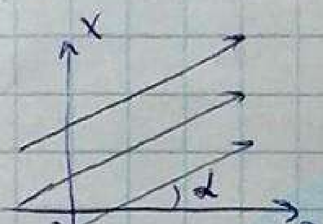
Задача 1°

Дано:

α, λ

E, I в $z=0$?



$$E = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} =$$

$$= \underbrace{E_0 e^{i(kx\sin\alpha + kz\cos\alpha)}}_{\hat{E}_0} \cdot e^{-i\omega t}$$

Для $z=0$ получим:

$$\hat{E}_0 = E_0 e^{ikx\sin\alpha} = E_0 e^{i\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\alpha}$$

$$I = \overline{E\cdot E^*} = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0^2$$

Разность фаз $kL\cos\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}L\cos\alpha$

Задача 2°

A, $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$

простр. частоты - ?
амплит. - ?

$$A\tau(x) = A\cos^2(\Omega x) = A\left(\frac{1+\cos 2\Omega x}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos(2\Omega x) =$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{4}e^{i2\Omega x} + \frac{A}{4}e^{-i2\Omega x}$$

Простр. частоты: 2Ω и 0, амплитуды: $\frac{A}{2}$ и $\frac{A}{4}$.

Задача 3°

b

$\Delta k_x - ?$

Для щели $I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$

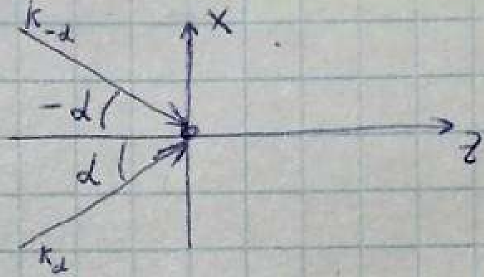
где $u = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$

$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{b} = \frac{\Omega_{min}}{k} \qquad b\,\Omega_{min} = \lambda k = 2\pi = const$

$$\underbrace{\Delta k_x}_{\equiv\, \Delta\Omega_{min}} \cdot \overbrace{\Delta x}^{= b} = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \Delta k_x = \frac{2\pi}{b}$$ - ширина спектра

9.1

1, a
0, α, $-\alpha$
V - ?



Сумма трёх волн даёт:

$$A_c(x,z) = e^{ikz} + a\,e^{i(ux+\sqrt{k^2-u^2}\,z)} + a\,e^{i(-ux+\sqrt{k^2-u^2}\,z)} =$$

$$= e^{ikz} + a\,e^{i(ux+kz\cos\alpha)} + a\,e^{i(-ux+kz\cos\alpha)}$$

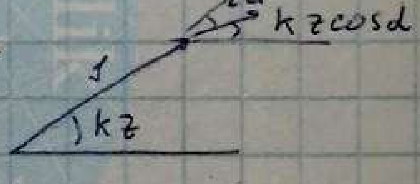
Для $z=0$:

$$A_c(x,0) = 1 + a\,e^{iux} + a\,e^{-iux} = 1 + 2a\cos(ux)$$

Найдём плоскости, в кот. контраст max и min:

Имеем $A_c(x,z) = e^{ikz} + e^{ikz\cos\alpha}\cdot 2a\cos(ux)$

это сумма двух векторов



Разность фаз векторов

$$\Delta\varphi = kz(1-\cos\alpha)$$

Экстремумы будут там, где $\Delta\varphi = \pi n$. При $x=0$ для чётного n будут max, для нечётн. – min

$$z_n = \frac{\pi n}{k(1-\cos\alpha)} = \frac{n\frac{\lambda}{2}}{1-\cos\alpha}$$

На экране получим чередование max и min при изменении x.

$(a^2 \approx 0)$

$$V_{max} = \frac{A_{max}^2 - A_{min}^2}{A_{max}^2 + A_{min}^2} = \frac{(1+2a)^2-(1-2a)^2}{(1+2a)^2+(1-2a)^2} \approx 4a$$

