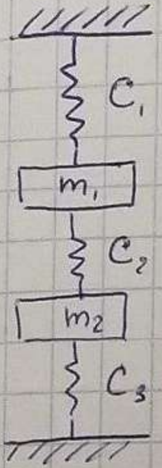
Задача 17.2



$$F = -\beta v \quad (\beta > 0)$$

Док-ть, что полож. равнов. будет асимпт. устойч. для $\forall$ c_i и m_i

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\tilde{Q} = -\beta \dot{x}_1$$

$$\Pi = x_1 mg + mg x_2 + \frac{c_3 (x_2 - l_2)^2}{2} +$$

$$+ \frac{c_2 (x_2 - l_2 - x_1 + l_1)^2}{2} + \frac{c_1 (x_1 - l_1)^2}{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -\frac{1}{2} c_2 \\ -\frac{1}{2} c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad \text{(продиф } \Pi \text{ 2р. по } x_1, x_2\text{)}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m_1 + \lambda \beta + c_1 + c_2 & -\frac{1}{2} c_2 \\ -\frac{1}{2} c_2 & \lambda^2 m_2 + c_2 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 m_1 + \lambda \beta + c_1 + c_2)(\lambda^2 m_2 + c_2 + c_3) - \frac{1}{4} c_2^2 =$$

$$= \lambda^4 m_1 m_2 + \lambda^3 \beta m_2 + \lambda^2 (m_1 c_2 + m_1 c_3) + \lambda (\beta c_2 + \beta c_3) +$$

$$+ c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2^2 + c_2 c_3 - \frac{1}{4} c_2^2 + \lambda^2 m_2 (c_1 + c_2)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \beta m_2 & \beta C_2 + \beta C_3 & 0 & 0 \\ m_1 m_2 & m_1 C_2 + m_1 C_3 + m_2(C_1+C_2) & C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 + \frac{3}{4}C_2^2 & 0 \\ 0 & \beta m_2 & \beta C_2 + \beta C_3 & 0 \\ 0 & m_1 m_2 & m_1C_2 + m_1C_3 + m_2(C_1+C_2) & C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 + \frac{3}{4}C_2^2 \end{bmatrix}$$

Т.к. все $a_i > 0$, $a_1 = \beta m_2 > 0$, то смотрим

$$\Delta_3 = \beta m_2 \Big((m_1C_2 + m_1C_3)(\beta C_2 + \beta C_3) - \beta m_2 \cdot (C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \tfrac{3}{4}C_2^2) \Big) - \beta(C_2+C_3)\Big(m_1 m_2 \beta (C_2+C_3)\Big) + \beta m_2^2 (C_1+C_2) \cdot \beta(C_2+C_3) =$$

$$= \cancel{\beta^2 m_2 m_1 (C_2+C_3)^2} - \beta^2 m_2^2 (C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 + \tfrac{3}{4}C_2^2) - \cancel{\beta^2 m_1 m_2 (C_2+C_3)^2} + \beta^2 m_2^2 (C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 + C_2^2) =$$

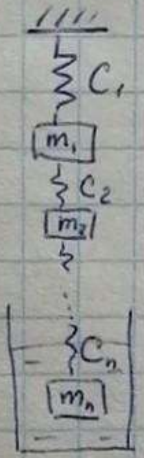
$$= \beta^2 m_2^2 \frac{C_2^2}{4} \cancel{+\beta^2 m_1 m_2 (C_2^2 + 2C_2C_3 - C_1^2 - 2C_1C_3)} =$$

$$= \beta^2 m_2^2 \frac{C_2^2}{4} > 0 \quad \forall m_i, C_i \quad i = 1, 2.$$

(если сила действует на 2 груз, то получим симметричн. ответ)

Ответ: по критерию Рауса-Гурвица, полож. равновесия этой системы будет асимпт. устойчивым $\forall c_i, m_i$, $i = 1, 2$

Задача 17.8



На последний груз действует $F = -\beta v$, $\beta > 0$

пок-ть, что асимпт. устойчиво.

Для системы $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} c(x_i - x_{i-1})^2$$

$E = T + \Pi > 0$

При этом $\dot{E} = \frac{d(T+\Pi)}{dt} = \tilde{Q}_0 = -\beta \dot{x}_n^2 \leq 0$

Используем теорему Барбашина Красовского.

Если $\dot{x}_n = 0$, т.е. $x_n = const$. Последний груз нах-ся в сост. покоя, т.е. сила, действ. на него, равна 0. Значит и обобщ. силы, которые действуют на другие грузы, равны 0. То есть система нах-ся в сост. равновесия.

Таким образом мн-во $\vec{x} : \dot{E} = 0$ не содерж. целых тракт. системы кроме $\vec{x} = 0$. Тогда оба условия теоремы: $\dot{V} \equiv \dot{E} \leq 0$ в окрест. пол. равнов. и нет целых тракт. сист. кроме $\vec{x} = 0$. Значит полож. равнов. асимптот. устойчиво.

Задача 17.11(а)

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \dot{y} - \beta x + y = 0 \end{cases}$$

исслед (0,0) на асимпт уст-сть.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2 - \beta\alpha = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \beta\alpha = 0$$

$1 - \beta\alpha > 0$ - необх. усл.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1-\beta\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1-\beta\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = 2 \cdot (6 - 2 + 2\beta\alpha) - 2 \cdot 2 = 12 - 4 + 4\beta\alpha - 4 =$$

$$= 4(1 + \beta\alpha) > 0 \longrightarrow 1 + \beta\alpha > 0.$$

т.е. $-1 < \beta\alpha < 1$

Задача 17.20

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}\ddot{q}^k + b_{ik}\dot{q}^k + c_{ik}q^k \right) = 0 \qquad i = \overline{1,n}$$

$A = (a_{ik})$ $\quad B = (b_{ik})$ $\quad C = (c_{ik})$ - симм. полож. опр. матрицы.

Док-ть, что $q^k = 0$, $k = \overline{1,n}$ асимпт. устойчиво

Возьмём ф-цию Ляпунова $V = T + \Pi$

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} + \frac{1}{2}q^T C q > 0$$

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{q}^T B\dot{q} < 0 \hookrightarrow$$ по т. Ляпунова об асимпт. устойчивости полож. равновесия асимпт. устойч

Задача 17.28

$\dot{x}_1 = \alpha_1 (x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = \alpha_2 (x_3 - x_2)$, ..., $\dot{x}_n = \alpha_n (x_1 - x_n)$

$\alpha_i > 0$

Док-ть, что при $t \to \infty$ реш. сх-ся к $x_1^* = x_2^* = \ldots = a$.

Рассмотрим ф-цию Ляпунова

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\alpha_1}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2 - a)^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n - a)^2 > 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \cdot 2(x_1 - a)\dot{x}_1 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n} 2(x_n - a)\dot{x}_n =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\alpha_1}} 2(x_1 - a)(\cancel{\alpha_1}(x_2 - x_1)) + \ldots + \frac{1}{\cancel{\alpha_n}} 2(x_n - a)\cancel{\alpha_n}(x_1 - x_n) =$$

$$= -2x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2 + 2x_2 x_3 + \ldots - 2x_n^2 + 2x_1 x_n =$$

$$= -(x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - \ldots - (x_n - x_1)^2 < 0$$

Получается по т. Ляпунова об асимптотич. устойч. полож. равновесия $x_1 = a = x_2 = \ldots = x_n$ асимптотич. устойчиво, где a зависит от нач. условий.