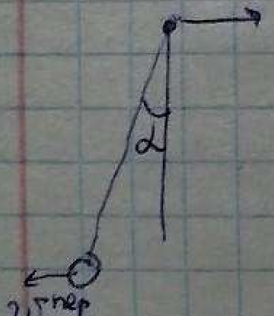
Задача 18.3



$$s = \frac{1}{2}at^2 + A\sin(\omega t)$$

в сист. отсчета $s = \frac{1}{2}at^2$ движ. маятн.

Исследовать резонанс

В неинерц. системе отсчета полож. равновесия маятника будет под углом α к вертикали

Найдём этот угол:

$$\begin{cases} mg = T\cos\alpha \\ mw^{пер} = T\sin\alpha \end{cases} \hookrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{w^{пер}}{g}$$

можно сказать $\cos\alpha = \dfrac{g}{\sqrt{\varpi_{пер}^2 + g^2}}$

отклонение от пол. равнов.

Для пот. энергии $\Pi = m\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2}\, l(1-\cos\beta)$

$$\Pi \approx m\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2}\, l\,\frac{\beta^2}{2}$$

$$T = \frac{m(l\dot{\beta})^2}{2} \qquad A = (ml^2) \quad C = (ml\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2})$$

Для обобщ. сил опять имеем рав-во моменту, значит $Q = -mA\omega^2 \sin\omega t\, l\cos\alpha$

Получим ур-ия:

$$l\ddot{\beta} + \frac{\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2}}{l}\cdot\beta = -\frac{mA}{l}\omega^2 \sin\omega t\cos\alpha$$

Решим сначала однородное ур-ие:

$$\beta_1 = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t,$$

здесь $\omega_0^2 = \dfrac{\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2}}{l} \approx \dfrac{g}{l}\left(1+\dfrac{\varpi_{пер}^2}{2g^2}\right)$, если $\varpi_{пер} \ll g$

Найдем частное реш. неодн. ур-ия

$$W = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} = \frac{1}{ml(\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2} - \omega^2 l)}$$

$$\beta^2_{част.} = -ml\,A\omega^2 \sin\omega t\cos\alpha\,|W| =$$

$$= -\frac{A\omega^2 \sin\omega t\cos\alpha}{\sqrt{g^2+\varpi_{пер}^2} - \omega^2 l} = -\frac{A\omega^2 g\,\sin\omega t\; ml}{\sqrt{\varpi_{пер}^2+g^2}\cdot ml^2|(\omega_0^2-\omega^2)|}$$

$\cos\alpha = \dfrac{g}{\sqrt{\varpi^2+g^2}}$

Итого $\beta_2^{част.} = -\dfrac{A\omega^2 g \sin\omega t}{l^2\omega_0^2\cdot|\omega_0^2-\omega^2|}$

Тогда общее решение есть $\beta = \beta_1 + \beta_2^{част.} =$

$= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t - \dfrac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2|\omega_0^2-\omega^2|}$

Если у нас резонанс, то решение ищем в виде $\beta' = bt\cos\omega_0 t$

$-2b\omega_0\sin\omega_0 t = -\dfrac{A\omega_0^2\sin\omega_0 t\cos\alpha}{l}$

(другое сократится)

$b = \dfrac{A\omega_0\cos\alpha}{2l} = \dfrac{A\omega_0 g}{2\omega_0^2 l^2} = \dfrac{Ag}{2\omega_0 l^2}$

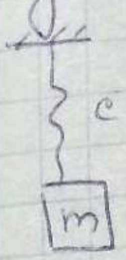
Общее решение $\beta = C_1'\cos\omega_0 t + C_2'\sin\omega_0 t +$
$+\dfrac{Agt\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0 l^2}$

Ответ: $\varphi = \alpha + \beta = +\operatorname{arctg}\dfrac{a}{g} + C_1\cos\omega_0 t +$
$+ C_2\sin\omega_0 t - \dfrac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2|\omega_0^2-\omega^2|}$

Резонанс:

