§21. 60

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$ - ? $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ - ?

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$(\sin nx, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx \, dx \longrightarrow 0 = (0, \varphi)$$

по лемме Римана

Аналогично

$$\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$

Т2

Док-ть, что в $D'$:

а) $$\lim_{a \to +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$$

Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[-A, A]$, $A > 0$

Тогда $$\left(\frac{a}{a^2 + x^2}, \varphi\right) = \int_{-A}^{A} \frac{a\,\varphi(x)}{a^2 + x^2}\,dx$$

Рассмотрим $\forall x \neq 0$ ф-цию $\lambda(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} =$
$= \varphi'(\xi(x))$. $\xi(x) \in (0, x)$ или $\xi(x) \in (x, 0)$ - смотря что больше (по т. Лагранжа).

Т.к. $\varphi \in D$, то и $\varphi' \in D \hookrightarrow \varphi'$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$, поэтому $|\lambda(x)| \leq M \quad \forall x \neq 0$

Тогда $\varphi(x) = \varphi(0) + x\lambda(x)$ и:

$$\left(\frac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) = a\varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{dx}{a^2+x^2} + a\int_{-A}^{A}\frac{dx\cdot\lambda(x)x}{a^2+x^2} \equiv I_1 + I_2$$

Получим след. рав-ва:

$$I_1 = a\varphi(0)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{-A}^{A} = \varphi(0)\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{A}{a} \to \pi\varphi(0),\ a\to+0$$

Для второго интеграла:

$$|I_2| \leq Ma\int_{-A}^{A}\frac{|x|\,dx}{x^2+a^2} = 2Ma\int_{0}^{A}\frac{x\,dx}{x^2+a^2} =$$

$$= Ma\ln(x^2+a^2)\Big|_{0}^{A} = Ma\ln(A^2+a^2) - 2Ma\ln a$$

$$\lim_{a\to+0} Ma\ln(A^2+a^2) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{a\to+0} a\ln a = 0$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{\ln a}{a^{-1}} = \lim_{a\to+0}\frac{\frac{1}{a}}{-a^{-2}} = -\lim_{a\to+0} a = 0$$

Поэтому $\lim\limits_{a\to+0} I_2 = 0$

Значит, $\lim\limits_{a\to+0}\left(\frac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi)$ //

б) $\lim\limits_{a\to+0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} = \pi\delta(x)$

Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[-A, A]$, $A > 0$

Тогда $\quad \left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\cdot(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \int\limits_{-A}^{A} \varphi(0)\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx$$

Аналогично по т. Лагранжа $\quad |\varphi(x)-\varphi(0)| \leq C|x|$

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx\right| \leq \int\limits_{-A}^{A} \left|\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \leq$$

$$\leq 2\cdot C\int\limits_{0}^{A} \left|\sin\frac{x}{a}\right| dx = -2Ca\cos\frac{x}{a}\Big|_{0}^{A} =$$

$$= 2aC\left(1-\cos\frac{A}{a}\right)$$

Т.к. $\cos\frac{A}{a}$ - огранич. ф-ция, то $1-\cos\frac{A}{a}$ тоже огранич. и $\lim\limits_{a\to+0} 2aC\left(1-\cos\frac{A}{a}\right) = 0$

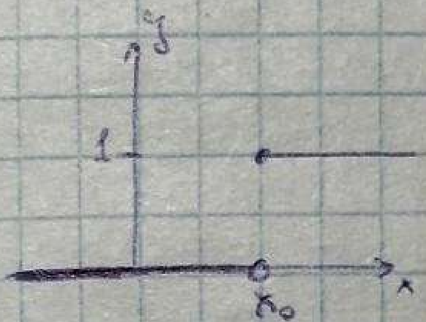
$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,\varphi(0)\,dx = \varphi(0)\cdot\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}}\,d\frac{x}{a}}_{\text{2 инт. Дирихле} = \frac{\pi}{2}\cdot 2} = \pi\varphi(0)$$

~~Значит, $\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right)$~~

Значит, $\quad \lim\limits_{a\to+0}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi)$ //

§21 71

Вычислить произв. $y = \Theta(x-x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$




$$(y', \varphi) = -(y, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x-x_0)\, \varphi' dx = -\int_{x_0}^{+\infty} \varphi' dx =$$

$$= \varphi(x_0) = (\delta(x-x_0), \varphi)$$

сдвинутая δ-ф-ция

**Ответ:** $y' = \delta(x-x_0)$.

§21. 84

Док-ть, что если $f$ - кус. гладкая на $\mathbb{R}$ ф-ция, имеющ. в т. $x_1, \ldots, x_n$ разрывы 1 рода со скачками $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x} + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k)$$

