(T1)

a) $u_t = \Delta u - 8u + 4t\, f(r) \cos\varphi, \quad 0<r<6,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0$

$u|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi \qquad 0<r<6,\ 0\le\varphi<2\pi$

$|u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=6} = 0 \qquad 0\le\varphi<2\pi,\ t>0$

Разобьём на 2 подзадачи:

<u>Задача A</u>. (1A) $v_t = \Delta v - 8v + 4t\, f(r)\cos\varphi$

(2A) $v|_{t=0} = 0$, (3A) $v|_{r=6} = 0$

<u>Шаг 1</u>: разложим $f(r)$ в ряд Фурье-Бесселя

(4A) $f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)$, где $a_k = \dfrac{\int_0^6 r\cdot f(r)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right) dr}{\int_0^6 r\cdot J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right) dr}$ (5A)

<u>Шаг 2</u>: ищем решения в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \qquad (6A)$$

Подставляем (6A) в (1A)-(2A):

$$(1A) \to \sum_{k=1}^{\infty} \dot T_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \underset{r,\varphi,t}{\equiv} \sum_{k=1}^{\infty} T_k \underbrace{\Delta\left[J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi\right]}_{-\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6}\right)^2 J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} 8 T_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} 4t\, a_k J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi$$

$$(2A) \to \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \underset{r,\varphi}{\equiv} 0$$

Достаточно потребовать $(\forall k\in N)$ чтобы выполнялись

усл-ия: $\begin{cases} (7A) & \dot T_k(t) + \left[\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6}\right)^2 + 8\right] T_k(t) = 4a_k t \\ (8A) & T_k(0) = 0 \end{cases}$

Общ. решение однородного $T_k = C_k e^{-\gamma_k t}$

Частн. реш. ищем в виде $\tilde{T}_k = \alpha_k t + \beta_k$

$$\alpha_k + \gamma_k \alpha_k t + \beta_k \gamma_k = 4a_k t \quad \rightarrow \quad \alpha_k = \frac{4a_k}{\gamma_k}$$

$$\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k} = -\frac{4a_k}{\gamma_k^2}$$

$$T_k = C_k e^{-\gamma_k t} + \frac{4a_k t}{\gamma_k} - \frac{4a_k}{\gamma_k^2}$$

С учётом начального усл-ия $C_k = \frac{4a_k}{\gamma_k^2}$

Реш. задачи Коши:

$$T_k = \frac{4a_k}{\gamma_k^2}\left(e^{-\gamma_k t} - 1\right) + \frac{4a_k t}{\gamma_k} \quad (9A)$$

Подставляя (9А) в (6А), получим решение зад. А

Задача Б

(1Б) $w_t = \Delta w - 8w$

(2Б) $w|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi$ (3Б) $w|_{r=6} = 0$

Шаг 1: $g(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)$ (4Б), где

$$b_k = \frac{\int_0^6 r\, g(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right) dr}{\int_0^6 r\, J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right) dr} \quad (5Б).$$

Шаг 2:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \quad (6Б)$$

Подставим (6Б) в (1Б), (2Б):

$$(1Б) \to \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Q}_k(t)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \underset{r,\varphi,t}{=} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\, \underbrace{\Delta\left[J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi\right]}_{-\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6}\right)^2 J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} 8 Q_k(t)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi$$

$$(2Б) \to \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(0)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \underset{r,\varphi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi$$

Достаточно потребовать:

$$(7Б) \quad \dot{Q}_k(t) + \left[\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6}\right)^2 + 8\right] Q_k(t) = 0$$

$$(8Б) \quad Q_k(0) = b_k$$

Решение есть $(9Б) \quad Q_k = b_k e^{-\gamma_k t}$

Подставив (9Б) в (6Б), получим реш. задачи Б.

Решение исходной есть $u = v + w$

б) $4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi \; ; \; 0 < r < 1, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; t > 0$

$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_3^{(0)} r), \quad 0 < r < 1, \; 0 \le \varphi < 2\pi$

$u|_{r=1} = 0 \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \; t > 0$

<u>Задача А</u>:

$$v_{tt} = \frac{1}{4}\Delta v + \frac{1}{8} f(r) \quad (1A)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = J_0(\mu_3^{(0)} r) \quad (2A)$$

$$\frac{1}{8} f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad a_k = \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(\mu_k^{(0)} r)\,dr}{\int_0^1 r J_0^2(\mu_k^{(0)} r)\,dr}$$

$$(3A) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Подставим (3A) в (1A)-(2A)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t)\, J_0(\mu_k^{(0)} r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} T_k(t) \left(-(\mu_k^{(0)})^2\right) J_0(\mu_k^{(0)} r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4} T_k (\mu_k^{(0)})^2 = a_k \\ T_k(0) = 0, \quad \dot{T}_k(0) = \delta_{k3} \end{cases}$$

Общ. реш. однородн. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right)$

Частн. реш. неодн. $\tilde{T}_k = \frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2}$

(4А) $\begin{cases} \text{Используя нач. усл-ия: } T_k = -\frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2} \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right) + \frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2}, \; k \neq 3 \\ T_3 = -\frac{4a_3}{(\mu_3^{(0)})^2} \cos\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} t\right) + \frac{4a_3}{(\mu_3^{(0)})^2} + \frac{2}{\mu_3^{(0)}} \sin\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} t\right) \end{cases}$

Подставив (4А) в (3А), получим решение задачи А

<u>Задача Б:</u>

$$\tilde{v}_{tt} = \frac{1}{4} \Delta \tilde{v} - \frac{1}{8} f(r) \cos 4\varphi \qquad (1Б)$$

$$\tilde{v}\big|_{t=0} = 0 \quad \tilde{v}_t\big|_{t=0} = 0 \qquad (2Б)$$

(3Б) $\frac{1}{8} f(r) = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_4(\mu_k^{(4)} r), \quad a_k = \dfrac{\int_0^1 r f(r) J_4(\mu_k^{(4)} r)\, dr}{\int_0^1 r J_4^2(\mu_k^{(4)} r)\, dr}$

(4Б) $\tilde{v} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi$

Подставим (4Б) в (1Б)-(2Б):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(-(\mu_k^{(4)})^2\right) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi -$$

$$- \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi = 0$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4} T_k (\mu_k^{(4)})^2 = -\frac{1}{8} a_k \\ T_k(0) = 0, \quad \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Общ. реш. однор. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right)$

Частн. реш. неоднор. $\tilde{T}_k = -\frac{1}{2(\mu_k^{(4)})^2} a_k$

Используем нач. усл-ия: $T_k = \frac{a_k}{2(\mu_k^{(4)})^2} \cos\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right) - \frac{a_k}{2(\mu_k^{(4)})^2}$ (5Б)

Подставив (5Б) в (4Б), получим решение зад. Б

Задача В:

(1В) $w_{tt} = \frac{1}{4} \Delta w$

(2В) $w|_{t=0} = g(r) \cos 2\varphi$, $w_t|_{t=0} = 0$

(3В) $g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2(\mu_k^{(2)} r)$, $a_k = \dfrac{\int_0^1 r g(r) J_2(\mu_k^{(2)} r) dr}{\int_0^1 r J_2^2(\mu_k^{(2)} r) dr}$

(4В) $w = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi$

Подставим (4В) в (1В)-(2В):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(-(\mu_k^{(2)})^2\right) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi \, T_k(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0)\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi = 0$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4}(\mu_k^{(2)})^2 T_k = 0 \\ T_k(0) = a_k, \ \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Общ. реш. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right)$

Использ. нач. усл-ия: $T_k = a_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right)$ (5В)

Подставив (5В) в (4В), получим решение зад. В

Решение исходной задачи есть $u = v + \tilde{v} + w$.

