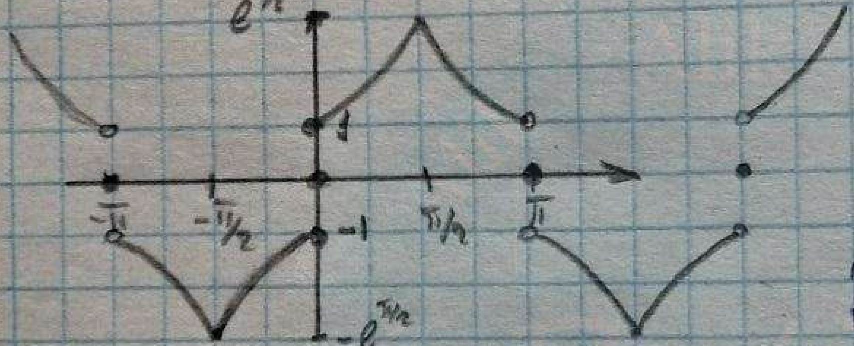
(T1) $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi/2]$

а) по системе $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $a_k = 0$, то $f(x)$ нечётная и т.к. $b_{2n} = 0$, то

$f(\pi - x) = f(x)$ – в силу 65(2):



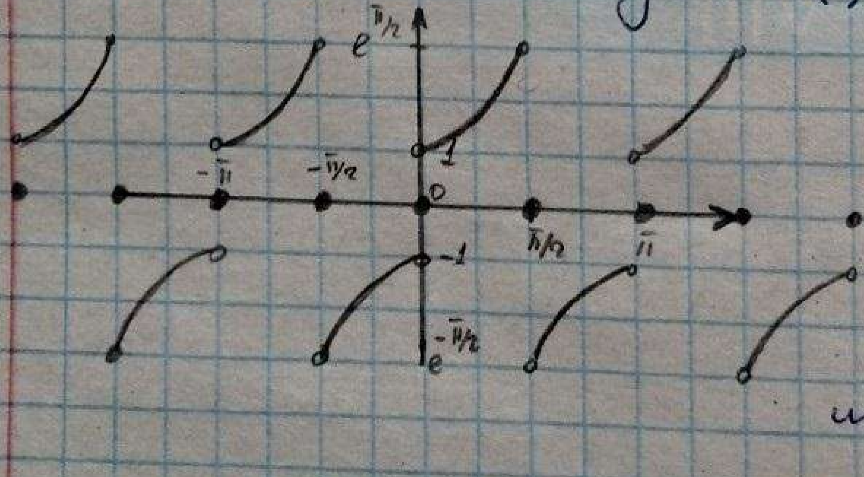
– график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть точки разр.

б) по системе $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $a_k = 0$, то $f(x)$ нечётная и т.к. $b_{2n-1} = 0$, то

$f(x) = -f(\pi - x)$ – в силу 72(1):



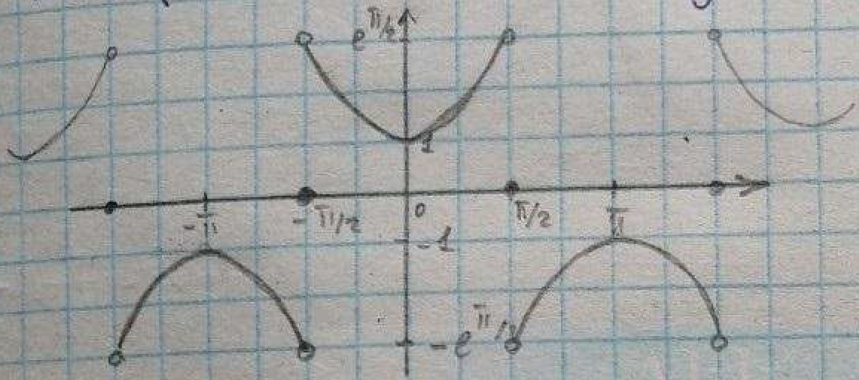
– график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть точки разр.

в) по системе $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $b_k = 0$, то $f(x)$ чётная и т.к. $a_{2n} = 0$,

то $f(x+\pi) = -f(x)$ - показали в 65(1):



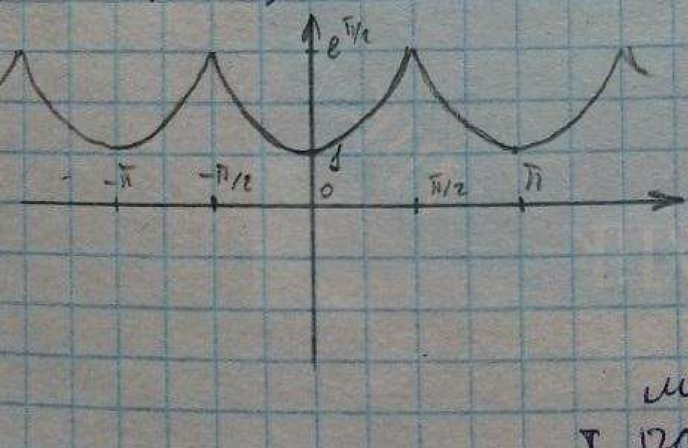
- график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть т. разр.