Плоскости, в кот. амплитуда почти не мен-ся,

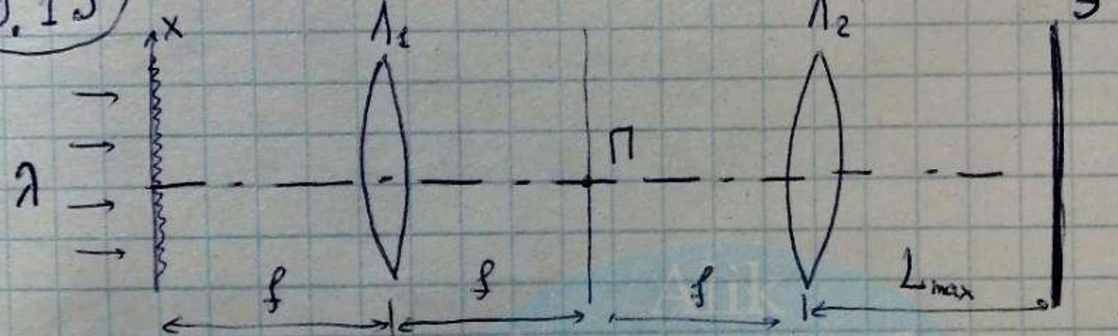
т.е. $V=0$ задаются $\Delta\varphi = \pi n + \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$z_n = \frac{\frac{\pi}{2}(2n+1)}{k(1-\cos\alpha)} = \frac{n\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4}}{1-\cos\alpha}.$$

Ответ: $V_{max} = 4a$ при $z = \dfrac{n\frac{\lambda}{2}}{1-\cos\alpha}$

$V_{min} = 0$ при $z = \dfrac{n\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4}}{1-\cos\alpha}$

9.15



$\nu = 20$ МГц

ΔL - ?

L_{max} - ?

$D = 4$ см

$v = 1{,}5$ км/с

$\lambda = 0{,}5$ мкм

Период стоячей волны (фаз. реш.)

$$d = \frac{v_{зв}}{\nu} = 75 \text{ мкм}$$

Проволочка „убирает" центр. волну и остаётся только $\frac{\alpha}{2}e^{i\Omega x} + \frac{\alpha}{2}e^{-i\Omega x}$

$$g(x) = \frac{\alpha}{2}e^{i\Omega x} + \frac{\alpha}{2}e^{-i\Omega x} = \alpha\cos\Omega x$$

$$gg^* = \alpha^2\cos^2\Omega x = \frac{\alpha^2}{2}(1+\cos 2\Omega x)$$

Откуда $2\Omega \underset{\Delta L}{x} = 2\pi$ - период $\hookrightarrow \Delta L = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{k\sin\gamma} = \frac{\lambda}{2\sin\underset{d}{\gamma}} = \frac{d}{2}$

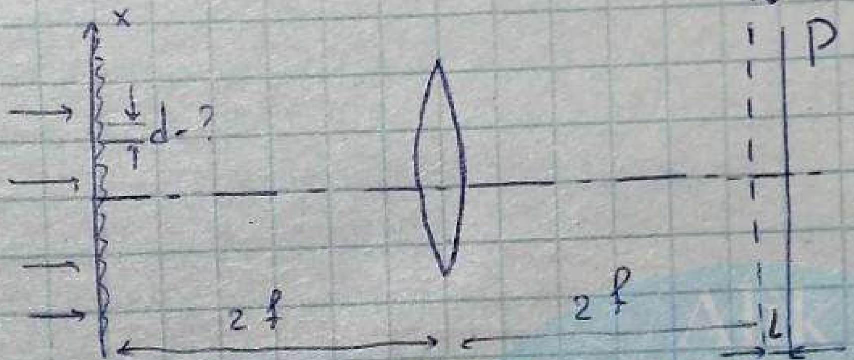
$$L_{max} = \frac{D/2}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{D}{2\gamma} = \frac{D}{2}\cdot\frac{d}{\lambda} = 300 \text{ см}$$

$\Delta L = 37{,}5$ мкм

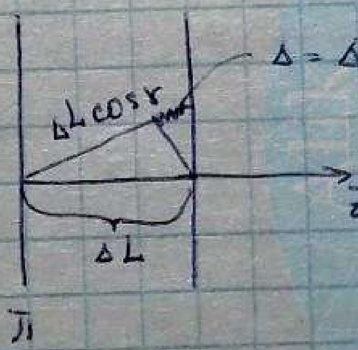
9.22

$L = L_1 = \Delta L$ — перв. контр. из.

L_m - ?



Три волны: $0, \pm \frac{\lambda}{d}$.



$\Delta = \Delta L - \Delta L \cos\gamma = 2\Delta L \sin^2\frac{\gamma}{2}$

Разность фаз:

перв. контр. изобр.

$$k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta L \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{\lambda}\Delta L \frac{\lambda^2}{d^2} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \Delta L_1 = \frac{d^2}{2\lambda}$$