(T2)

$$u_{tt} = \Delta u + \sin(\mu_1^{(0)} t), \quad r<1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t>0$$

$$u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r<1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t>0$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r) \qquad a_k = \frac{\int_0^1 r \cdot 1 \cdot J_0(\mu_k^{(0)} r)\,dr}{\int_0^1 r \cdot J_0^2(\mu_k^{(0)} r)\,dr}$$

(1) $$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-(\mu_k^{(0)})^2\right) J_0(\mu_k^{(0)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r) \sin(\mu_1^{(0)} t) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = J_0(\mu_1^{(0)} r) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + (\mu_k^{(0)})^2 T_k = a_k \sin(\mu_1^{(0)} t) \\ T_k(0) = \delta_{k,1} \\ \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

При $k=1$ получаем резонанс, поэтому рассмотрим отдельно:

$k=1$, $\mu \equiv \mu_1^{(0)}$

$$T_{одн} = C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t)$$

$$\tilde{T}_ч = \alpha \cdot t \cos(\mu t)$$

$$\ddot{\tilde{T}}_ч = (\alpha \cos(\mu t) - \alpha t \mu \sin(\mu t))'_t = -\alpha \mu \sin(\mu t) \cdot 2 -$$

$$- \alpha t \mu^2 \cos(\mu t)$$

$$-\alpha \mu \sin(\mu t) \cdot 2 - \cancel{\alpha t \mu^2 \cos(\mu t)} + \cancel{\mu^2 \alpha t \cos(\mu t)} = a_1 \sin(\mu t)$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2\mu} \hookrightarrow \tilde{T}_ч = -\frac{a_1 t}{2\mu} \cos(\mu t)$$

$$\dot{T}(0) = C_2 \mu - \frac{a_1}{2\mu} = 0 \hookrightarrow C_2 = \frac{a_1}{2\mu^2}$$

Тогда учитывая нач. усл-ия, получим $T_1 = \cos(\mu t) - \frac{a_1 t}{2\mu} \cos(\mu t) + \frac{a_1}{2\mu^2} \sin(\mu t)$ (2)

Теперь рассмотрим нерезонансный случай:

$k \neq 1$ $\quad T_{одн} = C_1 \cos(\mu_k^{(0)} t) + C_2 \sin(\mu_k^{(0)} t)$

$$\tilde{T}_ч = \alpha \sin(\mu_1^{(0)} t)$$

$$\ddot{\tilde{T}}_ч = -\alpha (\mu_1^{(0)})^2 \sin(\mu_1^{(0)} t) + \alpha (\mu_k^{(0)})^2 \sin(\mu_1^{(0)} t) = a_k \sin(\mu_1^{(0)} t)$$

Откуда $\alpha = \dfrac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \hookrightarrow \tilde{T}_z = \dfrac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \sin(\mu_1^{(0)} t)$

$$\dot{T}_k(0) = C_2 \mu_k^{(0)} + \frac{a_k \mu_1^{(0)}}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} = 0 \hookrightarrow C_2 = \frac{a_k \mu_1^{(0)}}{(\mu_1^{(0)})^2 - (\mu_k^{(0)})^2} \cdot \frac{1}{\mu_k^{(0)}}$$

Тогда учитывая начальные усл-ия, получим:

(3) $$T_k = \frac{1}{\mu_k^{(0)}} \frac{\mu_1^{(0)} a_k}{(\mu_1^{(0)})^2 - (\mu_k^{(0)})^2} \sin(\mu_k^{(0)} t) + \frac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \sin(\mu_1^{(0)} t), \quad k \neq 1$$

Ответ задачи получим, подставив (2), (3) в (1)

(Т3)

$$u_t = \Delta u + y + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r) \qquad x^2 + y^2 < 1, \; t > 0$$

$$u|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad x^2 + y^2 < 1$$

$$u|_{r=1} = ty \quad , \quad x^2 + y^2 = 1, \; t > 0$$

Замена $u = v + ty$

$$v_t = \Delta v + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r)$$

$$v|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v|_{r=1} = 0$$

Задача А: $w_t = \Delta w + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r)$

$$w|_{t=0} = 0$$

$$w|_{r=1} = 0$$

$$w = T(t) J_0(\mu_2^{(0)} r) \qquad (1A)$$

$$\dot{T} + (\mu_2^{(0)})^2 T = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \qquad T(0) = 0$$

$$T_{одн.} = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \cdot C$$

$$\tilde{T}_ч = B t e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t}$$

$$B e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} - Bt(\mu_2^{(0)})^2 e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} + Bt e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} (\mu_2^{(0)})^2 = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \hookrightarrow B = 1$$

Используя нач. усл-ия: $T = t e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t}$ (2А)

Подставив (2А) в (1А), получим решение задачи А.

<u>Задача Б</u>:

$$\tilde{w}_t = \Delta \tilde{w}$$

$$\tilde{w}|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tilde{w}|_{r=1} = 0$$

$$\tilde{w} = T(t) J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (1Б)$$

$$\begin{cases} \dot{T} + (\mu_3^{(2)})^2 T = 0 \\ T(0) = 1 \end{cases} \rightarrow T = e^{-(\mu_3^{(2)})^2 t} \qquad (2Б)$$

Подставив (2Б) в (1Б), получим решение задачи Б.

Решение исходной задачи есть $u = w + \tilde{w} + ty$

20.23(2)

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

$$u|_{r=R} = 0, \quad u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = F(r).$$

Заметим, что $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \equiv \Delta u$ в сферич. коорд.

Поэтому получим, что $u_{tt} = a^2 \Delta u$.

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } a_k = \frac{\int_0^R r f(r) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

$$F(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } b_k = \frac{\int_0^R r F(r) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

(1) $$u = \sum_{k=1}^{\infty} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Получим следующую систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T(t) \cdot \left(-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2\right) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Это равносильно системе:

$$\begin{cases} \ddot{T} + \frac{a^2 (\mu_k^{(0)})^2}{R^2} T = 0 \\ T(0) = a_k \\ \dot{T}(0) = b_k \end{cases} \rightarrow T = a_k \cos\left(\frac{a \mu_k^{(0)}}{R} t\right) + \frac{b_k R}{a \mu_k^{(0)}} \sin\left(\frac{a \mu_k^{(0)}}{R} t\right) \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим решение задачи.

20.38 $(xu_x)_x = u_{tt}$, $0 < x < \frac{1}{4}$, $t > 0$

$u|_{x=1/4} = 0$, $t \geq 0$

$u|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}\sqrt{x})$, $u_t|_{t=0} = 0$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

Сделаем замену $r = \sqrt{x}$, $0 < r < \frac{1}{2}$

$u(x,t) \leftrightarrow v(r,t)$: $u(x,t) \equiv v(\sqrt{x}, t)$

$u_x = v_r \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$u_{xx} = v_r\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}} + v_{rr}\frac{1}{4}x^{-1} = -\frac{1}{4r^3}v_r + \frac{1}{4r^2}v_{rr}$

Откуда исходная задача станет следующей:

$v_{tt} = r^2\left(-\frac{1}{4r^3}v_r + \frac{1}{4r^2}v_{rr}\right) + v_r\frac{1}{2r}$

$v|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}r)$, $v_t|_{t=0} = 0$, $v|_{r=\frac{1}{2}} = 0$

Упрощая, и учитывая, что $v_{rr} + \frac{1}{r}v_r \equiv \Delta v$, получим:

$v_{tt} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Delta v$

$v|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}r)$, $v_t|_{t=0} = 0$, $v|_{r=\frac{1}{2}} = 0$

$v = T(t)\, J_0(2\mu_1^{(0)}r)$

Получим систему:

$$\begin{cases} \ddot{T} J_0(2\mu_1^{(0)}r) + \frac{1}{4}4(\mu_1^{(0)})^2 T J_0(2\mu_1^{(0)}r) = 0 \\ T(0) J_0(2\mu_1^{(0)}r) = J_0(2\mu_1^{(0)}r) \\ \dot{T}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T = \cos(\mu_1^{(0)}t)$$

Ответ: $u = \cos(\mu_1^{(0)}t) \cdot J_0(2\mu_1^{(0)}\sqrt{x})$

20.60(2)

$$u_t = \frac{1}{a^2}\Delta u$$

$u|_{t=0} = 0$, $u|_{r=R} = u_0$

Сделаем замену $v = u - u_0$

Получим следующую задачу:

$$v_t = \frac{1}{a^2}\Delta v$$

$v|_{t=0} = -u_0$, $u|_{r=R} = 0$

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } a_k = \frac{\int_0^R r u_0 J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

Ищем решения в виде:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Получим систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Она равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dot{T} + \frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} T = 0 \\ T(0) = -a_k \end{cases} \longrightarrow T = C e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t}$$

Учитывая нач. усл-ия, получим $T = -a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t}$

