_a(x)$

Откуда собств. значения $\hat{T}_a$ суть $\lambda = e^{-ika}$, $k \in \mathbb{R}$

④

Используя упр. 3 и учитывая, что в общем случае не x, а $\vec{r}$ и $\frac{d}{dx} \to \nabla$.

Тогда $\hat{T}_a = e^{-a\nabla} = e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}}$, где $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

⑤ Явный вид оператора $e^{i\varphi \hat{I}}$

Вспоминая, что $e^{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, а $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{k!}$, получим:

$$e^{i\varphi\hat{I}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi\hat{I})^k}{k!} = \sum_{\substack{S=0 \\ k=2S}}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2S}}{(2S)!}\hat{1} + \sum_{\substack{S=0 \\ k=2S+1}}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2S+1}}{(2S+1)!}\hat{I} =$$

$$= \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(-1)^S \varphi^{2S}}{(2S)!}\hat{1} + \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(-1)^S \varphi^{2S+1}}{(2S+1)!} i\hat{I} = \hat{1}\cos\varphi + i\hat{I}\sin\varphi$$

⑥

$$[H, I] \overset{def}{=} HI - IH$$

• Рассмотрим $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} =$$

$$= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

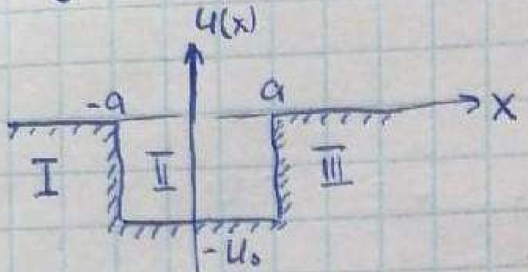
• Рассмотрим $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} =$$

$$= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

Задача 1.

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$



Рассм. обл. I: $x < -a$.

$$\Psi'' - \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{\varkappa^2}\Psi = 0 \qquad \Psi'' - \varkappa^2\Psi = 0$$

$$\Psi(x) = Ae^{\varkappa x} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\tilde{A}}e^{-\varkappa x}$$

0, т.к. $\Psi(x) \to 0$, $x \to -\infty$

$$\Psi(x) = Ae^{\varkappa x}, \quad x < -a$$

Рассм. обл. II:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - U_0\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\Psi''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(U_0 - |E|)}_{>0}}_{k^2}\Psi(x) = 0 \qquad \Psi'' + k^2\Psi = 0$$

$$\Psi(x) = B\cos kx + C\sin kx$$

Рассм. обл. III:

аналогично I $\hookrightarrow$ $\Psi(x) = De^{-\varkappa x}$

Получим следующее:

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{\varkappa x}, & x < -a \\ B\cos kx + C\sin kx, & |x| < a \\ De^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

Заметим, что $U(x) = U(-x)$, и если $\Psi(x)$ - решение, то $\Psi(-x)$ тоже решение с той же E. Можем искать решение в виде чётных и нечётн. ф-ций.

Сшивка:

$$\begin{cases} A e^{-\varkappa a} = B\cos ka - C\sin ka \\ A\varkappa e^{-\varkappa a} = +Bk\sin ka + Ck\cos ka \end{cases} \quad x=-a \quad \begin{matrix}\psi \\ \psi'\end{matrix}$$

$$\begin{cases} D e^{-\varkappa a} = B\cos ka + C\sin ka \\ -\varkappa D e^{-\varkappa a} = -Bk\sin ka + Ck\cos ka \end{cases} \quad x=a \quad \begin{matrix}\psi \\ \psi'\end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2B\cos ka = (D+A)e^{-\varkappa a} \\ 2C\sin ka = (D-A)e^{-\varkappa a} \\ 2Ck\cos ka = \varkappa(A-D)e^{-\varkappa a} \\ 2Bk\sin ka = \varkappa(A+D)e^{-\varkappa a} \end{cases}$$

Из симметрии $A = D$ (чётн.) либо $A = -D$ (нечётн)

1) $A = D \hookrightarrow \quad k\,tg\,ka = \varkappa, \quad C = 0, \quad B = \frac{Ae^{-\varkappa a}}{\cos ka}$

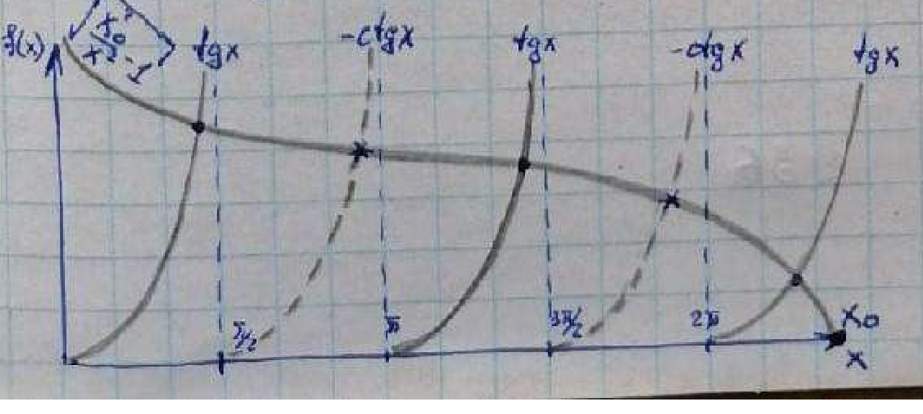
2) $A = -D \hookrightarrow \quad k\,ctg\,ka = -\varkappa, \quad B = 0, \quad C = \frac{Ae^{-\varkappa a}}{\sin ka}$

Это трансцендентные ур-ия, решим графически

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2m(U_0-|E|)}{\hbar^2}} \qquad k^2+\varkappa^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}$$

$$\underbrace{(ka)^2}_{X} + (\varkappa a)^2 = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} = X_0^2 \quad \hookrightarrow \quad \varkappa a = \sqrt{X_0^2 - X^2}$$

$$\psi_+ : \; X\,tg\,X = \sqrt{X_0^2 - X^2} \hookrightarrow tg\,X = \sqrt{\frac{X_0^2}{X^2}-1} \qquad \psi_- : \; ctg\,X = -\sqrt{\frac{X_0^2}{X^2}-1}$$



Координаты точек пересеч. - дадут k и $\varkappa$

$$k = \frac{X}{a}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2} - \frac{X^2}{a^2}}$$

Откуда и получим уровни энергии

т.к. $U_0 + E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} x_n^2 \hookrightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} x_n^2 - U_0$

Число решений опр-ся x_0: $N = \left[\frac{x_0}{\pi/2}\right] + 1 = \left[\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}}\right] + 1$

для чётных ф-ций всегда есть решение.

Определим значения коэф. B, A, C из усл-ия нормировки:

чётн.случ.: $\int_{-\infty}^{-a} B^2 e^{2\varkappa a} \cos^2 ka\, e^{2\varkappa x} dx + \int_{-a}^{a} B^2 \cos^2 kx\, dx +$

$+ \int_{a}^{\infty} e^{-2\varkappa x} B^2 e^{2\varkappa a} \cos^2 ka\, dx = 1 \hookrightarrow B = \left(\sqrt{a + \frac{\sin 2ka}{2k} + \frac{\cos^2 ka}{\varkappa}}\right)^{-1}$

Откуда найдём A.

нечётн. случ.: $C = \left(\sqrt{a - \frac{\sin 2ka}{2k} + \frac{\sin^2 ka}{\varkappa}}\right)^{-1}$ Откуда найдём A

Если $U_0 \to 0$, то $x_0 \to 0$. Из графика видно, что если Ψ - нечётн, то связанных состояний может не быть. Если Ψ - чётн., то связ. сост. есть всегда.

Оценим число уровней электрона в металл. обр. $U_0 = 10$ эВ:

а) $a = 0{,}1$ нм

$x_0 = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} = 0{,}073$, $N = 1$

б) $a = 10$ нм

$x_0 = 734$, $N = 468$

в) $a = 1$ см

$x_0 = 734 \cdot 10^{12}$ $N = 4{,}7 \cdot 10^{4}$

(7) Покажем сначала, что $[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n \hat{p}^{n-1}$

По индукции.

База при $n = 1$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] f(x) = [x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}] f(x) = -i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(f x) \right) =$$

$$= i\hbar f(x)$$

Пусть верно при $n-1$: $[\hat{x}, \hat{p}^{n-1}] = i\hbar (n-1) \hat{p}^{n-2}$

Тогда для n:

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = \hat{p}^{n-1}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}^{n-1}]\hat{p} = \hat{p}^{n-1} i\hbar +$$

$$+ i\hbar(n-1)\hat{p}^{n-1} = i\hbar n \hat{p}^{n-1}$$

Теперь вернёмся к задаче:

$$[\hat{x}, F(\hat{p})] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n [\hat{x}, \hat{p}^n] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n n i\hbar \hat{p}^{n-1} = i\hbar \frac{\partial \hat{F}(\hat{p})}{\partial \hat{p}}$$

т.к. $F(\hat{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{p}^n$, $\frac{\partial F(\hat{p})}{\partial \hat{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n n \hat{p}^{n-1}$

$$[\hat{p}, G(\hat{x})]f = [-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, G(x)] f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} G(x) f(x) +$$
$$+ G(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x) = -i\hbar(G'f + Gf') + Gi\hbar f' = -i\hbar G'f =$$
$$= -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x} f$$

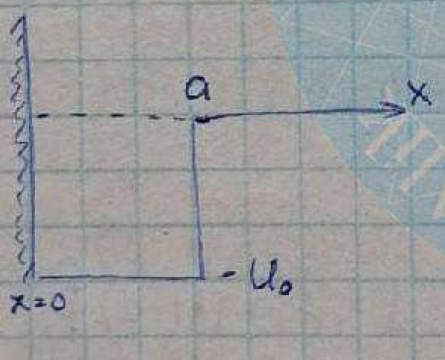
Откуда $[\hat{p}, G(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial G(\hat{x})}{\partial \hat{x}}$

<u>Задача 2.</u>

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Можем свести эту задачу к первой, т.к. в обоих

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + U(x)\Psi = E\Psi, \quad x > 0$$



Из 1 зад. решениями были Ψ_- - нечётное и Ψ_+ - чётное.