Откуда $d = \sqrt{2\lambda\Delta L_1}$

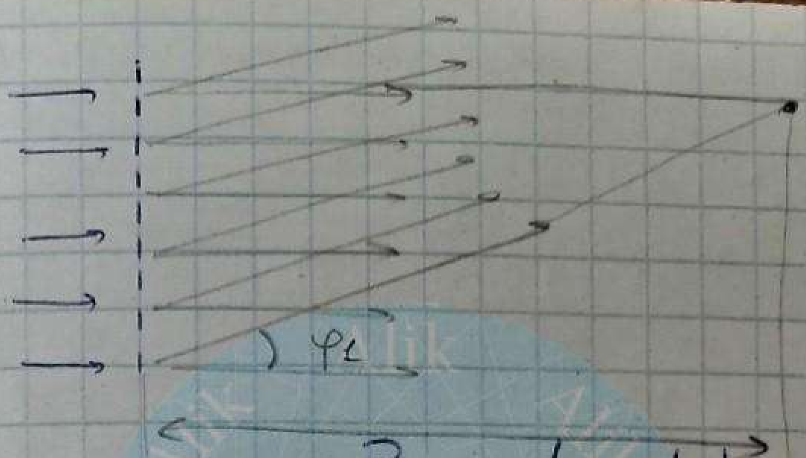
В общем случае

$$kL(1-\cos\gamma) = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_m = \frac{d^2}{\lambda}\left(m + \frac{1}{2}\right) = \Delta L(2m+1)$$

9.26

L, d, λ



$d\sin\varphi = m\lambda$

$\varphi_1 = \frac{\lambda}{d}$

$z_{max} = \frac{L}{\varphi_1} = \frac{Ld}{\lambda}$

Плоскости саморепродукции

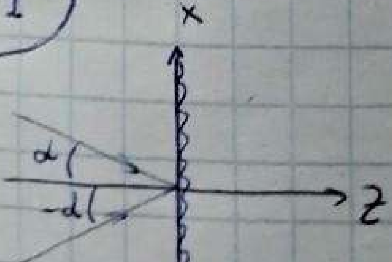
Разность фаз: $kz_m - kz_m\cos\varphi_1 = kz_m(1-\cos\varphi_1) =$

$= \frac{2\pi}{\lambda} z_m \frac{\lambda^2}{2d^2} = \frac{\pi z_m \lambda}{d^2} = 2\pi m$

Откуда $z_m = \frac{2d^2}{\lambda} m$; $\Delta z = \frac{2d^2}{\lambda}$

Значит $N = \frac{z_{max}}{\Delta z} = \frac{L\cancel{d}}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{2d^{\cancel{2}}} = \frac{L}{2d}$

9.11



$\lambda = 600$ нм, A_0, $\alpha = \pm 0{,}06$ рад

$\tau(x) = (1 + \sin \Omega x)/2$ $\quad d = 10^{-3}$ см

простр. спектр - ?

Для волн

$$k_x = k \sin\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\alpha = 2\pi \cdot 10^{3}\ \text{см}^{-1}$$

Для решетки

$$\Omega = \frac{2\pi}{d} = 2\pi \cdot 10^{3}\ \text{см}^{-1} \quad \to \quad \Omega = k \sin\alpha$$

Значит $\tau(x) = \left(1 + \dfrac{e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x}}{2i}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$

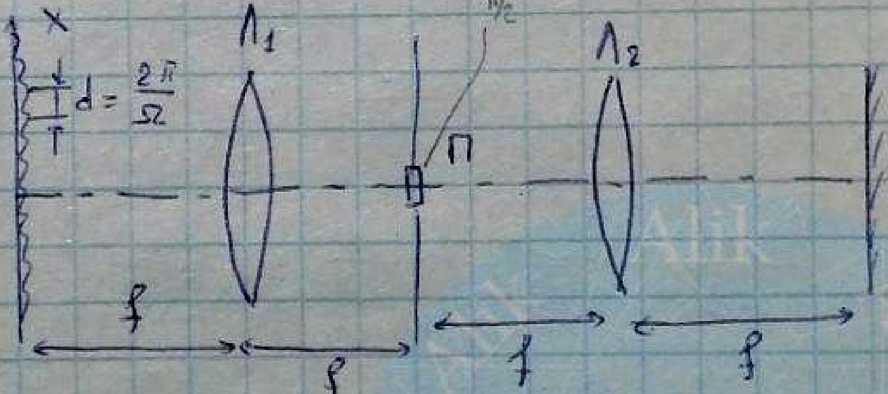
Подсчитаем результирующее поле от двух падающ. на решетку волн:

$$\left(A_0 e^{i\Omega x} + A_0 e^{-i\Omega x}\right)\tau(x) = \left(A_0 e^{i\Omega x} + A_0 e^{-i\Omega x}\right)\left(1 + \frac{e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x}}{2i}\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= A_0\left(\frac{1}{2} e^{i\Omega x} + \frac{1}{4} e^{i\left(2\Omega x - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} e^{-i\Omega x} + \frac{1}{4} e^{-i\left(2\Omega x - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