Тогда $v = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$

Решение исходной будет

$$u = u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

5.22

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x-y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

$f(x) \in C[0,2\pi]$, λ - ?

$$\cos(2x-y) = \cos 2x \cos y + \sin 2x \sin y$$

$$(*)\quad \varphi(x) = \lambda a_1 \cos 2x + \lambda a_2 \sin 2x + f(x),$$

где $a_1 = \int_0^{2\pi} \varphi(y)\cos y\,dy \qquad a_2 = \int_0^{2\pi} \varphi(y)\sin y\,dy$

$$a_1 = \lambda a_1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos x \cos 2x\,dx}_{0} + \lambda a_2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos x \sin 2x\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx}_{f_1}$$

$$a_2 = \lambda a_1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin x \cos 2x\,dx}_{0} + \lambda a_2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin x \sin 2x\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx}_{f_2}$$

Получаем $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[E - \lambda\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Видно, что уравнение разрешимо при $\forall \lambda$ и имеет единств. решение $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

Подставим в $(*)$, получим решение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x-y) f(y)\,dy + f(x)$$

5.23(5)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(xy + x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax + b$$

Обозначим $\frac{\lambda}{2} \equiv \mu$: $\varphi(x) = \mu \int_{-1}^{1} (xy + x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax + b$

$\varphi(x) = \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + ax + b$, где

$$a_1 = \int_{-1}^{1} y\varphi(y)\,dy \qquad a_2 = \int_{-1}^{1} y^2\varphi(y)\,dy$$

(1) $a_1 = \mu a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{2/3} + \mu a_2 \cancel{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}^{=0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx)\,dx}_{f_1} \hookrightarrow d_{11} = \frac{2}{3},\ d_{12} = 0$

$f_1 = \frac{2}{3}a$

$a_2 = \mu a_1 \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \mu a_2 \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2)\,dx}_{f_2} \hookrightarrow d_{21} = 0 \quad d_{22} = \frac{2}{5}$

$f_2 = \frac{2}{3}b$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2}{5}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3\, a \\ 2/3\, b \end{bmatrix}$$

Зад. 1

Найдём собств. числа: $\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = \frac{5}{2}$

Зад 2

$\mu = \frac{3}{2}$: $(6)'_1$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$

$\mu = \frac{5}{2}$: $(6)'_2$ $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$

Зад. 3

$\mu \neq \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$: $a_1 = \frac{2a}{3 - 2\mu}$, $a_2 = \frac{2b}{3 - \frac{6}{5}\mu}$

$$\varphi(x) = \mu \frac{2a}{3-2\mu} x + \mu \frac{2b}{3-\frac{6}{5}\mu} x^2 + ax + b$$

$\underline{\mu = \frac{3}{2}}$: решения есть при $a = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \frac{5}{3}b \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = \mu \tilde{C}_1 x + \frac{5}{6} 2\mu b x^2 + b = \frac{3}{2}\tilde{C}_1 x + \frac{5}{2} b x^2 + b$

$\underline{\mu = \frac{5}{2}}$: решения есть при $b = 0$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = -a\mu x + \tilde{C}_2 \mu x^2 + ax = -\frac{3}{2} a x + \tilde{C}_2 \frac{5}{2} x^2$

5.24(2)

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

$$K(x,y)=3xy+5x^2y^2,\quad f(x)=ax^2+bx$$

$$\varphi(x)=\lambda 3a_1 x+\lambda 5x^2 a_2 + ax^2+bx$$

где $a_1=\lambda\int_{-1}^{1} 3\varphi(y)y\,dy$ $\quad a_2=\lambda 5\int_{-1}^{1}\varphi(y)y^2\,dy$

$$a_1 = 3\lambda a_1\int_{-1}^{1}x^2dx + 5\lambda a_2\int_{-1}^{1}x^3dx+\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)x\,dx=$$

$$=2\lambda a_1+\frac{2}{3}b$$

$$a_2 = 3a_1\lambda\int_{-1}^{1}x^3dx + 5a_2\lambda\int_{-1}^{1}x^4dx+\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)x^2dx=$$

$$=2a_2\lambda+\frac{2}{5}a$$

$$\begin{bmatrix}1-2\lambda & 0\\ 0 & 1-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\,b\\ 2/5\,a\end{bmatrix}$$

Собств. числа $\lambda=\frac{1}{2}$ $\hookrightarrow$ собств. ф-ции $\varphi(x)=\frac{1}{2}x$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$.

$\underline{\lambda\neq\frac{1}{2}:}$ $\quad \varphi(x)=\dfrac{ax^2+bx}{1-2\lambda}$, т.к. $a_1=\dfrac{2b}{3(1-2\lambda)}$, $a_2=\dfrac{2a}{5(1-2\lambda)}$

$\underline{\lambda=\frac{1}{2}:}$ $\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\,b\\2/5\,a\end{bmatrix}\to a=b=0,\ \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{C}_1\\\tilde{C}_2\end{bmatrix}$

$$\varphi(x)=C_1x+C_2x^2.$$

5.25(2)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x)\, \varphi(y)\, dy + ax + b$$

(1) $\varphi(x) = \lambda x a_1 + \lambda a_2 \cos x + ax + b$

$$a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, \varphi(y)\, dy \qquad a_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(y)\, dy$$

$$a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda x a_1 \sin x\, dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \lambda a_2 \cos x \sin x\, dx}^{\,0} + \int_{-\pi}^{\pi} a x \sin x\, dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} b \sin x\, dx}^{\,0}$$

$$a_2 = \lambda a_1 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx}^{\,0} + \lambda a_2 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx}^{\,0} + a \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx}^{\,0} + b \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$a_1 = \lambda a_1 2\pi + a 2\pi$

$a_2 = 2\pi b$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1-2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ 2\pi b \end{pmatrix}$$

Откуда собств. ч. $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} x \text{ — собств. ф-ция}$$

<u>Случай 1</u>:

$$\lambda \neq \frac{1}{2\pi} \qquad a_1 = \frac{2\pi a}{1-2\pi\lambda} \qquad a_2 = 2\pi b$$

$$\varphi(x) = \lambda \frac{2\pi a}{1-2\pi\lambda} x + \lambda 2\pi b \cos x + ax + b$$

Случай 2: $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ 2\pi b \end{pmatrix}$$

Если $a \neq 0$, то решений системы нет $\hookrightarrow$ нет решений исх. интегр. ур-ия.

Если $a = 0$, то $a_1 = C_1$, $a_2 = 2\pi b$.

Тогда $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} C_1 x + \frac{1}{2\pi} 2\pi b \cos x + b$

(Т4)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin|x| + |x| y) \varphi(y) dy + a|x| + bx$$

$$\varphi(x) = \lambda \sin|x| a_1 + \lambda |x| a_2 + a|x| + bx$$

$$a_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| \varphi(y) dy \qquad a_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \varphi(y) dy$$

$$a_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_1 |x| \lambda \sin|x| dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda a_2 |x|^2 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a|x|^2 dx + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b x|x| dx}}_{0}$$

$$a_2 = \underbrace{\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_1 \lambda x \sin|x| dx}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda |x| x a_2 dx}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a|x| x dx}}_{0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b x^2 dx$$

$$a_1 = 2 a_1 \lambda + \lambda a_2 \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} a$$

$$a_2 = \frac{\pi^3}{12} b$$

Получим сист.: $\begin{pmatrix} 1-2\lambda & -\lambda \frac{\pi^3}{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^3 a/12 \\ \pi^3 b/12 \end{pmatrix}$

Откуда собств. ч. $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \varphi(x) = \frac{1}{2} \sin|x| \text{ — собств. ф-ция}$$

Случай 1: $\lambda \neq \frac{1}{2}$. $\quad a_2 = \frac{\pi^3 b}{12} \quad a_1 = \dfrac{\frac{\pi^3 a}{12} + \lambda \frac{\pi^6 b}{12^2}}{1 - 2\lambda}$

$$\varphi(x) = \lambda \sin|x| \frac{\pi^3}{12} \frac{a + \lambda \frac{\pi^3 b}{12}}{1 - 2\lambda} + \lambda |x| \frac{\pi^3 b}{12} + a|x| + bx$$

Случай 2: $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi^3}{24} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^3 a/12 \\ \pi^3 b/12 \end{pmatrix}$$