$\Psi_-(0) = 0$, $\Psi_+(0) \neq 0$.

В нашей задачи $\Psi(0) = 0 \hookrightarrow \Psi_+$ не подходит.

Имеем следующее решение этой задачи:

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} C\,\Psi_-(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Воспользуемся условием нормировки, чтобы определить константу C:

$$1 = \int\limits_0 |\tilde{\Psi}(x)|^2 dx = |C|^2 \int\limits_0^\infty |\Psi_-(x)|^2 dx = \frac{1}{2}|C|^2 \hookrightarrow C = \sqrt{2}$$

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\Psi_-(x), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

где $\Psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{\sin 2ka}{2ka} + \frac{\sin^2 ka}{\varkappa a}\right)^{-1/2} \cdot \begin{cases} \sin kx, & 0<x<a \\ -e^{\varkappa a}\sin ka\, e^{-\varkappa x}, & x>a \end{cases}$

Уровни энергии $E_n = \frac{\hbar^2 x_n^2}{2ma^2} - U_0$, где x_n - решения ур-ия $-\mathrm{ctg}\, x = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$

Если $a = const$, $U_0 \to 0$, то связанных сост. не останется.

Задача 4.

$$U(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha = \frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m} > 0$$

Это бесконечно мелкая яма, покажем это:

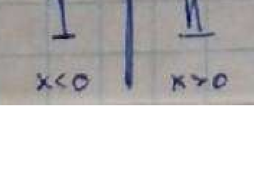
считаем, что $(U_0)_n a_n = const$. Усл-ие мелк. ямы $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$

$\underbrace{U_0 \cdot a}_{const} \ll \frac{\hbar^2}{ma} \to \infty$, $a \to 0 \hookrightarrow$ верно

$\int\limits_{-a}^{a} U(x)\,dx = -U_0 \cdot 2a = const$ - чтобы получить δ-ф-цию для U, как у нас.

Значит у нас ∞ мелкая симметричн. яма $\hookrightarrow$ есть 1 связ. состояние

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - \alpha\delta(x)\Psi(x) = E\Psi(x) = -|E|\Psi(x) \qquad (*)$$



Будем рассм. 2 области: $x<0$ - I

$x>0$ - II

I: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = -|E|\psi(x)$

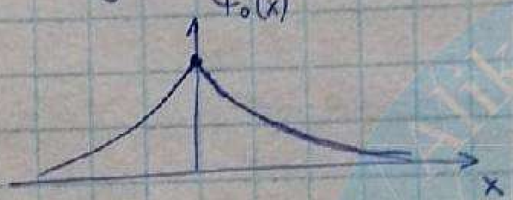
$$\psi''(x) = \varkappa^2\psi(x), \quad \text{где} \quad \varkappa = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

Решение есть $\psi(x) = \overset{0}{\tilde{A}}\, e^{-\varkappa x} + A e^{\varkappa x} = A e^{\varkappa x}$

II: Аналогично I $\hookrightarrow$ $\psi(x) = B e^{-\varkappa x}$

Исходя из того, что $\psi(x) \in C(x)$ $\hookrightarrow$ $\psi(+0) = \psi(-0)$ $\hookrightarrow$ $A = B$.

Тогда можно записать $\psi(x) = A e^{-\varkappa|x|}$.



Вычислим уровни энергии. Для этого восп-ся (*):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''(x)\,dx - \alpha\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)\,dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(+\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) - \alpha\psi(0) = E\cdot\psi(0)\cdot 2\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

Откуда получим скачок производной в 0:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

Подставим решение $\psi(x) = A e^{-\varkappa|x|}$:

$$-2\varkappa A = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A \hookrightarrow \varkappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2} = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

Получим $|E| = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ $\hookrightarrow$ $E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$

Константу A определим из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0|^2\,dx = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\varkappa|x|}\,dx = \frac{2A^2}{2\varkappa} = \frac{A^2}{\varkappa} \hookrightarrow A = \sqrt{\varkappa}$$

$\psi_0(x) = \sqrt{æ}\, e^{-æ|x|}$ - волнов. ф-ция част. в коорд. представл.

- $\langle \hat{x} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x |\psi_0|^2 dx = 0$ (нечётн. ф-ция)

- $\langle \hat{x}^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi_0(x)|^2 dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{(xæ)^2 e^{-2æx}}{æ^2} d(æx) =$

$= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{(2xæ)^2 e^{-2æx}}{4æ^2 \cdot 2} d(2æx) = \frac{1}{4æ^2} \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy =$ ($2æx \equiv y$)

$= \frac{1}{4æ^2}\left(-(y^2+2y+2)e^{-y}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{4æ^2} \cdot 2 = \frac{1}{2æ^2}$

- $\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{1}{2æ^2}$ ($\langle \hat{x} \rangle = 0$)

- $\langle \hat{p} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x)\right) dx = -i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-æ|x|}\left(-æ e^{-æ|x|}\right) \mathrm{sign}\, x\, dx = 0$

(т.к. $\frac{\partial}{\partial x} e^{-æ|x|} = -æ e^{-æ|x|} \mathrm{sign}\, x$.

- $\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{p}^+ \hat{p} | \psi_0 \rangle = \langle \hat{p}\psi_0 | \hat{p}\psi_0 \rangle =$ (т.к. $\hat{p}^+ = \hat{p}$)

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p}\psi_0(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hbar^2 æ^3 e^{-2æ|x|} \underbrace{(\mathrm{sign}\, x)^2}_{1} dx = \hbar^2 æ^2$

- $\langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \hbar^2 æ^2$ ($\langle \hat{p} \rangle = 0$)

$\langle (\Delta x)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}$ - соотн. неопр. вып-но

8 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$

док-ть, что $\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2$

$\hat{A}^+ = \hat{A}$, $\hat{B}^+ = \hat{B}$. $(\Delta\hat{A})^+ = \Delta\hat{A}$, $(\Delta\hat{B})^+ = \Delta\hat{B}$

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle] = [\hat{A}, \hat{B}] -$$

$$- \cancelto{0}{[\underbrace{\langle\hat{A}\rangle}_{const}, \hat{B}]} - \cancelto{0}{[\hat{A}, \underbrace{\langle\hat{B}\rangle}_{const}]} + \cancelto{0}{[\langle\hat{A}\rangle, \langle\hat{B}\rangle]} = i\hat{C}$$

Рассмотрим $\hat{E} = \Delta\hat{A} - i\gamma\Delta\hat{B}$

$$\hat{E}^{+} = \Delta\hat{A} + i\gamma\Delta\hat{B}$$

$$\hat{E}\psi = \varphi$$

$$0 \leq \int \varphi^{*}\varphi\, d^3r = \int(\hat{E}\psi)^{*}(\hat{E}\psi)\, d^3r = \int \psi^{*}\hat{E}^{+}\hat{E}\psi\, d^3r =$$

$$= \int \psi^{*}(\Delta\hat{A} + i\gamma\Delta\hat{B})\cdot(\Delta\hat{A} - i\gamma\Delta\hat{B})\psi\, d^3r = \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle +$$

$$+ \gamma^2\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle + i\gamma[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = \langle(\Delta A)^2\rangle + \gamma^2\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle + \gamma\langle\hat{C}\rangle$$

$$D = (\langle\hat{C}\rangle)^2 - 4\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\cdot\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \leq 0$$

Откуда $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\cdot\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \underline{\underline{\dfrac{(\langle\hat{C}\rangle)^2}{4}}}$

9

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta \hat{p}_\beta] = \hat{p}_\beta [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta]\hat{p}_\beta =$$

$$= \hat{p}_\beta\, i\hbar\delta_{\alpha\beta} + i\hbar\delta_{\alpha\beta}\cdot\hat{p}_\beta = 2i\hbar\hat{p}_\alpha$$

Итого: $[\hat{x}_\alpha, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$

$$[U(\vec r), \hat p_\alpha]\psi(\vec r) = U(\vec r)(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\psi(\vec r) - (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(U(\vec r)\cdot$$

$$\cdot\psi(\vec r)) = -i\hbar \cancel{U(\vec r)}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + i\hbar\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}\psi + i\hbar\cancel{U(\vec r)}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} = i\hbar\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}\psi(\vec r)$$

Итого: $[U(\vec r), \hat{\vec p}] = i\hbar\frac{\partial U}{\partial \vec r} = i\hbar\nabla U$

$$[U(r), \hat{p}^2]\psi = \hat{p}_\beta [U(r), \hat{p}_\beta]\psi + [U(r), \hat{p}_\beta]\hat{p}_\beta \psi =$$

$$= \hat{p}_\beta\, i\hbar (\nabla_\beta U(r))\psi + i\hbar (\nabla_\beta U(r)) \cdot \hat{p}_\beta \psi = \hbar^2 \psi \Delta U(r) +$$

$$+ \hbar^2 (\nabla_\beta U(r)) \cdot \nabla_\beta \psi + \hbar^2 (\nabla_\beta U(r)) \nabla_\beta \psi = \left(\hbar^2 \Delta U(r) +\right.$$

$$\left. + 2\hbar^2 (\nabla U(r), \nabla)\right)\psi$$

Итого: $[U(r), \hat{p}^2] = \hbar^2 (\Delta U(r) + 2(\nabla U(r), \nabla))$

14

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma] = \hat{x}_\beta [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\gamma] + \overset{0}{\cancel{[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta]}}\, \hat{p}_\gamma = i\hbar \delta_{\alpha\gamma} \hat{x}_\beta$$

