(Т3)

① Поточечная сх-сть: $\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow$
$\hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

② Равномерная сх-сть: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \forall x \in [a,b] \hookrightarrow$
$\hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

③ Сх-сть по норме L_2: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} = 0$

④ Сх-сть по норме L_1: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$

• Понятно, что из $2 \to 1$, т.к. в 2 $n = n(\varepsilon)$, а в 1 $n = n(x, \varepsilon)$, т.е. 2 - более сильное утверждение

• Из $1 \not\to 2$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Т.е. предельная $f(x) = 1,\ x \neq 0$; $f(x) = 0,\ x = 0$

Ясно, что есть поточечная сх-сть. Но нет равномерной, т.к. предельная ф-ция разрывна, а этого в случае равномерной сх-сти не может быть

• Покажем, что из $3 \to 4$

Будем использовать нер-во Коши-Буняковского в интегральной форме:

$$\int_a^b |g_1(x)|\cdot|g_2(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b g_1^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g_2^2(x)dx}$$

Положим $g_1(x) \equiv 1$, $g_2(x) = f_n(x) - f(x)$

Получим, что

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2}\cdot(b-a)$$

Переходя к пределу в нер-ве получим, что из 4 → 3.

• Из 4 ↛ 3

контрпример $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}}$

Предельная ф-ция $f(x) = 0$. Есть сх-сть по норме L_1, но если рассмотреть отрезок $[0, 1]$, то интеграл будет расходиться и сх-сти по норме L_2 не будет.

• Покажем, что из 2 → 3:

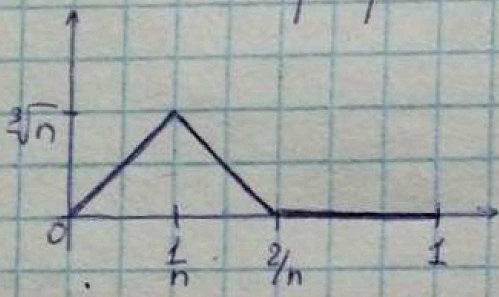
Используя равномерную сх-сть, получим, что

$$\sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b \varepsilon^2 dx} = \varepsilon\cdot\sqrt{b-a}$$ и все

это $\forall \varepsilon > 0$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} = 0$ в случае равномерной сх-сти. Получим нужное.

• Из $3 \not\to 2$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} n^{4/3}x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ -n^{4/3}x + 2\sqrt[3]{n}, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} < x \le 1 \end{cases}$



$$\sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\int_0^{1/n} n^{8/6} x^2\,dx \cdot 2} = \sqrt{\frac{n^{4/3}\cdot 1}{3\cdot n^3}\cdot 2} \to 0,\ n\to\infty$$

(предельная ф-ция $f(x) = 0$)

Т.е есть сх-сть по норме L_2.

Но равномерной сх-сти нет, т.к. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sqrt[3]{n} \not\to 0$, т.е. не вып-ся необх. усл-ие равномерной сх-сти.

• Из $3 \not\to 1$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} -n^{4/3}x + \sqrt[3]{n}, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

Аналогично предыдущему

$\sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{n^{4/3}\cdot 1}{3\cdot n^3}} \to 0,\ n\to\infty$ и есть сх-сть по норме L_2.

Но если для поточечной сх-сти возьмем $x = 0$, то $f_n(0) = \sqrt[3]{n} \to \infty$, $n\to\infty$ значит нет поточ. сход-сти (т.к. нет конечн. предела)

• Из $4 \nrightarrow 1$:

Возьмём тот же пример, что и в $3 \nrightarrow 1$.

Т.к. есть сх-сть по норме L_2, то по уже доказанному есть сх-сть по норме L_1 ($3 \to 4$)

Но нет поточечной. Значит $4 \nrightarrow 1$.

• Из $1 \nrightarrow 3$:

контрпример $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^3}$

Она сх-ся поточечно к $f(x) = 0$ на $\mathbb{R}$

Посмотрим на сх-сть по норме L_2 на отр. $[0,1]$

$$\sqrt{\int_0^1 \frac{n^4x^2}{(1+n^3x^3)^2}\,dx} \overset{t=nx}{=\!=} \sqrt{\int_0^n \frac{n^2t^2}{(1+t^3)^2}\,\frac{dt}{n}} \geqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{n\,t^2}{(1+t^3)^2}\,dt} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{n\,t^2}{(1+1)^2}\,dt} = \sqrt{\int_0^1 \frac{n\,t^2}{4}\,dt} = \sqrt{\frac{n\,t^3}{12}\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{n}{12}} \nrightarrow 0,\ n\to\infty$$

Т.е. нет сх-сти по норме L_2.

• Из $1 \nrightarrow 4$:

Возьмём тот же пример $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^3}$

Есть поточечная сх-сть к $f(x)=0$, но по норме L_1 на $[0,1]$

$$\int_0^1 \left|\frac{n^2x}{1+n^3x^3}\right| dx \overset{t=nx}{=\!=} \int_0^n \frac{t}{1+t^3}\,dt \geqslant \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2 \nrightarrow 0,\ n\to\infty$$

т.е. нет сх-сти по норме L_1

§18.97) Док-ть, что подпр-во непрер. дифф. ф-ций пр-ва $C[a,b]$ с метрикой
$$\rho(x,y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \quad x, y \in C[a,b]$$
не явл-ся полным.

Для этого достаточно найти фундамент. посл-сть, которая сх-ся не к непрер. дифф. ф-ции.

Возьмём $|x|$. Его ряд Фурье есть
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad где \quad |a_k| \leq \frac{C}{k^2}.$$

Значит ряд сх-ся равномерно и посл-сть частичных сумм непр. дифф. Но сх-ся к $|x|$, кот. не явл-ся непрер. дифф. в т. 0.

Чтобы эта точка (в кот. $|x|$ не дифф.) лежала в $[a,b]$, то возьмём не $|x|$, а $|x - c|$, где $c \in (a,b)$.

Поэтому подпр-во непр. дифф. ф-ций пр-ва $C[a,b]$ не явл-ся полным.