Если $a = -\frac{\pi^3 b}{24}$, то система имеет решения и $a_1 = C_1$, $a_2 = \frac{\pi^3 b}{12}$. Иначе решений нет.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} C_1 \sin|x| + \cancel{\frac{1}{2}|x| \frac{\pi^3 b}{12}} - \cancel{\frac{\pi^3 b}{24}|x|} + bx$$

(5)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x e^{x^2} \cos^3 t + \frac{1 - \cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t) \, dt + f(x)$$

$$\varphi(x) = \lambda x e^{x^2} a_1 + \lambda \frac{1 - \cos x}{x} a_2 + f(x)$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} \cos^3 t \, \varphi(t) \, dt \qquad a_2 = \int_{-1}^{1} e^{t^2} \varphi(t) \, dt$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} \underbrace{\cancel{\lambda x e^{x^2} a_1 \cos^3 x}}_{\to 0} \, dx + \int_{-1}^{1} \lambda \underbrace{\cancel{\frac{1 - \cos x}{x} a_2 \cos^3 x}}_{\to 0} \, dx +$$

$$+\underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\cos^3 x\,dx}_{f_1}$$

$$a_2 = \int_{-1}^{1} \lambda x \cancel{e^{x^2} a_1 e^{x^2}}^{\,0} dx + \int_{-1}^{1} \lambda \cancel{\frac{1-\cos x}{x}}^{\,0} a_2 e^{x^2} dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x) e^{x^2} dx}_{f_2}$$

Получаем $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[E - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Видно, что ур-ие разрешимо при $\forall \lambda$ и имеет единств. решение $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$. Соотв. $f(x)$ - произв. $\in C[-1,1]$.

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} x e^{x^2} f(x) \cos^3 x\,dx + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{1-\cos x}{x} f(x) e^{x^2} dx + f(x)$$

Мн-во характеристич. чисел сопр. ядра есть $\overline{\lambda}$, где λ - хар. ч. исходн. ядра. В силу произв. $\lambda \hookrightarrow$ мн-во характеристич. чисел сопр. ядра совп. с мн-вом характеристич. чисел исходн. ядра.

⑥ $$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2)\,\varphi(y)\,dy + |x|^2 + \alpha$$

$$\varphi(x) = \lambda 6 |x|^2 a_1 - \lambda 2 a_2 + |x|^2 + \alpha$$

$$a_1 = \int_{|y|<1} \varphi(y)\,dy \qquad a_2 = \int_{|y|<1} |y|^2 \varphi(y)\,dy$$

$$a_1 = \lambda 6 \int\limits_{|x|<1} |x|^2 a_1 dx - \lambda 2 \int\limits_{|x|<1} a_2 dx + \int\limits_{|x|<1} |x|^2 dx + \int\limits_{|x|<1} \alpha dx$$

$$a_2 = \lambda 6 \int\limits_{|x|<1} |x|^4 a_1 dx - \lambda 2 \int\limits_{|x|<1} a_2 |x|^2 dx + \int\limits_{|x|<1} |x|^4 dx + \int\limits_{|x|<1} \alpha |x|^2 dx$$

$$a_1 = \lambda 6 \cdot 2\pi a_1 \cdot \frac{1}{4} - 2\lambda a_2 \cdot 2\pi \frac{1}{2} + 2\pi \frac{1}{4} + \alpha 2\pi \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \lambda 6 \cdot 2\pi a_1 \frac{1}{6} - 2\lambda a_2 2\pi \frac{1}{4} + 2\pi \frac{1}{6} + \alpha 2\pi \frac{1}{4}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3\pi\lambda & 2\pi\lambda \\ -\lambda\pi \cdot 2 & 1 + \pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \frac{1}{4} + \pi\alpha \\ 2\pi \frac{1}{6} + 2\pi \frac{1}{4}\alpha \end{pmatrix}$$

$$(1 - 3\pi\lambda)(1 + \pi\lambda) + 4\pi^2\lambda^2 = 1 - 2\pi\lambda - 3\pi^2\lambda^2 + 4\pi^2\lambda^2 =$$

$$= 1 - 2\pi\lambda + \pi^2\lambda^2 = (1 - \pi\lambda)^2 = 0 \hookrightarrow \lambda = \frac{1}{\pi}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = \frac{6}{\pi}|x|^2 - \frac{2}{\pi}$ – собств. ф-ция

<u>Случай 1:</u> $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$

$$a_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi\alpha\right)(1 + \pi\lambda) - 2\pi\lambda\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{(1 - \pi\lambda)^2}$$

$$a_2 = \frac{(1 - 3\pi\lambda)\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + 2\pi\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \pi\alpha\right)}{(1 - \pi\lambda)^2}$$

$$\varphi(x) = \lambda 6 |x|^2 a_1 - \lambda 2 a_2 + |x|^2 + \alpha$$

<u>Случай 2:</u> $\lambda = \frac{1}{\pi}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \pi\alpha \\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\alpha \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow \quad \frac{\pi}{2} + \pi\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\alpha$$

$$\frac{\pi}{2}\alpha = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Если $\alpha = -\frac{1}{3}$, то решение системы $\exists$:

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = \left(\frac{1}{6}\pi + 2C_1\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} + C_1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\cdot 6|x|^2 \cdot C_1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{12} + C_1\right) + |x|^2 - \frac{1}{3}$$

5.34

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2 + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda(a_1 x_1 x_2 + a_2 \cdot 1) + f(x_1, x_2)$$

где $a_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$, $\quad a_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$

$$a_1 = \lambda a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1 x_2\,dx_1 dx_2}_{0} + \lambda a_2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx_1 dx_2 + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 \quad f_1$$

$$a_2 = \lambda a_1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1^2 x_2^2\,dx_1 dx_2 + \lambda a_2 \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1 x_2\,dx_1 dx_2}_{0} + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 \quad f_2$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx_1 dx_2 = \left(\int_{-1}^{1} dx_1\right)\cdot\left(\int_{-1}^{1} dx_2\right) = 2\cdot 2 = 4$$

$$\left(\int_{-1}^{1} x_1^2\,dx_1\right)\cdot\left(\int_{-1}^{1} x_2^2\,dx_2\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$a_1 = \lambda a_2 \cdot 4 + f_1, \quad a_2 = \lambda a_1 \cdot \frac{4}{9} + f_2$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{16}{9}\lambda^2 = 0 \hookrightarrow \lambda = \pm\frac{3}{4}$$

$$\lambda = \frac{3}{4}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\cdot 3x_1x_2 + \frac{3}{4}$$ – собств. ф-ция

$$\lambda = -\frac{3}{4}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\cdot 3x_1x_2 - \frac{3}{4}$$ – собств. ф-ция

Случай 1:

$$\lambda \neq \pm\frac{3}{4}$$

$$a_1 = \frac{f_1 + f_2\cdot 4\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}, \quad a_2 = \frac{f_2 + f_1\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda\frac{f_1 + f_2 4\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2}x_1x_2 + \lambda\frac{f_2 + f_1\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{16}{9}\lambda^2} + f(x_1, x_2)$$

Случай 2а:

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$f_1 = -3f_2 \hookrightarrow a_1 = 3C + f_1,\ a_2 = C$

$f_1 \neq -3f_2 \hookrightarrow$ нет решений

Если $f_1 = -3f_2$, то реш. есть:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(3C + f_1)\,x_1 x_2 + \frac{3}{4}C + f(x_1, x_2)$$

Случай 2б:

$$\lambda = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$f_1 = 3f_2 \hookrightarrow a_1 = -3C + f_1,\ a_2 = C$

$f_1 \neq 3f_2 \hookrightarrow$ нет решений.