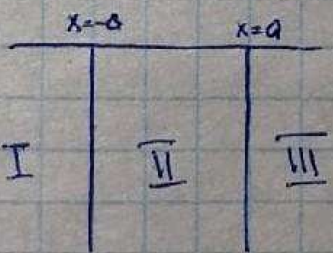
$$[\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma] = \hat{x}_\beta \overset{0}{\cancel{[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\gamma]}} + [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta]\hat{p}_\gamma = i\hbar \delta_{\alpha\beta} p_\gamma = \hbar^2 \delta_{\alpha\beta} \nabla_\gamma$$

$$[\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma \hat{p}_\nu] = \hat{x}_\gamma [\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{p}_\nu] + [\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma]\hat{p}_\nu =$$

$$= -x_\gamma \hbar^2 \delta_{\nu\alpha} \nabla_\beta - i\hbar \delta_{\alpha\beta} x_\alpha (-i\hbar \nabla_\nu) = -\hbar^2 (\delta_{\nu\alpha} x_\gamma \nabla_\beta + \delta_{\gamma\beta} x_\alpha \nabla_\nu)$$

Задача 6

$$U(x) = -\alpha\, \delta(x+a) - \alpha\, \delta(x-a)$$



$$\mathrm{I}: \ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi = -|E|\psi$$

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi = \varkappa^2 \psi \to \psi = \tilde{A} e^{\varkappa x}$$

Для II и III по аналогии. Получим след.:

$$\psi(x) = \begin{cases} \tilde{A} e^{\varkappa x}, & x < -a \\ C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}, & |x| < a \\ \tilde{B} e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

В силу симметричности потенциала ($U(x) = U(-x)$)

следует $[\hat{H}, \hat{I}] = 0 \Rightarrow$ можно выбр. собств. ф-ции

$\psi_\pm$: $\psi_\pm(x)$ - собств. ф-ции для $\hat{H}$ и $\hat{I}$ (т.е. чётн. и нечётн.)

$$\psi_\pm(x) = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}$$

$$\psi(-x) = \begin{cases} \tilde{B} e^{\varkappa x}, & x < -a \\ C_1 e^{-\varkappa x} + C_2 e^{\varkappa x}, & |x| < a \\ \tilde{A} e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

Откуда получим:

$$\psi_+(x) = \begin{cases} A e^{\varkappa(x+a)}, & x < -a \\ B \operatorname{ch} \varkappa x, & |x| < a \\ A e^{-\varkappa(x-a)}, & x > a \end{cases} \qquad \psi_-(x) = \begin{cases} A_1 e^{\varkappa(x+a)}, & x < -a \\ B_1 \operatorname{sh} \varkappa x, & |x| < a \\ A_1 e^{-\varkappa(x-a)}, & x > a \end{cases}$$

Учитывая усл-ия на границах:

$$\begin{cases} \psi(a+0) = \psi(a-0) \\ \psi'(a+0) - \psi'(a-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a) \end{cases}$$

Получим для $\psi_+(x)$:

$$\begin{cases} A = B \operatorname{ch} \varkappa x \\ -\varkappa A - \varkappa B \operatorname{sh} \varkappa a = -\frac{2m\alpha A}{\hbar^2} \end{cases}$$

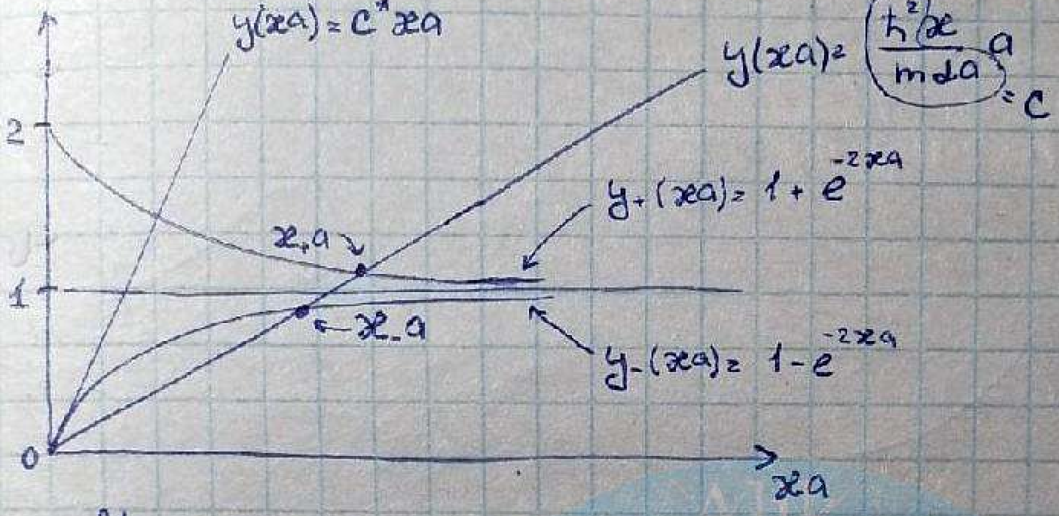
$$A\left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} - 1\right) = B \operatorname{sh} \varkappa a \Rightarrow \operatorname{th} \varkappa a = \frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} - 1$$

$$\frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} = 1 + \operatorname{th}\varkappa a = 1 + \frac{e^{\varkappa a} - e^{-\varkappa a}}{e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a}} = \frac{2e^{\varkappa a}}{e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a}}$$

$$\frac{\hbar^2\varkappa}{m\alpha} = 1 + e^{-2\varkappa a}$$

Для $\psi_-(x)$ аналогично получим $\frac{\hbar^2 \varkappa}{m\alpha} = 1 - e^{-2\varkappa a}$

Эти ур-ия решим графически:



Из графика получаем, что $\varkappa_- < \varkappa_+ \hookrightarrow |E_-| < |E_+| \hookrightarrow$

$\hookrightarrow E_- > E_+$. Энергию $E_\pm$ можно вычислить по $E_\pm = -\frac{\hbar^2 \varkappa_\pm^2}{2m}$

Причём решение $\varkappa_- a$ $\exists$ только если $C \leq C^*$

Чтобы опред. C^*, запишем усл-ие касания:

$$(C^* x)'\Big|_{x=0} = (1 - e^{-2x})'\Big|_{x=0} \hookrightarrow C^* = 2.$$

Усл-ие $C \leq C^*$ равносильно $\frac{\hbar^2}{m\alpha a} \leq 2$

То есть, если $\frac{\hbar^2}{2m\alpha a} \leq 1$, то имеем два решения: $\psi_\pm(x)$

Если $\frac{\hbar^2}{2m\alpha a} > 1$, то будет только 1 реш. $\psi_+(x)$.

Исследуем случай $\frac{\hbar^2}{2m\alpha a} \ll 1$:

$$x = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}\left(1 \pm e^{-2x}\right)$$

С помощью метода прост. итераций:

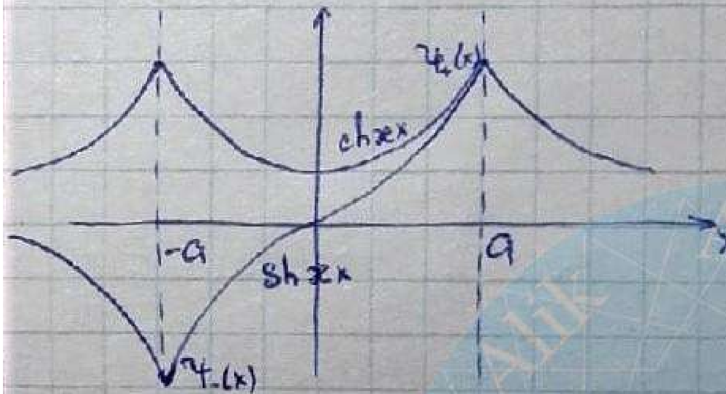
$$x^{(0)} = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \qquad x^{(1)} = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}\left(1 \pm e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)$$

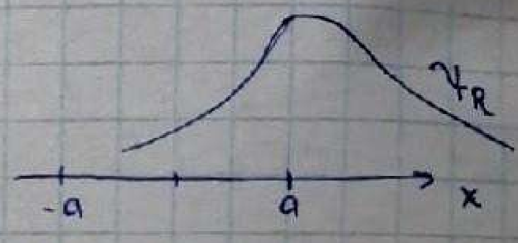
Откуда $|E_\pm| = \frac{\hbar^2 \varkappa_\pm^2}{2m} = \frac{\hbar^2 x_\pm^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{m\alpha a}{\hbar^2}\right)^2\left(1 \pm e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)^2 \simeq$

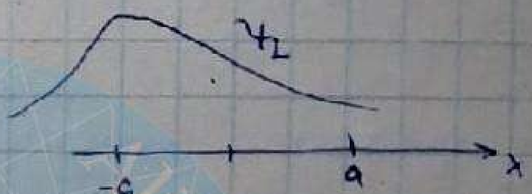
$$\simeq \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 \pm 2e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)$$

$$E_+ = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 + 2e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)$$

$$E_- = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 - 2e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right) > E_+$$







Волновая ф-ция частицы в общем виде:

$$\psi(x,t) = C_1\psi_+ e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} + C_2\psi_- e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}$$

$$\psi(t=0) = C_1\psi_+ + C_2\psi_-$$

Рассм. волнов. ф-цию, соотв. нахожд. частицы в правой яме:
$$\psi_R = A_1\psi_+(x) + A_2\psi_-(x)$$

Т.к. собств. ф-ции эрмит. операт., отвеч. различным собств. знач. ортогональны $\hookrightarrow$ $\langle\psi_+|\psi_-\rangle = 0$ $\hookrightarrow$ част. будет иметь волнов. ф-цию ψ_+ или ψ_-.

