Задача 1.4

Дано:

$R_1 = 25$ мм

$R_2 = 40$ мм

$n = 1,5$

---

f - ?

Решение:

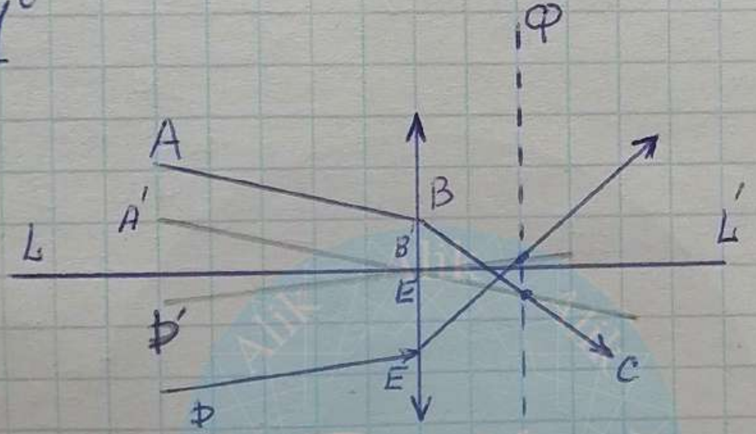
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = 0,5 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{40}\right) = 0,0325 \text{ мм}^{-1}$$

$$f = 30,77 \text{ мм}$$

Ответ: $f = 30,77$ мм.

Задача 1°

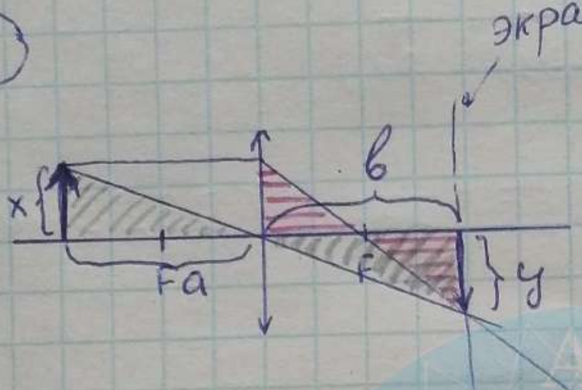


Параллельным переносом построим $A'B'$, прох. через главн. оптич. ось - он не искажается. Получим фокальную плоскость Ф. Также построим $Д'E'$ и найдём его пересеч. с Ф. В эту же точку и придёт луч $ДE$.

Задача 2°.

Рассмотрим 2 случая:

I



Из геометрических сообр. (подобия треугольников)

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Из других тр-ков:

$$\frac{F}{b-F} = \frac{x}{y}$$

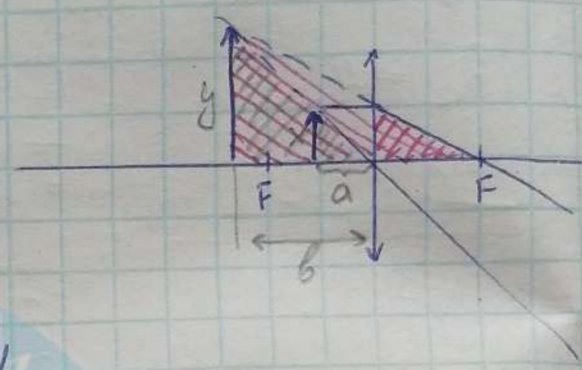
Получим:

$$\frac{a}{b} = \frac{F}{b-F}$$

$$ab - aF = bF$$

$$\frac{ab}{a+b} = F$$

II



Аналогично:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

И из розовых Δ:

$$\frac{F}{F+b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{F}{F+b}$$

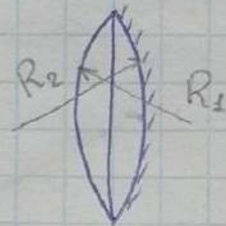
$$ab + aF = bF$$

$$\frac{ab}{b-a} = F$$

Задача 1.29

Дано: R_1, R_2, n

$f - ?$



Для такой линзы „без зеркала" справедливо $\frac{1}{f_л} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Луч попадает в линзу, проходит ее, отражается от зеркала, и снова проходит через линзу. Воспользуемся сложением оптических сил, учитывая, что для зеркала $\frac{1}{f_з} = \frac{2}{R_2}$