Если $f_1 = 3f_2$, то реш. есть:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(3C - f_1)\,x_1 x_2 - \frac{3}{4}C + f(x_1, x_2)$$

5.41(2)

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(1-x), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

Можем записать в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x y(1-x)\varphi(y)\,dy + \lambda \int_x^1 x(1-y)\varphi(y)\,dy$$

Вычислим производные по x:

$$\varphi'_x = -\lambda \int_0^x y\,\varphi(y)\,dy + \cancel{\lambda x(1-x)\varphi(x)} + \lambda \int_x^1 (1-y)\varphi(y)\,dy - \cancel{\lambda x(1-x)\varphi(x)}$$

$$\varphi''_{xx} = -\lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x) = -\lambda\varphi(x)$$

Учитывая то, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$, получим

след. систему:

$$\begin{cases} \varphi'' = -\lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \varphi_{общ} = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

$$\varphi(0) = C_2 = 0$$

$$\varphi(1) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x = 0 \hookrightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Получаем: $\varphi(x) = \sin\pi k x,\ k \in \mathbb{Z}$

15.4(8)

$$Ly = -\frac{1}{x^2}y'' + \frac{2}{x^3}y' - \frac{2}{x^4}y \quad , \quad y'(0) = y(1) = 0$$

$$M: \begin{array}{l} 0\cdot y(0) + 1\cdot y'(0) = 0 \\ 1\cdot y(1) + 0\cdot y'(1) = 0 \end{array} \qquad 0 < x < 1$$

$$Ly = -(\underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{p(x)} y')' + (\underbrace{-\tfrac{2}{x^4}}_{q(x)})y$$ $\hookrightarrow$ случ. нестандартный

Надо выяснить, что $\lambda = 0$ не собств. знач. оператора L

Найдём общ. решение $Ly = 0$:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \hookrightarrow \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0 \hookrightarrow \lambda = 1, 2$$

Общ. реш. есть $y = C_1x + C_2x^2$

$y' = C_1 + 2C_2x$

Подставим в M: $C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 - 1\cdot C_1 - 2\cdot C_2\cdot 0 = 0 \hookrightarrow C_1 = 0$

$C_1 + C_2 + 0\cdot(\dots) = 0 \hookrightarrow C_2 = 0$

Только тривиальные решения $\in M \hookrightarrow \lambda = 0$ не явл. собств. знач.

Шаг 1: $v_1 = x^2$, $v_2 = x - x^2$

Шаг 2: $$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x-x^2 \\ 2x & 1-2x \end{vmatrix} = x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 = -x^2$$

$$K = -1 \quad \left(K = p(x)\cdot W(x) = \frac{1}{x^2}\cdot(-x^2)\right)$$

$$G = 1\cdot \begin{cases} x^2(\xi - \xi^2), & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \xi^2(x - x^2), & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

15.15(6,7)

6) $\begin{cases} Ly = -x^2y'' - 2xy' + (2\cos^2 x - 1)y = \lambda y \cos 2x \\ y(1)=0,\ y'(2)=0 \qquad 1<x<2 \end{cases}$

$$Ly = -(\underbrace{x^2}_{p(x)\geq 0} y')' + (\underbrace{2\cos^2 x+1}_{q(x)\geq 0})y$$

Случай стандартный, $h_1 = 1$ $\hookrightarrow$ $\lambda = 0$ не явл-ся собств. знач. операт. L

Оператор равносилен следующему:

$-(x^2y')' + 2y = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\mu} \cos 2x \cdot y$, $\tilde{M} = M$, $\mu = 0$ - не собств. знач.

$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0 \hookrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \hookrightarrow \lambda = -2, 1$

Общ. решение есть $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$

Шаг 1:

$v_1 = x - \frac{1}{x^2}$, $v_2 = x + \frac{4}{x^2}$

Шаг 2:

$\tilde{W}(x) = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{x^2} & x + \frac{4}{x^2} \\ 1 + \frac{2}{x^3} & 1 - \frac{8}{x^3} \end{vmatrix}$ $\quad \tilde{W}(1) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ +3 & -7 \end{vmatrix} = -15$

$K = p(1) \cdot \tilde{W}(1) = -15$

$\tilde{G}(x, \xi) = \frac{1}{15} \cdot \begin{cases} (x - \frac{1}{x^2})(\xi + \frac{4}{\xi^2}) & , 1 \leq x \leq \xi \leq 2 \\ (\xi - \frac{1}{\xi^2}) \cdot (x + \frac{4}{x^2}) & , 1 \leq \xi \leq x \leq 2 \end{cases}$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = (\lambda - 1) \int_1^2 \tilde{G}(x, \xi)(\cos 2\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

7) $\begin{cases} Ly = -y'' = \lambda y, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$

$$Ly = -(1\cdot y')' + 0\cdot y$$

Случай стандартный $\hookrightarrow$ $\lambda = 0$ явл-ся собств. знач. операт. L
$h_1 = H_1 = 0 = q(x)$

Возьмём $-y'' + y = (\lambda + 1) y$

$\tilde{p}(x) = 1$, $\tilde{q}(x) = 1 > 0$ $\hookrightarrow$ для нового $\tilde{L}$ случ. стандартный и

$\lambda = 0$ не явл-ся собств. знач. операт. $\tilde{L}$ на $\tilde{M} = M$

$-\lambda^2 + 1 = 0 \hookrightarrow \lambda = \pm 1$

Общ. реш. есть $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$

<u>Шаг 1</u>:

$$v_1(x) = \operatorname{ch} x \qquad v_2(x) = \operatorname{ch}(x-1)$$

<u>Шаг 2</u>:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{ch}(x-1) \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{sh}(x-1) \end{vmatrix} = -\operatorname{sh} 1$$

$K = -\operatorname{sh} 1$

$$G = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch}(\xi - 1), & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch}(x-1), & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = (\lambda + 1) \int_0^1 G\, y(\xi)\, d\xi$$

15.17

$$\begin{cases} -xy'' + y' = \lambda y & 1 < x < 2 \\ y(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$-\left(\frac{y'}{x}\right)' = \lambda x^{-2} y \quad \hookrightarrow \quad p(x) = \frac{1}{x}, \; q(x) = 0$$

Случай стандартный, $h_1 = 1 \hookrightarrow \lambda = 0$ не явл. С.З. опер. L.

$$\frac{y'}{x} = \tilde{C}_1 \quad \hookrightarrow \quad y = C_1 x^2 + C_2 \quad \text{- общ. решение.}$$

Шаг 1:

$$\upsilon_1 = x^2 - 1 \qquad \upsilon_2 = 1$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \quad , K = -2$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} x^2 - 1, & 1 \le x \le \xi \le 2 \\ \xi^2 - 1, & 1 \le \xi \le x \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \frac{y(\xi)}{\xi^2} d\xi$$

(T1)

a) $\begin{cases} e^{2x}(y''-4y'+3y)=\lambda y, & 0<x<\ln 2 \\ y'(0)-y(0)=0, \quad y'(\ln 2)=0 \end{cases}$

$$Ly=e^{-4x}(y''-4y'+3y)=(y'e^{-4x})'+e^{-4x}3y=\lambda y e^{-6x}$$

$p(x)=-e^{-4x}, \quad q(x)=3e^{-4x}$

$$y''-4y'+3y=0$$

$\begin{cases} C_1+3C_2-C_1-C_2=0 \\ C_1\cdot 2+3C_2\cdot 2^3=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2C_2=0 \\ 2C_1+24C_2=0 \end{cases}$

Общ. решение есть $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$

$\lambda=0$ - не С3 L

Шаг 1:

$$v_1=e^{x} \qquad v_2=12e^{x}-e^{3x}$$

Шаг 2:

$$W=\begin{vmatrix} e^{x} & 12e^{x}-e^{3x} \\ e^{x} & 12e^{x}-3e^{3x} \end{vmatrix}=12e^{2x}-3e^{4x}-12e^{2x}+e^{4x}=-2e^{4x}$$

$p\cdot W=+2$

$$G=-\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} e^{x}(12e^{\xi}-e^{3\xi}), & 0\le x\le\xi\le\ln 2 \\ e^{\xi}(12e^{x}-e^{3x}), & 0\le\xi\le x\le\ln 2 \end{cases}$$

Воспишем ИУ: $y(x)=\lambda\int_0^{\ln 2} G(x,\xi)\,y(\xi)\,e^{-6\xi}\,d\xi$

в) $$\begin{cases} x^2 u_{xx} - 2u = \lambda x \sqrt{x}\, u, & 0<x<2 \\ u(x) = O(\sqrt{x}), & x \to +0 \\ u(2-0) = 0, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$Lu = u''_{xx} - \frac{2}{x^2} u = \frac{\lambda}{\sqrt{x}} u \qquad p(x) = +1 \quad q(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$Lu = 0 \hookrightarrow x^2 u''_{xx} - 2u = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) - 2 = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda = 2, -1$$