т.к. мы рассм. $\frac{\hbar^2}{2m\alpha a} \ll 1 \hookrightarrow E_+ = E_- \hookrightarrow A_1 \simeq A_2$

Из физич. смысла коэф.: $1 = A_1^2 + A_2^2 \hookrightarrow A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\psi_R(x) = \frac{\psi_+(x)+\psi_-(x)}{\sqrt{2}}$$

Аналогично для $\psi_L(x)$: $\psi_L(x) = \frac{\psi_+ - \psi_-}{\sqrt{2}}$

По условию:

$$\psi(t=0) = \psi_L(x) = C_1\psi_+ + C_2\psi_- \hookrightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

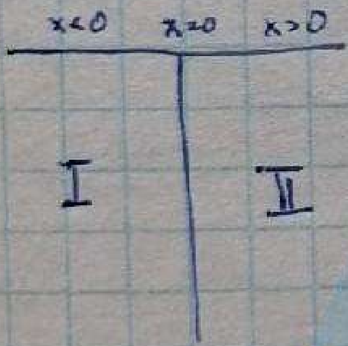
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\psi_R + \psi_L}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\psi_R - \psi_L}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} =$$

$$= \psi_R\cdot\left(\frac{e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}}{2}\right) + \psi_L\cdot\left(\frac{e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}}{2}\right)$$

Получим вер-сть нахожд. частицы в мом. врем. t в правой яме:

$$P_R(t) = \left|\frac{e^{-iE_+\frac{t}{\hbar}} - e^{-iE_-\frac{t}{\hbar}}}{2}\right|^2 = \sin^2\left(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}\cdot t\right)$$

Задача 8



$$\psi_{I} = e^{ikx} + \underbrace{r e^{-ikx}}_{\text{отраж.}}$$

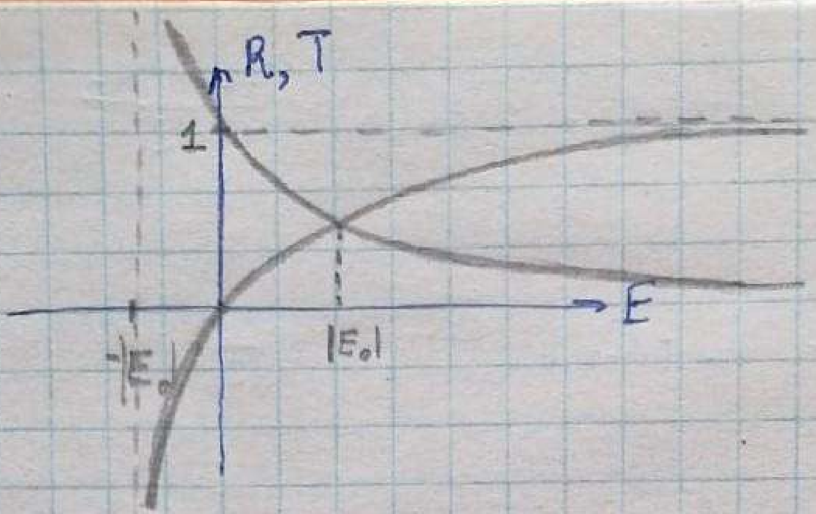
$$\psi_{II} = t e^{ikx}$$ – прошедш.

$$\begin{cases} \psi(+0) = \psi(-0) \\ \psi'(+0) - \psi'(-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + r = t \\ ik\left(t - (1-r)\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} t \end{cases}$$

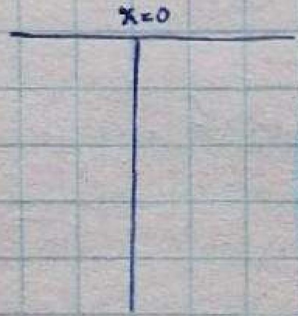
$$r = -\frac{\frac{m\alpha}{\hbar^2 ik}}{1 + \frac{m\alpha}{\hbar^2 ik}}$$

$$R = |r|^2 = \frac{|E_0|}{E + |E_0|}$$

$$T = |t|^2 = \frac{E}{|E_0| + E}$$



Задача 9.



$$U(x) = -\alpha_0\,\delta(x) \longrightarrow U(x) = -\alpha_1\,\delta(x)$$

$P_{вых}$ - ?

Вид волнов. ф-ции в I случае:

$$\alpha_0\,\delta(x):\quad \psi_0(x) = \sqrt{\varkappa_0}\; e^{-\varkappa_0|x|}, \quad \varkappa_0 = \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{\text{параметр ямы}}$$

Во II случае:

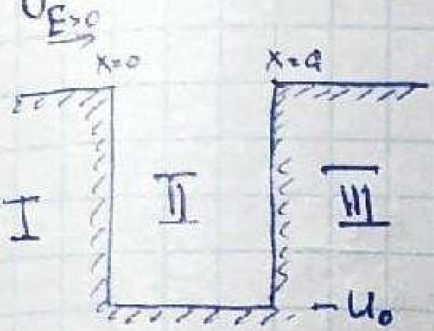
$$\alpha_1\,\delta(x):\quad \psi_1(x) = \sqrt{\varkappa_1}\; e^{-\varkappa_1|x|}$$

$$P = \left| \int \psi_0^*(x)\,\psi_1(x)\,dx \right|^2 = \varkappa_0\varkappa_1 \left| \int e^{-(\varkappa_0+\varkappa_1)|x|}\,dx \right|^2 =$$

$$= \varkappa_0\varkappa_1 \left(\frac{2}{\varkappa_0+\varkappa_1}\right)^2$$

$$P_{вых} = 1 - P = 1 - \frac{4\varkappa_0\varkappa_1}{(\varkappa_0+\varkappa_1)^2} = \left(\frac{\varkappa_0-\varkappa_1}{\varkappa_0+\varkappa_1}\right)^2$$

Задача 3.



$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0<x<a \\ 0, & x<0,\ x>a \end{cases}$$

I: $\psi_1'' + k^2\psi_1 = 0$, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

II: $\psi_2'' + k_1^2\psi_2 = 0$, $k_1^2 = \frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}$

III: $\psi_3'' + k^2\psi_3 = 0$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x<0 \\ C_1 e^{ik_1x} + C_2 e^{-ik_1x}, & 0<x<a \\ t e^{ikx}, & x>a \end{cases}$$

Считаем, что в III нет отраж. волн.

Сшивка:

$$\begin{cases} 1 + r = C_1 + C_2 & (1) \\ ik(1-r) = ik_1(C_1 - C_2) & (2) \\ C_1 e^{ik_1a} + C_2 e^{-ik_1a} = t e^{ika} & (3) \\ ik_1(C_1 e^{ik_1a} - C_2 e^{-ik_1a}) = ikt e^{ika} & (4) \end{cases}$$

$t = C_1 e^{ik_1a - ika} + C_2 e^{-ik_1a - ika}$. Подставим в (4):

$$ik_1(C_1 e^{ika} - C_2 e^{-ik_1a}) = ik(C_1 e^{ik_1a} + C_2 e^{-ik_1a})$$

$$iC_1(k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}) = iC_2(k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}) \rightarrow \text{в } (1).$$

$$1+r = C_1\left(1+\frac{k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}\right)$$

$$C_1 = \frac{1+r}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}}$$

$$C_2 = \frac{1+r}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}} \cdot \frac{k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}$$

C_1 и C_2 подставим в (2):

$$k(1-r) = \frac{k_1(1+r)}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}} \cdot \left(1-\frac{k_1 e^{-ik_1a} - k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}}\right)$$

$$r = \frac{(k_1^2-k^2)(e^{ik_1a}-e^{-ik_1a})}{k^2(e^{-ik_1a}-e^{ik_1a}) + k_1^2(e^{-ik_1a}-e^{ik_1a}) + 2kk_1}$$

$$r = \frac{i(k_1^2-k^2)\sin k_1a}{2kk_1\cos k_1a - i(k_1^2+k^2)\sin k_1a}$$

Для t получим следующее:

$$t = \frac{(1+r)(ke^{-ika} + k_1 e^{-ika} + k_1 e^{-ika} - k e^{-ika})}{k_1 e^{-ik_1a} + k_1 e^{ik_1a} + k e^{-ik_1a} - k e^{ik_1a}} =$$

$$= \frac{2k_1 e^{ika}(2kk_1\cos k_1a - 2ik^2\sin k_1a)}{(2k_1\cos k_1a - 2ik\sin k_1a)(2k_1k\cos k_1a - i(k_1^2+k^2)\sin k_1a)}$$

$$t = \frac{2kk_1 e^{-ika}}{2kk_1\cos k_1a - i(k_1^2+k^2)\sin^2 k_1a}$$

$$R = |r|^2 = \frac{(k_1^2-k^2)\sin^2 k_1a}{4k_1^2k^2\cos^2 k_1a + (k_1^2+k^2)\sin^2 k_1a}$$

$$R = \frac{(k_1^2 - k^2)\sin^2 k_1 a}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}$$

$$T = |t|^2 = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}$$

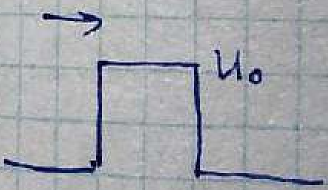
$$T = \frac{4E(E+U_0)}{4E(E+U_0) + U_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(U_0+E)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

б)

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ x \ge a \\ U_0, & 0 < x < a \end{cases}$$

1) $E > U_0$

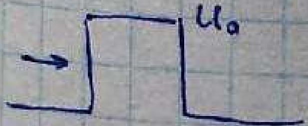
Заменим U_0 на $-U_0$



$$\rightarrow \quad T = \frac{4E(E-U_0)}{4E(E-U_0) + U_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E-U_0)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

2) $E < U_0$

$R = 1 - T$



$$\rightarrow \quad T = \frac{4E(U_0-E)}{4E(U_0-E) + U_0^2 \operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{2m(U_0-E)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

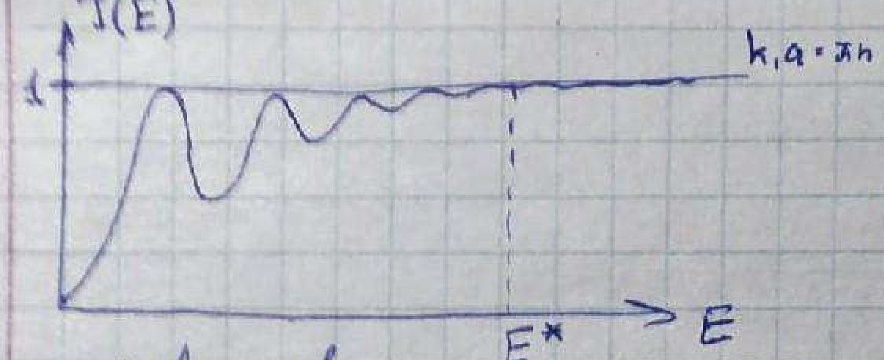
Яма прозрачна ($T = 1$) при $\sin k_1 a = 0 \Leftrightarrow k_1 a = \pi n$

$$\sqrt{\frac{2m(U_0+E)a^2}{\hbar^2}} = \pi n$$

~~Бро~~ Барьер прозрачен при $\sqrt{\frac{2m(U_0-E)a^2}{\hbar^2}} = \pi n$

Физич. опр-ся усл-ия прозрачности:

$k_1 a = \pi n \hookrightarrow 2a = \frac{2\pi n}{k_1} = \lambda n \hookrightarrow a = \frac{\lambda_1 n}{2}$ – длина ямы есть полуцелое число волн



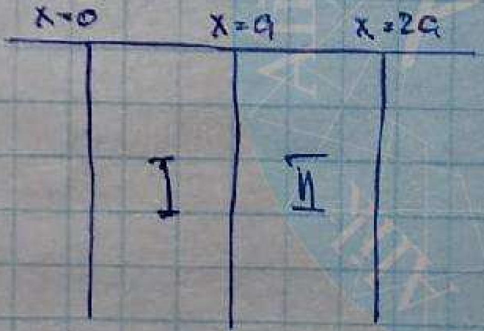
Квантовые рез-ты практически совпадают с классическими для ямы при $\frac{U_0^2}{4E^*(E^*+U_0)} \leq 10^{-2}$

$E^* \gtrsim 5U_0 = 50$ эВ

<u>Задача 7.</u>

$$U(x) = -\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\text{[illegible]})$$

а) $E > 0$



$\underline{\text{I}}$: $0 < x < a$

$\psi_1(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$

$\underline{\text{II}}$: $a < x < 2a$

$U(x+a) = U(x)$

$\hat{T}_a U(x) f(x) = U(x+a) f(x+a) = U(x) \hat{T}_a(x) f(x)$

Откуда $[\hat{T}_a, \hat{U}] = 0$

т.к. $\hat{T}_a = e^{\frac{ia\hat{p}}{\hbar}} \hookrightarrow \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{T}_a\right] = 0 \hookrightarrow [\hat{H}, \hat{T}_a] = 0$

можем искать волн. ф-цию в виде собств. ф-ций оператора $\hat{T}_a$.

СФ $\hat{T}_a$: $e^{i\mu x} u(x)$, где $u(x+a) = u(x)$.

$$\psi_2(x) = u(x)\, e^{i\mu x} = u(x-a)\, e^{i\mu(x-a)} e^{i\mu a} = \psi_1(x-a)\, e^{i\mu a} =$$

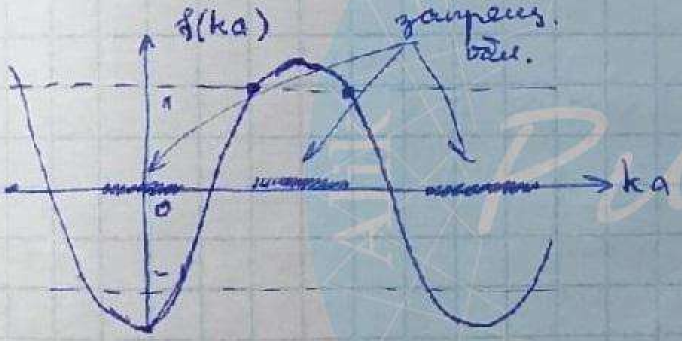
$$= \big(C_1 \cos k(x-a) + C_2 \sin k(x-a)\big)\, e^{i\mu a}$$

Сшивка:

$$\begin{cases} \psi_1(a) = \psi_2(a) \\ \psi_2'(a) - \psi_1'(a) = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a) \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = C_1 e^{i\mu a} \\ C_1 k \sin ka - kC_2 \cos ka + \\ + C_2 k e^{i\mu a} = C_1 e^{i\mu a}\left(-\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\right) \end{cases}$$

$$\cos \mu a = \cos ka - \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin ka = f(ka)$$

$$|f(ka)| \le 1$$



1) $\alpha = 0 \hookrightarrow E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ – свободн. частица

2) $\alpha \to 0$, $\lambda \ll 1$ (слабая связь)

$$\cos \mu a = \cos ka - \lambda \frac{\sin ka}{ka}$$

$$\lambda = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Запрещ. зона уменьш-ся. В пределе $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

3) $\alpha \to \infty$, $\lambda \gg 1$ (сильная связь)

Разрешены лишь случаи: $\sin ka = 0$

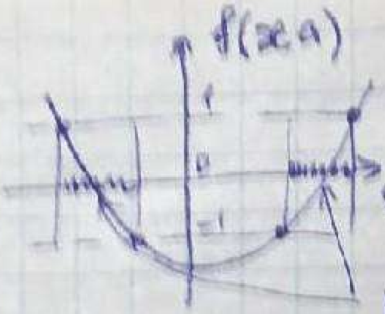
$ka = \pi n \longleftrightarrow E = \dfrac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$ – разреш. зоны есть дискр. (точки).

б) $E < 0$

Сделаем замену $k = i\varkappa$. Получим:

$$\cos \mu a = \operatorname{ch} \varkappa a - \frac{\lambda \operatorname{sh} \varkappa a}{\varkappa a} = f(\varkappa a)$$

$$|f(\varkappa a)| < 1$$



разреш. обл.

1) $\alpha = 0$ (нет ям) — всё пр-во запрещено

2) $\alpha \to 0$, $\lambda \ll 1$ (слабая связь)

— 1 разреш. зона. В пределе — точка, кот. соотв. 0-ой энергии.

3) $\alpha \to \infty$, $\lambda \gg 1$ (сильная связь)

$$æ \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\operatorname{ch} æa \approx \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}}, \quad \operatorname{sh} æa \approx \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}}$$

$$\cos \mu a = \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \left(1 - \frac{m\alpha}{\hbar^2 æ}\right)$$

$$\frac{m\alpha}{\hbar^2 æ} = 1 - 2e^{-\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \cos \mu a$$

$$æ \approx \frac{m\alpha}{\hbar^2}\left(1 + 2e^{-\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \cos \mu a\right)$$

$$E = -\frac{æ^2 \hbar^2}{2m}$$ — единств. разр. энергия

(ненулевой дискр. уровень).

Упражнение 10

$$\hat{T}_a f(x) = f(x+a), \quad \hat{T}_{\vec a} = e^{\frac{i \vec a \vec p}{\hbar}}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\vec a, \vec p)} U(\vec r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec a, \vec p)} \psi(\vec r) = \hat{T}_{\vec a} U(\vec r) \hat{T}_{-\vec a} \psi(\vec r) = \hat{T}_{\vec a} U(\vec r) \cdot$$

$$\cdot\, \psi(\vec r - \vec a) = U(\vec r + \vec a)\psi(\vec r)$$

Упражнение 11

$$\hat{f}(\lambda)|n(\lambda)\rangle = f_n(\lambda)|n(\lambda)\rangle$$

$$\langle n|\hat{f}(\lambda)|n\rangle = f_n(\lambda)\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = f_n(\lambda)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial\lambda} = \langle n(\lambda)|\frac{\partial\hat{f}}{\partial\lambda}|n\rangle + \langle\frac{\partial n}{\partial\lambda}|\hat{f}|n\rangle + \langle n|\hat{f}|\frac{\partial n}{\partial\lambda}\rangle$$

$$\langle n|\hat{f}^{+} = \langle n|f_n^{*}$$

Т.к. f эрмитов $\hookrightarrow$ $\hat{f}^{+} = \hat{f}$, $f_n^{*} = f_n$

$$\frac{\partial f_n}{\partial\lambda} = \langle n(\lambda)|\frac{\partial\hat{f}}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle + \langle\frac{\partial n}{\partial\lambda}|f_n(\lambda)|n(\lambda)\rangle +$$

$$+ \langle n|f_n|\frac{\partial n}{\partial\lambda}\rangle = \langle n(\lambda)|\frac{\partial f}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle + \hat{f}\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle n|n\rangle =$$

$$= \langle n(\lambda)|\frac{\partial f}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle$$

Упр. 12

$$\varphi = (\vec{r}, \vec{p})$$

φ - физич. величина, то операт. должен быть эрмитов:

$$\hat{\varphi} = \frac{(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) + (\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{r}})}{2} = \frac{-i\hbar(\vec{r}, \vec{\nabla}) - i\hbar(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})}{2} =$$

$$= -i\hbar\left((\vec{r}, \vec{\nabla}) + \frac{3}{2}\mathbb{1}\right)$$

Упр. 15

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta] = e_{\alpha\mu\nu}[x_\mu p_\nu, x_\beta] = e_{\alpha\mu\nu} x_\mu [p_\nu, x_\beta] =$$

$$= -i\hbar\, e_{\alpha\mu\beta} x_\mu = i\hbar\, e_{\alpha\beta\mu} x_\mu$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i e_{\alpha\beta\mu}\hat{p}_\mu$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, \hat{r}^2] = [\hat{l}_\alpha, x_\beta x_\beta] = x_\beta [\hat{l}_\alpha, x_\beta] +$$

$$+ [\hat{l}_\alpha, x_\beta] x_\beta = x_\beta\, i e_{\alpha\beta\mu} x_\mu + i e_{\alpha\beta\mu} x_\mu x_\beta = 0$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, (\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})] = \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} [\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma, \hat{x}_m \hat{p}_m] =$$

$$= \hbar e_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{m\beta} x_m \nabla_\gamma - \delta_{m\gamma} x_\beta \nabla_m) = \hbar e_{\alpha\beta\gamma} (x_\beta \nabla_\gamma -$$

$$- x_\beta \nabla_\gamma) = 0$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, f(r)]\psi = \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} [\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma, f(r)]\psi =$$

$$= \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} (\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma (f(r)\psi) - f(r) \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma \psi) =$$

$$= \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} (-i\hbar x_\beta \nabla_\gamma (f(r)\psi) + i\hbar x_\beta f(r) \nabla_\gamma \psi) =$$

$$= -i e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \psi \nabla_\gamma f(r) = -i e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta f'(r) \frac{x_\gamma}{r} \psi = 0$$

$$\bullet\ [\hat{l}_z, f(\rho)]\psi = -i \frac{\partial}{\partial\varphi} (f\psi) + i f(\rho) \frac{\partial}{\partial\varphi}\psi =$$

$$= -i\psi \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\rho) = 0 \hookrightarrow 0$$

Упражнение 2

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta$$

↪ следует (1 утв.)