Тогда $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_л} \cdot 2 + \frac{1}{f_з} = 2(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{2}{R_2} =$

$$= \frac{2(n-1)(R_2 + R_1) + 2R_1}{R_1 R_2} = \frac{2(n-1)R_2 + 2nR_1}{R_1 R_2}$$

$$f = \frac{R_1 \cdot R_2}{2(n-1)R_2 + 2nR_1}$$

Задача 1.22

Дано:

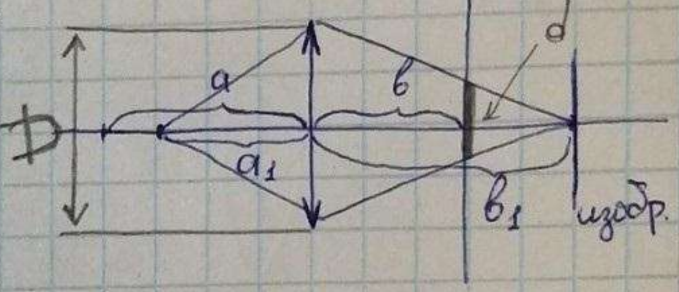
$a = 5$ м

$f = 0{,}2$ м

$a_1 = 4{,}5$ м

$d = 0{,}1$ мм

D – ?



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \longrightarrow b = \frac{af}{a-f}$$

также получим $b_1 = \dfrac{a_1 f}{a_1 - f}$

Из подобия треугольников

$$\frac{D}{d} = \frac{b_1}{b_1 - b}$$

$$b_1 - b = \frac{a_1 f}{a_1 - f} - \frac{af}{a-f} = \frac{\cancel{a_1 a f} - a_1 f^2 - \cancel{a a_1 f} + a f^2}{(a_1 - f)(a-f)} =$$

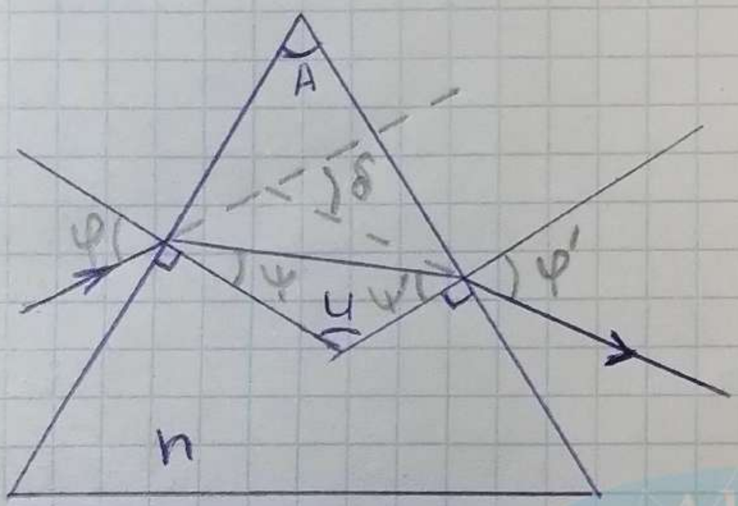
$$= \frac{f^2(a - a_1)}{(a_1 - f)(a-f)}$$

$$D = \frac{b_1 d}{b_1 - b} = \frac{a_1 \cancel{f}}{\cancel{a_1 - f}} \cdot d \cdot \frac{\cancel{(a_1 - f)}(a-f)}{f^2(a - a_1)} = \frac{a_1 d (a-f)}{f(a-a_1)} =$$

≈ 2 см

Ответ: $D \approx 2$ см

Задача 1.9



Из геометрии

$$\delta = \varphi - \psi + \varphi' - \psi' =$$
$$= \varphi + \varphi' - (\psi + \psi')$$

Т.к. 2 прямых угла в четырехуг-ке, то

$$\angle A + \angle U = 180^\circ.$$

Из треугольника $\psi + \psi' + \angle U = 180^\circ$.