Общ. реш. есть $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2$. $\hookrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \frac{C_1}{2} + 4C_2 = 0 \end{cases} \hookrightarrow \lambda = 0$ - не СЗЛ

$$x \to +0 \qquad u = O(\sqrt{x}) \hookrightarrow v_1 = x^2$$

$$u(2-0) = 0 \hookrightarrow v_2 = -\frac{8}{x} + x^2$$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 - \frac{8}{x} \\ 2x & 2x + \frac{8}{x^2} \end{vmatrix} = 2x^3 + 8 - 2x^3 + 16 = 24$$

$$p \cdot W = 24$$

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{24} \cdot \begin{cases} x^2\left(-\frac{8}{\xi} + \xi^2\right), & 0 \le x \le \xi \le 2 \\ \xi^2\left(-\frac{8}{x} + x^2\right), & 0 \le \xi \le x \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$u(x) = \lambda \int_0^2 G(x, \xi) \frac{u(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi$$

б) $\begin{cases} -(x+1)^2 y'' - 3(x+1) y' = \lambda y + f(x) & 0 < x < 1 \\ y'(0) = \alpha y(0), \ y'(1) = 0 & \alpha > 0, \ f \in C(0,1) \end{cases}$

$t = x + 1$, $1 < t < 2$, $z(t) = y(t-1)$ $g(t) = f(t-1)$

$Lz = -t^2 z'' - 3t z' = \lambda z + g(t)$, $1 < t < 2$

$z(t) \in M$: $\alpha \cdot z(1) - z'(1) = 0$, $z'(2) = 0$

Замеч. Lz не эрмитов (не представим в виде $Lz = -(p(t) z')' + g(t) z$

Получим домножением на t равносильную краевую задачу:

$\tilde{L} z = -(t^3 z')' + 0 \cdot z = \lambda t z + t g(t)$, $1 < t < 2$

$z(t) \in \tilde{M} = M$ $h_1, h_2, H_1, H_2 \ge 0 \hookrightarrow$ случ. стандартн.

$\lambda = 0$ - собств. знач. опер. $\tilde{L}$ $\Leftrightarrow$ $h_1 = 0$, $H_1 = 0$, $q(t) = 0$

При $\alpha = 0$ $\quad \lambda = 0$ - с.з. опер. L

Перейдём к равносильному:

$$\tilde{L}(z) = -(\underbrace{t^3}_{p>0} z')' + \underbrace{3t}_{q(t)>0} z = \underbrace{(\lambda + 3)}_{\mu} t z + t \cdot g(t)$$

Для $\tilde{L}$: $\mu = 0$ не собств. знач.

Общ. решение $\tilde{L} z = 0$: $\quad t^2 z'' + 3 t z' - 3 z = 0$

$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = 1, -3$

Общ. решение есть $\quad z = \frac{C_1}{t^3} + C_2 t$

$$z'(t) = -\frac{3C_1}{t^4} + C_2$$

Шаг 1:

Ищем $v_1(x) \neq 0$, $L v_1(x) = 0$

$\alpha(C_1 + C_2) = -3C_1 + C_2 \hookrightarrow C_1 = 1 - \alpha, \; C_2 = \alpha + 3$

$$v_1 = \frac{1-\alpha}{t^3} + (\alpha + 3) t$$

$$v_2(t) = \frac{16}{t^3} + 3t$$

Шаг 2:

$$\tilde{W}(1) = \begin{vmatrix} 4 & 19 \\ 4\alpha & -45 \end{vmatrix} = -(76\alpha + 180)$$

Шаг 3:

$$\tilde{G}(t, \tau) = \frac{1}{76\alpha + 180} \begin{cases} v_1(t) v_2(\tau), & 1 \le t \le \tau \le 2 \\ v_1(\tau) v_2(t), & 1 \le \tau \le t \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$z(t) = \mu \int_1^2 \tilde{\tilde{G}}(t,\tau)\,\tau\, z(\tau)\,d\tau + \int_1^2 \tilde{\tilde{G}}(t,\tau)\, t\cdot g(\tau)\,d\tau$$

В исходных перем.:

$$y(x) = (\lambda+3) \int_0^1 \tilde{\tilde{G}}(x+1, \xi+1)(\xi+1)\,y(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^1 \tilde{\tilde{G}}(x+1, \xi+1)(\xi+1)\,f(\xi)\,d\xi.$$

16.1(3)

$\Delta u = 0$, $r < 1$ $\quad u(r=1) = \cos^4\varphi$

Шаг 1:

$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

Шаг 2:

$$u = A + Br^2\cos 2\varphi + Cr^4\cos 4\varphi$$

$$u\big|_{r=1} = A + B\cos 2\varphi + C\cos 4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

Откуда $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{8}$

Ответ: $u = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi + \frac{1}{8}r^4\cos 4\varphi$

16.2(3)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \sin^3\varphi \qquad \Delta u = 0,\ r < R$$

Шаг 1:

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

Шаг 2: $u = A + Br\sin\varphi + Cr^3\sin 3\varphi$

$u|_{r=R} = A + BR\sin\varphi + CR^3\sin 3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$

Откуда $A = 0$, $B = \frac{3}{4R}$, $C = -\frac{1}{4R^3}$

Ответ: $u = \frac{3}{4R} r\sin\varphi - \frac{r^3}{4R^3}\sin 3\varphi$

T2

(1) a) $\Delta u = 12x$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 < r < 2$

(2) $u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi$

(3) $u|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi$

Шаг 0: частн. реш. ур-ия (1)

$\tilde{u} = 2x^3 = 2r^3\cos^3\varphi$

(4) сделаем замену $u = v + \tilde{u}$

Подставим (4) в (1), (2), (3), попутно сделаем шаг 1.

$(1)'$ $\Delta v = 0$, $1 < r < 2$

$(2)'$ $v|_{r=1} = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

$(3)'$ $v|_{r=2} = -2\sin 2\varphi$

Шаг 2:

$v = A + B\ln r + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^2}\right)\sin 2\varphi \hookrightarrow$ в $(2)'$, $(3)'$

$A + B\cdot 0 + (C + D)\sin 2\varphi \equiv 1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

$A + B\ln 2 + \left(4C + \frac{D}{4}\right)\sin 2\varphi \equiv -2\sin 2\varphi$

$\begin{cases} A + B\cdot 0 = 1 \\ A + B\ln 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} C + D = -\frac{1}{2} \\ 4C + \frac{D}{4} = -2 \end{cases}$

$A=1,\ B=-\frac{1}{\ln 2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=0$

Ответ: $u=2r^3\cos^3\varphi+1-\log_2 r-\frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi=$

$=2x^3+1-\frac{1}{2}\log_2(x^2+y^2)-xy$

б) $\Delta u=4\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$, $1<r<2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$(2u-u_r)\big|_{r=1}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $u_r\big|_{r=2}=\frac{8x^2}{x^2+y^2}$

Шаг 0.1:

$4\frac{r^2-r^2\sin 2\varphi}{r^2}=4(1-\sin 2\varphi)$

Шаг 0.2:

$\Delta u=4$ $\hookrightarrow$ частн. реш. $\tilde{u}=r^2$

$\Delta u=-4\sin 2\varphi$ $\hookrightarrow$ частн. реш. $\tilde{\tilde{u}}=\sin 2\varphi\cdot g(r)$

$r^2g''(r)+rg'(r)-4g=-4r^2$

Замена $r=e^t$ $\quad g(r)=y(\ln r)$

$\cancel{r^2}\left(\ddot{y}(\ln r)\frac{1}{\cancel{r^2}}-\dot{y}(\ln r)\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)+\cancel{r}\,\dot{y}(\ln r)\frac{1}{\cancel{r}}-4y(\ln r)=-4r^2$

$\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)+\dot{y}(t)-4y(t)=-4e^{2t}$

$\ddot{y}(t)-4y(t)=-4e^{2t}$

$\tilde{y}_r=Ate^{2t}$

$(Ae^{2t}+2Ate^{2t})'_t=4Ae^{2t}+4Ate^{2t}$

$4Ae^{2t}+4Ate^{2t}-4Ate^{2t}=-4e^{2t}$ $\hookrightarrow$ $\tilde{y}_r=-te^{2t}$

$\tilde{g}_r(r)=r^2\ln r$ $\hookrightarrow$ $\tilde{\tilde{u}}=-r^2\ln r\cdot\sin 2\varphi$