г) по системе $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$

т.к. $b_k = 0$, то $f(x)$ чётная и т.к. $a_{2n-1} = 0$,

то $f(\pi - x) = f(x)$ - в силу 65(1):



- график суммы ряда

Ряд сх-ся равномерно, т.к. в каждой т. равен ф-ции $f(x)$

Можем показать это:

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{x}\cos 2nx\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}(e^{-x}+\pi)\cos 2nx\,dx}_{I_2}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos 2nx\,dx = \int_0^{\pi/2} e^x\, d\,\frac{\sin 2nx}{2n} =$$

$$= \overset{0}{\cancel{\frac{\sin n2x}{2n}\, e^x \Big|_0^{\pi/2}}} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{2n}\, e^x\,dx = \int_0^{\pi/2} e^x\, d\,\frac{\cos 2nx}{4n^2} =$$

$$= e^x\,\frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2nx}{4n^2}\, e^x\,dx = e^{\pi/2}\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} -$$

$$- \frac{I_1}{4n^2}$$

$$I_1 = \left(e^{\pi/2}\,\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2}\right)\frac{4n^2}{4n^2+1}$$

Очевидно, что $I_2 = I_1$, т.к.

$$I_2 = I_1 + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi \cos 2nx\,dx = I_1$$

$$a_{2n} = \left(e^{\pi/2}(-1)^n - 1\right)\frac{2}{4n^2+1}$$

$$|a_{2n}| \leq \frac{4e^{\pi/2}}{4n^2+1} < \frac{4e^{\pi/2}}{4n^2} = \frac{e^{\pi/2}}{n^2} \text{ - сх-ся}$$

Значит по призн. Вейерштрасса ряд сх-ся равномерно.

(T2) а) x^{10} - на $[-\pi, \pi]$ непрер, $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = 10x^9$ - ~~есть тот~~ $f'(-\pi+0) \neq f'(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k^2}$

б) x^5 - на $[-\pi, \pi]$ непрер. $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k}$

в) $(x^2-\pi^2)^{10}$ - на $[-\pi, \pi]$ непрер. $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = 10(x^2-\pi^2)^9 \cdot 2x$ $\quad f'(-\pi+0) = f'(\pi-0)$

$f'' = 90(x^2-\pi^2)^8 \cdot 4x^2 + 10(x^2-\pi^2)^9 \cdot 2$ $\quad f''(-\pi+0) = f''(\pi-0)$

и так далее до 11 производной.

$f^{(11)}(-\pi+0) \neq f^{(11)}(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k^{12}}$

г) $(\pi^2-x^2)\sin^2 x$ $\quad f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = \cancel{x(1} - 2x\sin^2 x + (\pi^2-x^2)\sin 2x = -x(1-\cos 2x) + (\pi^2-x^2)\sin 2x$

$f'(-\pi+0) = f'(\pi-0)$

$f'' = -1 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 2x\sin 2x + 2(\pi^2-x^2)\cos 2x$

$f''(-\pi+0) = f''(\pi-0)$

$f''' = -2\sin 2x - 4\sin 2x - 8x\cos 2x - 4x\cos 2x +$

$+ 4(\pi^2-x^2)\sin 2x$ $\quad f'''(-\pi+0) \neq f'''(\pi+0) \to \frac{1}{k^4}$

§22 115)

$f(x) = \pi x - x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & x \geq 0 \\ \pi x + x^2, & x < 0 \end{cases}$$

непрер на $[-\pi, \pi]$

$f(\pi-0) = f(-\pi+0)$

сх-ся равномерно

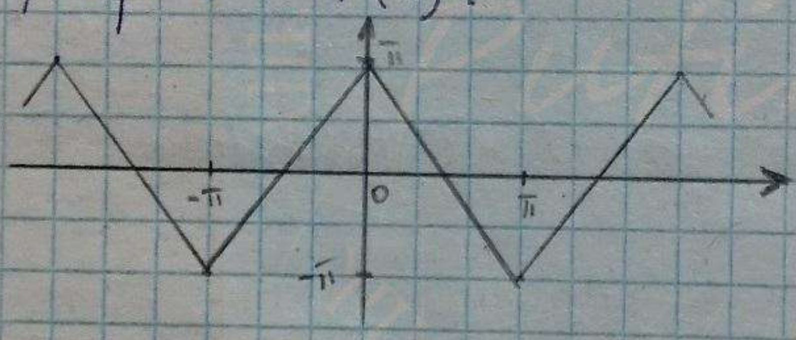
$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x \geq 0 \\ \pi + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

непрер на $[-\pi, \pi]$

$f(\pi-0) = f(-\pi+0)$

сх-ся равномерно.

