Задача 14.10

Произвольное виртуальное перемещение тела можно задать вектором перемещений $d\vec{r}_0$ и поворотом $\vec{e}\,d\varphi$, где $|\vec{e}|=1$ - единичный вектор оси поворота.

По ф-ле Эйлера $\delta\vec{r}_j = \delta\vec{r}_0 + \vec{e}\times\vec{r}_{0j}\,d\varphi$

Используя теорему (принцип виртуальных перемещений), которая говорит, что $\vec{R}^0$ - полож. равновесия $\Leftrightarrow \delta A = \sum_j \vec{F}_j\cdot\delta\vec{r}_j = 0$ $\forall\delta\vec{R}$.

получим $\delta A = \sum_j \vec{F}_j\cdot(d\vec{r}_0 + \vec{e}\times\vec{r}_{0j}\,d\varphi) =$
$= \sum_j \vec{F}_j\cdot d\vec{r}_0 + \vec{e}\cdot\sum_j \vec{r}_{0j}\times\vec{F}_j\,d\varphi = \vec{F}\cdot d\vec{r}_0 +$
$+ (\vec{M}_0\cdot\vec{e})\,d\varphi = 0$ $\forall d\vec{r}_0$ и $\forall\vec{e}\,d\varphi \longrightarrow \vec{F}=0$ и $\vec{M}_0=0$

Значит, для того, чтобы твердое тело находилось в сост. равновесия, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор сил $\vec{F}$ и главный момент сил $\vec{M}_0$ были равны 0.

Задача 14.23

Дано:

$\Pi = \Pi(q_{s+1}, \dots, q_n)$

Найти:

полож. равновесия системы

Система консервативная, значит для неё условия равновесия принимают вид $\frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$

Тогда $\vec{q}^{\,0}$ - стацион. точки потенц. энергии

Т.к. Π не зависит от $q_1, \dots, q_s$, то

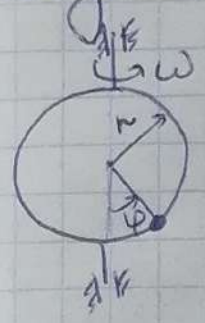
$\forall q_i$, $i = \overline{1, s}$ $\hookrightarrow$ $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$.

Но остальные $q_{s+1}, \dots, q_n$ должны удовлетворять условию $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ $j = \overrightarrow{s+1, n}$

Таким образом, система имеет мн-во положений равновесия, определяемых условиями $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ $j = \overrightarrow{s+1, n}$, а

$q_1, \dots, q_s$ - произвольные постоянные.

Задача 14.36 Найти положения относит. равновесия.



Рассмотрим неинерциальную систему отсчёта, связанную с окружностью, и вращ-ся с постоянной $\omega = const$ вокруг неподвижн. оси, тогда $Q_k^{пер} = -\frac{\partial \Pi^{пер}}{\partial q_k}$ из лекции

Система консервативна (все силы потенц. и связи стационарные), значит условия равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положение кольца можем задать одной обобщенной координатой - углом φ. $\hookrightarrow \frac{\partial \Pi(\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$

$$\Pi = \Pi(\vec{g}) + \Pi^{пер}$$

$\Pi(\vec{g}) = mgr(1-\cos\varphi)$, где m - масса кольца

$$\Pi^{пер} = -T^{пер} = -\frac{m(\omega r \sin\varphi)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\partial(mgr(1-\cos\varphi))}{\partial \varphi} - \frac{\partial(m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi/2)}{\partial \varphi} =$$

$$= mgr\sin\varphi - m\omega^2 r^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

$$g\sin\varphi = \omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi$$

Получим

1) $\sin\varphi = 0$

2) $\cos\varphi = \dfrac{g}{\omega^2 r}$

$\varphi = 0,\ \pi,\ \pm\arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 r}\right)$ при $\omega^2 \geq \dfrac{g}{r}$,

чтобы $\cos \leq 1$.

Задача 14.42.

Док-ть теорему о трех силах.

Пусть на твердое тело действуют 3 непараллельные силы. Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A = \sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \qquad \forall \delta \vec{R}$$

Пусть вирт. перемещ. на $d\vec{r}_0$:

$$\delta A = \sum_j \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_0 = d\vec{r}_0 \cdot \sum_j \vec{F}_j = 0, \text{ т.е.}$$

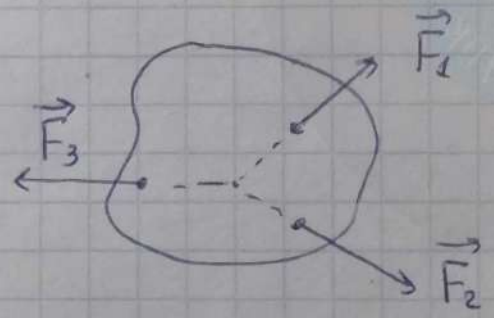
$$\sum_j \vec{F}_j = 0 \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно перенести вдоль линии действия в т. пересечения O и сложить.

Т.к. теперь система нах-ся под действием двух сил в состоянии равновесия,

то эти силы действуют вдоль одной прямой и в сумме дают 0.

След-но, линии действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ имеют общую точку пересечения:



Задача 17.25

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$$

Найти $V(x,\dot{x})$: $\dfrac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -\dfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) = -E$

Ищем квадратичную форму x и $\dot{x}$:

$$V(x,\dot{x}) = ax^2 + bx\dot{x} + d\dot{x}^2$$

$$\frac{dV}{dt} = a\cdot 2x\dot{x} + b\dot{x}^2 + bx\ddot{x} + d\cdot 2\dot{x}\ddot{x} =$$

$$= 2ax\dot{x} + b\dot{x}^2 + bx\left(-\frac{\beta\dot{x}}{m} - \frac{cx}{m}\right) + 2d\dot{x}\left(-\frac{\beta\dot{x}}{m} - \frac{cx}{m}\right) =$$

$$= \dot{x}^2\left(b - \frac{2d\beta}{m}\right) + x^2\left(-\frac{bc}{m}\right) + x\dot{x}\left(2a - \frac{b\beta}{m} - \frac{2dc}{m}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2)$$

Откуда

$$b - \frac{2d\beta}{m} = -\frac{1}{2}m \longrightarrow d = \frac{m^2}{2\beta}$$

$$-\frac{bc}{m} = -\frac{c}{2} \longrightarrow b = m/2$$

$$2a - \frac{b\beta}{m} - \frac{2dc}{m} = 0$$

$$a = \frac{b\beta + 2dc}{m \cdot 2} = \frac{\beta/2 + \frac{m}{\beta}c}{2} = \frac{\beta}{4} + \frac{m}{\beta \cdot 2}c$$

Ответ: $V = \frac{\beta^2 + 2mc}{4\beta}x^2 + \frac{m}{2}x\dot{x} + \frac{m^2}{2\beta}\dot{x}^2$

(11) $\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y)$ $\quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y)$

$V(x,y) = \int_0^x f_3(z)\,dz + \int_0^y f_2(z)\,dz$

Док-ть, что нулевое полож. асимптотич. устойчиво

Во-первых, (0,0) удовл. системе

$$\begin{cases} 0 = -f_1(x) - f_2(y) \\ 0 = f_3(x) - f_4(y) \end{cases}$$

т.к. $\operatorname{sgn}(f_i(z)) = \operatorname{sgn}(z)$

Значит (0,0) - полож. равновесия

$V(0,0) = \int_0^0 f_3(z)\,dz + \int_0^0 f_2(z)\,dz = 0$

Посмотрим в окрестности т. (0,0) на $V(x,y)$

Пусть это квадрат со ст. длиной $2h$ и центром в (0,0).

I) $x \in [0, h] \hookrightarrow \int_0^x f_3(z)\,dz \geq 0$, т.к. $f_3(z)$ - гладкая и $f_3(z) \geq 0$ для $z \in [0, x)$

II) $x \in [-h, 0] \hookrightarrow \int_0^x f_3(z)\,dz = -\int_x^0 f_3(z)\,dz \geq 0$, т.к. $f_3(z)$ гладкая и $f_3(z) \leq 0$ для $z \in [x, 0]$.

Аналогично для y. А т.к. x и y не обращаются одновременно в 0 ~~(x≠0, y≠0~~ кроме т. (0,0), то $V(x,y) > 0$ в окрестности т. (0,0)

$$\frac{dV}{dt} = f_3(x)\dot{x} + f_2(y)\dot{y} = f_3(x)(-f_1(x) - f_2(y)) +$$

$$+ f_2(y)(f_3(x) - f_4(y)) = f_2(y)(f_3(x) - f_3(x)) - f_1(x) f_3(x) -$$

$$- f_2(y) f_4(y) = -(\underbrace{f_1(x) f_3(x) + f_2(y) f_4(y)}_{\geq 0})$$

$\dot{V} > 0$ при $(x, y) \neq (0, 0)$

Получается, $\exists$ окрестность т.(0,0), в кот. $V(x)$ положит. определена, а её производная - отрицательно определена. Значит по т. Ляпунова об асимптотич. устойчив полож. (0,0) асимпт. уст.

(T2) $\dot{x} = 2y^3 - x^5$ $\dot{y} = -x - y^3 + y^5$

т. (0,0) - положение равновесия. Исследуем его на устойчивость

Для этого возьмём ф-цию Ляпунова

$V(x,y) = x^2 + y^4 > 0, \ (x,y) \neq (0,0)$

$\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 2x(2y^3 - x^5) + 4y^3(-x - y^3 + y^5) =$

$= -2x^6 - 4y^6(1 - y^2)$

$\exists$ окрестность - круг с центром в

$(0,0)$ и радиусом $R=0,9$, внутри которого $\dot{V}<0$, $(x,y)\neq(0,0)$

Значит $\exists$ окрестн. т. $(0,0)$ в кот. $V(x,y)>0$, $\dot{V}(x,y)<0$ и по т. Ляпунова об асимптотической устойчивости положение $(x,y)=(0,0)$ асимптотич. устойчиво.

(Т3) $\dot{x} = xy - x^3 + y^3 \qquad \dot{y} = x^2 - y^2$

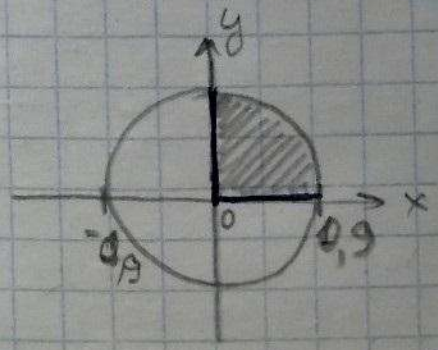
т (0,0) - полож. равновесия. Исследуем его на устойчивость.

Возьмем $V(x,y) = xy$.

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}y + x\dot{y} = \cancel{xy^2} - x^3y + y^4 + x^3 - \cancel{xy^2} =$$

$$= y^4 + x^3(1-y).$$

Рассмотрим окрестность - круг с центром в (0,0) и радиусом $R = 0{,}9$:



На выделенных участках $V(x,y) = 0$, в заштрих. обл. $V(x,y) > 0$, $\dot{V}(x,y) > 0$ (кроме $(x,y) = (0,0)$)

По т. Четаева полож. неустойчиво

T4 $(\alpha, \beta > 0)$

$$\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2)$$

$$\dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2)$$

т. $(0,0)$ – положение равновесия. Исследуем его на устойчивость.

Возьмем ф-цию $V(x,y) = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha x \dot{x} + \beta y \dot{y} = \alpha x(\beta y - x)(1 - ax^2 - by^2) + \beta y(-y - \alpha x)(1 - ax^2 - by^2) = \underbrace{(-\alpha x^2 - \beta y^2)}_{<0}(1 - ax^2 - by^2)$$

Рассмотрим прямоугольник с центром в $(0,0)$ и сторонами: $|x| \leq \left|\frac{1}{2a}\right|$ $|y| \leq \left|\frac{1}{2b}\right|$. Перед этим оговорим, что если $a = b = 0$, то всё верно. Если $a = 0$, $b \neq 0$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq \left|\frac{1}{2b}\right|$. Если $b = 0$, $a \neq 0$, $|y| \leq \frac{1}{2}$, $|x| \leq \left|\frac{1}{2a}\right|$.

Тогда $(1 - ax^2 - by^2) \geq \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$.

и $\dot{V} < 0$, $(x,y) \neq (0,0)$.

т.е. $\exists$ окрестн., в кот. $V > 0$, $\dot{V} < 0$ $\hookrightarrow$ по т. Ляпунова об асимптотич. устойч. полож. $(0,0)$ асимпт. уст.

15.15 $z = \alpha x^2 + \beta y^2$, ω - const

Усл-ие, при котором (0,0,0) - устойчивое отн. равн.

Подсчитаем потенциальную энергию нашей консервативной системы:

$$\Pi = mgz - \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\Pi^{пер.}} = mg(\alpha x^2 + \beta y^2) - \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2}$$

По т. Лагранжа об устойчивости консервативных систем, если Π непрер. в (0,0,0) и имеет строгий минимум, то оно устойчиво.

Для строгого min Π достаточно строгой положит. опред. матрицы $C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{q} \partial \vec{q}^T}\right|_{\vec{q}^0}$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 x^2} = 2mg\alpha - m\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 2mg\beta - m\omega^2 \quad \hookrightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 2mg\alpha - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2mg\beta - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Delta_1 = 2mg\alpha - m\omega^2 > 0 \hookrightarrow \omega^2 < 2g\alpha$$

$$\Delta_2 = (2mg\alpha - m\omega^2)(2mg\beta - m\omega^2) > 0$$

$$\omega^2 < 2g\beta.$$

Ответ: $\omega^2 < 2g \cdot \{\min(\alpha, \beta)\}$.