$\varphi = \alpha + \beta' = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{g} + C_1'\cos\omega_0 t + C_2'\sin\omega_0 t +$
$+\dfrac{Agt\cos\omega_0 t}{2\omega_0 l^2}$

Задача 18.17



$F = -\beta \dot{x}$

$Q(t) = \sum_k A_k \sin(k\omega t)$

а) $\beta \neq 0$ б) $\beta = 0,\ k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$

в) $\beta = 0,\ k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Энергия системы: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$\Pi = \frac{c x^2}{2} - mgx$

Составим ур-ие Лагранжа

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = \sum_k A_k \sin(k\omega t) \qquad (*)$$

Сначала решим однородное:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$$

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0 \qquad \lambda = \frac{-\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$$

Для удобства анализа $2h = \frac{\beta}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

Может быть неск. случаев: $h^2 - \omega_0^2 > 0$ и < 0, $= 0$

1) $\omega_n^2 = h^2 - \omega_0^2 > 0$

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

$$X_1 = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}$$

2) $\omega_h^2 = h_0^2 - \omega_0^2 = 0$

$\lambda = -h$

$x_1 = (C_3 t + C_4) e^{-ht}$

3) $\omega_h^2 = h^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \hookrightarrow \quad \lambda = -h \pm i\omega_h$

$x_1 = e^{-ht}(C_5 \cos(\omega_h t) + C_6 \sin(\omega_h t))$

Теперь ищем частное решение неоднородного ур-ия в нерезонансном случае

$$x_2 = \sum_k A_k |W_k| \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad (\varphi_k = \arg W_k)$$

$$W_k = (-mk^2\omega^2 + i\beta k\omega + c)^{-1} = \frac{c - mk^2\omega^2 - i\beta k\omega}{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2(k\omega)^2}$$

$$\varphi_k = \arg W_k = -\operatorname{arctg} \frac{\beta k\omega}{c - mk^2\omega^2}$$

В наших обозначениях $\varphi_k = -\operatorname{arctg} \dfrac{2hk\omega}{\omega_0^2 - k^2\omega^2}$

$$|W_k| = \frac{1}{\sqrt{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2 k^2\omega^2}} = \frac{((\omega_0^2 - k^2\omega^2)^2 + (2hk\omega)^2)^{-1/2}}{m}$$

Переобозначим $|W_k| = \dfrac{H_k}{m}$

Тогда решение нашего ур-ия есть

$x = x_1 + x_2$.

а) $\beta \neq 0$. Рассмотрен.

б) $\beta = 0$. Тогда $h = 0$

$k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$

Для этого случая получим

$$x_1 = C_5' \cos\omega_0 t + C_6' \sin\omega_0 t$$

$$x_2 = \sum_k{}' A_k \sin(k\omega t) \cdot \frac{1}{m\,|\omega_0^2 - k^2\omega^2|} \qquad \varphi_k = 0$$

в) $\beta = 0$, $k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Это случай резонанса. Частное реш-ие ищем в виде $x_3 = bt\cos(\omega_0 t)$, $\varphi_k = 0$

$$m(-b\omega_0^2 \cos\omega_0 t \cdot t - \omega_0 b \sin\omega_0 t \cdot 2) +$$

$$+ c\, b\cancel{t\cos\omega_0 t} = A_k \sin k\omega t$$

т.к. $c = mk^2\omega^2 = m\omega_0^2$, то сократим

$$b = -\frac{A_k}{2m \cdot \omega_0}$$

$$x_3 = -\frac{A_k t \cos\omega_0 t}{2m\omega_0}$$

Соотв-но $x_1 = C_5'' \cos\omega_0 t + C_6'' \sin\omega_0 t$

$$X = x_1 + x_3 + \sum_{k \neq \frac{\omega_0}{\omega}}{}' \frac{A_k}{m} \frac{\sin k\omega t}{|\omega_0^2 - k^2\omega^2|}$$

Ответ:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \qquad 2h = \frac{\beta}{m} \qquad R_k = \left(\sqrt{(\omega_0^2 - k^2\omega^2) + (2hk\omega)^2}\right)^{-1}$$

$$\varphi_k = -\operatorname{arctg}\frac{2hk\omega}{\omega_0^2 - k^2\omega^2}$$

Далее константы C_i можно найти

из нач. условий.