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta - \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma \quad \forall \alpha, \beta$$

т.е. $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \sigma_\alpha a_\alpha \sigma_\beta b_\beta = a_\alpha b_\beta (\delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma) =$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}) + i(\vec{\sigma}, [\vec{a} \times \vec{b}])$$

Упражнение 3

$$e^{i\alpha(\vec{\sigma}\vec{n})} = \cos(\alpha\vec{\sigma}\vec{n}) + i\sin(\alpha\vec{\sigma}\vec{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}(\vec{\sigma}\vec{n})^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}(\vec{\sigma}\vec{n})^{2k+1}}{(2k+1)!} \ominus$$

$$(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = \sigma_\alpha n_\alpha \sigma_\beta n_\beta = (\vec{n}\vec{n}) + i(\vec{\sigma}, \vec{n} \times \vec{n}) = 1$$

$$\ominus \cos\alpha + i(\vec{\sigma}\vec{n})\sin\alpha$$

Упражнение 4.

$$\hat{\sigma}_n = (\hat{\vec{\sigma}}\vec{n}) \qquad \vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_\alpha n_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Найдём собств. значения:

$$|\sigma - \lambda E| = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta =$$

$$= -(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = -1 + \lambda^2 = 0$$

Откуда $\lambda = \pm 1$.

Рассмотрим $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{\sin\theta e^{i\varphi}}{1+\cos\theta}\alpha_1 = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\alpha_1 = tg\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\alpha_1$$

Длина вектора 1 $\hookrightarrow$ $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$

$$|\alpha_1|^2\left(1 + tg^2\frac{\theta}{2}\right) = 1 \hookrightarrow |\alpha_1| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Считаем, что фаза нулевая $\hookrightarrow$ $\alpha_1 = \cos\frac{\theta}{2}, \beta_1 = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$

Собств. вектор есть $\vec{\chi}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

В силу ортонормированности базиса из собств. векторов

$\vec{\chi}_2 = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, т.к. $(\vec{\chi}_1^+, \vec{\chi}_2) = 0$

$\vec{n} \parallel Ox$: $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = 0$

$\vec{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \parallel Oy$: $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\vec{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\vec{n} \parallel Oz$: $\theta = 0$, $\varphi = 0$

$\vec{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Упражнение 5.

Т.к. проекция на z и сохр. 1/2, то $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W_+ = |(\chi_1^+ \chi)|^2 = \left|\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$W_- = |(\chi_2^+ \chi)|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Задача 1

$$i\hbar\,\partial_t \Psi = \hat{H}\Psi, \quad \hat{H} = -\mu_0(\vec{B}\vec{\sigma}), \quad \Psi(t) = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$$

$$t=0: \ \Psi(t=0) = \underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\uparrow\rangle}$$

$\vec{B} \parallel O_x$

$$i\hbar\,\partial_t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0 B\sigma_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0 B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0 B\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\dot{a} = -\overset{=\Omega}{\left(\dfrac{\mu_0 B}{\hbar}\right)} b \\ i\dot{b} = -\dfrac{\mu_0 B}{\hbar} a \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} \dot{a} = i\Omega b \\ \dot{b} = i\Omega a \end{cases}$$

$$\ddot{a} = i\Omega\, i\Omega\, a = -\Omega^2 a$$

$$\begin{matrix} \ddot{a} + \Omega^2 a = 0 \\ \ddot{b} + \Omega^2 b = 0 \end{matrix} \hookrightarrow \quad a(t) = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t$$

$$a(0) = C_1 = 1$$

$$b = \frac{1}{i}(-\sin\Omega t + C_2\cos\Omega t)$$

$$b(0) = \frac{C_2}{i} = 0$$

Откуда $a(t) = \cos\Omega t$, $b(t) = i\sin\Omega t$

$$\psi(t) = \cos\Omega t\,|\uparrow\rangle + i\sin\Omega t\,|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ i\sin\Omega t \end{pmatrix}$$ – зав-сть спиновой ф-ции от времени

$$\langle\psi(t)| = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)$$

$$\langle\sigma_x\rangle = \langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ i\sin\Omega t \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\sigma_y\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ i\sin\Omega t \end{pmatrix} = \sin 2\Omega t$$

$$\langle\sigma_z\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ i\sin\Omega t \end{pmatrix} = \cos 2\Omega t$$

Вектор поляризации

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \langle\sigma_x\rangle \\ \langle\sigma_y\rangle \\ \langle\sigma_z\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2\Omega t \\ \cos 2\Omega t \end{pmatrix}, \quad |\vec{P}| = 1$$ – длина пост.

↑ движение по окр-сти в плоск. Oyz с центр. в нач. коорд. и радиусом 1.

В представлении Гейзенберга:

$$(\sigma_x)_\Gamma = e^{-i\Omega t\sigma_x}\,\sigma_x\,e^{i\Omega t\sigma_x} = \sigma_x$$

$$(\sigma_y)_\Gamma = e^{-i\Omega t\sigma_x}\,\sigma_y\,e^{i\Omega t\sigma_x} = (\cos\Omega t - i\sigma_x\sin\Omega t)\sigma_y \cdot$$

$$\cdot(\cos\Omega t + i\sigma_x\sin\Omega t) = \cos^2\Omega t\,\sigma_y - i\sin\Omega t\cos\Omega t \cdot$$

$$\cdot\underbrace{(\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x)}_{[\sigma_x,\sigma_y] = 2i\sigma_z} + \sin^2\Omega t\,\underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_x}_{-\sigma_x^2\sigma_y = -\sigma_y,\ \sigma_x^2 = 1} = \sigma_y(\cos^2\Omega t - \sin^2\Omega t) -$$

$$-i\,2i\sin\Omega t\cos\Omega t\,\sigma_z = \sigma_y\cos 2\Omega t + \sigma_z\sin 2\Omega t$$

$$(\sigma_z)_\Gamma = \sigma_z\cos 2\Omega t - \sigma_y\sin 2\Omega t$$

Откуда вектор поляризации есть:

$$(\vec{P})_r(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ 0 & -\sin 2\Omega t & \cos 2\Omega t \end{pmatrix}$$ – поворот в (y, z)

Длина 1, постоянна

<u>Задача 3</u>

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + U_{эфф} u = E u$$

S-состояние $\hookrightarrow l = 0 \hookrightarrow m = 0$

$U_{эфф} = U(r)$

- $-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \underset{0}{U(r)} u = E u, \quad r < a$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' = E u \hookrightarrow u'' + \underbrace{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}_{= k^2} u = 0$$

$u(r) = A \sin kr$ (т.к. $u(0) = 0$), в силу нормировки

$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \hookrightarrow u(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin kr$

- $r > a \quad u(r) = 0 \quad u(a) = 0 \hookrightarrow \sin ka = 0$

$ka = \pi n_r \hookrightarrow u(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right)$

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} n_r^2, \quad n_r = 1, 2, \ldots \qquad l = 0$

Откуда получим, что

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{Y_{00}} = \psi_{n_r 00}(\vec{r})$$

Ответ: $E_{n_r} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} n_r^2, \quad n_r = 1, 2, \ldots$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a} \cdot r} \sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right)$$

Задача 2

$$U = U(|\vec r_1 - \vec r_2|) = U(r), \quad \vec r \equiv \vec r_1 - \vec r_2$$

Стацион. ур-ие Шред.: $\hat H \psi(\vec r_1, \vec r_2) = E \psi(\vec r_1, \vec r_2)$

$$\hat H = \frac{\hat{\vec p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\hat{\vec p}_2^{\,2}}{2m_2} + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_{\vec r_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_{\vec r_2} + U(r)$$

Коорд. центра масс:

$$\vec R \equiv \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2} \hookrightarrow \begin{cases} \vec r_1 = \vec R + \dfrac{\mu \vec r}{m_1} \\ \vec r_2 = \vec R - \dfrac{\mu \vec r}{m_2} \end{cases}, \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$\hat{\vec P} \equiv -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \vec R}$ – оперaт. импульса центра масс

$\hat{\vec p} \equiv -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \vec r}$ – оперaт. импульса относит. движ.

Перейдём к переменным $\vec R, \vec r$:

$$\psi(\vec r_1, \vec r_2) \longrightarrow \psi(\vec R, \vec r)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec r_1}\psi(\vec R, \vec r) = \frac{\partial \psi(\vec R, \vec r)}{\partial \vec R^T}\frac{\partial \vec R^T}{\partial \vec r_1} + \frac{\partial \psi(\vec R, \vec r)}{\partial \vec r^T}\frac{\partial \vec r^T}{\partial \vec r_1} =$$

$$= \frac{\mu}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\psi(\vec{R},\vec{r}) = \frac{\mu}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\left(\frac{\mu}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\left(\frac{\mu}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})\right) = \frac{\mu^2}{m_2^2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + 2\frac{\mu}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2}\psi(\vec{R},\vec{r}) = \frac{\mu^2}{m_1^2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r}) -$$

$$- 2\frac{\mu}{m_1}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})$$

$$\hat{H}\psi(\vec{R},\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2}\psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$+ U(r)\psi(\vec{R},\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m_1}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r}) +\right.$$

$$\frac{2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$\left.+ \frac{1}{m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi(\vec{R},\vec{r})\right) + U(r)\psi(\vec{R},\vec{r}) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1+m_2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T}\frac{\partial}{\partial \vec{R}}}_{\Delta_{\vec{R}}}\psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}}_{\Delta_{\vec{r}}}\psi(\vec{R},\vec{r})\right) +$$

$$+ U(r)\psi_2(\vec{R},\vec{r})$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2\mu} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + U(r)$$

Разделим переменные.

$$\psi(\vec{R},\vec{r}) = \Phi(\vec{R})\cdot \chi(\vec{r})$$

$E = E_{ц.м.} + E_{отн.}$, где $E_{ц.м.} = \dfrac{\vec{P}^2}{2m}$ (энер. движ. ц.м.)