(15.18) Док-ть, что усл-ия т. Лагранжа об уст. полож. равн. консерв. системы с кинет. энергией $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geq 0$, $a_{ik} = const$ и пот. эн. $\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \geq 0$, $c_{ik} = const$ явл-ся необх. и достаточными.

Т.к. т. Лагранжа явл-ся достаточным условием устойчивости полож. равновесия, то докажем только необходимость.

Из курса линейн. алгебры воспользуемся приведением двух квадратичных форм одновременно к диаг. виду, причём 1 из них имеет даже канонич. вид. Т.е.:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{\theta}_k^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\theta_k^2.$$

В консервативн. системе $E = T + \Pi = const$

$$\dot{E} = 0 \hookrightarrow \sum_{k=1}^{n}(\ddot{\theta}_k\dot{\theta}_k + \mu_k\theta_k\dot{\theta}_k) = 0$$

Это распадается на n ур-ий:

$\ddot{\theta}_k + \mu_k\theta_k = 0$ (если $\dot{\theta}_k = 0$, то $\Pi = const$ - перенесём в (0,0) и очевидно) ($\Pi = 0$)

Если $\mu_k < 0$, то решением дифф. ур-ия будет $\theta_k = e^{\sqrt{-\mu_k}t}$ - возрастает неогранич. - не

удовлетв. ~~условию~~ опред. устойчивости.

Если $\mu_k = 0$, то $Q_k = C_1 t + C_2$ - линейно возраст. и также не явл. устойчивым.

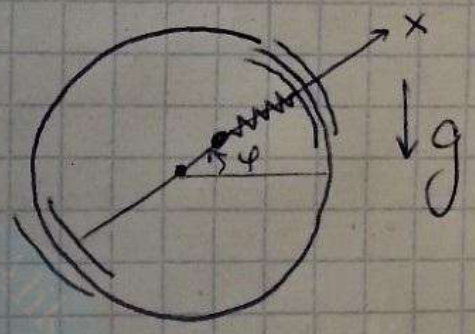
При $\mu_k > 0$ $Q_k = e^{-\mu_k t}$ - стремится к 0 и выполнено опр. устойчивого полож. равнов.

Тоесть $\mu_k > 0$, $k = \overline{1,n}$

Тоесть П - строго положит. опр. форма ($\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu_k Q_k^2$) и имеет строгий минимум в т. 0. $\rightarrow$ выполнены усл-ия т. Лагранжа об уст. полож. равн. консерв. сист.

15.21

$c \neq 2\frac{mg}{R}$



Введём обобщ. координаты x и φ.

$$\Pi = mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(R - x - \frac{R}{2}\right)^2 = mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(\frac{R}{2} - x\right)^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\sin\varphi - c\left(\frac{R}{2} - x\right) = mg\sin\varphi + cx - c\frac{R}{2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgx\cos\varphi = 0$$

При $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \pm mg - \frac{cR}{2} + cx \longrightarrow x = \frac{R}{2} \mp \frac{mg}{c}$$

1) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\left(x = \frac{R}{2} - \frac{mg}{c}\right)$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mg\left(\frac{R}{2} - \frac{mg}{c}\right) > 0$$

если $R < \frac{2mg}{c}$, то устойчиво

если $R > \frac{2mg}{c}$, то неустойчиво

2) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\left(x = \frac{R}{2} + \frac{mg}{c}\right)$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi = mg\left(\frac{R}{2} + \frac{mg}{c}\right) > 0$$

полож. устойчиво.

3) $x = 0$ $\qquad \varphi = \arcsin\frac{cR}{2mg}$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} = mg\cos\varphi$$

неустойчиво

Ответ: $x_1 = \frac{R}{2} + \frac{mg}{c}$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ устойчиво

$x_2 = \frac{R}{2} - \frac{mg}{c}$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ при $R < \frac{2mg}{c}$ устойч., при $R > \frac{2mg}{c}$ неуст., $x_3 = 0$ $\varphi_3 = \arcsin\frac{cR}{2mg}$ неустойчиво

16.1 Док-ть, что собств. частоты малых колеб. не зависят от выбора обобщ. коорд.

ω мы находим из следующего:

$$|C - A\omega^2| = 0$$

Осуществим переход между координатами, в кот. $\omega \to \omega_*$.

$$|S^{-1}CS - S^{-1}AS\omega_*^2| = |S^{-1}| \cdot |S| \cdot |C - A\omega_*^2| = 0$$

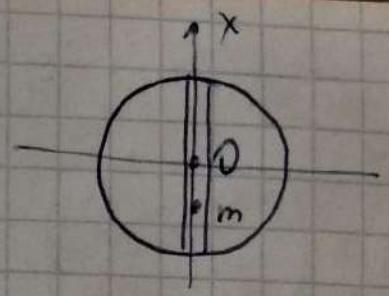
т.к. матр. S невырождена, то $|S| \neq 0$ и $|S^{-1}| \neq 0$.

Тогда получим исходное рав-во с ω_*^2:

$$|C - A\omega_*^2| = 0.$$

Откуда $\omega = \omega_*$ //.

Задача 16.11



На точку действует

$$F(x) = \gamma \frac{M(x)\, m}{x^2} = \gamma \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 m}{x^2} \rho = \frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Ур-ие Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \text{ где у нас } q = x$$

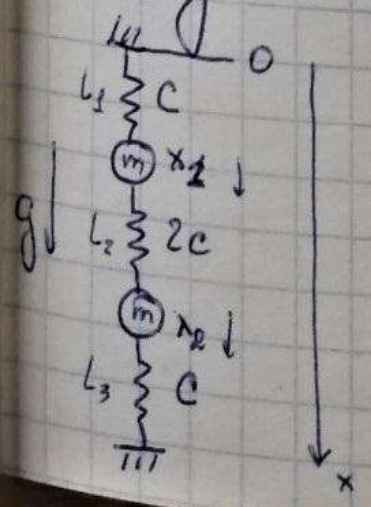
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = -\frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x$$

$$m\ddot{x} + \frac{4}{3}\pi \gamma m \rho x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{3}\pi \gamma \rho x = 0 \quad \hookrightarrow \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\pi \gamma \rho$$

Зная, что $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \gamma \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma \rho}} \simeq 5059\,c = 84$ мин.

Задача 16.33



$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2}$$

$$\Pi = \frac{c x_1^2}{2} + \frac{c x_2^2}{2} + \frac{2c(x_1 - x_2)^2}{2} +$$

$$+ (l_1 + x_1)mg - (l_1 + l_2 + x_1 + x_2)mg =$$

$$= -mg(2l_1 + 2x_1 + l_2 + x_2) + \frac{3}{2}c x_1^2 + \frac{3}{2}c x_2^2 - 2c x_1 x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} 3c - \lambda m & -2c \\ -2c & 3c - \lambda m \end{vmatrix} = 0$$

$$(3c - \lambda m)^2 - 4c^2 = (3c - \lambda m - 2c)(3c - \lambda m + 2c) =$$

$$= (c - \lambda m)(5c - \lambda m) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{m} \qquad \lambda_2 = \frac{5c}{m}$$

Соответствующие векторы:

$$\begin{pmatrix} 3c - c & -2c \\ -2c & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3c - 5c & -2c \\ -2c & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + C_2\right) \\ C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{5c}{m}} t + C_4\right) \end{bmatrix}$$

Либо иначе можно записать так:

$$\underline{x_1} = C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t \cos C_2 + C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \sin C_2 +$$
$$+ C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t \cos C_4 + C_3 \cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t \sin C_4 =$$
$$= C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t + C_4 \cos\underline{\underline{\sqrt{\frac{5c}{m}}t}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t \cos C_2 + C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \sin C_2 -$$
$$- C_1 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t \cos C_4 - C_3 \cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t \sin C_4 =$$
$$= C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - C_3 \sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t - C_4 \sin\underline{\underline{\sqrt{\frac{5c}{m}}t}}$$

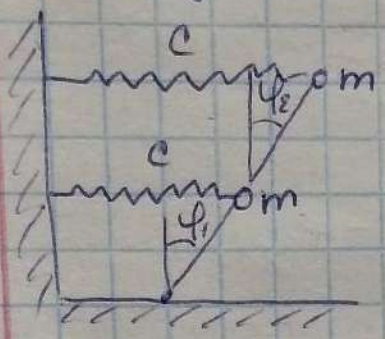
При $t=0$:

$$\begin{cases} x_1^0 = C_2 + C_4 \\ x_2^0 = C_2 - C_4 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{x_1^0 + x_2^0}{2} \\ C_4 = \dfrac{x_1^0 - x_2^0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} + C_3\sqrt{\frac{5c}{m}} = \dot{x}_1^0 \\ C_1 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} - C_3\sqrt{\frac{5c}{m}} = \dot{x}_2^0 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_1 = \sqrt{\frac{m}{c}}\ \dfrac{\dot{x}_1^0 + \dot{x}_2^0}{2} \\ C_3 = \sqrt{\frac{m}{5c}}\ \dfrac{\dot{x}_1^0 - \dot{x}_2^0}{2} \end{cases}$$

Движения на Марсе и Земле неразличимы, но в силу разных д. происх. у разных полож. равновесия.

Задача 16.47



Подсчитаем потенц. энергию и т.к. колебания малы, то Δx пружин $\Delta x = l\sin\varphi \approx l\varphi$.

Поэтому

$$\Pi_1 = mgl\cos\varphi_1 + \frac{c}{2}l^2\varphi_1^2 = mgl - mgl\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{cl^2\varphi_1^2}{2}$$

$$\Pi_2 = mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2 + \frac{c}{2}(l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2)^2 =$$

$$= 2mgl - lmg\left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \frac{c}{2}l^2(\varphi_1+\varphi_2)^2$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{mgl}{2}(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 3mgl + \frac{c}{2}l^2\left(\varphi_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2)^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} -2mgl + 2cl^2 & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \frac{m\dot\varphi_1^2 l^2}{2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \dot{\vec{\varphi}}_2 \times \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\varphi_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\varphi_2 \\ l\cos\varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot\varphi_1 l\cos\varphi_1 \\ \dot\varphi_1 l\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot\varphi_2 l\cos\varphi_2 + \dot\varphi_1 l\cos\varphi_1 \\ -\dot\varphi_2 l\sin\varphi_2 + \dot\varphi_1 l\sin\varphi_1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2^{\,2} = \dot\varphi_1^2 l^2 + \dot\varphi_2^2 l^2 + 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 l^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} 2cl^2 - 2mgl - 2\lambda ml^2 & cl^2 - \lambda ml^2 \\ cl^2 - \lambda ml^2 & cl^2 - mgl - \lambda ml^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(cl^2 - mgl - \lambda ml^2)^2 - (cl^2 - \lambda ml^2)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}cl^2 - \sqrt{2}mgl - \sqrt{2}\lambda_1 ml^2 - cl^2 + \lambda_1 ml^2 = 0$$

$$\sqrt{2}cl^2 - \sqrt{2}mgl - \sqrt{2}\lambda_2 ml^2 + cl^2 - \lambda_2 ml^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}mgl + cl^2(1-\sqrt{2})}{ml^2(1-\sqrt{2})} = \frac{c}{m} - (\sqrt{2}+2)\frac{g}{l}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}mgl - cl^2(1+\sqrt{2})}{-ml^2(1+\sqrt{2})} = \frac{c}{m} - (2-\sqrt{2})\frac{g}{l}$$

Для соответствующих векторов: $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

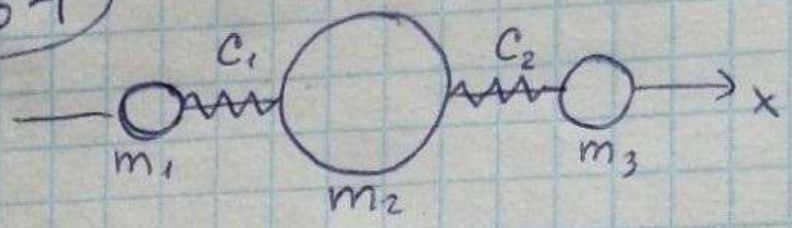
$$\begin{pmatrix} (2+2\sqrt{2})mgl & (2+\sqrt{2})mgl \\ (2+\sqrt{2})mgl & (1+\sqrt{2})mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix} \hookrightarrow$$

Второй вектор найдём из ортогон-сти с матр. A

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}\, t + \psi_1\right) \cdot C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}\, t + \psi_2\right) C_2$$

16.64



$c_1 = c_2 = c$

$m_1 = m_3 = m$

$m_2 = nm$

$$\Pi = \frac{c(x_1 - x_2)^2}{2} + \frac{c(x_2 - x_3)^2}{2}$$

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{nm\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & nm & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \hookrightarrow \begin{vmatrix} c - \lambda m & -c & 0 \\ -c & 2c - \lambda nm & -c \\ 0 & -c & c - \lambda m \end{vmatrix} =$$

$$= (c - \lambda m)\left((2c - \lambda nm)(c - \lambda m) - c^2\right) + c\left(-c(c - \lambda m)\right) =$$

$$= (c - \lambda m)\left(2c^2 - 2c\lambda m - c\lambda nm + \lambda^2 nm^2 - c^2 - c^2\right) =$$

$$= (c - \lambda m)(\lambda m)(-2c - cn + \lambda nm) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{c}{m} \quad \lambda_3 = \frac{(2+n)c}{mn}$$

Тогда для соотв. векторов:

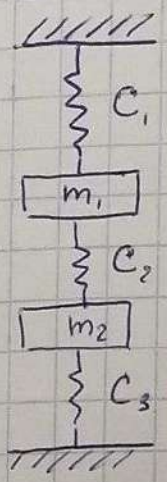
$$\begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ -c & -2c^2n & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{pmatrix} \hookrightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Из усл. ортог. с матр. A получим $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{n} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(0 \cdot t + \psi_1) \cdot C_1 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \psi_2\right) \cdot C_2 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{2+n}{m} \cdot \frac{c}{n}} t + \psi_3\right) \cdot C_3 \end{pmatrix}$$