Приравнивая, получим $\psi + \psi' = \angle A$. Тогда

$\delta = \varphi + \varphi' - \angle A$.

Для минимального угла отклонения

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = 1 + \frac{d\varphi'}{d\varphi} = 0$$, откуда $|\varphi'| = |\varphi|$

тоесть δ минимально, когда, когда входящий и выходящий лучи <u>симметричны</u>.

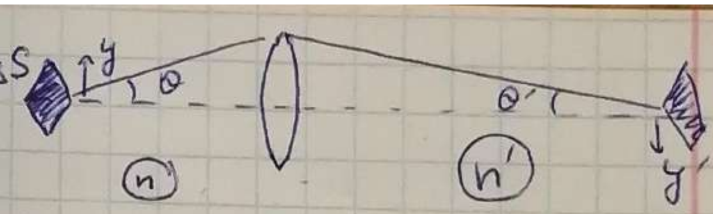
$$\delta = 2\varphi - \angle A \hookrightarrow \varphi = \frac{\delta + \angle A}{2}$$

и также $\varphi - \psi = \frac{\delta}{2}$ (т.к. ψ и ψ' также равны для δ_{min})

$$n = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin((\angle A + \delta)/2)}{\sin(\varphi - \frac{\delta}{2})} = \frac{\sin\left(\frac{\angle A + \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)} \;//$$

Ответ: $n = \dfrac{\sin\left(\frac{\angle A + \delta}{2}\right)}{\sin(\angle A/2)}$

Задача 1.56



1) непосредственно:

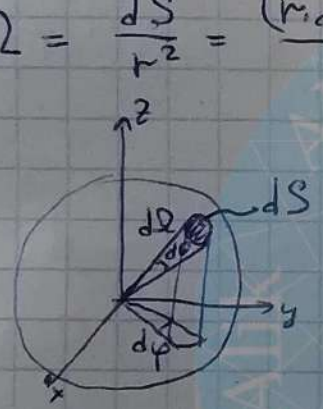
Пусть яркость предмета B. тогда световой поток

$$d\Phi = B(\theta)\,d\Omega\,dS\cos\theta = 2\pi B(\theta)\,dS\sin\theta\cos\theta\,d\theta \approx$$

$$\approx 2\pi B(\theta)\,dS\,\theta\,d\theta$$ — в силу малости углов

Здесь использовано, что

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{(r\cdot d\theta)(r\cdot\sin\theta\cdot d\varphi)}{r^2} = \frac{r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$



$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$$

Аналогично рассматривая изображение как светящийся предмет:

$$d\Phi' = 2\pi B'(\theta')\,dS'\,\theta'\,d\theta'$$

Считая, что потери в оптич. системе малы $d\Phi' = d\Phi$.

$$2\pi B'(\theta')\,dS'\,\theta'\,d\theta' = 2\pi B(\theta)\,dS\,\theta\,d\theta$$

Согласно теореме Лагранжа-Гельмгольца

$$ny\theta = n'y'\theta' \xrightarrow[\text{в квадрат}]{\text{возведём}} n^2y^2\theta^2 = n'^2y'^2\theta'^2 \longrightarrow n^2\,dS\,\theta\,d\theta = n'^2\,dS'\,\theta'\,d\theta'$$

получим в итоге, что $B'(\theta') = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 B(\theta)$

То есть в случае если $n = n'$, то яркость предмета и изображения будут одинаковы (не зависят от диаметра линзы)

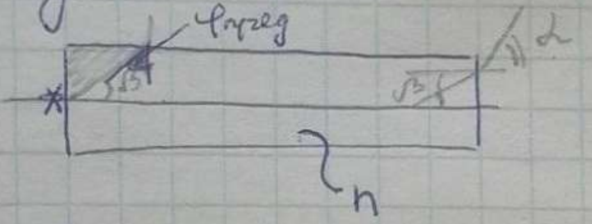
2) В случае экрана величина телесного угла, в котором распр-ся лучи после выхода из оптич. прибора, не играет роли. Имеют значение только площадь изображения и полный световой поток, концентрирующийся на этой площади.

