Задача 21.2

Док-ть, что ур-ия Лагр. совп., если лагр. отлич. на адд. полную полн. произв. по врем. произв. ф-ции коорд. и времени.

Это утв. имеет след. смысл: динамич. системы с лагранжианами L и $L + \frac{dF}{dt}$ имеют один и тот же прямой путь, какова бы ни была $F(q, t)$.

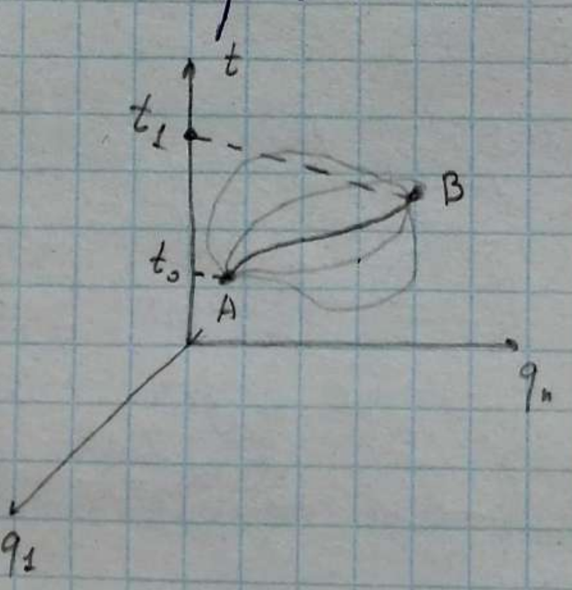
Рассмотрим действие

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

и действие

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \frac{dF}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dF = I + F\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

$\delta F\big|_{t=t_1} = \delta F\big|_{t=t_0} = 0$ в силу того, что как при $t = t_0$, так и при $t = t_1$ все рассматрив. кривые проходят через одну и ту же точку расширенного коорд. пр-ва. Поэтому так как на прямом пути $\delta I = 0$, то на том же пути $\delta \tilde{I} = 0$, а это значит, что одна и та же кривая явл-ся прямым путём для ур-ний Лагранжа с лагр. L и $\tilde{L}$, значит уравн. Лагранжа совпадают.



(21.4) В поле тят., $\parallel Oz$ через $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, не леж. в гиперплоск. $t = const$ $(t_0 \neq t_1)$ можно пров. прямой путь и притом только 1.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

По принципу Гамильтона через $\forall$ 2 точки M_0 и M_1 можно провести прямой путь и притом только один, если ур-ие Лагранжа имеет решение, определ. однозначно (тогда $\delta W = 0$)

Урав. Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = At + B \\ y = Ct + D \\ z = \frac{gt^2}{2} + Et + F \end{cases}$$

Подставив граничные условия, получим

$$\begin{cases} x_1 = At_1 + B \\ x_0 = At_0 + B \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ t_0 & 1 \end{vmatrix} = t_1 - t_0 \neq 0 \text{ в силу условия}$$

Значит A и B определены однозначно

Аналогично C и D определены однозначно

Подставим для z:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{gt_1^2}{2} + Et_1 + F \\ z_0 = \frac{gt_0^2}{2} + Et_0 + F \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 - \frac{gt_1^2}{2} = Et_1 + F \\ z_0 - \frac{gt_0^2}{2} = Et_0 + F \end{cases} \rightarrow E \text{ и } F \text{ определены однозначно при } t_0 \neq t_1.$$

Т.е. решение уравн. Лагранжа $\exists$ и опред. однозначно. Значит исходн. утв. также верно.