В этом случае стац. ур-ие шредингера станов-ся:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{R}}\Phi(\vec{R}) = \dfrac{\vec{P}^2}{2\mu}\Phi(\vec{R}) & (1) \\ \left(-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + U(r)\right)\chi(\vec{r}) = E_{отн}\,\chi(\vec{r}) & (2) \end{cases}$$

$$\Phi(\vec{R}) = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{R}}$$

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \psi(\vec{R},\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{R}}\chi(\vec{r})$$

где $\vec{P}$ - импульс центра масс, $\chi(\vec{r})$ - реш. ур-ия (2)

Задача 4.

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases}$$

В двумерном случае: $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + \dfrac{\hbar^2\hat{l}_z^2}{2m\rho^2} + U(\rho)$

В полярных координатах: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$

Ур-ие шредингера: $\hat{H}\psi(\rho,\varphi) = E\psi(\rho,\varphi)$

Введём оператор $\hat{M}_z \equiv \hbar\hat{l}_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$

$$\hat{M}_z e^{iM\varphi} = M e^{iM\varphi}$$

Решение ищем в виде

$$\psi(\rho,\varphi) = R(\rho)\, e^{iM\varphi}$$

Обозначим: $\varkappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' + \frac{1}{\rho}R'\right) + \frac{\hbar^2 M^2}{2m\rho^2}R + U(\rho) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varkappa^2 R$$

1) При $\rho < a$:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{M^2}{\rho^2}R + k^2 R = 0 \quad \text{где } k^2 = \frac{2m(U_0+E)}{\hbar^2}$$

Имеем ур-ие Бесселя $\Rightarrow$ $R_{|M|} = A\mathcal{Y}_{|M|}(k\rho) + BN_{|M|}(k\rho)$

При $\rho \to 0$ $N_{|M|}(k\rho) \sim \frac{1}{|k\rho|^{|M|+1}}$ Поэтому в силу граничных условий $B = 0$

$$R_{|M|} = A\mathcal{Y}_{|M|}(k\rho)$$

2) При $\rho > a$:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{M^2}{\rho^2}R - \varkappa^2 R = 0$$

Имеем модифиц. ур-ие Бесселя $\Rightarrow$ решение имеет вид

$$R_{|M|} = CI_{|M|}(\varkappa\rho) + DK_{|M|}(\varkappa\rho),$$

где I - ф-ция Инфельда

K - ф-ция Макдональда

При $\rho \to \infty$ $I_{|M|} \sim e^{\varkappa\rho}$ Поэтому в силу гран. усл-ий имеем $C = 0$. $R_{|M|} = DK_{|M|}(\varkappa\rho)$

Сшивка (приравниваем лог. произв.):

$$k\,\frac{J'_{|M|}(ka)}{J_{|M|}(ka)} = \frac{K'_{|M|}(\varkappa a)}{K_{|M|}(\varkappa a)}\,\varkappa$$

Рассмотрим S-состояние: $|M| = 0$

$$k\,\frac{J'_0(ka)}{J(ka)} = \varkappa\,\frac{K'_0(\varkappa a)}{K(\varkappa a)} \qquad (*)$$

При малом U_0: $E \to 0 \hookrightarrow k^2 \approx \frac{2mU_0}{\hbar^2} \hookrightarrow$ рассм. случай $ka \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\Gamma(n+1))^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Оставим члены 1 порядка: $J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4}$

$$K_0(z) \approx \underset{\text{огранич. при } z\to 0}{I_0(z)}\ln\frac{z}{2} \sim \ln z \quad , z \to 0$$

Из $(*)$ имеем:

$$-\frac{k^2 a}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa a \ln(\varkappa a)}$$

$$\frac{mU_0 a}{\hbar^2} = \frac{1}{a\ln\left(\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2}a\right)} \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2}a\right) = -\frac{\hbar^2}{mU_0 a^2}$$

$$\hookrightarrow E \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\,e^{-\frac{\hbar^2}{ma^2U_0}}$$ $\hookrightarrow$ $\exists$ хотя бы одно связ. состояние ~~(эта)~~

Рассмотрим трехмерную яму при $M = 0$:

ищем решение в виде:

$$\psi(\vec r) = R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\,\chi(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

1) при $r<a$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi''(r)+\underbrace{U(r)}_{=-U_0}\chi(r)=E\chi\ ,\ \chi(0)=0$$

$$\chi''(r)+k^2\chi(r)=0,\ \chi(0)=0$$

2) при $r>a$:

$$\chi''(r)-\varkappa^2\chi(r)=0$$

Таким образом, имеем задачу 2 из первого задания, где уровни энергии нечётных волнов. ф-ций $\exists$ при $U_0\geqslant\frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{ma^2}$

Ответ: $E=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}e^{-\frac{\hbar^2}{ma^2U_0}}$

В трехмерной яме для появления связанн. состояния необходимо $U_0\geqslant\frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{ma^2}$.

Задача 5.

Ур-ие Шредингера в имп. представлении:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{p})+\int w(\vec{p}'-\vec{p})\psi(\vec{p}')d^3p'=E\psi(\vec{p}),$$ где

$w(\vec{p}'-\vec{p})=\langle\vec{p}|\hat{U}|\vec{p}'\rangle$ - Фурье образ потенц. энергии

$$W(\vec{p}'-\vec{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int U(\vec{r})e^{i\frac{(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}}{\hbar}}d^3r\quad(*)$$

В данной задаче $U(\vec{r})=-\frac{e^2}{r}$

Ур-ие Пуассона: $\Delta\varphi=-4\pi\rho$

Ур-ие Пуассона для ! заряда в нач коорд.:

$$\Delta\left(\frac{e}{r}\right) = -4\pi e\,\delta(\vec{r}) \hookrightarrow \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$$

Введём $V(\vec{r}) = \frac{1}{r}$

$$\Delta V(\vec{r}) = -4\pi\,\delta(\vec{r}) \qquad (**)$$

$$V(\vec{r}) = \int V(\bar{p})\, e^{\frac{i\bar{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3p$$

$$\Delta V(\vec{r}) = \Delta \int V(\bar{p})\, e^{\frac{i\bar{p}\cdot\bar{r}}{\hbar}}\, d^3p = \int V(\bar{p})\left(-\frac{\bar{p}^2}{\hbar^2}\right)\cdot e^{\frac{i\bar{p}\bar{r}}{\hbar}}\, d^3p \overset{(**)}{=}$$

$$= -4\pi\,\delta(\vec{r}) = \int \frac{-4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{\frac{i\bar{p}\bar{r}}{\hbar}}\, d^3p \hookrightarrow V(\bar{p}) = \frac{-4\pi}{(2\pi\hbar)^3} : \frac{-\bar{p}^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2\pi^2\hbar\,\bar{p}^2}$$

$$U(\bar{r}) = -\frac{e^2}{r} = -e^2 V(\bar{r}) \hookrightarrow U(\bar{p}) = -e^2 V(\bar{p})$$

$$\hookrightarrow U(\bar{p}) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar\,\bar{p}^2} \hookrightarrow W(\bar{p}'-\bar{p}) = U(\bar{p}'-\bar{p}) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar\,|\bar{p}-\bar{p}'|^2}$$

Ур-ие Шред. принимает вид:

$$\underline{\left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - E\right)\psi(\bar{p}) = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\int \frac{\psi(\bar{p}')\, d^3\bar{p}}{|\bar{p}-\bar{p}'|^2}}$$

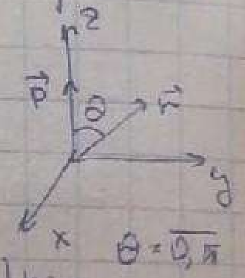
Волновая ф-ция осн. состояния атома водорода в коорд. представлении: $\psi_{100}(\bar{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_Б^3}}\, e^{-\frac{r}{a_Б}}$

Перейдём к имп. представлению:

$$\psi_{100}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int e^{-\frac{i\bar{p}\bar{r}}{\hbar}}\, \psi_{100}(\bar{r})\, d^3\bar{r} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int e^{-\frac{r}{a} - \frac{i\bar{p}\bar{r}}{\hbar}}\, d^3r}_{=I}$$

Скаляр I не может зависеть от компонент вектора $\bar{p}$, только от модуля $\hookrightarrow$ можем выбрать $\bar{p} \parallel Oz$.



$$I = 2\pi \int e^{-\frac{r}{a} - \frac{ipr\cos\theta}{\hbar}} r^2 dr \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} r dr \frac{e^{-\frac{ipr}{\hbar}} - e^{\frac{ipr}{\hbar}}}{-\frac{ipr}{\hbar}} = \frac{2\pi\hbar}{p} \int_0^\infty 2 e^{-\frac{r}{a}} \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right) r dr =$$

$$= \frac{4\pi\hbar}{p} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right) r dr$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x \sin bx \, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} \quad (***)$$

$$I \overset{(***)}{=} \frac{4\pi\hbar}{p} \frac{2 \; 1/a \; p/\hbar}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

$$\Psi_{100}(\bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{8\pi}{a} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

$$\Psi_{100}(\bar{p}) = \frac{4\pi\hbar^4}{a_Б\sqrt{\pi a_Б}} \frac{1}{\left(p^2 + \hbar^2/a^2\right)^2}$$

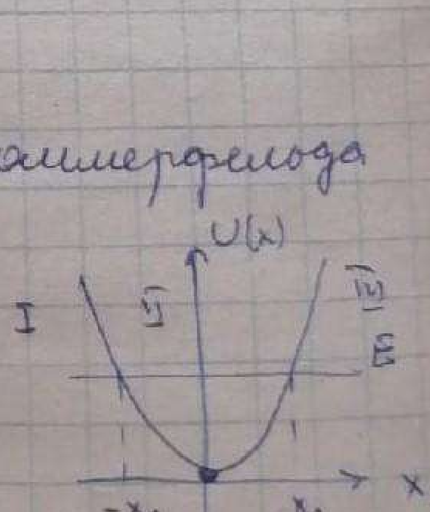
Задача 7.

а) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

Правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_a^b p(x) dx = \pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$p_{x_\infty}(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$$



$$I = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2m(E - U(x))} dx = 2\int_0^{x_0} \sqrt{2mE} \cdot$$

$$\cdot\sqrt{1-\frac{m\omega^2x^2}{2E}}\,dx = 2\sqrt{2mE}\,x_0\int_0^{x_0}\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}\,d\frac{x}{x_0} =$$

$$= 2\sqrt{2mE}\,x_0\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$I = 2\sqrt{2mE}\cdot\frac{\pi}{4}\,x_0 = \pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2m\,\frac{2E^2}{m\omega^2}} = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \hookrightarrow E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n=\overline{0,\infty}$$

Результат совпадает с точным решением.

$$x>x_0:\quad \psi_{III}(x) = \frac{B}{2\sqrt{|p(x)|}}\exp\Big(-\underbrace{\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}|p|\,dx}_{I_3}\Big) \qquad (1)$$

$$-x_0<x<x_0:\quad \psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}}\sin\Big(\underbrace{\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0}p\,dx}_{I_2}+\frac{\pi}{4}\Big) \qquad (2)$$

$$\int_x^{x_0} = \int_{-x_0}^{x_0} - \int_{-x_0}^{x}$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt{p}}\sin\Big(\overbrace{\frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x_0}p\,dx}^{\pi(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x}p\,dx+\frac{\pi}{4}\Big) =$$

$$= -\frac{B}{\sqrt{p}}\sin\Big(\frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x}p\,dx - \underbrace{\pi\left(n+\frac{3}{4}\right)}_{\frac{\pi}{4}-\pi(n+1)}\Big) = \frac{B}{\sqrt{p}}\sin\Big(\frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x}p\,dx -$$

$$-\pi n+\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{B}{\sqrt{p}}(-1)^n\sin\Big(\frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x}p\,dx+\frac{\pi}{4}\Big) \qquad (2')$$

С другой стороны

$$\psi_{II}(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\sin\Big(\frac{1}{\hbar}\int_{-x_0}^{x}p(x)\,dx+\frac{\pi}{4}\Big) \qquad (3)$$

Сравнивая (2') и (3), получаем, что $A = B(-1)^n$

$x<-x_0:$

$$\Psi_I = \frac{A}{2\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_x^{-x_0}|p|dx\right) = \frac{B(-1)^n}{2\sqrt{|p|}}\exp\left(-\underbrace{\frac{1}{\hbar}\int_x^{-x_0}|p|dx}_{I_1}\right)$$

С другой стороны:

Получаем реш. в виде чётн. и нечётн. волновых ф-ций. Это совпадает с точным решением

$$I_2 = \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_0} p(\xi)\,d\xi = \frac{E_n}{\hbar\omega}\left(\frac{x}{x_0}\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{\hbar}\int_x^{-x_0}|p(\xi)|\,d\xi$$

$$I_3 = \frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}|p(\xi)|\,d\xi$$

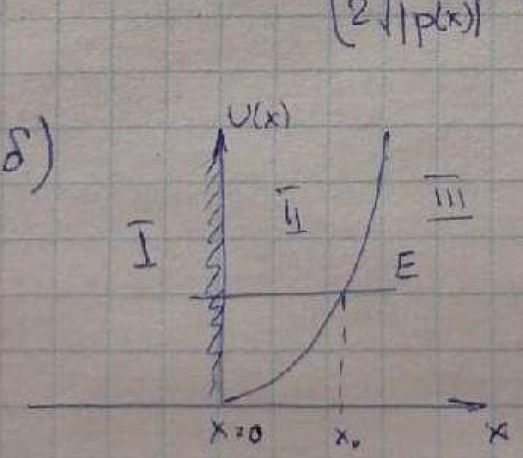
$$I_{1,3} = \frac{E_n}{\hbar\omega}\left(\mp\frac{x}{x_0}\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-1} - \ln\left(\mp\frac{x}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-1}\right)\right)$$

Пренебрегаем exp, считаем $\overline{\sin^2\alpha} = 1/2 \Rightarrow B \approx \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi}}$

Окончательно:

$$\Psi_n(x) = B\cdot\begin{cases} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{|p(x)|}}\, e^{-I_1}, & x < -x_0 \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(I_2 + \frac{\pi}{4}\right), & -x_0 < x < x_0 \\ \frac{1}{2\sqrt{|p(x)|}}\, e^{-I_3}, & x > x_0 \end{cases}$$

б)



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{m\omega^2x^2}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Заметим, что применимость метода ВкБ вып-ся до $x = +0$, а в точке $x = 0$ нужно поставить гр. усл-ие:

$\psi_{II}(0) = 0 = \frac{B}{\sqrt{p(+0)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_0} p\,dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Откуда $\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_0} p\,dx + \frac{\pi}{4} = \pi(n+1)$, $n = \overline{0,\infty}$

Получаем модифик. правила Бора - З.:

$$y = \int_0^{x_0} p\,dx = \pi\hbar\left(n+\frac{3}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2mE}\,\frac{\pi}{4}\,x_0 = \pi\hbar\left(n+\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{E}{\omega} = \hbar\left(n+\frac{3}{4}\right)$$

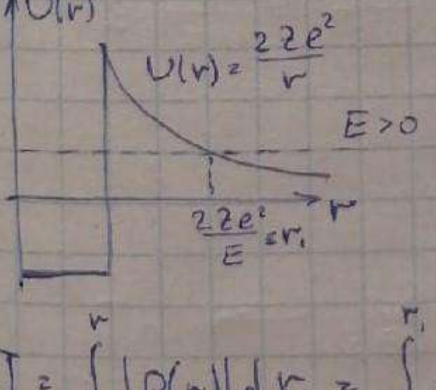
$$E_n = \hbar\omega\left(2n+\frac{3}{2}\right),\ n=\overline{0,\infty}$$

Уровни энерг. совп. с нечётн. для случая а.

Аналогично зад. 2 из 1-го зад. можно получить

$$\psi_n(x) = \begin{cases}\sqrt{2}\,\psi_{2n+1}(x), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Задача 8



α-распад ${}^4_2He$

$$E \ll \frac{2Ze^2}{r_0} \Leftrightarrow \frac{r_0}{r_1} \ll 1$$

$$D(E) \simeq e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1}|p(r)|dr} = e^{-\frac{2}{\hbar}I}$$

$$I = \int_{r_0}^{r}|p(r)|\,dr = \int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2m(U(r)-E)} = \sqrt{2m}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{2Ze^2}{r}-E}\,dr =$$

$$= \sqrt{2m\cdot 2Ze^2}\int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^{1/2}dr = \sqrt{2m\,2Ze^2}\int_{r_0/r_1}^{1}\left(\frac{1}{r_1x^2}-\frac{1}{r_1}\right)^{1/2}2r_1x\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2mzZe^2}\sqrt{r_1}\int_{r_0/r_1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\sqrt{2mzZe^2}\sqrt{r_1}\,\frac{\pi}{4} =$$

$$= \pi\sqrt{mze^2}\sqrt{\frac{2Ze^2}{E}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{E}}\,ze^2$$

$$\hookrightarrow D \simeq e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}} \quad (1)$$

где $C = \frac{2\pi}{\hbar}\sqrt{2m}\,ze^2$

Число ударов о стенку барьера за время t:

$$N \sim \frac{vt}{r_0} = \frac{pt}{mr_0} \sim \frac{\hbar t}{mr_0^2}$$

частота ударов: $n \sim \frac{\hbar}{mr_0^2}$

Вер-сть выхода в ед. времени

$$P_{вых} = nD = \frac{\hbar D}{mr_0^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \\ N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \end{cases} \hookrightarrow \quad T_{1/2} = \ln 2/\lambda \quad (3)$$

$$\frac{dN}{dt} = -N\lambda$$

$$P_{вых} = \frac{|dN/dt|}{N} = \lambda \overset{(3)}{=} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \overset{(2)}{=} \frac{\hbar D}{mr_0^2} \overset{(1)}{=} \frac{\hbar}{mr_0^2} e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}}$$

$$\frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\hbar}{mr_0^2} e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}}$$

$$\ln(\ln 2) - \ln T_{1/2} = \ln\frac{\hbar}{mr_0^2} + \left(-\frac{C}{\sqrt{E}}\right) \hookrightarrow \ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

где A и B - const.

Задача 11

$^3H \to {}^3He + e^- + ...$

Для водородопод. атома

$$\psi_{100} = \left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{zr}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \text{ где } a \text{ – радиус Бора}$$

$$\psi_{200} = \left(\frac{z}{2a}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{zr}{a}\right) e^{-\frac{zr}{2a}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

а) част. переходит из сост. ψ_{100} с $z=1$ в сост. ψ_{100} с $z=2$.

$$W_0 \to W_{0'} = |\langle \psi_{0'} | \psi_0 \rangle|^2$$

$$\langle \psi_{0'} | \psi_0 \rangle = \int_0^\infty \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{2r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\pi =$$

$$= \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} 4 \int_0^\infty e^{-\frac{3r}{a}} r^2 dr \stackrel{t=\frac{3r}{a}}{=\!=} \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{3}\right)^3 4 \int_0^\infty e^{-t^2} t^2 dt =$$

$$= \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{3}\right)^3 8$$

$$W_{0\to0'} = \left(\frac{2}{a^2}\right)^3 \left(\frac{a}{3}\right)^6 8^2 = \frac{2^9}{3^6} = \frac{512}{729}$$

б) частица переходит из состояния ψ_{100} с $z=1$ в сост. ψ_{200} с $z=2$

$$W_{0\to1'} = |\langle \psi_{1'} | \psi_0 \rangle|^2$$

$$\langle \psi_{1'} | \psi_0 \rangle = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{2r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{a^3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr \stackrel{t=\frac{2}{a}r}{=\!=} \frac{4}{a^3} \frac{a^3}{8} \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{2}\right) e^{-t} t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3!}{2}\right) = -\frac{1}{2} \qquad W_{0\to1'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{W_{0\to1'}}{W_{0\to0'}} = \frac{729}{2048} < 1$$