Задача 17.2



$$F = -\beta v \quad (\beta > 0)$$

Пок-ть, что полож. равнов. будет асимпт. устойч. для $\forall\, c_i$ и m_i

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\tilde{Q} = -\beta \dot{x}_1$$

$$\Pi = x_1 m g + m g x_2 + \frac{c_3 (x_2 - l_2)^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - l_2 - x_1 + l_1)^2}{2} + \frac{c_1 (x_1 - l_1)^2}{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -\frac{1}{2} c_2 \\ -\frac{1}{2} c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$ (продиф. Π 2р. по x_1, x_2)

$$B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m_1 + \lambda \beta + c_1 + c_2 & -\frac{1}{2} c_2 \\ -\frac{1}{2} c_2 & \lambda^2 m_2 + c_2 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 m_1 + \lambda \beta + c_1 + c_2)(\lambda^2 m_2 + c_2 + c_3) - \frac{1}{4} c_2^2 =$$

$$= \lambda^4 m_1 m_2 + \lambda^3 \beta m_2 + \lambda^2 (m_1 c_2 + m_1 c_3) + \lambda (\beta c_2 + \beta c_3) +$$

$$+ c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2^2 + c_2 c_3 - \frac{1}{4} c_2^2 + \lambda^2 m_2 (c_1 + c_2)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \beta m_2 & \beta c_2 + \beta c_3 & 0 & 0 \\ m_1 m_2 & m_1 c_2 + m_1 c_3 + m_2(c_1+c_2) & c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + \frac{3}{4}c_2^2 & 0 \\ 0 & \beta m_2 & \beta c_2 + \beta c_3 & 0 \\ 0 & m_1 m_2 & m_1 c_2 + m_1 c_3 + m_2(c_1+c_2) & c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + \frac{3}{4}c_2^2 \end{bmatrix}$$

Т.к. все $a_i > 0$, $a_1 = \beta m_2 > 0$, то смотрим

$$\Delta_3 = \beta m_2\Big((m_1c_2 + m_1c_3)(\beta c_2 + \beta c_3) - \beta m_2 \cdot (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_4 + \tfrac{3}{4}c_2^2)\Big) - \beta(c_2+c_3)\big(m_1 m_2 \beta(c_2+c_3)\big) + \beta m_2^2 (c_1+c_2) \cdot \beta(c_2+c_3) =$$

$$= \cancel{\beta^2 m_2 m_1 (c_2+c_3)^2} - \beta^2 m_2^2 (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + \tfrac{3}{4}c_2^2) - \cancel{\beta^2 m_1 m_2 (c_2+c_3)^2} + \beta^2 m_2^2 (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + c_2^2) =$$

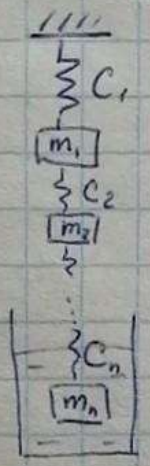
$$= \beta^2 m_2^2 \frac{c_2^2}{4} \quad \cancel{\beta^2 m_1 m_2 (c_2^2 + 2c_2c_3 - c_1^2 - 2c_1c_3)} =$$

$$= \beta^2 m_2^2 \frac{c_2^2}{4} > 0 \quad \forall m_i, c_i \quad i = 1,2.$$

(если сила действует на 2 груз. то получим симметричн. ответ)

Ответ: по критерию Рауса-Гурвица, полож. равновесия этой системы будет асимпт. устойчивым $\forall c_i, m_i$, $i = 1,2$

Задача 17.8



На последний груз действует $F = -\beta v$, $\beta > 0$

пок-ть, что асимпт. устойчиво.

Для системы $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} c(x_i - x_{i-1})^2$$

$E = T + \Pi > 0$

При этом $\dot{E} = \frac{d(T+\Pi)}{dt} = \tilde{Q}_0 = -\beta \dot{x}_n^2 \leq 0$

Используем теорему Барбашина Красовского.

Если $\dot{x}_n = 0$, т.е. $x_n = const$. Последний груз нах-ся в сост. покоя, т.е. сила, действ. на него, равна 0. Значит и обобщ. силы, которые действуют на другие грузы, равны 0. Тоесть система нах-ся в сост. равновесия.

Таким образом мн-во $\vec{x} : \dot{E} = 0$ не содерж. целых траект. системы кроме $\dot{\vec{x}} = 0$. Тогда оба условия теоремы: $\dot{V} = \dot{E} \leq 0$ в окрестн. пол. равнов. и нет целых траект. сист. кроме $\vec{x} = 0$. Значит полож. равнов. асимптот. устойчиво.

Задача 17.11(а)

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \dot{y} - \beta x + y = 0 \end{cases}$$

исслед (0,0) на асимпт уст-сть.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2 - \beta\alpha = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \beta\alpha = 0$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1-\beta\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1-\beta\alpha \end{vmatrix}$$

$1 - \beta\alpha > 0$ - необх усл.

$$\Delta_3 = 2 \cdot (6 - 2 + 2\beta\alpha) - 2 \cdot 2 = 12 - 4 + 4\beta\alpha - 4 =$$

$$= 4(1 + \beta\alpha) > 0 \longrightarrow 1 + \beta\alpha > 0.$$

т.е. $-1 < \beta\alpha < 1$ //

Задача 17.20

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \ddot{q}^k + b_{ik} \dot{q}^k + c_{ik} q^k \right) = 0 \qquad i = \overline{1,n}$$

$A = (a_{ik})$ $\quad B = (b_{ik})$ $\quad C = (c_{ik})$ - симм. полож. опр. матрицы.

Док-ть, что $q^k = 0$, $k = \overline{1,n}$ асимпт. устойчиво

Возьмём ф-цию Ляпунова $V = T + \Pi$

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} + \frac{1}{2} q^T C q > 0$$

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{q}^T B \dot{q} < 0$$ $\hookrightarrow$ по т. Ляпунова об асимпт. устойчивости полож. равновесия асимпт. устойч.

Задача 17.28

$\dot{x}_1 = \alpha_1 (x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = \alpha_2 (x_3 - x_2)$, ..., $\dot{x}_n = \alpha_n (x_1 - x_n)$

$\alpha_i > 0$

Пок-ть, что при $t \to \infty$ реш. сх-ся к $x_1^* = x_2^* = \ldots = a$.

Рассмотрим ф-цию Ляпунова

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\alpha_1}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2 - a)^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n - a)^2 > 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \cdot 2(x_1 - a)\dot{x}_1 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n} 2(x_n - a)\dot{x}_n =$$

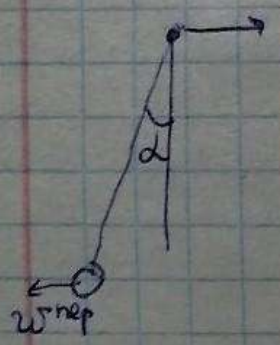
$$= \frac{1}{\cancel{\alpha_1}} 2(x_1 - a)(\cancel{\alpha_1}(x_2 - x_1)) + \ldots + \frac{1}{\cancel{\alpha_n}} 2(x_n - a)\cancel{\alpha_n}(x_1 - x_n) =$$

$$= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + \ldots - 2x_n^2 + 2x_1x_n =$$

$$= -(x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - \ldots - (x_n - x_1)^2 < 0$$

Получается по т. Ляпунова об асимптотич. устойч. полож. равновесия $x_1 = a = x_2 = \ldots = x_n$ асимптотич. устойчиво, где a зависит от нач. условий.

Задача 18.3



$$s = \frac{1}{2}at^2 + A\sin(\omega t)$$

в сист. отсчета $s = \frac{1}{2}at^2$ движ. маятн.

Исследовать резонанс

В неинерц. системе отсчёта полож. равновесия маятника будет под углом α к вертикали

Найдём этот угол:

$$\begin{cases} mg = T\cos\alpha \\ mw^{пер} = T\sin\alpha \end{cases} \hookrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{w^{пер}}{g}$$

можно сказать $\cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{\omega_{пер}^2+g^2}}$

отклонение от пол. равнов.

Для пот. энергии $\Pi = m\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}\, l(1-\cos\beta)$

$$\Pi \approx m\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}\, l\,\frac{\beta^2}{2}$$

$$T = \frac{m(l\dot{\beta})^2}{2} \qquad A = (ml^2) \quad C = (ml\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2})$$

Для обобщ. сил опять имеем рав-во моменту, значит $Q = -mA\omega^2\sin\omega t\, l\cos\alpha$

Получим ур-ия:

$$l\ddot{\beta} + \frac{\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}}{l}\cdot\beta = -\frac{mA}{l}\omega^2\sin\omega t\cos\alpha$$

Решим сначала однородное ур-ие:

$$\beta_1 = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t,$$

здесь $\omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}}{l} \approx \frac{g}{l}\left(1+\frac{\omega_{пер}^2}{2g^2}\right)$, если $\omega_{пер} \ll g$

Найдем частное реш. неодн. ур-ия

$$W = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} = \frac{1}{ml(\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}-\omega^2 l)}$$

$$\beta_{частн.} = -ml\,A\omega^2\sin\omega t\cos\alpha\,|W| =$$

$$= -\frac{A\omega^2\sin\omega t\cos\alpha}{\sqrt{g^2+\omega_{пер}^2}-\omega^2 l} = -\frac{A\omega^2 g\sin\omega t\, ml}{\sqrt{\omega_{пер}^2+g^2}\cdot ml^2|(\omega_0^2-\omega^2)|}$$

$\cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{\omega^2+g^2}}$

Итого $\beta_2^{\text{частн.}} = -\dfrac{A\omega^2 g \sin\omega t}{l^2\omega_0^2\cdot|\omega_0^2-\omega^2|}$

Тогда общее решение есть $\beta = \beta_1 + \beta_2^{\text{частн.}} =$

$$= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t - \frac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2\,|\omega_0^2-\omega^2|}$$

Если у нас резонанс, то решение ищем в виде $\beta' = bt\cos\omega_0 t$

$$-2b\omega_0\sin\omega_0 t = -\frac{A\omega_0^2\sin\omega_0 t\cos\alpha}{l}$$

(другое сократится)

$$b = \frac{A\omega_0\cos\alpha}{2l} = \frac{A\omega_0 g}{2\omega_0^2 l^2} = \frac{Ag}{2\omega_0 l^2}$$

Общее решение $\beta = C_1'\cos\omega_0 t + C_2'\sin\omega_0 t +$
$+\dfrac{Agt\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0 l^2}$

Ответ: $\varphi = \alpha + \beta = +\operatorname{arctg}\dfrac{a}{g} \overset{\text{25 пер}}{\overset{\shortparallel}{+}} C_1\cos\omega_0 t +$
$+C_2\sin\omega_0 t - \dfrac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2\,|\omega_0^2-\omega^2|}$

Резонанс:

$$\varphi = \alpha + \beta' = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} + C_1'\cos\omega_0 t + C_2'\sin\omega_0 t +$$
$$+\frac{Agt\cos\omega_0 t}{2\omega_0 l^2}$$

Задача 18.17

$$F = -\beta \dot{x}$$

$$Q(t) = \sum_k A_k \sin(k\omega t)$$

а) $\beta \neq 0$ б) $\beta = 0,\ k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$

в) $\beta = 0,\ k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Энергия системы: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$\Pi = \frac{c x^2}{2} - mgx$$

Составим ур-ие Лагранжа

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = \sum_k A_k \sin(k\omega t) \qquad (*)$$

Сначала решим однородное:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$$

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0 \qquad \lambda = \frac{-\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$$

Для удобства анализа $2h = \frac{\beta}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

Может быть неск. случаев: $h^2 - \omega_0^2 > 0$ и < 0, $= 0$

1) $\omega_h^2 = h^2 - \omega_0^2 > 0$

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

$$x_1 = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}$$

2) $\omega_h^2 = h_0^2 - \omega_0^2 = 0$

$\lambda = -h$

$x_1 = (C_3 t + C_4) e^{-ht}$

3) $\omega_h^2 = h^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -h \pm i\omega_h$

$x_1 = e^{-ht}(C_5 \cos(\omega_h t) + C_6 \sin(\omega_h t))$

Теперь ищем частное решение неоднородного ур-ия в нерезонансном случае

$x_2 = \sum_k A_k |W_k| \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad (\varphi_k = \arg W_k)$

$W_k = (-mk^2\omega^2 + i\beta k\omega + c)^{-1} = \dfrac{c - mk^2\omega^2 - i\beta k\omega}{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2(k\omega)^2}$

$\varphi_k = \arg W_k = -\operatorname{arctg} \dfrac{\beta k\omega}{c - mk^2\omega^2}$

В наших обозначениях $\varphi_k = -\operatorname{arctg} \dfrac{2hk\omega}{\omega_0^2 - k^2\omega^2}$

$|W_k| = \dfrac{1}{\sqrt{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2 k^2\omega^2}} = \dfrac{((\omega_0^2 - k^2\omega^2)^2 + (2hk\omega)^2)^{-1/2}}{m}$

Переобозначим $|W_k| = \dfrac{H_k}{m}$

Тогда решение нашего ур-ия есть

$x = x_1 + x_2.$

а) $\beta \neq 0$. Рассмотрен.