Если $\Phi = const$, то $B \sim S^{-1} \sim d^{-2}$

тоесть обратна пропорциональна квадрату диаметра линзы.

Ответ: В первом случае яркость не зависит от диаметра линзы, а во втором обратно пропорц. квадрату диаметра.

Задача 1.15



Найти: 2α - ?

max угол выхода луча из световода обозначим α, но тогда апертура будет равна 2α, поэтому найденный α удвоим.

Для углов, больших β (закрашенная часть) - лучи уйдут из из световода.

$\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi_{пред}$

Для $\varphi_{пред}$ имеем $\sin\varphi_{пред} = \frac{1}{n}$

Для выходящего луча из световода:

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{пред}\right)}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}$

$\sin\alpha = n \cdot \cos\varphi_{пред} = n \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varphi_{пред}} =$

$= n \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2 - 1}$

Но $\sin\alpha \leq 1$, соответственно если $n \geq \sqrt{2}$,

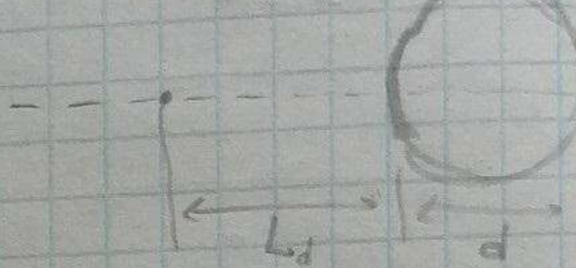
то $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

В итоге получим:

Ответ: $2\alpha = \begin{cases} 2\arcsin\sqrt{n^2-1} & \text{при } n < \sqrt{2} \\ \pi & \text{при } n \geq \sqrt{2} \end{cases}$

Задача Т1.

а) близорукий человек



Без очков:

хрусталик - это линза, выпуклая с обеих сторон, соответственно используем ф-лу тонкой линзы:

$$\frac{1}{L_d} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_{max}}$$

Когда наденем очки, то оптические силы сложатся и по условию $L_d = \infty \to \frac{1}{L_d} = 0$:

$$\frac{1}{F_{max}} + D = \frac{1}{d} \qquad D = \frac{1}{d} - \frac{1}{F_{max}} = \frac{1}{d} - \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L_d}\right) = -\frac{1}{L_d}$$

Ответ: $D = -\frac{1}{L_d} = -2$ дптр.

б) дальнозоркий человек

Аналогично $\frac{1}{L_b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_{min}}$

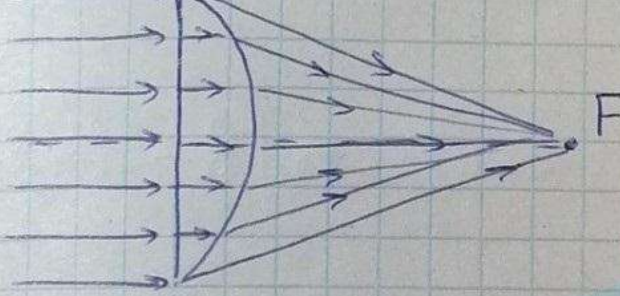
$$\frac{1}{F_{min}} + D = \frac{1}{d} + \frac{1}{L_0}$$

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{L_0} - \frac{1}{F_{min}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{L_0} - \left(\frac{1}{L_b} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_b}$$

Ответ: $D = \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_b} = 4 - 1 = 3$ дптр.

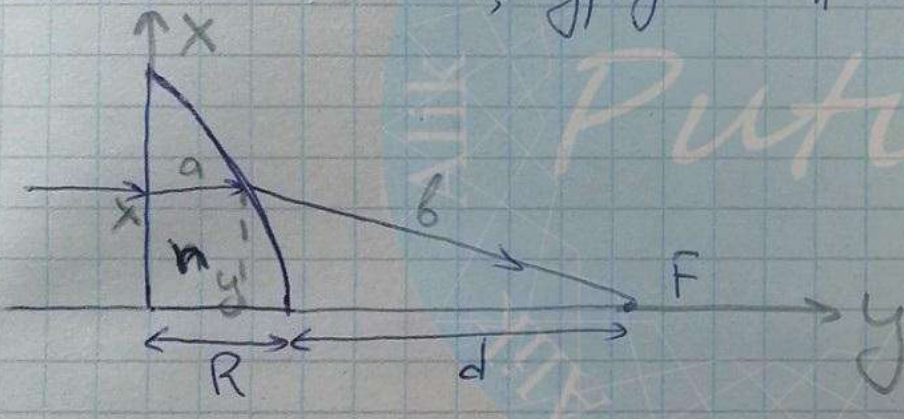
Задача Т2.

