(7) Покажем сначала, что $[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n \hat{p}^{n-1}$

По индукции.

База при $n = 1$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] f(x) = [x, -i\hbar \tfrac{\partial}{\partial x}] f(x) = -i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(f x)\right) =$$
$$= i\hbar f(x)$$

Пусть верно при $n-1$: $[\hat{x}, \hat{p}^{n-1}] = i\hbar (n-1) \hat{p}^{n-2}$

Тогда для n:

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = \hat{p}^{n-1}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}^{n-1}]\hat{p} = \hat{p}^{n-1} i\hbar +$$
$$+ i\hbar(n-1)\hat{p}^{n-1} = i\hbar n \hat{p}^{n-1}$$

Теперь вернёмся к задаче:

$$[\hat{x}, F(\hat{p})] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n [\hat{x}, \hat{p}^n] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n n i\hbar \hat{p}^{n-1} = i\hbar \frac{\partial \hat{F}(\hat{p})}{\partial \hat{p}}$$

т.к. $F(\hat{p}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \hat{p}^n$, $\frac{\partial F(\hat{p})}{\partial \hat{p}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n n \hat{p}^{n-1}$

$[\hat{p}, G(\hat{x})]f = [-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, G(x)] f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} G(x) f(x) +$

$+ G(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x) = -i\hbar (G'f + Gf') + G i\hbar f' = -i\hbar G' f =$

$= -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x} f$

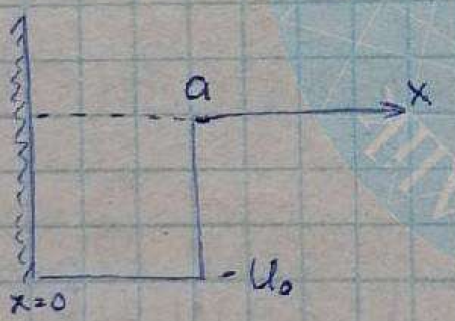
Откуда $[\hat{p}, G(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial G(\hat{x})}{\partial \hat{x}}$

Задача 2.

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Можем свести эту задачу к первой, т.к. в обоих

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + U(x)\psi = E\psi, \quad x > 0$$



Из 1 зад. решениями были ψ_- - нечётное и ψ_+ - чётное.

$\psi_-(0) = 0, \quad \psi_+(0) \neq 0.$

В нашей задаче $\psi(0) = 0 \hookrightarrow \psi_+$ не подходит.

Имеем следующее решение этой задачи:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} C\psi_-(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Воспользуемся условием нормировки, чтобы определить константу C:

$$1 = \int_0^\infty |\tilde{\Psi}(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^\infty |\Psi_-(x)|^2 dx = \frac{1}{2}|C|^2 \hookrightarrow C = \sqrt{2}$$

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\Psi_-(x), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

где $\Psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{\sin 2ka}{2ka} + \frac{\sin^2 ka}{\varkappa a}\right)^{-1/2} \cdot \begin{cases} \sin kx, & 0 < x < a \\ -e^{\varkappa a}\sin ka\, e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$

Уровни энергии $E_n = \frac{\hbar^2 x_n^2}{2ma^2} - U_0$, где x_n - решения ур-ия $-\mathrm{ctg}\, x = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$

Если $a = \mathrm{const}$, $U_0 \to 0$, то связанных сост. не останется.

<u>Задача 4.</u>

$$U(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha = \frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m} > 0$$

Это бесконечно мелкая яма, покажем это:

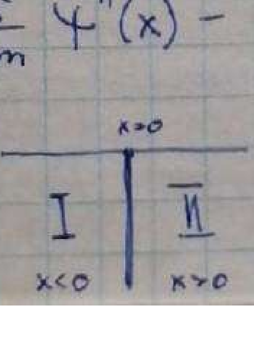
считаем, что $(U_0)_n a_n = \mathrm{const}$. Усл-ие мелк. ямы $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$

$$\underbrace{U_0 \cdot a}_{\mathrm{const}} \ll \frac{\hbar^2}{ma} \to \infty, \ a \to 0 \hookrightarrow \text{верно}$$

$\int_{-a}^{a} U(x)\,dx = -U_0 \cdot 2a = \mathrm{const}$ - чтобы получить δ-ф-цию для U, как у нас.

Значит у нас ∞ мелкая симметричн. яма $\hookrightarrow$ есть 1 связ. состояние

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - \alpha\delta(x)\Psi(x) = E\Psi(x) = -|E|\Psi(x) \qquad (*)$$



Будем рассм. 2 области: $x < 0$ - I
$x > 0$ - II

I: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = -|E|\psi(x)$

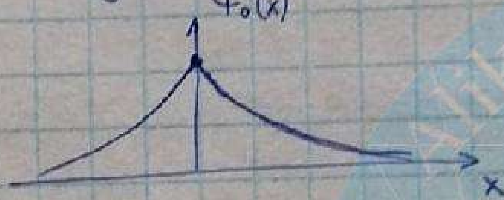
$$\psi''(x) = \varkappa^2\psi(x), \quad \text{где} \quad \varkappa = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

Решение есть $\psi(x) = \overset{0}{\tilde{A}} e^{-\varkappa x} + A e^{\varkappa x} = A e^{\varkappa x}$

II: Аналогично I $\hookrightarrow$ $\psi(x) = B e^{-\varkappa x}$

Исходя из того, что $\psi(x) \in C(x)$ $\hookrightarrow$ $\psi(+0) = \psi(-0)$ $\hookrightarrow$ $A = B$.

