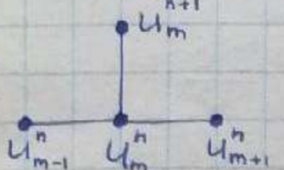
XII.7.2 Для ур-ия $u_t + cu_x = 0$ построить схему max порядка аппрокс. и исследовать её сх-сть



Разложим по Тейлору в окрестности u_m^n

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}''$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm h u_x' + \frac{h^2}{2}u_{xx}''$$

$$\delta u_m^{n+1} = \alpha u_{m-1}^n + \beta u_m^n + \gamma u_{m+1}^n$$

$$\frac{\delta\tau^3}{6}u_{ttt}''' + \delta u_m^n + \tau\delta u_t' + \delta\frac{\tau^2}{2}u_{tt}'' = \alpha u_m^n - \alpha h u_x' + \alpha\frac{h^2}{2}u_{xx}'' + \beta u_m^n +$$
$$+ \gamma u_m^n + \gamma h u_x' + \gamma\frac{h^2}{2}u_{xx}'' + O(h^4) + O(\tau^4) - \alpha\frac{h^3}{6}u_{xxx}''' + \gamma\frac{h^3}{6}u_{xxx}'''$$

$$\begin{cases} \delta = \alpha + \beta + \gamma & (1) \\ -c\tau\delta = -\alpha h + \gamma h & (2) \\ \delta\frac{\tau^2}{2}c^2 = \alpha\frac{h^2}{2} + \gamma\frac{h^2}{2} & (3) \\ -\frac{\delta\tau^3c^3}{6} = \frac{-\alpha+\gamma}{6}h^3 & (4) \end{cases}$$

$$(2) \hookrightarrow -c\tau(\alpha+\beta+\gamma) = h(\gamma-\alpha) \;\downarrow\; \beta = -(\gamma-\alpha)\frac{h}{c\tau} - (\alpha+\gamma)$$

Подставим в (3):

$$-(\gamma-\alpha)\frac{h}{\cancel{c\tau}}\frac{\tau^2c^2}{\cancel{2}} = \frac{(\alpha+\gamma)h^2}{\cancel{2}}$$

$$-\gamma c\tau + \alpha c\tau = \alpha h + \gamma h \to \alpha = \frac{\gamma h + c\tau\gamma}{c\tau - h}$$

Подставим в (4):

$$+(\gamma-\alpha)\frac{h}{c\tau}\frac{\tau^3c^3}{\cancel{6}} = \frac{-\alpha+\gamma}{\cancel{6}}h^3 \hookrightarrow c^2\tau^2 = h^2$$

Получаем, что если наложить усл-ия на сетку $c\tau = h$, то получим $3^й$ порядок аппроксимации.

Но смотря на усл-ия $2^{го}$ пор. $\alpha = \frac{\gamma h + c\tau\gamma}{c\tau - h} \hookrightarrow c\tau \neq h$.

Значит максимально возможный порядок апрокс есть 2. Положим $\delta = 1$. Тогда

$$\gamma = \frac{\tau^2 c^2}{2h^2} - \frac{c\tau}{2h}, \quad \alpha = \frac{\tau^2 c^2}{2h^2} + \frac{c\tau}{2h}, \quad \beta = 1 - \frac{\tau^2 c^2}{h^2}.$$

Получим:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{c\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} c\tau = O(h^2) + O(\tau^2)$$

Второй порядок апрокс.

Либо: $$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} c + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} c^2 \tau = 0.$$

Исследуем на сходимость:

$$u_m^n = \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{ikmh} - \lambda^n e^{ikmh}}{\tau^2} + \frac{\lambda^n e^{ik(m+1)h} - \lambda^n e^{ik(m-1)h}}{2\tau h} c +$$

$$+ \frac{\lambda^n e^{ik(m+1)h} - \lambda^n e^{ik(m-1)h}}{2h^2} c^2 = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2\tau h} c + \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h^2} c^2 = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + i\left(\frac{\sin kh}{\tau h} c + \frac{\sin kh}{\cancel{2} h^2} c^2\right) = 0$$

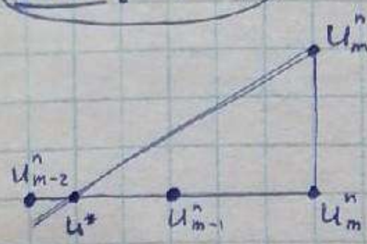
$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + i \sin(kh) \frac{c}{h}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{h}\right) = 0$$

$$|\lambda| = \left|1 - i \sin(kh) \frac{c\tau^2}{h}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{h}\right)\right| < 1$$ — усл-ие сх-сти

Т.к. модуль этого компл. числа ≥ 1 ⇒ сх-сти нет.