Замена $u = v + r^2 - r^2 \ln r \sin 2\varphi$

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r^2} = \sin 2\varphi$$

$$\frac{8x^2}{x^2+y^2} = 8\cos^2\varphi = 4 + 4\cos 2\varphi$$

Шаг 1:

$$u_r = v_r + 2r - 2r \ln r \sin 2\varphi - r \sin 2\varphi$$

$$2v + \cancel{2} - 0 - v_r - \cancel{2} + \cancel{\sin 2\varphi} = \cancel{\sin 2\varphi} \hookrightarrow (2v - v_r)\Big|_{r=1} = 0$$

$$v_r + \cancel{4} - 4\ln 2 \sin 2\varphi - 2\sin 2\varphi = \cancel{4} + 4\cos 2\varphi$$

$$\hookrightarrow v_r\Big|_{r=2} = 4\cos 2\varphi + (2 + 4\ln 2)\sin 2\varphi$$

Шаг 2:

$$\begin{cases} v = A + B\ln r + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos 2\varphi + \left(Er^2 + \frac{F}{r^2}\right)\sin 2\varphi \\ 2(A + B\cdot 0 + (C+D)\cos 2\varphi + (E+F)\sin 2\varphi) - B - \\ - (2C - 2D)\cos 2\varphi - (2E - 2F)\sin 2\varphi) = 0 \\ \frac{B}{2} + \left(4C - \frac{2D}{8}\right)\cos 2\varphi + \left(4E - \frac{2F}{8}\right)\sin 2\varphi = \\ = 4\cos 2\varphi + (2 + \ln 2\cdot 4)\sin 2\varphi \end{cases}$$

$2A - B = 0$ $\qquad$ $B/2 = 0$

$2C + 2D - 2C + 2D = 0$ $\qquad$ $4C - \frac{2D}{8} = 4$

$2E + 2F - 2E + 2F = 0$ $\qquad$ $4E - \frac{2F}{8} = 2 + 4\ln 2$

$B = 0,\ A = 0,\ D = 0,\ C = 1,\ F = 0,\ E = \frac{1}{2} + \ln 2$

Ответ: $u = r^2\cos 2\varphi + \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) r^2 \sin 2\varphi + r^2 -$

$- r^2 \ln r \sin 2\varphi$

Т3 а)

$$\Delta u = x^2 + y^2 , \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x^2+y^2=1} = y + \alpha , \quad x^2 + y^2 = 1$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ $\qquad u(x,y) \longleftrightarrow v(r,\varphi): \ u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r,\varphi)$

$$u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi = v_r$$

Задача примет вид:

(1) $\Delta v = r^2 , \quad r < 1$

(2) $\left. v_r \right|_{r=1} = \sin\varphi + \alpha$

Шаг 0:

частное реш. ищем в виде $\tilde{v} = b r^4$

$$b \cdot 12 r^2 + 4 b r^2 = r^2 \ \rightarrow \ b = \frac{1}{16}$$

Замена $v = w + \frac{r^4}{16} , \quad v_r = w_r + \frac{r^3}{4}$

Получим следующую задачу:

(1)' $\Delta w = 0$

(2)' $\left. w_r \right|_{r=1} = \alpha - \frac{1}{4} + \sin\varphi$ - попутно сделан шаг 1.

Шаг 2:

$$w = A + B r \sin\varphi$$

$w_r = B\sin\varphi \equiv \alpha - \frac{1}{4} + \sin\varphi$

Если $\alpha \neq \frac{1}{4}$, то нет решений

Если $\alpha = \frac{1}{4}$, то $w = A + r\sin\varphi$ и решение исходной задачи есть $u = \frac{(x^2+y^2)^2}{16} + A + y$

T3б)

$$\Delta u = \frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad r>1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$u_r|_{r=1} = -2\sin\varphi - 4\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

u - ограничена

$$\frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{3\cos 2\varphi}{r^3} + \frac{\sin\varphi}{r^4}$$

Шаг 0.1:

$$\Delta u = \frac{3\cos 2\varphi}{r^3}$$

Частное решение ищем в виде $\tilde{u} = \frac{a\cos 2\varphi}{r}$

Откуда $\tilde{u} = -\frac{\cos 2\varphi}{r}$

Шаг 0.2:

$$\Delta u = \frac{\sin\varphi}{r^4} \hookrightarrow \tilde{\tilde{u}} = \frac{b\sin\varphi}{r^2} \hookrightarrow \tilde{\tilde{u}} = \frac{\sin\varphi}{3r^2}$$

Замена $u = v + \tilde{u} + \tilde{\tilde{u}}$

(1) $\Delta v = 0, \quad r>1$

(2) $v_r|_{r=1} = -\frac{4}{3}\sin\varphi - \cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi$

(3) v ограничена

Шаг 3

$$v = A + \frac{B}{r}\sin\varphi + \frac{C}{r^2}\cos 2\varphi + \frac{D}{r^2}\sin 2\varphi$$

$$v_r = -\frac{B\sin\varphi}{r^2} - \frac{2C\cos 2\varphi}{r^3} - \frac{2D\sin 2\varphi}{r^3}$$

$$v_r\Big|_{r=1} = -B\sin\varphi - 2\cos 2\varphi\cdot C - 2D\sin 2\varphi \equiv$$

$$\equiv -\frac{4}{3}\sin\varphi - \cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi$$

$$B = \frac{4}{3},\quad C = 2,\quad D = -2.$$

Получим $v = A + \frac{4}{3r}\sin\varphi + \frac{2}{r^2}\cos 2\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi$

Решение исходной задачи есть

$$v = A + \frac{4}{3r}\sin\varphi + \frac{2}{r^2}\cos 2\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{\sin\varphi}{3r^2} - \frac{\cos 2\varphi}{r}$$

$$\cancel{A + \frac{4y}{3(x^2+y^2)} +}$$

16.26(2)

$$u\Big|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{1}{2} + \sin 2\theta\sin\varphi\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2\theta\cos\varphi\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= Y_1^{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}Y_1^{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y_2^{-1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}Y_2^{1}\frac{3}{2}$$

Шаг 2

$$u = (A_{11}Y_1^{-1} + A_{12}Y_1^{1})r + (Y_2^{-1}A_{21} + Y_2^{1}A_{22})r^2$$

Подставив гран. усл-ия $\hookrightarrow$ $A_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_{12} = \frac{1}{2}$, $A_{21} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $A_{22} = \frac{3}{4}$

Ответ: $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Y_1^{-1} + \frac{1}{2} Y_1^1\right) r + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} Y_2^{-1} + \frac{3}{4} Y_2^1\right) r^2 =$

$= \left(r \sin\theta + r^2 \sin 2\theta\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$

16.28(2)

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\theta \sin\theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

Исходя из прошлой задачи, можно сделать замену $\psi = \varphi + \frac{\pi}{3}$ и искать решение обычными сферич. ф-циями.