б) $\beta = 0$. Тогда $h = 0$

$k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$

Для этого случая получим

$$x_1 = C_5' \cos\omega_0 t + C_6' \sin\omega_0 t$$

$$x_2 = \sum_k{}' A_k \sin(k\omega t) \cdot \frac{1}{m\,|\omega_0^2 - k^2\omega^2|} \qquad \varphi_k = 0$$

в) $\beta = 0$, $k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Это случай резонанса. Частное реш-ие ищем в виде $x_3 = bt\cos(\omega_0 t)$, $\varphi_k = 0$

$$m\left(-b\omega_0^2 \cos\omega_0 t \cdot t - \omega_0 b \sin\omega_0 t \cdot 2\right) +$$

$$+ c\, b\, \cancel{t \cos\omega_0 t} \cancel{+ cbt\cos\omega_0 t} = A_k \sin k\omega t$$

т.к. $c = mk^2\omega^2 = m\omega_0^2$, то сократим

$$b = -\frac{A_k}{2m \cdot \omega_0}$$

$$x_3 = -\frac{A_k t \cos\omega_0 t}{2m\omega_0}$$

Соотв-но $x_1 = C_5'' \cos\omega_0 t + C_6'' \sin\omega_0 t$

$$x = x_1 + x_3 + \sum_{k \neq \frac{\omega_0}{\omega}}{}' \frac{A_k}{m} \frac{\sin k\omega t}{|\omega_0^2 - k^2\omega^2|}$$

Ответ:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \qquad 2h = \frac{\beta}{m} \qquad R_k = \left(\sqrt{(\omega_0^2 - k^2\omega^2) + (2hk\omega)^2}\right)^{-1}$$

$$\varphi_k = -\operatorname{arctg}\frac{2hk\omega}{\omega_0^2 - k^2\omega^2}$$

Далее константы C_i можно найти

из нач. условий.

а) $\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 > 0$:

$$x = e^{-ht}\left(C_5 \cos\omega_n t + C_6 \sin\omega_n t\right) + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 = 0$

$$x = \left(C_3 t + C_4\right) e^{-ht} + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

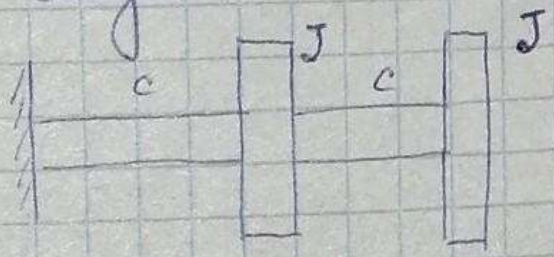
$\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 < 0$:

$$x = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

б) $$x = C_5' \cos\omega_0 t + C_6' \sin\omega_0 t + \sum_k{}' \frac{A_k \sin k\omega t}{m|\omega_0^2 - k^2\omega^2|}$$

в) $$x = C_5'' \cos\omega_0 t + C_6'' \sin\omega_0 t + \sum_{k \neq \frac{\omega_0}{\omega}}{}' \frac{A_k \sin k\omega t}{m|\omega_0^2 - k^2\omega^2|} - \frac{A_{k=\frac{\omega_0}{\omega}}\, t \cos\omega_0 t}{2m\omega_0}.$$

Задача 18.31



$M_1 = M_0 \sin(\omega t)$

$M_2 = -\beta \dot{\varphi}_2$

АФХ - ?

Посчитаем энергию:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}_2^2}{2} \hookrightarrow A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{c}{2}\left(2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2C & -C \\ -C & C \end{pmatrix}$$

Подсчитаем обобщенные силы:

$$Q_k = \frac{\delta A}{d\varphi_k} = \frac{M_k \, d\varphi_k}{d\varphi_k} = M_k$$

Тогда матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, т.к. $M_2 = -\beta\dot{\varphi}_2$

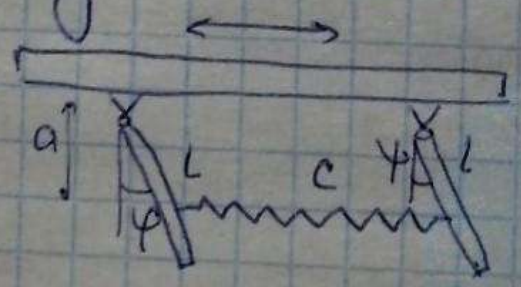
$$A\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(\omega) = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -J\omega^2 + 2c & -c \\ -c & -J\omega^2 + c + i\omega\beta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Delta = (2c - J\omega^2)(c + i\omega\beta - J\omega^2) - c^2$$

$$W_{11} = \frac{c + i\omega\beta - J\omega^2}{\Delta} \qquad W_{12} = \frac{c}{\Delta} \qquad W_{22} = \frac{2c - J\omega^2}{\Delta}$$

Задача 18.37



$A\sin(pt)$ Движ. системы -?

Посчитаем энергию системы в СО связ. с доской:

$$T_{отн} = \frac{J}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) = \frac{ml^2}{6}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)$$

$$\Pi = \frac{c}{2}(a\sin\varphi - a\sin\psi)^2 + mg\,l/2\,(1-\cos\varphi) +$$

$$+ mg\,l/2\,(1-\cos\psi) \approx \frac{mgl}{4}\cdot(\varphi^2+\psi^2) + \frac{ca^2}{2}(\varphi-\psi)^2 =$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) + \frac{\psi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) - ca^2\varphi\cdot\psi$$

Соответственно матрицы:

$$A = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} mg\,l/2 + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & mg\,l/2 + ca^2\end{pmatrix}$$

Подсчитаем обобщ. силы (как в 18.31, они равны соотв. моментам):

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{l}{2}\cdot(-m\omega^{пр}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{l}{2}\cdot p^2 m A\sin pt$$

1) решение общее однородн. ур-ия.

Из системы видно, что амплитудные вектора есть $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\omega_1^2 = \frac{u_1^T C u_1}{u_1^T A u_1} = \frac{mgl}{2ml^2/3} = \frac{3g}{2l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{u_2^T C u_2}{u_2^T A u_2} = \frac{mgl + 4ca^2}{2ml^2/3} = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$$

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

общ. решение однор. ур-ия

Для поиска частного реш. перейдём к норм. коорд. Для этого сначала отнормируем $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$:

$u_1^T A u_1 = 1$

т.е. $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \cdot \frac{ml^2}{3} = 1$

$\frac{2}{3} \alpha^2 ml^2 = 1 \hookrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}$

т.е. новые $\vec{u}_1 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Обобщ. силы в норм. координатах

$\bar{\Theta}^{\text{ин}} = (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2)^T \bar{Q}^{\text{ин}} = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{l}{2} mp^2 A \sin pt$

$= Amp^2 \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} \sin pt = Amp^2 \sqrt{\frac{3}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin pt$

В норм. коорд. ур-ия Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2 \Theta_1 = A p^2 \sin pt \sqrt{\frac{3m}{2}} \\ \ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2 \Theta_2 = 0 \end{cases}$$

Частное решение для Θ_1: $\Theta_1(t) = b \sin pt$

$-b p^2 \cancel{\sin pt} + \omega_1^2 b \cancel{\sin pt} = A \sqrt{\frac{3m}{2}} p^2 \cancel{\sin pt}$

$b = \frac{p^2 A}{\omega_1^2 - p^2} \sqrt{\frac{3m}{2}}$

тогда $\alpha_{\text{част.}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \cdot \begin{pmatrix} b \sin pt \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{3Ap^2}{2l(\omega_1^2 - p^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt = \underbrace{\frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2}}_{= D} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D \sin pt$$

где $\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}$ $\omega_2^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$ $D = \frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2}$

Задача 18.62

$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j$

$\omega_1, \quad \vec{u}_1(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}) \qquad Q_i = a_{ij} u_{j1} f_0 \sin(\omega t) \quad i = \overline{1,n}$

$\omega_{рез} - ?$

Матрица $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$A\ddot{\vec{q}} + \cancel{B}\,0 + C\vec{q} = \vec{Q}$

Для резонанса надо, чтобы $\vec{q}(t) \to \infty$, $t \to \infty$

Запишем в норм. коорд. ур-ие

$\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i = \vec{u}_i^T \vec{Q}$, где $Q = f_0 A \vec{u}_1 \sin \omega t$

Во всех случаях при $i \neq 1$ $\vec{u}_i^T \vec{Q} = \vec{u}_i^T A \vec{u}_1 f_0 \sin \omega t = 0$

Тоесть получ. $\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i = 0$ - частн. реш. $= 0$

рез-са нет

А для $i = 1$ получим:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = \bar{u}_1^T A \bar{u}_1 f_0 \sin \omega t = f_0 \sin \omega t$$

(т.к. можем отнормир. $\vec{u}_1$)

Частное реш. ищем в виде $\theta = b \sin \omega t$

$$-b\omega^2 \sin \omega t + \omega_1^2 b \sin \omega t = f_0 \sin \omega t$$

$$b = \frac{f_0}{\omega_1^2 - \omega^2} \hookrightarrow \theta = \frac{f_0 \sin \omega t}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

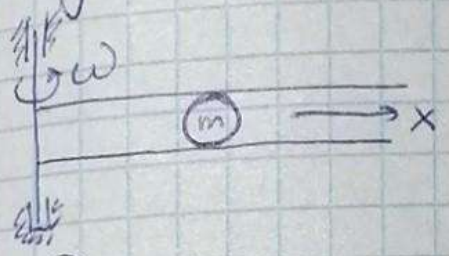
Тогда $q_{част} = \vec{u}_1 \dfrac{f_0 \sin \omega t}{\omega_1^2 - \omega^2} \longrightarrow \infty, \ \omega_1 = \omega$

Для $\omega_1 = \omega$ получим рез-с.

Ответ: рез-с возможен при $\omega = \omega_1$

Задача 19.1

Составить и решить канонич. ур-ия его относит. движ.



Рассмотрим обобщ. коорд. $q = x$.

$$T = m\frac{\dot{x}^2}{2} \qquad \Pi = \Pi^{пер} = \frac{\omega^2 x^2 m}{2}$$

$$L = T - \Pi = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2 m}{2}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$H = \frac{p_x^2}{m} - \frac{m p_x^2}{2m^2} - \frac{\omega^2 x^2 m}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \omega^2 x m \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial p_x}{\partial x}}_{0}\dot{x}\frac{1}{m} + \frac{\dot{p}_x}{m} = \frac{\dot{p}_x}{m} = \omega^2 x$$

$$\ddot{x} = \omega^2 x \hookrightarrow \lambda^2 = \omega^2 \qquad \lambda = \pm\omega$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\ p_x = \omega m C_1 e^{\omega t} - \omega m C_2 e^{-\omega t} \end{cases}$$

Найдём константы через нач. значения.

$$x_0 = C_1 + C_2 \qquad p_0 = \omega m C_1 - \omega m C_2$$

$$C_1 = x_0 - C_2$$

$$p_0 = \omega m x_0 - 2\omega m C_2$$

Откуда $$C_2 = \frac{p_0 - \omega m x_0}{-2\omega m} = \frac{x_0}{2} - \frac{p_0}{2\omega m}$$

$$C_1 = x_0 - C_2 = \frac{x_0}{2} + \frac{p_0}{2\omega m}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/m \\ \omega \end{pmatrix} \left(\frac{m x_0}{2} + \frac{p_0}{2\omega} \right) e^{\omega t} + \begin{pmatrix} 1/m \\ -\omega \end{pmatrix} \left(\frac{m x_0}{2} - \frac{p_0}{2\omega} \right) \cdot e^{-\omega t}$$

Задача 19.9

$$L = \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + a\dot{q}_1^2 t^2}{2} - a\cos q_2$$

Найти гамильтониан и составить канонич. ур-ие движения

$$p_{q_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + a\dot{q}_1 t^2$$

$$p_{q_2} = -(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

$$H = p_{q_1} \cdot \hat{\dot{q}}_1 + p_{q_2} \cdot \hat{\dot{q}}_2 - \frac{(\hat{\dot{q}}_1 - \hat{\dot{q}}_2)^2 + a\hat{\dot{q}}_1^2 t^2}{2} + a\cos q_2$$

$$\hat{\dot{q}}_1 = \frac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} \qquad \hat{\dot{q}}_2 = p_{q_2} + \frac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2}$$

$$H = p_{q_1} \cdot \frac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} + p_{q_2} \cdot \left(p_{q_2} + \frac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} \right) -$$

$$- \frac{p_{q_2}^2 + a t^2 \left(\frac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} \right)^2}{2} + a \cos q_2 = \frac{p_{q_2}^2}{2} + \frac{(p_{q_1} + p_{q_2})^2}{2 a t^2} + a \cos q_2$$

Канонич. ур-ия движения:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{q_1}} = \dfrac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{q_2}} = p_{q_2} + \dfrac{p_{q_1} + p_{q_2}}{a t^2} \\ \dot{p}_{q_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \longrightarrow p_{q_1} = const = p_{q_{1_0}} \\ \dot{p}_{q_2} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = a \sin q_2 \end{cases}$$

Задача 19.15

Найти ф-цию Лагранжа

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + a\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

$$L = p^T \dot{q} - H(q, \hat{p}, t)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{q_1^2 + q_2^2} \qquad p_1 = \dot{q}_1\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

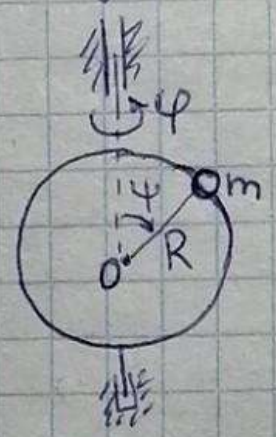
$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{q_1^2 + q_2^2} \qquad p_2 = \dot{q}_2\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

$$L = \dot{q}_1^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \dot{q}_2^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{q}_1^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)^2 + \dot{q}_2^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)^2}{q_1^2 + q_2^2} -$$

$$-a\left(q_1^2+q_2^2\right) = \left(q_1^2+q_2^2\right)\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)\left(q_1^2+q_2^2\right) -$$

$$-a\left(q_1^2+q_2^2\right) = \left(q_1^2+q_2^2\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2a\right)$$

Задача 19.19



Окружность массы M.

H - ? Составить канонич. ур-ия движ.