За решеткой распр-ся 4 плоские волны в направл. $k \sin\Theta = \pm\Omega$ и $\pm 2\Omega$

9.17



$$\tau(x) = e^{im\cos\Omega x}, \quad m \ll 1$$

$$e^{im\cos\Omega x} = 1 + \frac{im}{2}\left(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}\right) \longrightarrow g(x) = i\left(1 + \frac{m}{2}\left(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}\right)\right.$$

$$= i(1 + \cos\Omega x \cdot m)$$

$$I = gg^* = (1 + m\cos\Omega x)^2 = 1 + 2m\cos\Omega x +$$

$$+ \cancelto{0}{m^2\cos^2\Omega x} = 1 + 2m\cos\Omega x$$

Если пластинка в $\frac{3\pi}{2}$, то $I = 1 - 2m\cos\Omega x$

9.28

$\tau_1(x) = (1+\cos\Omega x)\cdot\frac{1}{2}$

$\tau_2(x) = e^{im\cos\Omega x}$, $m \ll 1$

Как изм-ся отнош. интенс. волн, дифр. в ±1 пор., если сдв. 1 реш. вдоль оси x на четв. периода?
Разн. фаз в ±1 пор. -?

$$\tau_1(x) = \left(1 + \frac{e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\tau_2(x) = 1 + \frac{im}{2}\left(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}\right)$$

Ф-ция пропускания составной решётки:

$$T(x) = \tau_1(x)\cdot\tau_2(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-i\Omega x}\right)\left(1 + \frac{im}{2}e^{i\Omega x} + \frac{im}{2}e^{-i\Omega x}\right)$$

После сдвига:

$$T(x) = \tau_1(x-\Delta x)\cdot\tau_2(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{i\Omega(x-\Delta x)} + \frac{1}{4}e^{-i\Omega(x-\Delta x)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{im}{2}e^{i\Omega x} + \frac{im}{2}e^{-i\Omega x}\right)$$

$$\Delta x = \frac{d}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{2\Omega}$$

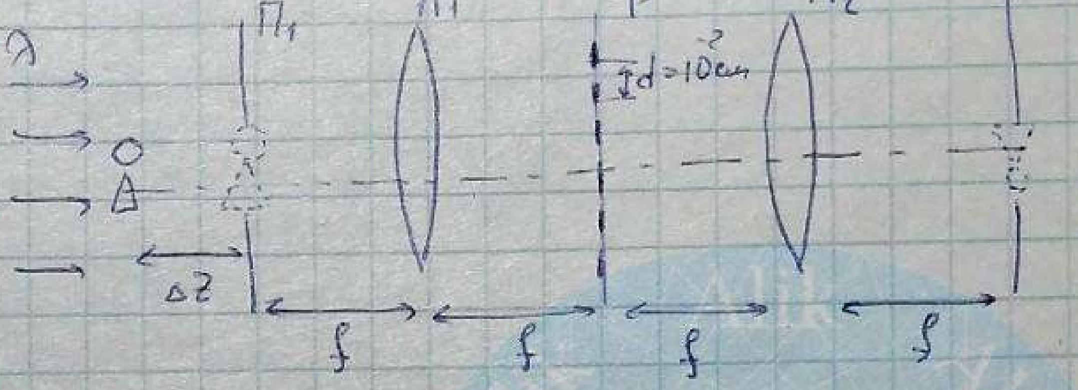
$$T_{+1}(x) = \frac{im}{4}e^{i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{4}(1-m)\,e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})}$$

$$T_{-1}(x) = \frac{im}{4}e^{-i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{4}(1+m)\,e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{I_+}{I_-} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \qquad \Delta\varphi = 0$$

Ответ: $\frac{I_+}{I_-} = 1 - 4m$, $\Delta\varphi = 0$.

9.79



Δz_{min} - ?

$f = 10$ см

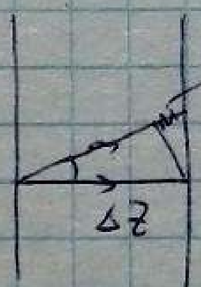
$\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см

На щелях реш. волны

$$\sin \alpha_m = m \frac{d}{f} \longrightarrow \alpha = \frac{d}{f}$$

$$\Omega_m = k \sin \alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{md}{f}$$

Набег фазы



$$\Delta = \Delta z (1 - \cos \alpha)$$

$$\Delta \varphi = k \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} \Delta z \frac{d^2}{\cancel{2} f^2} = \frac{\pi d^2}{\lambda f^2} \Delta z$$

$\Delta \varphi = 2\pi$ для самореп.

$$\Delta z = \frac{2 \lambda f^2}{d^2} = \underline{\underline{100 \text{ см}}}$$