Пусть $\varphi \in D$

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

т.к. $\varphi$ финитна, то $\exists\, [x_0, x_{n+1}] : \operatorname{supp} \varphi \cup \{x_k\}_{k=1}^{n} \subset (x_0, x_{n+1})$

Разобьём наш интеграл на сумму по отрезкам:

$$-\left( \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, \varphi'(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \varphi'(x)\, dx + \ldots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx \right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} f(x)\,\varphi(x)\Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} + \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\Big(f(x_{k+1}-0)\,\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\,\varphi(x_k)\Big) + \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\Big[f(x_k+0)\,\varphi(x_k) - f(x_{k+1}-0)\,\varphi(x_{k+1})\Big] + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\varphi(x_k)}^{\delta(x-x_k)}\; \overbrace{\Delta f(x_k)}^{p_k} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

т. к. $\varphi(x_0) = \varphi(x_{n+1}) = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta(x-x_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta(x-x_k) + \frac{df(x)}{dx}.$$

//

(Т3) $\lim\limits_{\xi \to +0} \dfrac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}$ в $\mathcal{D}'$.

Из Т2 следует, что $\lim\limits_{\xi \to +0} \dfrac{\xi}{x^2+\xi^2} = \pi\delta(x)$ в $\mathcal{D}'$.

Т.к. оператор дифференц. в пр-ве $\mathcal{D}'$ непрерывен, т.е. если $f_n \to f$ в $\mathcal{D}'$, то и $f_n' \to f'$ в $\mathcal{D}'$ ($\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $(f_n', \varphi) = -(f_n, \varphi') \longrightarrow -(f, \varphi') = (f', \varphi)$, т.е. $f_n' \to f'$ в $\mathcal{D}'$),

то $\lim\limits_{\xi \to +0} \left(\dfrac{\xi}{x^2+\xi^2}\right)' \overset{\mathcal{D}'}{=} \pi\delta'(x)$

Т.к. ф-ция $\dfrac{\xi}{x^2+\xi^2}$ непрер. дифф-ма, то её обобщ. производная совпадает с обычной, т.е. $\left(\frac{\xi}{x^2+\xi^2}\right)' = -\frac{2\xi x}{(x^2+\xi^2)^2}$ в $D'$.

Поэтому $\lim\limits_{\xi\to+0} \frac{\xi x}{(x^2+\xi^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$.

(Т4)

а) $\underbrace{\left(e^{\sin x} + x\cos x\right)}_{\substack{\text{бесконечно} \\ \text{дифф. на } (-\infty, +\infty)}}\delta(x)$ $\quad p(x) \equiv e^{\sin x} + x\cos x$

Значит $(p\delta, \varphi) = (\delta, p\varphi) = p(0)\varphi(0) = (p(0)\delta, \varphi)$

Значит исходное выраж. $= 1 \cdot \delta(x) = \delta(x)$ //

б) $\underbrace{\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)}_{\substack{\text{бесконечно} \\ \text{дифф. на } (-\infty, +\infty)}}\delta'(x)$ $\quad p(x) \equiv \frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x$

Покажем, что $(p\delta)' = p'\delta + p\delta'$:

$\forall \varphi \in D \quad ((p\delta)', \varphi) = -(p\delta, \varphi') = -(\delta, p\varphi') =$

$= -(\delta, (p\varphi)' - p'\varphi) = -(\delta, (p\varphi)') + (\delta, p'\varphi) = (\delta', p\varphi) +$

$+(p'\delta, \varphi) = (p\delta' + p'\delta, \varphi) \hookrightarrow (p\delta)' = p\delta' + p'\delta$

Значит $\underline{p(x)\delta'(x)} = \underbrace{(p(0)\delta(x))'}_{\text{из а)}} - \underbrace{p'(0)\delta(x)}_{\substack{\text{из а) с} \\ \text{заменой } p \to p'}} = \underline{p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x)}$

Откуда исходное выраж. $= -\delta'(x) + \delta(x)$ //

в) $e^{x^2}\delta''(x) = (e^{x^2}\delta'', \varphi) = -(\delta', (e^{x^2}\varphi)') =$

$= -(\delta', 2xe^{x^2}\varphi) - (\delta', e^{x^2}\varphi') = (\delta, (2xe^{x^2}\varphi)') +$

$+ (\delta, (e^{x^2}\varphi')') = (\delta, 2e^{x^2}\varphi + 4x^2 e^{x^2}\varphi + 2x e^{x^2}\varphi') +$

$+ (\delta, 2xe^{x^2}\varphi' + e^{x^2}\varphi'') = (\delta, (2e^{x^2} + 4x^2)\varphi) +$

$+ (\delta, 4xe^{x^2}\varphi') + (\delta, e^{x^2}\varphi'') = 2\varphi(0) + 1\varphi''(0) =$

$= 2(\delta, \varphi) + (\delta, \varphi'') = 2\delta(x) + \delta''(x)$ //