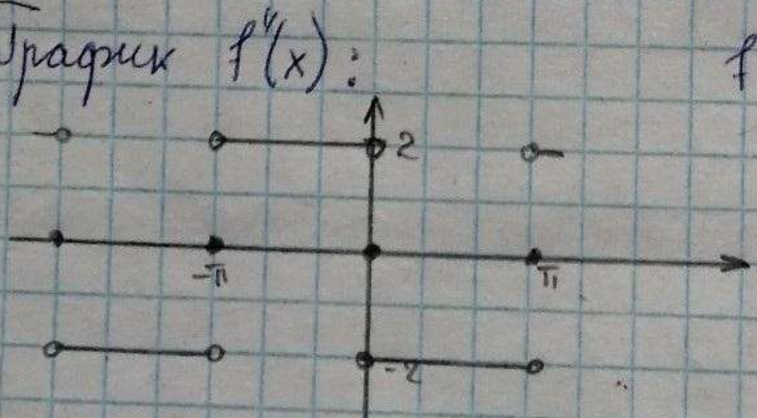
График $f'(x)$:



$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

сх-сть неравномерная, т.к. есть т. разрыва и $f(\pi-0) \neq f(-\pi+0)$

График $f''(x)$:



§22 121) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ $0<x<2\pi$

т.к. $\frac{\pi-x}{2}$ непрер. на $[0,2\pi]$, то можно спр-ва формула для формального интегрир. ряда Фурье.

$F(x)-\frac{a_0 x}{2}=\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{4}-0$ - если её продолжить с периодом 2π на всю числовую прямую, то получим кусочно-гладкую ф-цию на каждом конечном отрезке.

$$\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{C}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \qquad 0<x<2\pi$$

где $C=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\Big|_0^{2\pi}\right)=$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\cdot 4\pi^2}{4}-\frac{8\pi^3}{12}\right)=\frac{1}{\pi}\pi^3\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Окончательно:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

С помощью рав-ва Парсеваля вычислить:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Рассмотрим ф-цию $f(x) = x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

Рав-во Парсеваля выглядит так:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\underbrace{x^2}_{f(x)})^2 \, dx$$

$$\frac{\overbrace{\pi^4 \cdot 4}^{a_0^2}}{9 \cdot 2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4} = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^5}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4} = \pi^4 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) = \pi^4 \frac{8}{45}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4 \cdot 1}{90}$$

С помощью Парсеваля вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

Рассмотрим:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kt$$ и проинтегрируем от 0 до X

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \frac{\sin kx}{k}$$

$$\frac{1}{3} x (x^2 - \pi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3} (-1)^k \sin kx$$

Применим рав-во Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2 x}{3}\right)^2 dx = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi}\left(\frac{x^6}{9}-\frac{2\pi^2 x^4}{9}+\frac{\pi^4 x^2}{9}\right) = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2\left(\frac{x^7}{69}-\frac{2\pi^2 x^5}{45}+\frac{\pi^4 x^3}{27}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$2\left(\frac{\pi^6}{69}-\frac{\pi^6 2}{45}+\frac{\pi^6}{27}\right) = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{2}{16}\pi^6\cdot\frac{8}{105\cdot 9} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

Ответ: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

§ 16. 48(1, 3)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, $S_4 = 1$

Если m - чётно, то $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_m}{m+1} = \frac{m/2 + 1}{m+1} \to \frac{1}{2}$, $m \to \infty$

Если m - нечётно, то $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_m}{m+1} = \frac{(m+1)/2}{m+1} = \frac{1}{2}$

$\sigma = \frac{1}{2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta$, $0 < |\theta| < \pi$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2\sin(n\theta)}{2\sin\theta/2} \sin\theta/2 = \frac{1}{2\sin\theta/2} \sum_{n=1}^{k} \left(\cos\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(n\theta + \frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\theta\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\theta\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\theta/2}{2\sin\theta/2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\theta(k+1/2))}{2\sin\theta/2}$$

расп. аналогично, через sin при делении на n и $n \to \infty$ получим $\underline{0}$

$$\sigma = \frac{\frac{n \cdot \cos\theta/2}{2\sin\theta/2}}{n} = \frac{\cos\theta/2}{2\sin\theta/2} \to \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta/2$$

Ответ: $\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$