а) $\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 > 0$:

$$x = e^{-ht}(C_5 \cos\omega_n t + C_6 \sin\omega_n t) + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 = 0$

$$x = (C_3 t + C_4) e^{-ht} + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$\omega_n^2 = \omega_0^2 - h^2 < 0$:

$$x = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + \sum_k{}' \frac{A_k R_k}{m} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

б) $$x = C_5' \cos\omega_0 t + C_6' \sin\omega_0 t + \sum_k{}' \frac{A_k \sin k\omega t}{m|\omega_0^2 - k^2\omega^2|}$$

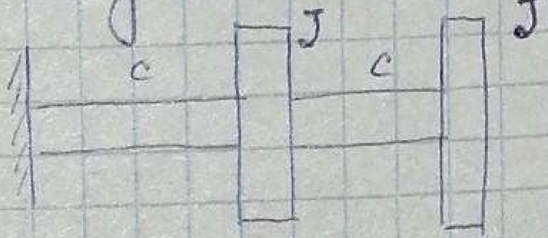
в) $$x = C_5'' \cos\omega_0 t + C_6'' \sin\omega_0 t + \sum_{k \neq \frac{\omega_0}{\omega}}{}' \frac{A_k \sin k\omega t}{m|\omega_0^2 - k^2\omega^2|} - \frac{A_{k = \frac{\omega_0}{\omega}}\, t \cos\omega_0 t}{2m\omega_0}.$$

Задача 18.31

$M_1 = M_0 \sin(\omega t)$

$M_2 = -\beta \dot{\varphi}_2$

АФХ - ?



Посчитаем энергию:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}_2^2}{2} \hookrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c\varphi_1^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{c}{2}\left(2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$$

Подсчитаем обобщенные силы:

$$Q_k = \frac{\delta A}{d\varphi_k} = \frac{M_k \, d\varphi_k}{d\varphi_k} = M_k$$

Тогда матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, т.к. $M_2 = -\beta\dot{\varphi}_2$

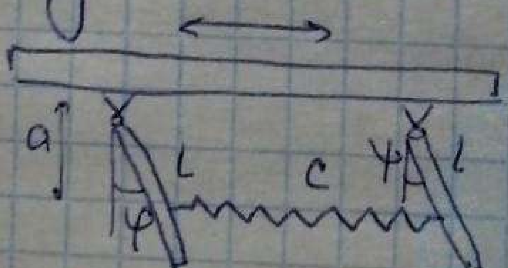
$$A\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(\omega) = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -J\omega^2 + 2c & -c \\ -c & -J\omega^2 + c + i\omega\beta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Delta = (2c - J\omega^2)(c + i\omega\beta - J\omega^2) - c^2$$

$$W_{11} = \frac{c + i\omega\beta - J\omega^2}{\Delta} \qquad W_{12} = \frac{c}{\Delta} \qquad W_{22} = \frac{2c - J\omega^2}{\Delta}$$

Задача 18.37



$A \sin(pt)$ Движ. системы -?

Посчитаем энергию системы в СО связ. с доской:

$$T_{отн} = \frac{J}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) = \frac{ml^2}{6}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)$$

$$\Pi = \frac{c}{2}(a\sin\varphi - a\sin\psi)^2 + mg\,l/2\,(1-\cos\varphi) +$$

$$+ mg\,l/2\,(1-\cos\psi) \approx \frac{mgl}{4}\cdot(\varphi^2+\psi^2) + \frac{ca^2}{2}(\varphi-\psi)^2 =$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) + \frac{\psi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) - ca^2\varphi\cdot\psi$$

Соответственно матрицы:

$$A = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} mg\,l/2 + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & mg\,l/2 + ca^2\end{pmatrix}$$

Подсчитаем обобщ. силы (как в 18.31, они равны соотв. моментам):

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{l}{2}\cdot(-mw^{пер}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{l}{2}\cdot p^2 mA\sin pt$$

1) решение общее однородн. ур-ия.