Запишем кинетич. и потенц. энергии системы:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2}\left((\dot{\psi}R)^2 + (\dot{\varphi}R\sin\psi)^2\right), \text{ где } J = MR^2/2$$

$$\Pi = mgR(\cos\psi + 1)$$

$$L = T - \Pi = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m}{2}\left((\dot{\psi}R)^2 + (\dot{\varphi}R\sin\psi)^2\right) -$$

$$- mgR(\cos\psi + 1)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = MR^2\frac{\dot{\varphi}}{2} + mR^2\sin^2\psi\,\dot{\varphi}$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mR^2\dot{\psi}$$

$$H = P_\varphi \frac{P_\varphi}{MR^2/2 + mR^2\sin^2\psi} + P_\psi \cdot \frac{P_\psi}{mR^2} + mgR \cdot$$

$$\cdot(\cos\psi + 1) -$$

$$- \frac{mR^2}{4}\frac{P_\varphi^2}{(MR^2/2 + mR^2\sin^2\psi)^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{P_\psi^2}{(mR^2)^2}R^2 + R^2\sin^2\psi \cdot\right.$$

$$\left.\frac{P_\varphi^2}{\left(MR^2/2 + mR^2\sin^2\psi\right)^2}\right) = \frac{P_\varphi^2}{MR^2/2 + mR^2\sin^2\psi} + \frac{P_\psi^2}{2mR^2} -$$

$$- \frac{P_\varphi^2}{2\left(M\frac{R^2}{2} + mR^2\sin^2\psi\right)} + mRg(\cos\psi + 1) =$$

$$= \frac{P_\varphi^2}{MR^2 + 2mR^2\sin^2\psi} + \frac{P_\psi^2}{2mR^2} + mgR(\cos\psi + 1)$$

Канонич. ур-ия движения:

$$\begin{cases} \dot\varphi = \dfrac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \dfrac{2P_\varphi}{MR^2 + 2mR^2\sin^2\psi} \\ \dot\psi = \dfrac{\partial H}{\partial P_\psi} = \dfrac{P_\psi}{mR^2} \\ \dot P_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \hookrightarrow \quad P_\varphi = const \\ \dot P_\psi = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi} = mgR\sin\psi + \dfrac{P_\varphi^2 \cdot 4mR^2\sin\psi\cos\psi}{(MR^2 + 2mR^2\sin^2\psi)^2} \end{cases}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q}\underbrace{\dot q}_{\frac{\partial H}{\partial p}} + \frac{\partial H}{\partial p}\underbrace{\dot p}_{-\frac{\partial H}{\partial q}} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$ - консерв. система

Значит $H = h = const$

$$h - mgR(\cos\psi + 1) = \frac{P_\psi^2}{2mR^2} + \frac{P_\varphi^2}{MR^2 + 2mR^2\sin^2\psi}$$

$$P_\psi^2 = \frac{(h - mgR(\cos\psi + 1))(M + 2m\sin^2\psi)R^2 - P_\varphi^2}{(M + 2m\sin^2\psi)R^2} 2mR^2$$

Можем подставить во второе ур-ие системы:

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{2\left[\left(h - mgR(\cos\psi + 1)\right)(M + 2m\sin^2\psi)R^2 - P_\varphi^2\right]}}{R^2\sqrt{m(M + 2m\sin^2\psi)}}$$

После интегрирования получим

$$t = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{R^2\sqrt{m(M + 2m\sin^2\psi)}\, d\psi}{\sqrt{2\left[\left(h - mgR(\cos\psi + 1)\right)(M + 2m\sin^2\psi)R^2 - P_\varphi^2\right]}}$$

И для φ_ψ подставим dt в первое:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{2m}\, P_\varphi\, d\psi}{\sqrt{(M + 2m\sin^2\psi)}\sqrt{\left(\left(h - mgR(\cos\psi + 1)\right)(M + 2m\sin^2\psi)R^2 - P_\varphi^2\right)}}$$

Задача 19.35

$$\dot{q} = Aq + Bp$$
$$\dot{p} = Cq + Dp$$

A, B, C, D: — гамильт. система — ?

Для того, чтобы эта система была Гамильтоновой, должна $\exists H$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$ такая, что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q^T} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^T \partial p} \qquad \frac{\partial \dot{p}}{\partial p^T} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial q}$$

Т.к. H - дважды непрер. дифф, то

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^T \partial p} = +\frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial q} \hookrightarrow \frac{\partial \dot{q}}{\partial q^T} = -\frac{\partial \dot{p}}{\partial p^T}$$

Отсюда получаем $A = -D = A^T$

т.к. $\frac{\partial^2 H}{\partial q^T \partial p}$ - симм. матр.

Продифф. по другим координатам:

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial p^T} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial p} \text{ - симм. матр} \hookrightarrow B = B^T$$

и аналогично $C = C^T$.

Ответ: $A = -D = A^T$, $B = B^T$, $C = C^T$.

Задача 19.77

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2} + e\varphi$$

$\vec{p}$ - импульс φ и $\mathbb{A}$ - скалярн. и вект. потенц. поля. L - ?

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{c^2\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2}}$$

$$\dot{\vec{q}}^2\left(m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2\right) = c^4\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2$$

$$\dot{\vec{q}}^2 m^2c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2\left(\dot{\vec{q}}^2c^2 - c^4\right) = 0$$

Выразим $\vec{p}$:

$$\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2 = \frac{\dot{\vec{q}}^2 m^2 c^4}{c^2(c^2 - \dot{\vec{q}}^2)} = \frac{\dot{\vec{q}}^2 m^2 c^2}{c^2 - \dot{\vec{q}}^2}$$

$$\vec{p} = \dot{\vec{q}} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - \dot{\vec{q}}^2}} + \frac{e}{c}\mathbb{A}$$

$$L = \hat{\vec{p}}^T \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \hat{\vec{p}}, t) = \dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - \dot{\vec{q}}^2}} + \frac{e}{c}(\mathbb{A}, \dot{\vec{q}}) -$$

$$- H = \frac{mc\,\dot{\vec{q}}^2}{\sqrt{c^2 - \dot{\vec{q}}^2}} + \frac{e}{c}(\mathbb{A}, \dot{\vec{q}}) - \underbrace{\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - \dot{\vec{q}}^2}} - e\varphi}_{= H - e\varphi} =$$

$$= -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}(\mathbb{A}, \dot{\vec{q}}) - e\varphi = \underline{L}$$

Задача 20.1

Вычислить (K_i, p_j), (K_i, K_j), (K^2, K_j), (x_i, K_j)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} x_2 p_3 - p_2 x_3 \\ p_1 x_3 - p_3 x_1 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{bmatrix}$$

Вычислим (K_1, p_1):

$$\frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial p_1}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} \frac{\partial p_1}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Аналогично получим $(K_i, p_i) = 0$.

Для $i \neq j$ остаётся 1 компонента у p, равная 1:

$(K_1, p_2) = -(K_2, p_1) = p_3$ $\quad$ $(K_3, p_1) = -(K_1, p_3) = p_2$

$(K_2, p_3) = -(K_3, p_2) = p_1$

Вычислим (x_i, K_j):

$$\frac{\partial x_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial x_i}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial x_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}}$$

Получим $(x_i, K_i) = 0$

Для $i \neq j$ остаётся 1 компонента у x, равная 1:

$(x_1, K_2) = -(x_2, K_1) = x_3$. $\quad$ $(x_3, K_1) = -(x_1, K_3) = x_2$.

$$(x_2, K_3) = -(x_3, K_2) = x_1$$

Вычислим (K_i, K_j):

$$\frac{\partial K_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_i}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \text{для } i = j$$

Иначе:

$$\frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{x}} = [0 \ p_3 \ -p_2] \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} - [0 \ -x_3 \ x_2] \begin{bmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{bmatrix} =$$

$$= K_3$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_3}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_3}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{p}} = [-p_3 \ 0 \ p_1] \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} - [p_2 \ -p_1 \ 0] \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= K_1$$

$$\frac{\partial K_3}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_3}{\partial \vec{p}} = [p_2 \ -p_1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} - [0 \ p_3 \ -p_2] \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= K_2$$

Вычислим $(K^2, K_j) = (K_1^2, K_j) + (K_2^2, K_j) +$
$+ (K_3^2, K_j) = 2K_1(K_1, K_j) + 2K_2(K_2, K_j) + 2K_3(K_3, K_j) =$
$= 0$ — т.к. скобки либо зануляются, либо сокращаются

Задача 20.15

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Y(f) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial Y(f)}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial X}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ где } Z_i = X(Y_i) - Y(X_i)$$

Задача 20.16

Док-ть $((\varphi,\psi),f)+((\psi,f),\varphi)+((f,\varphi),\psi)\equiv 0$,

где $\varphi=\varphi(q,p,t)$, $\psi=\psi(q,p,t)$, $f=f(q,p,t)$

Пусть $f=f(q,p,t)\equiv\chi(q,p,t)$, а f - ф-ция $f(x_1,..,x_n)$

Пусть A и B - дифф. операторы первого порядка над ф-цией $f(x_1,x_2,..,x_n)$:

$$Af=\sum_{k=1}^{n}A_k(x_1,..,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{и} \quad Bf=\sum_{k=1}^{n}B_k(x_1,..,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

По задаче 20.15 „коммутатор"

$C=AB-BA$ также будет оператором первого порядка $Cf=A(Bf)-B(Af)=\sum_{k=1}^{n}[A(B_k)-$

$-B(A_k)]\frac{\partial f}{\partial x_k}$

Скобки Пуассона можно рассматр. как применение оператора к ф-ции f.

Для (φ,f) это $\Phi=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right)$

Аналогично определим Ψ и X для ф-ций ψ и χ.

Если формально раскрыть скобки Пуассона (как например раскрывали в 20.15), то получим производные каждой из ф-ций второго порядка. Но $((\varphi,\psi),\chi)$ не

содержит производн. второго порядка ф-ции χ, а сумма

$$((\psi\chi)\varphi)+((\chi\varphi)\psi)=(\psi(\varphi\chi))-(\varphi(\psi\chi))=$$

$=(\psi\varphi-\varphi\psi)\chi$ есть дифференц. оператор первого порядка относительно ф-ции χ (по доказанному ранее).

Значит в левую часть тождества Пуассона не входят производные второго порядка ф-ции χ, а в силу симметрии и произв. второго порядка ф-ций φ и ψ.

А как говорилось выше, каждый член нужного рав-ва есть произведение произв. второго порядка на две производные первого порядка.

Но мы показали, что произв. второго порядка не входят в левую часть тож. дества Пуассона, значит все члены тождества Пуассона взаимно уничтожаются.

Доказано.

Задача 20.30

$H_1(q,p)$ и $H_2(q,p)$. Известны решения $q(q_0, p_0, t)$ и $p(q_0, p_0, t)$ одной из систем.

Найти реш. ур-ий движ. сист. с гамильтонианом $f(H_1, H_2)$, если H_1 и H_2 нах-ся в инволюции: $(H_1, H_2) = 0$.

Покажем, что H_1 и H_2 - первые интегралы для системы с гамильт. $f(H_1, H_2)$. Для этого воспольз. критерием 1-го интеграла.

Для того, чтобы H_1 был ~~ве~~ перв. интегр. необх. и достаточно, чтобы $\frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + (H_1, f) = 0$.

$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0$ по условию, т.к. $H_1 = H_1(q,p)$

$$(H_1, f(H_1, H_2)) = \frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial f(H_1,H_2)}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial f(H_1,H_2)}{\partial q} =$$

$$= \frac{\partial H_1}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial p}\right) - \frac{\partial H_1}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial H_2}\underbrace{\left(\frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial q}\right)}_{(H_1,H_2)=0} + \frac{\partial f}{\partial H_1}\underbrace{\left(\frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q}\right)}_{0} = 0$$

Аналогично для H_2.

Значит H_1 и H_2 - перв. интегралы системы.

Считаем H_2 - const $\hookrightarrow \exists F: f(H_1, H_2) = F(H_1)$

Ур-ия движения:

$$\dot{q} = \frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \dot{q}^*$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \dot{p}^*$$

где q^* и p^* - решения сист. с гамильт. H_1.

Тогда $$q = \frac{\partial F}{\partial H_1} q^* = q\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial H_1} p^* = p\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$$

Ответ: $q = q\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$, $p = p\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$

20.37

$$L = f(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \Omega(t)(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$$

Пок-ть, что пр-ие поворота отн. оси Ox_3 удовл. усл. теор. Нётер.

Поворот относит. Ox_3 зад-ся:

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_2' = x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \\ x_3' = x_3, \quad t' = t \end{cases}$$

Оно непрер. дифф., тождественно при $\varphi = 0$, $\vec{q}' = \vec{q}$.

Проверим инвариантность лагранжиана относит. этого пр-ия:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)\,dt = \int_{t_0'}^{t_1'} L \frac{dt}{dt'}\,dt' = \int_{t_0'}^{t_1'} L'\,dt'$$

$$\delta W = \delta \int_{t_0'}^{t_1'} L'\,dt' = 0$$ на прямом пути.

$$L'(\dot{\vec{q}}', \vec{q}', t') = L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)\frac{dt}{dt'}$$

А так как $t' = t$, то $\frac{dt}{dt'} = 1$ и

$$L' = L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = f(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \Omega(t)(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) =$$

$$= f[(\dot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_2\sin\varphi)^2 + (\dot{x}_1\sin\varphi + \dot{x}_2\cos\varphi)^2 + \dot{x}_3^2] +$$

$$+ \Omega(t)[(x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi)(\dot{x}_1\sin\varphi + \dot{x}_2\cos\varphi) -$$

$$- (x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)(\dot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_2\sin\varphi)] =$$

$$= f(\dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2 + \dot{x}_3'^2) + \Omega(t)(x_1'\dot{x}_2' - x_2'\dot{x}_1')$$

Лагранжиан инвариантен относит. этого пр-ия.