Тогда можно записать $\psi(x) = A e^{-\varkappa|x|}$.



Вычислим уровни энергии. Для этого восп-ся (*):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''(x)\,dx - \alpha\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)\,dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(+\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) - \alpha\psi(0) = E\cdot\psi(0)\cdot 2\varepsilon \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

Откуда получим скачок производной в 0:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

Подставим решение $\psi(x) = A e^{-\varkappa|x|}$:

$$-2\varkappa A = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A \hookrightarrow \varkappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2} = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

Получим $|E| = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ $\hookrightarrow$ $E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$

Константу A определим из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0|^2\,dx = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\varkappa|x|}\,dx = \frac{2A^2}{2\varkappa} = \frac{A^2}{\varkappa} \hookrightarrow A = \sqrt{\varkappa}$$

$\Psi_0(x) = \sqrt{\varkappa}\, e^{-\varkappa|x|}$ - волнов. ф-ция част. в коорд. представл.

- $\langle \hat{x} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi_0|^2 dx \underline{\underline{= 0}}$ (нечётн. ф-ция)

- $\langle \hat{x}^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\Psi_0(x)|^2 dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x\varkappa)^2 e^{-2\varkappa x}}{\varkappa^2} d(\varkappa x) =$

$= 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{(2x\varkappa)^2 e^{-2\varkappa x}}{4\varkappa^2 \cdot 2} d(2\varkappa x) = \frac{1}{4\varkappa^2} \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y} d\overset{2\varkappa x \equiv y}{y} =$

$= \frac{1}{4\varkappa^2} \left(-(y^2 + 2y + 2) e^{-y} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{4\varkappa^2} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{2\varkappa^2}}}$

- $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \overset{0}{\langle \hat{x} \rangle^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2\varkappa^2}}}$

- $\langle \hat{p} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(x) \right) dx = -i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varkappa|x|} \left(-\varkappa e^{-\varkappa|x|} \right) \operatorname{sign} x \, dx = 0$

(т.к. $\frac{\partial}{\partial x} e^{-\varkappa|x|} = \underline{\underline{-\varkappa e^{-\varkappa|x|} \operatorname{sign} x}}$

- $\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \Psi_0 | \overset{\text{т.к. } \hat{p}^+ = \hat{p}}{\hat{p}^+} \hat{p} | \Psi_0 \rangle = \langle \hat{p} \Psi_0 | \hat{p} \Psi_0 \rangle =$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p} \Psi_0(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hbar^2 \varkappa^3 e^{-2\varkappa|x|} \underbrace{(\operatorname{sign} x)^2}_{1} dx = \underline{\underline{\hbar^2 \varkappa^2}}$

- $\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \underset{0}{\hat{p}} \rangle^2 = \underline{\underline{\hbar^2 \varkappa^2}}$

$\langle (\Delta x)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}$ - соотн. неопр. вып-но

8 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$

пок-ть, что $\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2$

$\hat{A}^+ = \hat{A}$, $\hat{B}^+ = \hat{B}$. $(\Delta \hat{A})^+ = \Delta \hat{A}$, $(\Delta \hat{B})^+ = \Delta \hat{B}$

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle] = [\hat{A}, \hat{B}] -$$

$$- \cancelto{0}{[\underbrace{\langle\hat{A}\rangle}_{const}, \hat{B}]} - \cancelto{0}{[\hat{A}, \underbrace{\langle\hat{B}\rangle}_{const}]} + \cancelto{0}{[\langle\hat{A}\rangle, \langle\hat{B}\rangle]} = i\hat{C}$$

Рассмотрим $\hat{E} = \Delta\hat{A} - i\gamma\Delta\hat{B}$

$$\hat{E}^{+} = \Delta\hat{A} + i\gamma\Delta\hat{B}$$

$$\hat{E}\psi = \Phi$$

$$0 \leq \int \Phi^{*}\Phi\, d^{3}r = \int (\hat{E}\psi)^{*}(\hat{E}\psi)\, d^{3}r = \int \psi^{*}\hat{E}^{+}\hat{E}\psi\, d^{3}r =$$

$$= \int \psi^{*}(\Delta\hat{A} + i\gamma\Delta\hat{B})\cdot(\Delta\hat{A} - i\gamma\Delta\hat{B})\psi\, d^{3}r = \langle(\Delta\hat{A})^{2}\rangle +$$

$$+ \gamma^{2}\langle(\Delta\hat{B})^{2}\rangle + i\gamma[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = \langle(\Delta A)^{2}\rangle + \gamma^{2}\langle(\Delta\hat{B})^{2}\rangle + \gamma\langle\hat{C}\rangle$$

$$D = (\langle\hat{C}\rangle)^{2} - 4\langle(\Delta\hat{A})^{2}\rangle\cdot\langle(\Delta\hat{B})^{2}\rangle \leq 0$$

Откуда $\langle(\Delta\hat{A})^{2}\rangle\cdot\langle(\Delta\hat{B})^{2}\rangle \geq \dfrac{(\langle\hat{C}\rangle)^{2}}{4}$