21.12

$$z_{пр} = \frac{gt^2}{2}$$

$$z_{ок} = at^n \quad (n \geq 1)$$

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$$

Действие на прямом пути

$$W_{пр} = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t}\left(m\frac{g^2t^2}{2} - m\frac{g^2t^2}{2}\right)dt = 0$$

Для окольного пути имеем:

$$W_{ок} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{ma^2n^2t^{2(n-1)}}{2} - mgat^n\right)dt =$$

$$= \frac{ma^2n^2}{2(2n-1)}t^{2n-1}\Big|_{t_0}^{t_1} - \frac{mga}{n+1}t^{n+1}\Big|_{t_0}^{t_1}$$

На краях вып-ся условие

$$z^0_{ок} = z^0_{пр} \hookrightarrow \frac{q t_0^2}{2} = a t_0^n \hookrightarrow t_0^{n-2} = \frac{q}{2a}$$

$$z^1_{ок} = z^1_{пр} \hookrightarrow \frac{q t_1^2}{2} = a t_1^n \hookrightarrow t_1^{n-2} = \frac{q}{2a}$$

Из системы либо $t_1 = t_0$, либо $t_0 = 0$ и $t_1^{n-2} = \frac{q}{2a}$

Откуда получим:

$$W_{ок} = \frac{ma^2n^2}{2(2n-1)} t_1^{2n-1} - \frac{mqa}{n+1} t_1^{n+1} =$$

$$= mat_1^{n+1}\left(\frac{an^2}{2(2n-1)} t_1^{n-2} - \frac{q}{n+1}\right) = mat_1^{n+1}\left(\frac{\cancel{a}n^2 q}{4(2n-1)\cancel{a}} - \frac{q}{n+1}\right)$$

$$= mat_1^{n+1}\left(\frac{qn^2}{4(2n-1)} - \frac{q}{n+1}\right) = maqt_1^{n+1}\left(\frac{n^2}{4(2n-1)} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$W_{ок} = maqt_1^{n+1}\left(\frac{n^3+n^2-8n+4}{4(2n-1)(n+1)}\right)$$

$$n^3+n^2-8n+4 = (n-2)\left(n+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$ $\quad -1 \quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}$ $\quad 2$

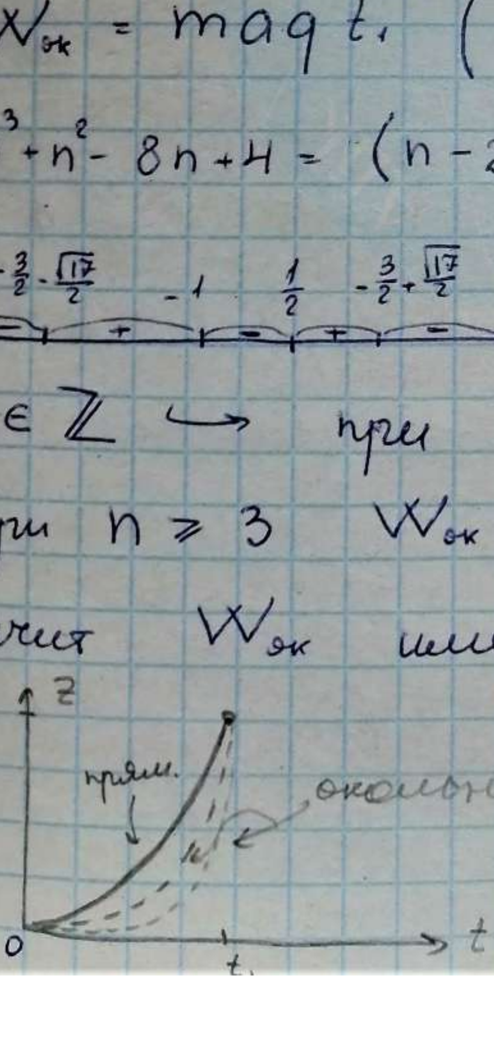
$-\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +$