Вычислим первый интеграл:

$$g(\vec{p}, \vec{q}, t) = \vec{p}^T \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} - H(\vec{p}, \vec{q}, t)\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0}$$ - перв. инт.

Ψ - пр-ие коорд. Φ - времени и $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -x_1\sin\varphi - x_2\cos\varphi \\ x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Откуда $$g = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -x_1\sin\varphi - x_2\cos\varphi \\ x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = -x_2 p_1 + p_2 x_1 = \text{const}$$

Задача 21.2

Пок-ть, что ур-ия Лагр. совп, если лагр. отлич. на адд. полную полн. произв. по врем. произв. ф-ции коорд. и времени.

Это утв. имеет след. смысл: динамич. системы с лагранжианами L и $L + \frac{dF}{dt}$ имеют один и тот же прямой путь, какова бы ни была $F(q, t)$.

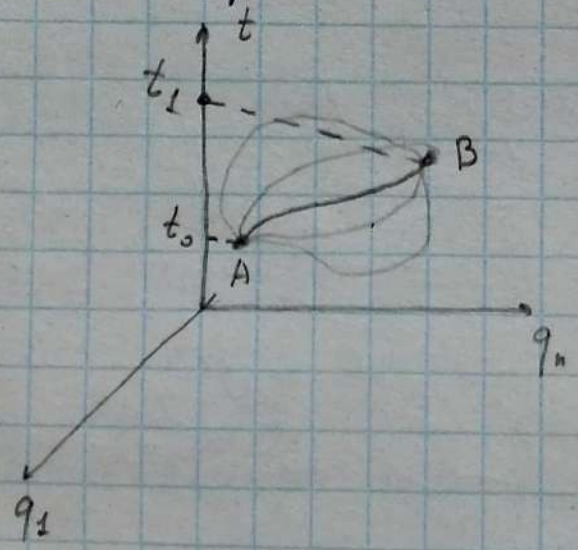
Рассмотрим действие

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

и действие

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \frac{dF}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dF = I + F\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

$\delta F\big|_{t=t_1} = \delta F\big|_{t=t_0} = 0$ в силу того, что как при $t = t_0$, так и при $t = t_1$ все рассматрив. кривые проходят через одну и ту же точку расширенного коорд. пр-ва. Поэтому так как на прямом пути $\delta I = 0$, то на том же пути $\delta \tilde{I} = 0$, а это значит, что одна и та же кривая явл-ся прямым путём для ур-ий Лагранжа с лагр. L и $\tilde{L}$, значит уравн. Лагранжа совпадают.



21.4 В поле тяж., ∥ Oz.

Через $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, не леж. в гиперплоск. $t = const$ $(t_0 \neq t_1)$ можно пров. прямой путь и притом только 1.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

По принципу Гамильтона через ∀ 2 точки M_0 и M_1 можно провести прямой путь и притом только один, если ур-ие Лагранжа имеет решение, определ. однозначно (тогда $\delta W = 0$)

Урав. Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = At + B \\ y = Ct + D \\ z = \frac{gt^2}{2} + Et + F \end{cases}$$

Подставив граничные условия, получим

$$\begin{cases} x_1 = At_1 + B \\ x_0 = At_0 + B \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ t_0 & 1 \end{vmatrix} = t_1 - t_0 \neq 0$$ в силу условия

Значит A и B определены однозначно.

Аналогично C и D определены однозначно

Подставим для z:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{g t_1^2}{2} + E t_1 + F \\ z_0 = \frac{g t_0^2}{2} + E t_0 + F \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 - \frac{g t_1^2}{2} = E t_1 + F \\ z_0 - \frac{g t_0^2}{2} = E t_0 + F \end{cases} \longrightarrow E \text{ и } F \text{ определены}$$

однозначно при $t_0 \neq t_1$.

Т.е. решение уравн. Лагранжа $\exists$ и опред. однозначно. Значит исходн. утв. также верно.

21.12

$$z_{пр} = \frac{gt^2}{2}$$

$$z_{ок} = at^n \quad (n \geq 1)$$

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$$

Действие на прямом пути

$$W_{пр} = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t} \left(m\frac{g^2t^2}{2} - m\frac{g^2t^2}{2}\right) dt = 0$$

Для окольного пути имеем:

$$W_{ок} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{ma^2n^2t^{2(n-1)}}{2} - mgat^n\right) dt =$$

$$= \frac{ma^2n^2}{2(2n-1)} t^{2n-1}\Big|_{t_0}^{t_1} - \frac{mga}{n+1} t^{n+1}\Big|_{t_0}^{t_1}$$

На краях вып-ся условие

$$z^0_{ок} = z^0_{пр} \hookrightarrow \frac{g t_0^2}{2} = a t_0^n \hookrightarrow t_0^{n-2} = \frac{g}{2a}$$

$$z^1_{ок} = z^1_{пр} \hookrightarrow \frac{g t_1^2}{2} = a t_1^n \hookrightarrow t_1^{n-2} = \frac{g}{2a}$$

Из системы либо $t_1 = t_0$, либо $t_0 = 0$ и $t_1^{n-2} = \frac{g}{2a}$

Откуда получим:

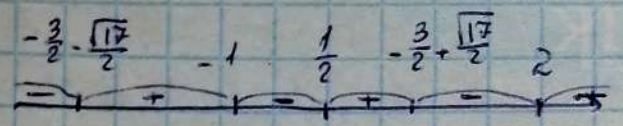
$$W_{ок} = \frac{m a^2 n^2}{2(2n-1)} t_1^{2n-1} - \frac{m g a}{n+1} t_1^{n+1} =$$

$$= m a t_1^{n+1} \left(\frac{a n^2}{2(2n-1)} t_1^{n-2} - \frac{g}{n+1} \right) = m a t_1^{n+1} \left(\frac{\cancel{a} n^2 g}{4(2n-1)\cancel{a}} - \frac{g}{n+1} \right)$$

$$= m a t_1^{n+1} \left(\frac{g n^2}{4(2n-1)} - \frac{g}{n+1} \right) = m a g t_1^{n+1} \left(\frac{n^2}{4(2n-1)} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$W_{ок} = m a g t_1^{n+1} \left(\frac{n^3 + n^2 - 8n + 4}{4(2n-1)(n+1)} \right)$$

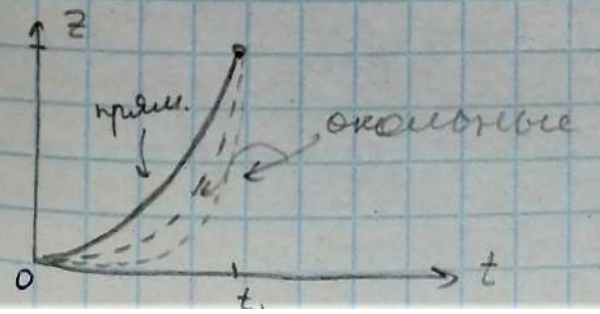
$$n^3 + n^2 - 8n + 4 = (n-2)\left(n + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$



$n \in \mathbb{Z} \hookrightarrow$ при $n = 1$ $W_{ок} < 0$

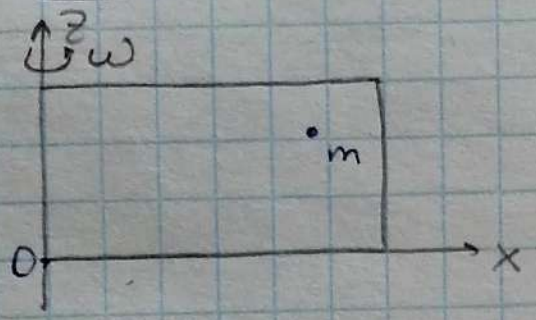
при $n \geq 3$ $W_{ок} > 0$

Значит $W_{ок}$ имеет стац. точку $n = 2$, но экстр. нет.



21.14

$(x_0, z_0) \longrightarrow (x_1, z_1)$ за $T > 0$



$$\Pi = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2}$$

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Из принципа Гамильтона, искомая траектория $\exists$ и!, если реш. ур. Лагранжа определено однозначно

За обобщ. коорд. $\vec{q} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - m\omega^2 x = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\ z = Ct + D \end{cases}$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} x_0 = Ae^{\omega t_0} + Be^{-\omega t_0} \\ z_0 = Ct_0 + D \\ x_1 = Ae^{\omega t_1} + Be^{-\omega t_1} \\ z_1 = Ct_1 + D \end{cases} \longrightarrow \quad C = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$$

$$D = z_0 - \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} t_0 = \frac{z_0 t_1 - z_1 t_0}{t_1 - t_0}$$

$$A = x_1 e^{-\omega t_1} - B e^{-2\omega t_1}$$

$$B = \frac{x_1 e^{-\omega(t_1 - t_0)} - x_0}{e^{-\omega(2t_1 - t_0)} + e^{-\omega t_0}} \longrightarrow A = x_1 e^{-\omega t_1} - \frac{x_1 e^{-\omega(t_1 - t_0)} - x_0}{e^{-\omega(2t_1 - t_0)} + e^{-\omega t_0}} e^{-2\omega t_1}$$

Все коэфф. опр-ся однозначно, значит

$\exists!$ траектория, удовл. условию.

21.15

Пок-ть, что $W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2}\int_0^T \left[(\delta\dot{x})^2 + \omega^2(\delta x)^2 + (\delta\dot{z})^2\right] dt$,

где $\delta x = x_{ок} - x_{пр}$, $\delta z = z_{ок} - z_{пр}$ и $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$

$\delta z(0) = \delta z(T) = 0$

$$W_{ок} = \int_{t_0}^{t_1} L_{ок}\, dt = \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[(\dot{x} + \delta\dot{x})^2 + (\dot{z} + \delta\dot{z})^2 + \omega^2(x + \delta x)^2\right] dt =$$

$$= \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2\right] dt + \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[2\dot{x}\delta\dot{x} + (\delta\dot{x})^2 + \right.$$

$$\left. + 2\dot{z}\delta\dot{z} + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2 \cdot x \cdot \delta x + \omega^2(\delta x)^2\right] dt =$$

$$= W_{пр} + m\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z) - \ddot{x}\delta x - \ddot{z}\delta z + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left((\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2(\delta x)^2\right) + \omega^2 x\delta x \cdot \frac{1}{2}\right] dt =$$

$$= W_{пр} + m(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z)\Big|_{t_0}^{t_1} + m\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{z}^2 + \omega^2\delta x^2 + \omega^2 x\delta x) -$$

$$- \ddot{x}\delta x - \ddot{z}\delta z)\, dt$$

Из предыд. задачи

$$\ddot{z} = 0 \qquad -\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Тогда:

$$W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t_1} \left[(\delta \dot{x})^2 + \omega^2 (\delta x)^2 + (\delta \dot{z})^2 \right] dt$$

$T = t_1 - t_0$, значит

$$W_{ок} = W_{пр} + \frac{1}{2} m \int_0^T \left[\delta \dot{x}^2 + \omega^2 \delta x^2 + \delta \dot{z}^2 \right] dt$$

22.5

$$I = \oint [(ap + bq)\delta q + (\alpha p + \beta q)\delta p]$$

Если он явл-ся универс. инт. инвариантом, то по т. ин Хуачжуна $I = \gamma I_{\pi} = \gamma \oint p\delta q$, $\gamma \in \mathbb{R}$

где I_{π} - интегр. инвариант Пуанкаре

$$\oint [((a-\gamma)p + bq)\delta q + (\alpha p + \beta q)\delta p] = 0$$

Должны быть равны вторые произв.:

$$\frac{\partial[(a-\gamma)p + bq]}{\partial p} = a - \gamma = \frac{\partial(\alpha p + \beta q)}{\partial q} = \beta$$

Откуда $\gamma = a - \beta$ - в этом случае инт. будет инвариантом

$$I = (a-\beta) \oint p\delta q$$

22.15 $A_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ и $B_i(q_1, \dots, q_n, \dots, p_1, \dots, p_n)$

$i = \overline{1,n}$ такие, чтобы $I = \oint_C \sum_{i=1}^{n} (A_i \underbrace{\delta q_i}_{\text{отн}} + B_i \delta p_i)$ был

универс. интегр. инвариантом.

Должна вып-ся т. ан Хуачжуна: $I = \gamma I_\pi$

$$\oint_C \sum_{i=1}^{n} [(A_i - \gamma p_i)\delta q_i + B_i \delta p_i] = 0$$

Должны быть равны смешан. произв.

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \gamma \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial B_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \equiv \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \gamma \delta_{ij} \qquad i,j = \overline{1,n}$$

Из мат. анализа знаем, что матрицы смеш. произв. симметрические, откуда

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} = \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \frac{\partial B_j}{\partial q_i}$$

Ответ: $\frac{\partial A_i}{\partial p_j} = \frac{\partial A_j}{\partial p_i}$, $\frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \frac{\partial B_j}{\partial q_i}$

$i,j = \overline{1,n}$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_i} = \gamma \delta_{ij}$$

22.24 Показать, что из сохр. фазового объёма для сист. $\dot{q}_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ $\dot{p}_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$ нельзя сделать вывод, что система гамильтонова.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Если $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, то по т. Лиувилля о сохр. фазового объёма будет сохр. фазовый V.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad n \geq 2.$$

Можем привести пример негамильтоновой системы:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_1 = Q_1 \\ \dot{q}_2 = -q_2 = Q_2 \\ \dot{p}_1 = 0 = P_1 \\ \dot{p}_2 = 0 = P_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$$

Выполнена т. Лиувилля значит фазов. V сохр-ся.

Система явл-ся гамильтоновой $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x}\, \partial \vec{x}^T} = \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x}^T\, \partial \vec{x}}$$

Ур-ия Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2 \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$1 = \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} \neq \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} = 0$$

не совп. как минимум 1 компонента, значит критерий того, что система гамильтоновая, не выполнен.

