Задача 14.10

Произвольное виртуальное перемещение тела можно задать вектором перемещений $d\vec{r}_0$ и поворотом $\vec{e}\,d\varphi$, где $|\vec{e}|=1$ - единичный вектор оси поворота.

По ф-ле Эйлера $\delta\vec{r}_j = \delta\vec{r}_0 + \vec{e}\times\vec{r}_{0j}\,d\varphi$

Используя теорему (принцип виртуальных перемещений), которая говорит, что $\vec{R}^0$ - полож. равновесия $\Leftrightarrow \delta A = \sum_j \vec{F}_j\cdot\delta\vec{r}_j = 0$ $\forall\delta\vec{R}$.

получим $\delta A = \sum_j \vec{F}_j\cdot(d\vec{r}_0 + \vec{e}\times\vec{r}_{0j}\,d\varphi) =$
$= \sum_j \vec{F}_j\cdot d\vec{r}_0 + \vec{e}\cdot\sum_j \vec{r}_{0j}\times\vec{F}_j\,d\varphi = \vec{F}\cdot d\vec{r}_0 +$
$+ (\vec{M}_0\cdot\vec{e})\,d\varphi = 0$ $\forall d\vec{r}_0$ и $\forall\vec{e}\,d\varphi \longrightarrow \vec{F}=0$ и $\vec{M}_0=0$

Значит, для того, чтобы твердое тело находилось в сост. равновесия, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор сил $\vec{F}$ и главный момент сил $\vec{M}_0$ были равны 0.

Задача 14.23

Дано:

$\Pi = \Pi(q_{s+1}, \ldots, q_n)$

Найти:

полож. равновесия системы

Система консервативная, значит для неё условия равновесия принимают вид $\frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$

Тоесть $\vec{q}^{\,0}$ - стацион. точки потенц. энергии

Т.к. Π не зависит от $q_1, \ldots, q_s$, то

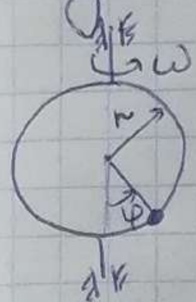
$\forall q_i$, $i = \overline{1,s}$ $\hookrightarrow$ $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$.

Но остальные $q_{s+1}, \ldots, q_n$ должны удовлетворять условию $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ $j = \overrightarrow{s+1, n}$

Таким образом, система имеет мн-во положений равновесия, определяемых условиями $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ $j = \overrightarrow{s+1, n}$, а

$q_1, \ldots, q_s$ - произвольные постоянные.

Задача 14.36 Найти положения относит. равновесия.



Рассмотрим неинерциальную систему отсчёта, связанную с окружностью, и вращ-ся с постоянной $\omega = const$ вокруг неподвижн. оси, тогда $Q_k^{пер} = -\frac{\partial \Pi^{пер}}{\partial q_k}$ из лекции

Система консервативна (все силы потенц. и связи стационарные), значит условия равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0 \quad , \; k = 1, 2, \dots, n.$$

Положение кольца можем задать одной обобщенной координатой - углом φ. $\hookrightarrow \frac{\partial \Pi(\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$

$$\Pi = \Pi(\vec{g}) + \Pi^{пер}$$

$\Pi(\vec{g}) = mgr(1-\cos\varphi)$, где m- масса кольца

$$\Pi^{пер} = -T^{пер} = -\frac{m(\omega r \sin\varphi)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\partial (mgr(1-\cos\varphi))}{\partial \varphi} - \frac{\partial (m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi/2)}{\partial \varphi} =$$

$$= mgr\sin\varphi - m\omega^2 r^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

$$g\sin\varphi = \omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi$$

Получим

1) $\sin\varphi = 0$

2) $\cos\varphi = \dfrac{g}{\omega^2 r}$

$\varphi = 0,\ \pi,\ \pm\arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 r}\right)$ при $\omega^2 \geqslant \dfrac{g}{r}$,

чтобы $\cos \leqslant 1$.

Задача 14.42.

Док-ть теорему о трех силах.

Пусть на твердое тело действуют 3 непараллельные силы. Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A = \sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \qquad \forall \delta \vec{R}$$

Пусть вирт. перемещ. на $d\vec{r}_0$:

$$\delta A = \sum_j \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_0 = d\vec{r}_0 \cdot \sum_j \vec{F}_j = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_j \vec{F}_j = 0 \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно перенести вдоль линии действия в т. пересечения O и сложить.

Т.к. теперь система нах-ся под действием двух сил в состоянии равновесия, то эти силы действуют вдоль одной прямой и в сумме дают 0.

След-но, линии действия сил $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ имеют общую точку пересечения: