XII. 7.19

Разложим y т. y_m^{n+1}. Получим:

$$\frac{4\tau y_t' - 2\tau^2 y_t'' + \frac{2}{3}\tau^3 y_t''' - 2\tau y_t' + 2\tau^2 y_{tt}'' - \frac{4}{3}\tau^3 y_t''' + O(\tau^4)}{2\tau} =$$

$$= 6\,\frac{2y_m^{n+1} + h^2 y_x'' - 2y_m^{n+1} + O(h^4)}{h^2}$$

$$y_t' - \frac{1}{3}\tau^2 y_t''' = 6 y_x'' + O(h^2) + O(\tau^3)$$

погрешн. аппрокс $\Delta = -\frac{1}{3}\tau^2 y_t'''$, пор. аппр. $O(\tau^2, h^2)$

XIV. 8.5

Дисперс. соотнош. $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $a \neq const$

Будем искать дисперс. соотнош. в виде $y_m^n = e^{\lambda(k)t_n} \cdot e^{ikx_m} = e^{\lambda n\tau + ikmh}$

Подставим в правый уголок: $\frac{1}{\tau}(e^{\lambda\tau} - 1) + \frac{a}{h}(1 - e^{-ikh}) = 0$

откуда $\lambda(\tau, h, k) = \frac{1}{\tau}\ln\left(1 - \frac{a\tau}{h} + \frac{a\tau}{h}e^{-ikh}\right)$

Сравним дисперсионное соотн. для дифф. и соотв. разностных ур-ий. Предположим $kh \ll 1$, h-малый параметр.

Тогда дисперс. соотнош. будет $\lambda(\tau, h, k) \approx -iak - \frac{ahk^2}{2}\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) =$

$= \lambda(k) - \frac{k^2}{2}ah(1 - 6)$, где $6 = \frac{a\tau}{h}$

Частное решение примет вид $e^{ik(mh - an\tau)} \cdot e^{-\frac{1}{2}ak^2(h - a\tau)n\tau}$

При $a<0$, $h-a\tau>0$ рассматрив. схему нельзя использовать для проведения расчётов. Аналогично $a>0$, $h-a\tau<0$

Если же $a>0$, $h-a\tau>0$, то второй сомножит. затухает с ростом t_n тем быстрее, чем больше k или меньше λ.

Таким образом, по схеме уголок получаем численное решение, отличающееся от точного наличием затухающ. множит. для гармоник с большими k или малыми λ.

Рассмотрим схему второго порядка - Лакса-Вендроффа:

$$\left(y_m^{n+1} - y_m^n\right) + \frac{\sigma}{2}\left(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n\right) = 0$$

Дисперс. соотнош. будет $\lambda = \frac{1}{\tau}\ln\left(1 - i\sigma\sin kh - 2\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}\right)$

Считая $kh \ll 1$, получим $\lambda(\tau, h, k) = -ika + ika\frac{k^2h^2}{6}(1-3\sigma^2)$

Решения дифф. ур-ия переноса имеют вид волн, кот. движ-ся вправо со скор. a: $u(t,x) = e^{ikx + \lambda(k)t} = e^{ik(x-at)}$

Решения разностного ур-ия II пор. апрокс. имеет вид:

$$y(t_n, x_m) = e^{ikx_m + \lambda(\tau,h,k)t_n} = e^{ik(x_m - a[1 - \frac{k^2h^2}{6}(1-3\sigma^2)]t_n)} =$$

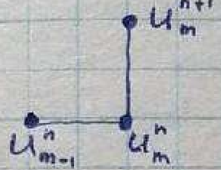
$$= e^{ik(x_m - a[1 + A_k(k)]t_n)}$$

Т.е. каждая волна со своей частотой движется с собств. скоростью $a_k = a(1+A_k)$.

Получаем потерю монот. профиля $u(x)$, появление осцилляций разностного происх-ия.

XIV. 9.2

Ур-ие переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = \psi(x)$

а) 

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}''$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h u_x' + \frac{h^2}{2} u_{xx}''$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

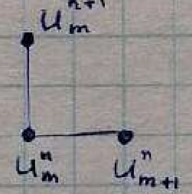
$$u_t' + \frac{\tau}{2} u_{tt}'' + u_x' - \frac{h}{2} u_{xx}'' = 0 \quad \text{пор. аппрокс. } O(\tau, h)$$

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} = 0 \hookrightarrow \lambda = 1 + \frac{\tau}{h}(e^{-i\varphi} - 1)$$

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \left|1 - \frac{\tau}{h} + \frac{\tau}{h} e^{-i\varphi}\right| < 1$$

устойчиво

б) 

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h u_x' + \frac{h^2}{2} u_{xx}''$$

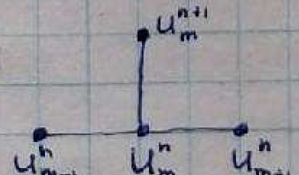
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

$$u_t' + \frac{\tau}{2} u_{tt}'' + u_x' + \frac{h}{2} u_{xx}'' = 0 \quad \text{пор. аппрокс. } O(\tau, h)$$

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} = 0 \hookrightarrow \lambda = 1 + \frac{\tau}{h}(-e^{i\varphi} + 1)$$

неустойчиво

в) 

из XII. 7.2 схема $O(h^2, \tau^2)$:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} \tau = 0.$$

$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{2h} + \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2h^2}\tau = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau}\tau + \frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2h}\tau + \frac{2 - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h^2}\tau^2$$

$$|\lambda| = \left|1 + i\frac{\tau}{h}\sin\varphi + \frac{\tau^2}{h^2} - \cos\varphi\right| < 1$$

если $\frac{\tau^2}{h^2} < 1$, то есть области устойчивости

г)