22.32 $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad i = \overline{1,n}$

показать, что фазовый объём сохр-ся $\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

$$V = \int\limits_{\Omega} \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{\Omega_0} \dots \int \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{f}(\bar{x}_0)(t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = E + A \cdot (t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0), \text{ где } A = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0}$$

$$\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = \det \begin{pmatrix} 1 + a_{11}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & a_{12}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & \dots & a_{1n}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) \\ a_{21}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & 1 + a_{22}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= (1 + a_{11}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t)) \cdot \dots \cdot (1 + a_{nn}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t)) + \psi \quad (=)$$

ψ - порядка по Δt не выше $1 \cdot 1 + (n-2) \cdot \alpha + 1 \cdot 1 \geq 2$
$\alpha \geq 0$

$$(=) \; 1 + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) = 1 + \left(\frac{\partial f_1(\bar{x}_0)}{\partial x_{01}} + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x}_0)}{\partial x_{0n}}\right)$$

$$\cdot (t - t_0) + O(t - t_0) = 1 + \operatorname{div} \bar{f}(\bar{x}_0)(t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0)$$

$$\dot{V}\Big|_{t=t_0} = \int\limits_{\Omega_0} \dots \int \operatorname{div} \bar{f}(\bar{x}_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}, \quad \forall t_0$$

Если $V = const$, то $\dot{V} = 0 \hookrightarrow \operatorname{div} \vec{f} = 0$.

Если $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, то $V = const$.

23.1 Док-ть каноничн. пр-ия

$\tilde{q}_i = p_i$, $\tilde{p}_i = q_i$ $(i = \overline{1,n})$

Найти его коэффиц. c и произв. ф-цию $F(q,p,t)$

Критерий каноничн.: $\exists F(q,p,t): \vec{p}^T \delta\vec{q} - c\vec{p}^T \delta\vec{q} = -\delta F$

$$\delta\tilde{\vec{q}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{\vec{q}}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \tilde{\vec{q}}}{\partial p_k} dp_k \right) = d\vec{p}$$

$$\tilde{\vec{p}}^T = \vec{q}^T$$

$\vec{q}^T d\vec{p} - c\,\vec{p}^T \delta\vec{q} = -\delta F$ и т.к. $d\vec{p} = \delta\vec{p}$, $d\vec{q} = \delta\vec{q}$,

то можем записать так:

$$\vec{q}^T \delta\vec{p} - c\,\vec{p}^T \delta\vec{q} = -\delta F.$$

Если взять $c = -1$, то $F = -\vec{p}^T \cdot \vec{q}$

удовл. нужному рав-ву.

Ответ: $c = -1$, $F(q,p,t) = -\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$

23.2 $\tilde{q} = \alpha q + \beta p \qquad \tilde{p} = \gamma q + \delta p$

пок-ть, что всегда явл-ся каноник. Найти его вал-сть C и произв. ф-цию $F(q, p, t)$

Критерий каноничности: $\exists F: \tilde{\vec{p}}^T \delta \tilde{\vec{q}} - C \vec{p}^T \delta \vec{q} = -\delta F$

$\delta \tilde{q} = \alpha \delta q + \beta \delta p \qquad \tilde{p} = \gamma q + \delta p$

$$(\gamma q + \delta p)(\alpha \delta q + \beta \delta p) - c p \delta q = -\delta F$$

$$\gamma \alpha q \delta q + \delta \beta p \delta p + \gamma \beta q \delta p + \delta \alpha p \delta q -$$

$$- c p \delta q = -\delta F$$

$$\delta(\gamma \alpha q^2 + \delta \beta p^2) + \gamma \beta q \delta p + \delta \alpha p \delta q - c p \delta q = -\delta F.$$

Если $c = \delta\alpha - \gamma\beta$, то можно представить в таком виде:

$$\delta(\gamma \alpha q^2 + \delta \beta p^2) + \gamma \beta \, \delta(p \cdot q) = -\delta F$$

Откуда $F = -\frac{1}{2}(\alpha \gamma q^2 + \beta \delta p^2 + 2 \gamma \beta p q)$

Ответ: $c = \delta\alpha - \gamma\beta \neq 0$, $F = -\frac{1}{2}(\alpha \gamma q^2 + \beta \delta p^2 + 2 \gamma \beta p q)$

23.48

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right)$$

Найти движение осцилл.

Пок-ть, что закон движ. системы

$$q_i = q_i(q_0, p_0, t), \quad p_i = p_i(q_0, p_0, t) \qquad i = \overline{1,n}$$

можно рассм. как уникал. канонич. пр-ие нач. коорд. Найти произв. ф-цию этого пр-ия и гамильт. $H_*(p_0, q_0)$.

Ур-ия Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\omega_i^2 q_i \end{cases} \longrightarrow \ddot{q}_i = \dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i$$

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

Решением явл-ся $q_i = A\cos\omega_i t + B\sin\omega_i t$

$p_i = \omega_i B\cos\omega_i t - A\omega_i \sin\omega_i t$

В начальный момент времени

$$\begin{cases} A = q_{i0} \\ \omega_i B = p_{i0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} q_i = q_{i0}\cos\omega_i t + \dfrac{p_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t \\ p_i = p_{i0}\cos\omega_i t - q_{i0}\omega_i \sin\omega_i t \end{cases}$$

Покажем, что эту систему можно рассм. как эквивалентное канонич. пр-ие начальн. данных.

$c = 1$

Критерий каноничности:

$$\exists F: \vec{p}^T \delta\vec{q} - c\vec{p}_0^T \delta\vec{q}_0 = -\delta F$$

$$\delta\vec{q} = \frac{\partial\vec{q}}{\partial\vec{q}_0^T} d\vec{q}_0 + \frac{\partial\vec{q}}{\partial\vec{p}_0^T} d\vec{p}_0$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{0i}} = \cos\omega_i t \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_{0i}} = \frac{\sin\omega_i t}{\omega_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_{0i}\cdot\cos\omega_i t\cdot\cos\omega_i t - \frac{q_{0i}\omega_i}{2}\sin 2\omega_i t - c p_{0i}\right) dq_{0i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{0i}}{2\omega_i}\sin 2\omega_i t - q_{0i}\sin^2\omega_i t\right) dp_{0i} = -\delta F$$

Ф-ция F будет ∃, если она явл-ся полным изохр. дифф.

$$\frac{\partial\left(p_{0i}\cos^2\omega_i t - q_{0i}\,\omega_i \sin 2\omega_i t\cdot\frac{1}{2} - C p_{0i}\right)}{\partial p_{0i}} =$$

$$= \frac{\partial\left(p_{0i}\sin 2\omega_i t\cdot\frac{1}{2\omega_i} - q_{0i}\sin^2\omega_i t\right)}{\partial q_{0i}} \qquad \forall i=\overline{1,n}$$

$$\cos^2\omega_i t - C = -\sin^2\omega_i t \qquad \forall i=\overline{1,n} \qquad C=1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_{0i}} = -p_{0i}\cos^2\omega_i t + \frac{q_{0i}\,\omega_i}{2}\sin 2\omega_i t + p_{0i} \qquad \forall i=\overline{1,n}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(-p_{0i}q_{0i}\cos^2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2}{4}\omega_i\sin 2\omega_i t + p_{0i}q_{0i}\right) + f(\vec{p},t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0i}} = -\frac{p_{0i}}{2\omega_i}\sin 2\omega_i t + q_{0i}\sin^2\omega_i t = q_{0i}\sin^2\omega_i t + \frac{\partial f}{\partial p_{0i}}$$

Откуда находим $f = -\frac{p_{0i}^2}{4\omega_i}\sin 2\omega_i t$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(p_{0i}q_{0i}\sin^2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\omega_i^2 - p_{0i}^2}{4\omega_i}\sin 2\omega_i t\right)$$

Найдём гамильтониан Ф-ла пр-ия:

$$H = \overset{1}{C}H_0 + \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\vec{p}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}}_{=\sum_{i=1}^{n}p_i^2,\ \text{т.к. } \dot{q}_i = p_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i p_{0i}q_{0i}\sin 2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\omega_i^2 - p_{0i}^2}{2}\cos 2\omega_i t\right)$$

$$H_0 = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \vec{p}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i p_{0i}q_{0i}\sin 2\omega_i t + \frac{q_{0i}^2\omega_i^2 - p_{0i}^2}{2}\cos 2\omega_i t\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i^2 q_i^2 - p_i^2) - \sum_{i=1}^{n} (2\omega_i p_{0i} q_{0i} \sin 2\omega_i t + \right.$$

$$\left. + (q_{0i}^2 \omega_i^2 - p_{0i}^2) \cdot \cos 2\omega_i t) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} ((\omega_i^2 q_{0i}^2 - p_{0i}^2) \cos 2\omega_i t + \right.$$

$$+ 2\omega_i p_{0i} q_{0i}) - \sum_{i=1}^{n} (2\omega_i p_{0i} q_{0i} \sin(2\omega_i t) + (q_{0i}^2 \cdot \omega_i^2 -$$

$$\left. - p_{0i}^2) \cos 2\omega_i t) \right) = \underline{\underline{0}}$$

23.100

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{3p_1+q_2}{a} - q_1\right) \qquad \tilde{p}_1 = -2(3p_1+q_2)$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{1}{3}\left(\arccos\frac{3p_2+q_1}{b} - q_2\right) \qquad \tilde{p}_2 = -3(3p_2+q_1)$$

Выразим $\vec{p}$ и $\tilde{\vec{p}}$ через $\vec{q}$ и $\tilde{\vec{q}}$:

$$\vec{p} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a\cos(2\tilde{q}_1+q_1) - q_2 \\ b\cos(3\tilde{q}_2+q_2) - q_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\vec{p}} = \begin{pmatrix} -2a\cos(2\tilde{q}_1+q_1) \\ -3b\cos(3\tilde{q}_2+q_2) \end{pmatrix}$$

Для канонич. свод. пр-я необх. и дост.

чтобы $\exists\, S(\vec{q}, \tilde{\vec{q}}, t)$ и $c \neq 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{\vec{q}}} = -\tilde{\vec{p}}, \quad \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = c\vec{p}$$

Приравняем смешанные произв.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{\vec{q}}\, \partial \vec{q}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{q}\, \partial \tilde{\vec{q}}}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{\vec{q}}\, \partial \vec{q}} = C \frac{\partial}{\partial \tilde{\vec{q}}} \vec{P} = -\frac{C}{3} \begin{pmatrix} a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) \cdot 2 & 0 \\ 0 & 3b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{q}\, \partial \tilde{\vec{q}}} = -\frac{\partial \tilde{\vec{p}}}{\partial \vec{q}} = -\begin{pmatrix} 2a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) & 0 \\ 0 & 3b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) \end{pmatrix}$$

Матрицы будут равны при $C = 3$.

$$S = C \int p_1 \, dq_1 = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + A(q_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = C p_2 = b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) - q_1 = 0 - q_1 + \frac{\partial A}{\partial q_2}$$

Откуда $A = b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + B(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$

$$S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + B(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_1} = -\tilde{p}_1 = 2a \cos(2\tilde{q}_1 + q_1) = 2a \cos(2\tilde{q}_1 + q_1) + \frac{\partial B}{\partial \tilde{q}_1}$$

Откуда $B = D(\tilde{q}_2, t)$

$$S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2) + D(\tilde{q}_2, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_2} = -\tilde{p}_2 = 3b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) = 3b \cos(3\tilde{q}_2 + q_2) + \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_2}$$

Откуда $D = E(t) = 0$

Ответ: $C = 3$, $S = a \sin(2\tilde{q}_1 + q_1) - q_2 q_1 + b \sin(3\tilde{q}_2 + q_2)$

(24.1) m движ. в однор. поле тяжести

Сост. ур-ие Гамильт. - Якоби, опр. полный интегр. и найти закон движ. точки.

$$T = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \qquad \Pi = mgz$$

$$H = \vec{p}^T \cdot \dot{\vec{q}} - L = \frac{|\vec{p}|^2}{m} - L = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + mgz$$

Ур-ие Г.-Я:

$$H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = S_0(\vec{\alpha}, t) + \sum_{k=1}^{3} S_k(\vec{\alpha}, q_k)$$

В силу консервативности системы гамильтониан будет явл. первым интегралом.

$$S_0 = -ht \quad , \text{где } H = h = const$$

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}$$

а) в декартовых координатах

$$|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$+ \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2\right) + mgz + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

$p_x = const = \alpha_x$ и $p_y = const = \alpha_y$, т.к. x и y - цикличн. координаты.