Найти тип плоско-выпукл. линзы для фокусировки $\parallel$ пучка в точку.



Принцип таутохронизма: все лучи одновременно придут в точку F.

Рассмотрим 2 луча: один по главной оптической оси, другой $\parallel$ ей:



$$nR + d = na + в$$

$$a = y, \quad в = \sqrt{(d + R - y)^2 + x^2}$$

$$nR + d = ny + \sqrt{(d + R - y)^2 + x^2}$$

$$(nR + d - ny)^2 = (d + R - y)^2 + x^2$$

$$n^2R^2 + \cancel{d^2} + n^2y^2 + 2nRd - 2n^2Ry - 2nyd =$$

$$= \cancel{d^2} + R^2 + y^2 + 2dR - 2dy - 2Ry + x^2$$

$$-x^2+y^2(n^2-1)+y(2d+2R-2n^2R-2nd)+2ndR+n^2R^2-$$

$$-R^2-2dR=0$$

Коэффициенты при x^2, y^2, xy соотв-но равны -1, (n^2-1), 0, $\underline{\underline{n\neq 1}}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & n^2-1\end{vmatrix}=1-n^2<0$$

кривая гиперболического типа

Ответ: тип идеальной формы – гипербола

Задача 1.57

Дано:

$D = 75$ мм

1) $\gamma_1 = 20$

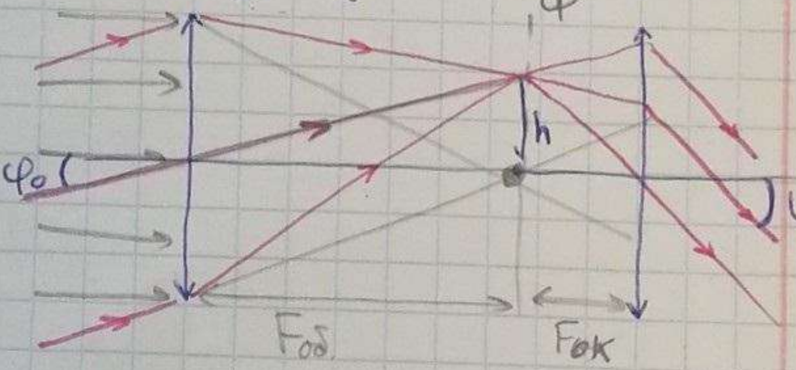
2) $\gamma_2 = 25$

3) $\gamma_3 = 50$

$d_{зр} = 3$ мм

$\mathcal{A} = 1$ (невоор. гл.)

Ход лучей в телескопе:



$\varphi > \varphi_0$

Коэфф. увелич.

$$\gamma = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\varphi_0} = \frac{h/F_{ок}}{h/F_{об}} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} = \frac{D_{об}}{D_{ок}}$$

диаметр

1) $D_{ок_1} = \frac{D_{об}}{\gamma_1} = \frac{75}{20} = 3,75$ мм $> d_{зр} = 3$ мм

$\mathcal{A}_1 = 1$

2) $D_{ок_2} = \frac{D_{об}}{\gamma_2} = \frac{75}{25} = 3$ мм $= d_{зр}$

$\mathcal{A}_2 = 1$

3) $D_{ок_3} = \frac{D_{об}}{\gamma_3} = \frac{75}{50} = 1,5$ мм $< d_{зр}$

освещенность

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{1,5^2}{3^2} = 0,25$$

$\mathcal{A}_3 = 0,25$

т.к. $E \sim S = \pi d^2/4$

Ответ: 1) 1, 2) 1, 3) 0,25.