(19) $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

a) $E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\xi_i - E\xi_i)\right)^2\right) = E\left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (\xi_i - E\xi_i) \cdot\right.$
$\left.\cdot(\xi_j - E\xi_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j E\left((\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\right) =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \vec{x}^T C \vec{x} \geq 0,$

т.к. случ. величина $\geq 0 \hookrightarrow E$сл.в. ≥ 0

Откуда видно, что вып. опред. ~~[illegible]~~ неотриц. опр. матрицы

ч.т.д.

(20) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нез. $\sim N(a, \sigma^2)$

$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ – имеет норм. распр.

$$E\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k = E\xi_i = a.$$

$$D\alpha = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \frac{1}{n} D\xi_i = D\frac{\xi_i}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Значит $\alpha \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

(20)

$$\beta = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbb{C} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ C_{21} & C_{22} \dots & C_{2n} \\ & \dots & \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{nn} \end{vmatrix}$$

где C_{ij} выбраны так, что

1) $\mathbb{C}$ - ортогон. матрица, т.е. $\mathbb{C}^T = \mathbb{C}^{-1}$

2) $\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2 = 1$

3) $\sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 0, \quad i \geqslant 2$

Рассмотрим столбец

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

И длина вектора не изменится, т.к. $\mathbb{C}$ - ортогон. матрица

значит:

$$\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \quad (*)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sqrt{n}\,\alpha \quad - \text{ т.к. } \alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

$$E\eta_i = E\Big(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\xi_j\Big) = \sum_{j=1}^{n}c_{ij}\overbrace{E\xi_j}^{=a} = a\cdot\overbrace{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}}^{=0} = 0$$

$$D\eta_i = D\Big(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\xi_j\Big) = \sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2\underbrace{D\xi_i}_{=6^2} = 6^2\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2}_{=1} = 6^2$$

верно при $i \geqslant 2$.

$E\eta_1 = \sqrt{n}\,a$

Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\alpha)^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 - 2\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}^{=\alpha n}\alpha + n\cdot\alpha^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 - \underbrace{n\alpha^2}_{=\eta_1^2}$$

Откуда используя (*) получим:

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\alpha)^2 = \sum_{k=2}^{n}\eta_k^2 = 6^2\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{\eta_k}{6}\Big)^2$$

где случ. величины $\frac{\eta_k}{6}$ имеют норм. распр. с парам. $N(0,1)$.

Нормальное, т.к. получены в рез-те действ. невырожд. преобр-ия на норм. вектор. (матрица $\mathbb{C}$ невырождена)

Покажем, что эти случ. величины независимы в совокупности.

Для этого достаточно показать, что $E(\eta_k \eta_j) = 0$, откуда будет следовать, что $cov(\eta_k \eta_j) = E(\eta_k \eta_j) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E\eta_k}} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E\eta_j}} = E(\eta_k \eta_j) = 0$ и т.к. η_i имеют норм. распр, то они будут независимы в совокупности.

$$E(\eta_k \eta_j) = E\left(\sum_{i,t=1}^{n} C_{ki} \xi_i C_{jt} \xi_t\right) = \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki} C_{jt} E(\xi_i \xi_t) =$$

они независимы

$$= \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki} C_{jt} \underset{a}{\underset{\shortparallel}{E\xi_i}} \cdot \underset{a}{\underset{\shortparallel}{E\xi_t}} = a^2 \cdot \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki} C_{jt} = a^2 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n} C_{ki}}} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sum_{t=1}^{n} C_{jt}}} = 0$$

Значит они независ. в совокупности

Откуда следует, что $\beta = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{n-1}$ - имеет распределение хи квадрат с $n-1$ степенью свободы.

(22) Пусть m - число опечаток.

$$P(m \geq 2) = 1 - P(m=1) - P(m=0) = 1 - C_{10}^{1}(1-p)^{9} \cdot p -$$

$$-(1-p)^{10} = 1 - \frac{1}{50}\left(1 - \frac{1}{500}\right)^{9} - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{50}\left(\frac{499}{500}\right)^{9} -$$

$$-\left(\frac{499}{500}\right)^{10} = 178,1 \cdot 10^{-6}$$

$n = 10$ - всего опечаток $\quad pn = \frac{1}{50} = const$

применим Пуассон прибл. $\left(\lambda = \frac{1}{50}\right)$

$$P(m=k) = \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(m \geq 2) = 1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1} - \frac{\lambda^{0} e^{-\lambda}}{1} = 197,4 \cdot 10^{-6}$$

Ответ: $P(m \geq 2) \approx 197,4 \cdot 10^{-6}$.

(23) $p = 0{,}515$ $n = 10000$ $m_0 = 5000$

Так как n велико и $p<1$, то справедл. интегр. пред. т. Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx -3$$

$$P(m \geq m_0) = 1 - \varphi(x_1) = 1 - \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - 1{,}35 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}9986}}$$

(24)

$$P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geq 0{,}1\right\}\leq 0{,}1$$

$$\xi_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$$

отдельные броски

$$E(\xi_i)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}\qquad E\xi_i^2=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}=\frac{91}{6}$$

$$D\xi_i=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{70}{24}=\frac{35}{12}$$

Используя центральную предельную теорему:

$$\frac{\xi_n-nE\xi_i}{\sqrt{nD\xi_i}}\xrightarrow{\text{Law}}\eta\sim N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geq 0{,}1\right)\xrightarrow{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\eta\sqrt{D\xi_i}}{\sqrt{n}}\right|\geq 0{,}1\right)=$$

$$=P\left(|\eta|\geq\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}\right)\leq 0{,}1$$

из-за оценки по модулю

$$P\left(|\eta|\geq\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}\right)=\int_{\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leq 0{,}1$$

В случ. рав-ва

$$\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}=1{,}645\qquad n=\left(\frac{1{,}645}{0{,}1}\right)^2D\xi_i=789{,}26$$

Ответ: $n\geq 790$.