Откуда $S_1 = x\alpha_x \quad S_2 = y\alpha_y$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2 + mgz = const = \alpha_z$$

$$S_3 = -\frac{(2m\alpha_z - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g}$$

Значит полный интеграл $h = \frac{\alpha_x^2}{2m} + \frac{\alpha_y^2}{2m} + \alpha_z^2$

$$S = -\left(\frac{\alpha_x^2}{2m} + \frac{\alpha_y^2}{2m} + \alpha_z\right)t + x\alpha_x + y\alpha_y - \frac{(2m\alpha_z - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g}$$

По т. Якоби

$$+\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = -\frac{\alpha_x}{m}t + x \longrightarrow x = \frac{\alpha_x}{m}t + \beta_x$$

$$+\beta_y = \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = -\frac{\alpha_y}{m}t + y \longrightarrow y = \frac{\alpha_y}{m}t + \beta_y$$

$$+\beta_z = \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = -t - \frac{\sqrt{2m\alpha_z - 2m^2gz}}{mg}$$

$$z = -(\beta_z + t)^2\frac{g}{2} + \frac{\alpha_z}{mg}$$

б) в цилиндрических координатах

$$|\vec{p}|^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + p_z^2$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2\right) + mgz + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

$S_2 = \varphi\alpha_\varphi$ - т.к. цикличн. коорд. φ

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\alpha_\varphi^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2\right) + mgz + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

Т.к. гамильт. с отделимыми парами сопр. переменных, то получим след. первые интегралы:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\alpha_\varphi^2 = \alpha_r \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2 + mgz = \alpha_z \end{cases}$$

Замена $\xi = \sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}$

$r = \sqrt{\frac{\xi^2 + \alpha_\varphi^2}{\alpha_r}}$ $\quad dr = \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha_\varphi^2}}$

$$S_1 = \int \sqrt{\alpha_r - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}\, dr = \int \frac{\xi^2 d\xi}{\xi^2 + \alpha_\varphi^2} = \int d\xi - \int \frac{\alpha_\varphi^2 d\xi}{\xi^2 + \alpha_\varphi^2} =$$

$$= \xi - \alpha_\varphi \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\alpha_\varphi} = \sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2} - \alpha_\varphi \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi}$$

$$S_3 = -\frac{(2m\alpha_z - 2m^2 g z)^{3/2}}{3m^2 g}$$

Полный интеграл

$$S = -\left(\frac{\alpha_r}{2m} + \alpha_z\right)t + \sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2} - \alpha_\varphi \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi} +$$

$$+ \varphi\alpha_\varphi - \frac{(2m\alpha_z - 2m^2 g z)^{3/2}}{3m^2 g}$$

По т. Якоби:

$$\beta_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = -\frac{t}{2m} + \frac{1 \cdot r^2}{2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}} - \cancel{\alpha_\varphi} \cdot \frac{1 \cdot \frac{1 \cdot r^2}{2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}\cdot \cancel{\alpha_\varphi}}}{1 + \frac{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}{\alpha_\varphi^2}} =$$

$$= -\frac{t}{2m} + \frac{r^2}{2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}} - \frac{\alpha_\varphi^2}{\alpha_r \cdot 2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}} = -\frac{t}{2m} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}\left(r^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\alpha_r}\right)$$

$$\beta_r = -\frac{t}{2m} + \frac{\sqrt{r^2\alpha_r - \alpha_\varphi^2}}{2\cdot\alpha_r} \longrightarrow r = \sqrt{4\alpha_r\left(\beta_r + \frac{t}{2m}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\alpha_r}} \;//$$

$$\beta_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = -\frac{1 \cdot 2\alpha_\varphi}{2\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi} - \cancel{\alpha_\varphi}\frac{1}{\cancel{1} + \frac{\cancel{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\cancel{\alpha_\varphi^2}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\alpha_r \frac{r^2}{\alpha_\varphi^2} - 1}} \cdot \left(-\cancel{\alpha_r} \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{\alpha_\varphi^3}} \cdot \cancel{2}\right) + \varphi = \varphi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi}$$

$$tg(\varphi - \beta_\varphi) = \frac{\sqrt{\alpha_r r^2 - \alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi} \longrightarrow \cos(\varphi - \beta_\varphi) = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2(\varphi - \beta_\varphi)}} =$$

$$= \frac{\alpha_\varphi}{r\sqrt{\alpha_r}} //$$

$$\beta_z = \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = -t - \frac{\sqrt{2m\alpha_z - 2m^2 g z}}{mg}$$

$$z = -(\beta_z + t)^2 \frac{g}{2} + \frac{\alpha_z}{mg} //$$

24.22 $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 r^2 \sin^2\theta\right) - \dot{\psi}\lambda\cos\theta$

$\lambda = const$.

Ур-я, опред. закон движ. част. - ?

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ $\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ $\quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} =$

$= m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\psi} - \lambda\cos\theta.$

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\psi}p_\psi - L = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\psi^2 + \lambda\cos\theta\, p_\psi}{mr^2\sin^2\theta} - L =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{(p_\psi + \lambda\cos\theta)^2}{2mr^2\sin^2\theta}$$

Ур. Г.-Я:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_3}{\partial \psi} + \lambda\cos\theta\right)^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

Здесь ψ - цикличн. коорд. $\hookrightarrow$ $S_3 = \psi\alpha_\psi$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{(\alpha_\psi + \lambda\cos\theta)^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

Гамильт. имеет структ. внутр. ф-ций $\hookrightarrow$ получим след. интегралы:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{(\alpha_\psi + \lambda\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta \longrightarrow S_2 = \int\sqrt{\alpha_\theta - \frac{(\alpha_\psi + \lambda\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\ \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta}{r^2}\right) = h \longrightarrow S_1 = \int\sqrt{h2m - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,dr \end{cases}$$

$$S_0 = -ht$$

Полный интеграл

$$S = -\frac{\alpha_r}{2m}t + \int\sqrt{2mh - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{\alpha_\theta - \frac{(\alpha_\varphi + \lambda\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta + \psi\alpha_\varphi$$

По т. Якоби:

$$\beta_r = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \int\frac{m r\,dr}{\sqrt{2mhr^2 - \alpha_\theta}} \longrightarrow \beta_r + t = \int\frac{m r\,dr}{\sqrt{2mhr^2 - \alpha_\theta}}$$

$$\beta_\theta = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \int\frac{\sin\theta\,d\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta\sin^2\theta - (\alpha_\varphi + \lambda\cos\theta)^2}} - \int\frac{dr}{2r\sqrt{2mhr^2 - \alpha_\theta}}$$

$$\beta_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = -\int\frac{(\alpha_\varphi + \lambda\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{\alpha_\theta\sin^2\theta - (\alpha_\varphi + \lambda\cos\theta)^2}} + \psi$$

24.60

Найти закон движ. сист. с гамильт. $H(p_1, \dots, p_n, t)$

Т.к. гамильтониан не зависит от обобщ. координат, то все коорд. циклические $\hookrightarrow$ все импульсы явл-ся первыми интегралами.

$$p_i = \alpha_i \qquad i = \overline{1, n}$$

Ур. Г.-Я:

$$H\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_n}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

$$S_0 = -\int H \, dt$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i} = \alpha_i \quad i = \overline{1,n} \longrightarrow S_i = q_i \cdot \alpha_i \quad i = \overline{1,n}$$

Полный интеграл:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i - \int H\,dt$$

По т. Якоби:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = q_i - \int \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}\,dt$$

$$q_i = \beta_i + \int \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}\,dt, \quad p_i = \alpha_i \qquad i = \overline{1,n}$$

24.63 т. m, сила $\vec{F}(t)$, полность инт. ур-я Г.-Я в виде $S = S_t + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i - \int \varphi_i(t)\,dt\right) q_i$ и найти закон движ. точки.

$$\Pi = mg\,q_3 - \sum_{i=1}^{3} F_i q_i$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + mg\,q_3 - \sum_{i=1}^{3} F_i q_i$$

Ур. Г.-Я:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + mg\,q_3 - \sum_{i=1}^{3} F_i q_i = 0$$

По т. Якоби:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = -\int \varphi_i(t)\,dt + \alpha_i$$

Из ур-ий Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = F_i & i = 1,2 \\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = -mg + F_3 \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} \varphi_i = -F_i & i = 1,2 \\ \varphi_3 = mg - F_3 \end{cases}$$

$$S_0 = -\int H\,dt$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(\alpha_1 + \int_0^t F_1(\xi)\,d\xi\right)^2 + \left(\alpha_2 + \int_0^t F_2(\xi)\,d\xi\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\alpha_3 - mgt + \int_0^t F_3(\xi)\,d\xi\right)^2\right) + mg\,q_3 - \sum_{i=1}^{3} F_i q_i$$

по т. Якоби:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\int \frac{1}{m}\left(\alpha_i + \int_0^t F_i(\xi)\,d\xi\right)dt + q_i \qquad i = 1,2$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\int \frac{1}{m}\left(\alpha_3 + \int_0^t F_3(\xi)\,d\xi - mgt\right)dt$$

Ответ: $q_i = \beta_i + \frac{1}{m}\int\left(\int_0^t F_i(\xi)\,d\xi\right)dt + \alpha_i t$

$$p_i = \alpha_i + \int_0^t F_i(\xi)\,d\xi \qquad i = 1,2$$

$$q_3 = \beta_3 + \frac{1}{m}\int\left(\int_0^t F_3(\xi)\,d\xi\right)dt + \alpha_3 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$p_3 = \alpha_3 - mgt + \int_0^t F_3(\xi)\,d\xi$$

//

24.109

Найти переменные действие-угол гармонич. осциллятора, для кот. $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow$ H - первый интеграл

$$p = \sqrt{2h - \omega^2 q^2}$$

Используем метод разделения переменных.

Ур-ие Г.-Я:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 + \omega^2 q^2\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$$

$$S_0 = -ht$$

$$S_1 = \int \sqrt{2h - \omega^2 q^2}\, dq$$

Полный интеграл:

$$S = \int \sqrt{2h - \omega^2 q^2}\, dq - ht$$

по т. Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \int \frac{dq}{\sqrt{2h - \omega^2 q^2}} - t = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{2h}} - t = \alpha$$

Пусть

$\omega(\alpha + t) = \varphi$ - угол

$$\sin\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{2h}} q \rightarrow \omega q = \sqrt{2h} \sin\varphi \rightarrow \delta q = \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \cos\varphi\, \delta\varphi$$

Тогда вычислим действие:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\,\delta q = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2h - \omega^2 q^2}\,\delta q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2h - 2h\sin^2\varphi} \cdot$$

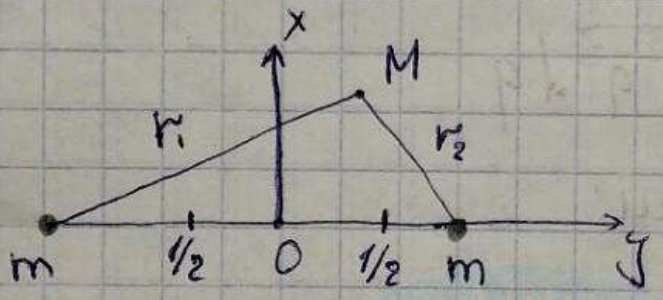
$$\cdot \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \cos\varphi\,\delta\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \cdot \sqrt{2h} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\delta\varphi =$$

$$= \frac{h2}{\pi\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,\delta\varphi = \frac{2h}{\pi\omega}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{h}{\omega}.$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2h}} = \arcsin\sqrt{\frac{\omega^2 q^2}{p^2 + \omega^2 q^2}}$$

Ответ: $I = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega q^2}{2}$, $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{\omega^2 q^2}{p^2 + \omega^2 q^2}}$

T5



перейдём к эллиптич. координатам

$\xi = r_1 + r_2 \qquad \eta = r_1 - r_2$

Если $M = (x, y)$, то

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2} = \frac{\xi + \eta}{2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2} = \frac{\xi - \eta}{2}$$

$$x^2 = \frac{(\xi + \eta)^2}{2^2} - \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 \rightarrow \frac{(\xi + \eta)^2}{2^2} - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)^2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\xi\eta}$$

$$x^2 = \left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\eta\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\xi^2+\eta^2 - 1 - \xi^2\eta^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\xi^2-1)(1-\eta^2)$$

Будем рассм. первый квадрант: $x = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\dot{\xi}^2\eta^2 + \xi^2\dot{\eta}^2 + 2\dot{\xi}\xi\dot{\eta}\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\xi\dot{\xi}(1-\eta^2) - \eta\dot{\eta}(\xi^2-1)\right)^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\right) = \frac{M}{8}\left(\dot{\xi}^2\eta^2 + \xi^2\dot{\eta}^2 + \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(1-\eta^2)}{\xi^2-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta^2\dot{\eta}^2(\xi^2-1)}{1-\eta^2}\right) = \frac{M}{8}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)$$

$$\Pi = -\gamma M\left(\frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2}\right) = -2\gamma Mm\left(\frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}\right)$$

$$L = T - \Pi = \frac{M}{8}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right) + 2\gamma Mm\left(\frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}\right)$$

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{M}{4}(\xi^2-\eta^2)\frac{\dot{\xi}}{\xi^2-1}$$

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{M}{4}(\xi^2-\eta^2)\frac{\dot{\eta}}{1-\eta^2}$$

$$H = p_\eta\dot{\eta} + p_\xi\dot{\xi} - L = \frac{2}{M}\left((\xi^2-1)p_\xi^2 + (1-\eta^2)p_\eta^2\right)\frac{1}{\xi^2-\eta^2} -$$

$$-2\gamma Mm\left(\frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}\right)$$

Ур. Г.-Я:

$$S = S_0(t,\alpha) + S_1(\xi,\alpha) + S_2(\eta,\alpha)$$

$$\frac{2}{M}\left[(\xi^2-1)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2+(1-\eta^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{1}{\xi^2-\eta^2}-2\gamma Mm\left(\frac{1}{\xi+\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}\right)+$$

$$+\frac{\partial S_0}{\partial t}=0$$

В силу консервативности системы имеем первый интеграл - гамильтониан.

$$S_0=-ht$$

$$\frac{2}{M}\left((\xi^2-1)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2+(1-\eta^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)^2\right)-4\gamma Mm\,\xi-h(\xi^2-\eta^2)=0$$

Эта ф-ция с отделившимися парами сопр. переменных.

Тогда имеем первые интегралы:

$$\frac{2}{M}(\xi^2-1)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2-4\gamma Mm\,\xi-h\xi^2=\alpha_1$$

$$\frac{2}{M}(1-\eta^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)^2+h\eta^2=\alpha_2$$

Полный интеграл:

Ответ: $S=-ht+\sqrt{\frac{M}{2}}\int\sqrt{\frac{\alpha_1+h\xi^2+4\gamma Mm\xi}{\xi^2-1}}\,d\xi$

$$+\sqrt{\frac{M}{2}}\int\sqrt{\frac{\alpha_2-h\eta^2}{1-\eta^2}}\,d\eta$$