$n \in \mathbb{Z} \hookrightarrow$ при $n = 1$ $W_{ок} < 0$

при $n \geq 3$ $W_{ок} > 0$

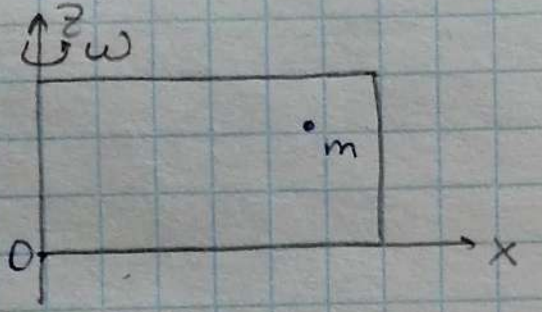
Значит $W_{ок}$ имеет стац. точку $n=2$, но экстр.

нет.



21.14

$(x_0, z_0) \longrightarrow (x_1, z_1)$ за $T > 0$



$$\Pi = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2}$$

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Из принципа Гамильтона, искомая траектория $\exists$ и $!$, если реш. ур. Лагранжа определено однозначно

За обобщ. коорд. $\vec{q} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - m\omega^2 x = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\ z = Ct + D \end{cases}$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} x_0 = Ae^{\omega t_0} + Be^{-\omega t_0} \\ z_0 = Ct_0 + D \\ x_1 = Ae^{\omega t_1} + Be^{-\omega t_1} \\ z_1 = Ct_1 + D \end{cases} \longrightarrow \quad C = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$$

$$D = z_0 - \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} t_0 = \frac{z_0 t_1 - z_1 t_0}{t_1 - t_0}$$

$$A = x_1 e^{-\omega t_1} - B e^{-2\omega t_1}$$

$$B = \frac{x_1 e^{-\omega(t_1 - t_0)} - x_0}{e^{-\omega(2t_1 - t_0)} + e^{-\omega t_0}} \longrightarrow A = x_1 e^{-\omega t_1} - \frac{x_1 e^{-\omega(t_1 - t_0)} - x_0}{e^{-\omega(2t_1 - t_0)} + e^{-\omega t_0}} e^{-2\omega t_1}$$

Все коэфф. опр-ся однозначно, значит

$\exists!$ траектория, удовл. условию.

21.15

Док-ть, что $W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2}\int_0^T \left[(\delta\dot{x})^2 + \omega^2(\delta x)^2 + (\delta\dot{z})^2\right]dt$,

где $\delta x = x_{ок} - x_{пр}$, $\delta z = z_{ок} - z_{пр}$ и $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$

$\delta z(0) = \delta z(T) = 0$

$$W_{ок} = \int_{t_0}^{t_1} L_{ок}\,dt = \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[(\dot{x}+\delta\dot{x})^2 + (\dot{z}+\delta\dot{z})^2 + \omega^2(x+\delta x)^2\right]dt =$$

$$= \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2\right]dt + \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[2\dot{x}\delta\dot{x} + (\delta\dot{x})^2 + \right.$$

$$\left. + 2\dot{z}\delta\dot{z} + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2\cdot x\cdot\delta x + \omega^2(\delta x)^2\right]dt =$$

$$= W_{пр} + m\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z) - \ddot{x}\delta x - \ddot{z}\delta z + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left((\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2(\delta x)^2\right) + \omega^2 x\delta x\cdot\frac{1}{2}\right]dt =$$

$$= W_{пр} + m(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z)\Big|_{t_0}^{t_1} + m\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{z}^2 + \omega^2\delta x^2 + \omega^2 x\delta x) -$$

$$- \ddot{x}\delta x - \ddot{z}\delta z)\,dt$$

Из предыд. задачи

$\ddot{z} = 0 \qquad -\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Тогда:

$$W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t_1} \left[(\delta \dot{x})^2 + \omega^2 (\delta x)^2 + (\delta \dot{z})^2 \right] dt$$

$T = t_1 - t_0$, значит

$$W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2} m \int_0^T \left[\delta \dot{x}^2 + \omega^2 \delta x^2 + \delta \dot{z}^2 \right] dt$$