XII.7.4.

$$u_t + c u_x = 0$$



$x_t = c$ – характеристика

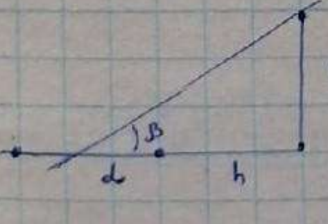
$x - ct = \text{const}$

Построим интерполяционный полином в форме Ньютона:

$$\begin{array}{llll}
x_m & u_m^n & & \\
 & & \dfrac{-u_{m-1}^n + u_m^n}{h} & \\
x_{m-1} & u_{m-1}^n & & \dfrac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} \\
 & & \dfrac{-u_{m-2}^n + u_{m-1}^n}{h} & \\
x_{m-2} & u_{m-2}^n & &
\end{array}$$

$$P(x) = u_m^n + (x - x_m)\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + (x - x_m)(x - x_{m-1}) \cdot \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2}$$

$$u^* = P(x^*) = u_m^n + (x^* - x_m)\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + (x^* - x_m)(x^* - x_{m-1}) \cdot \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2}$$



$$\operatorname{tg}\beta = c^{-1} \to \frac{\tau}{\alpha + h} = c^{-1} \to \alpha = c\tau - h$$

$$x^* - x_m = -(h + \alpha) = -c\tau$$

$$x^* - x_{m-1} = -\alpha = h - c\tau$$

$$u^* = u_m^{n+1} = P(x^*) = u_m^n - \frac{\tau c}{h}(u_m^n - u_{m-1}^n) + (c\tau - h)c\tau\,\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} =$$

$$= u_m^n - \frac{\tau c}{h}u_m^n + \frac{\tau c}{h}u_{m-1}^n + \tau^2 c^2\,\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} - \frac{\tau c}{h}\,\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h}$$

Преобразуем:

$$u_m^{n+1} - u_m^n = -\frac{\tau c}{h} u_m^n + \frac{\tau c}{h} u_{m-1}^n + c^2\tau^2 \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} +$$

$$+ \left(-\frac{\tau c}{} \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h}\right)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} c + \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h} c - \frac{c^2\tau}{} \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} = 0$$

Итого:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} c - \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} \tau c^2 =$$

$$= \frac{f(t^n, x_m - a\tau) + f(t^{n+1}, x_m)}{2}$$

XII. 7.15

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = 6\,\frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}$$

$$y_m^{n\pm1} = y_m^n \pm y'\tau + y''\frac{\tau^2}{2} \pm y'''\frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

$$y_{m\pm1}^n = y_m^n \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm y'''\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

$$\frac{y'\tau\cdot 2 + y'''\frac{\tau^3}{3} + O(\tau^4)}{2\tau} = 6\,\frac{\cancel{y_m^n} + \cancel{y'h} + y''\frac{h^2}{2} + \cancel{y'''\frac{h^3}{6}} - \cancel{y_m^n} - \cancel{y'\tau} - y''\frac{\tau^2}{2} - \cancel{y'''\frac{\tau^3}{6}} - \cancel{y_m^n} + \cancel{y'\tau} - y''\frac{\tau^2}{2} + \cancel{y'''\frac{\tau^3}{6}} + \cancel{y_m^n} - \cancel{y'h} + y''\frac{h^2}{2} - \cancel{y'''\frac{h^3}{6}}}{h^2}$$

$$y'_t + y'''_t\frac{\tau^2}{6} + O(\tau^3) = 6\left(y''_x - y''_t\frac{\tau^2}{h^2}\right) + O(h^2)$$

$$\frac{h^2}{c\tau}$$

Получаем, что ур-ие, кот. аппроксим-ся: $y'_t = \sigma y''_{xx}$

Пор. аппрокс. $O(\tau) + O(h^2)$, погрешн. $\frac{\tau^2}{6} y'''_t + \sigma \frac{\tau^2}{h^2} y''_t = \Delta$

Исследуем на устойчивость:

$$y_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\tau} = \sigma \frac{e^{i\varphi} - \lambda - \frac{1}{\lambda} + e^{-i\varphi}}{h^2}$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{2\tau} + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{h^2} = \frac{\sigma}{h^2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\lambda^2\left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{h^2}\right) - \frac{2\sigma\lambda}{h^2}\cos\varphi + \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2\tau} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \overbrace{\frac{2\sigma\cos\varphi}{1 + \frac{h^2}{2\tau}}}^{K} + \overbrace{\frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2\tau}}{\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{h^2}}}^{C} = 0$$

$$D = K^2 - 4C$$

$$\lambda = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4C}}{2} \qquad C_1 = \frac{h^2}{\tau}$$

$$|\lambda| = \left| \frac{\sigma\cos\varphi}{1 + \frac{C_1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2\cos^2\varphi}{\left(1 + \frac{C_1}{2}\right)^2} - \frac{1 - \frac{C_1}{2}}{1 + \frac{C_1}{2}}} \right| =$$

$$= \frac{\sigma|\cos\varphi|}{1 + \frac{C_1}{2}} \cdot \left| 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - \frac{C_1^2}{4}}{\sigma^2\cos^2\varphi}} \right| \leq 1.$$

Уст-ть зависит от параметров σ и $C_1 = \frac{h^2}{\tau}$.

XII. 7.19

Разложим y т. y_m^{n+1}. Получим:

$$\frac{4\tau y'_t - 2\tau^2 y''_t + \frac{2}{3}\tau^3 y'''_t - 2\tau y'_t + 2\tau^2 y''_{tt} - \frac{4}{3}\tau^3 y'''_t + O(\tau^4)}{2\tau} =$$

$$= \sigma \frac{2y_m^{n+1} + h^2 y''_x - 2y_m^{n+1} + O(h^4)}{h^2}$$

$$y'_t - \frac{1}{3}\tau^2 y'''_t = \sigma y''_x + O(h^2) + O(\tau^3)$$

погрешн. аппрокс. $\Delta = -\frac{1}{3}\tau^2 y'''_t$, пор. аппр. $O(\tau^2, h^2)$