Из системы видно, что амплитудные вектора есть $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\omega_1^2 = \frac{u_1^T C u_1}{u_1^T A u_1} = \frac{mgl}{2ml^2/3} = \frac{3g}{2l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{u_2^T C u_2}{u_2^T A u_2} = \frac{mgl + 4ca^2}{2ml^2/3} = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$$

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

общ. решение однор. ур-ия

Для поиска частного реш перейдем к норм. коорд. Для этого сначала отнормируем $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$:

$u_1^T A u_1 = 1$

т.е. $\alpha (1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \alpha \cdot \frac{ml^2}{3} = 1$

$\frac{2}{3}\alpha^2 m l^2 = 1 \hookrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}$

т.е. новые $\vec{U}_1 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

Обобщ. силы в норм. координатах

$\bar{\Theta}^{\text{ин}} = (\bar{u}_1\ \ \bar{u}_2)^T\ \bar{Q}^{\text{ин}} = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\frac{l}{2} m p^2 A \sin pt$

$= A m p^2\sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\begin{pmatrix}l\\ 0\end{pmatrix}\sin pt = A m p^2\sqrt{\frac{3}{2m}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin pt$

В норм коорд ур-ия Лагранжа:

$$\begin{cases}\ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2\Theta_1 = A p^2 \sin pt\sqrt{\frac{3m}{2}}\\ \ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2\Theta_2 = 0\end{cases}$$

Частное решение для Θ_1: $\Theta_1(t) = b\sin pt$

$-b p^2 \sin pt + \omega_1^2 b \sin pt = A\sqrt{\frac{3m}{2}} p^2 \sin pt$

$b = \frac{p^2 A}{\omega_1^2 - p^2}\sqrt{\frac{3m}{2}}$

тогда

$\alpha_{\text{час.}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\cdot\begin{pmatrix}b\sin pt\\ 0\end{pmatrix} =$

$$= \frac{3Ap^2}{2l(\omega_1^2 - p^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt = \frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt$$

$= D$

Ответ: $$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D \sin pt$$

где $\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}$ $\omega_2^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$ $D = \frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2}$

Задача 18.62

$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j$

$\omega_1, \quad \vec{u}_1 (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}) \qquad Q_i = a_{ij} u_{j1} f_0 \sin(\omega t) \quad i = \overline{1, n}$

$\omega_{рез.}$ - ?

Матрица $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$A \ddot{\bar{q}} + \underset{0}{\cancel{B}} + C \bar{q} = \bar{Q}$

Для резонанса надо, чтобы $\bar{q}(t) \to \infty$, $t \to \infty$

Запишем в норм. коорд. ур-ие

$\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i = \bar{u}_i^T \vec{Q}$, где $Q = f_0 A \vec{u}_1 \sin \omega t$

Во всех случаях при $i \neq 1$ $\quad \bar{u}_i^T \bar{Q} = \underbrace{\bar{u}_i^T A \bar{u}_1}_{0} f_0 \sin \omega t$

то есть получ. $\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i = 0$ - частн. реш. $= 0$
рез-са нет

А для $i=1$ получим:

$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2 \Theta_1 = \vec{u}_1^T A \vec{u}_1 f_0 \sin\omega t = f_0 \sin\omega t$$

(т.к. можем отнормир. $\vec{u}_1$)

Частное реш. ищем в виде $\Theta = b \sin\omega t$

$$-b\omega^2 \sin\omega t + \omega_1^2 b \sin\omega t = f_0 \sin\omega t$$

$$b = \frac{f_0}{\omega_1^2 - \omega^2} \hookrightarrow \Theta = \frac{f_0 \sin\omega t}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

Тогда $q_{част} = \vec{u}_1 \dfrac{f_0 \sin\omega t}{\omega_1^2 - \omega^2} \to \infty,\ \omega_1 = \omega$

Для $\omega_1 = \omega$ получим рез-с.

Ответ: рез-с возможен при $\omega = \omega_1$