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\theta \sin\theta \sin\psi = \frac{1}{5}\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta \sin\psi +$$

$$+ \frac{1}{5}\sin\theta \sin\psi = \frac{2}{15} Y_3^{-1} + \frac{1}{5} Y_1^{-1}$$

Решение ищем в виде:

$$u = A Y_1^{-1} \frac{1}{r^2} + B Y_3^{-1} \frac{1}{r^4}$$

Подставив гран. усл-ия: $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{15}$

Ответ: $u = \frac{1}{5} Y_1^{-1} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{15} Y_3^{-1} \frac{1}{r^4} =$

$$= \frac{1}{5r^2} \sin\theta \sin\psi + \frac{2}{15} \frac{1}{r^4} \frac{3}{2} \sin\theta \left(5\cos^2\theta - 1\right) \sin\psi =$$

$$= \frac{1}{5r^2} \sin\theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left[1 + \frac{1}{r^2}\left(5\cos^2\theta - 1\right)\right]$$

16.30(7)

$u|_{r=1} = \cos\varphi \sin 2\theta$, $u|_{r=2} = \sin\varphi \sin 2\theta$

$u|_{r=1} = \cos\varphi \cdot \frac{2}{3} \cancel{\frac{1}{2}}\, 3\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{3} Y_2^1$

$u|_{r=2} = \sin\varphi \frac{2}{3}\, 3\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{3} Y_2^{-1}$

Решение ищем в виде:

$u = \left(Ar^2 + \frac{B}{r^3}\right) Y_2^1 + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^3}\right) Y_2^{-1}$

Подставим граничные усл-ия:

$$\begin{cases} A + B = \frac{2}{3} \\ C + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + \frac{B}{8} = 0 \\ 4C + \frac{D}{8} = \frac{2}{3} \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} D = -\frac{16}{93} \\ C = \frac{16}{93} \\ B = +\frac{64}{93} \\ A = -\frac{2}{93} \end{cases}$$

Ответ: $u = \left(-\frac{2}{93} r^2 + \frac{64}{93 r^3}\right) Y_2^1 + \left(\frac{16}{93} r^2 - \frac{16}{93 r^3}\right) Y_2^{-1}$

16.31(1)

$(3u + u_r)|_{r=1} = 5\sin^2\theta \sin 2\varphi = \frac{5}{3} Y_2^{-2}$

$u|_{r=2} = -\cos\theta = -Y_1^0$

Решение ищем в виде

$u = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) Y_1^0 + \left(Cr^2 + \frac{D}{r^3}\right) Y_2^{-2}$

$u_r = \left(A - \frac{2B}{r^3}\right) Y_1^0 + \left(2C - \frac{3D}{r^4}\right) Y_2^{-2}$

Подставим в граничн. усл-ия:

$$(3A+3B)Y_1^0+(3C+3D)Y_2^{-2}+(A-2B)Y_1^0+(2C-3D)\cdot Y_2^{-2}=$$

$$=-\frac{5}{3}Y_2^{-2}$$

$$\left(2A+\frac{B}{4}\right)Y_1^0+\left(4C+\frac{D}{8}\right)Y_2^{-2}=-Y_1^0$$

$$\begin{cases}4A+B=0\\ 2A+\frac{B}{4}=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}5C=-\frac{5}{3}\\ 4C+\frac{D}{8}=0\end{cases}\quad \hookrightarrow \begin{cases}A=-1\\ B=4\\ C=\frac{1}{3}\\ D=-\frac{32}{3}\end{cases}$$

Ответ: $u=\left(-r+\frac{4}{r^2}\right)Y_1^0+\left(\frac{r^2}{3}-\frac{32}{3r^3}\right)Y_2^{-2}$

T4

$$\Delta u=0,\quad x^2+y^2+z^2<4$$

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=4}=yz^2,\quad x^2+y^2+z^2=4$$

Замена:

$$u(x,y,z)\longleftrightarrow \tilde{u}(r,\theta,\varphi)$$

$$u(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\equiv\tilde{u}(r,\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

Получим следующую задачу:

$$\Delta\tilde{u}=0,\quad r<2$$

$$(\tilde{u}+\tilde{u}_r)\big|_{r=2}=2\sin\theta\cos\varphi\, r^2\cos^2\theta\big|_{r=2}=8\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi=$$

$$=\frac{8}{5}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+\frac{16}{15}P_3^1(\cos\theta)\cos\varphi=Y_1+Y_3$$

Решение ищем в виде

$$\tilde{u} = A r Y_1 + B r^3 Y_3$$

$$\tilde{u}_r = A Y_1 + 3 B r^2 Y_3$$

$$(2 A Y_1 + 8 B Y_3) + (A Y_1 + 12 B Y_3) = Y_1 + Y_3$$

$$3A = 1 \quad 20B = 1 \quad \hookrightarrow A = \frac{1}{3}, \; B = \frac{1}{20}$$

Ответ: $u = \frac{1}{3} r \left(\frac{8}{5} \sin\theta \cos\varphi\right) + \frac{1}{20} r^3 \left(\frac{16}{15} \frac{\sin\theta}{2} (15\cos^2\theta - 3) \cdot \cos\varphi\right)$

T5

$$\begin{cases} D: \; 1 < r < 2, \quad u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}) \\ \left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{r=1} = (u + u_r)\Big|_{r=1} = \sin\theta \sin\varphi = Y_1^{-1} \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=2} = u_r\Big|_{r=2} = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде

$$u = \left(A r + \frac{B}{r^2}\right) Y_1^{-1}$$

$$u_r = \left(A - \frac{2B}{r^3}\right) Y_1^{-1}$$

Подставим граничн. усл-ия:

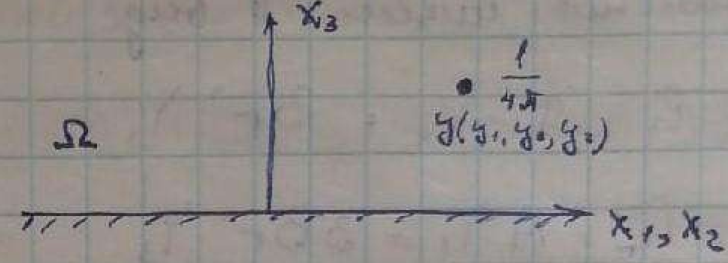
$$\begin{cases} (A + B) Y_1^{-1} + (A - 2B) Y_1^{-1} = Y_1^{-1} \\ \left(A - \frac{2B}{8}\right) Y_1^{-1} = 0 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} 2A - B = 1 \\ 4A - B = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = -2$$

Ответ: $u = \left(-\frac{1}{2} r - \frac{2}{r^2}\right) \sin\theta \sin\varphi$

17.1(1, 2)

1) $x_3 > 0$



Используем метод отражений: $\cdot -\frac{1}{4\pi}$ $\hat{y}(y_1, y_2, -y_3)$

на том же расст. от оси поместим заряд противоп. знака $\hat{y}$: $G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi|x-\hat{y}(y)|}\right]}_{g(x,y)}$,

Покажем, что G - ф-ция Грина:

- ф-ция $\frac{1}{r}$ гармонич. в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \Rightarrow \frac{1}{|x|}$ гарм. в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

и при фикс. $a \in \mathbb{R}^3$ ф-ция $\frac{1}{|x-a|}$ гарм. в $\mathbb{R}^3\setminus\{a\}$.

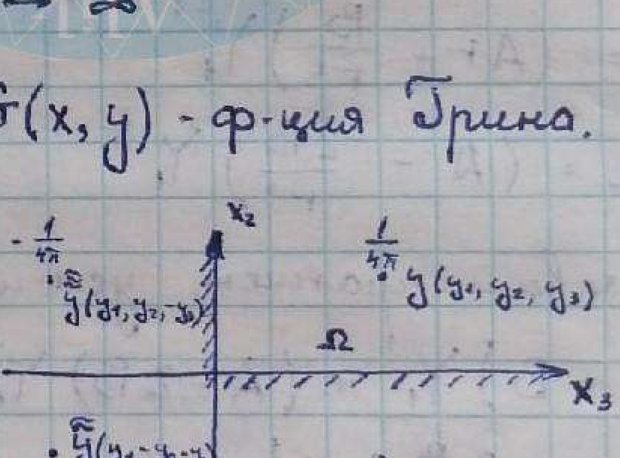
Поскольку $\hat{y} \notin \Omega$, то $g(x,y)$ гарм. в Ω и непр. в $\overline{\Omega}$ $\forall y \in \Omega$

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}$$

- $G(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} = G(x,y)\big|_{x_3=0} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0$ при $|x| \to \infty$

Откуда следует, что $G(x,y)$ - ф-ция Грина.

2) $x_2 > 0$, $x_3 > 0$



Аналогично методом отражений получаем:

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\hat{y}|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\hat{\hat{y}}|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\tilde{\hat{y}}|}\right]}_{g(x,y)},$$

Покажем, что G - ф-ция Грина:

- $g(x,y)$ гармонична в Ω, т.к. $\tilde{y} \notin \Omega$, $\tilde{\tilde{y}} \notin \Omega$, $\tilde{\tilde{\tilde{y}}} \notin \Omega$ и непр. в $\overline{\Omega}$ $\forall y \in \Omega$
- $G(x,y)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0$ при $|x| \to \infty$

Откуда следует, что $G(x,y)$ - ф-ция Грина.

17.2(2)

$|x| < R$, $x_3 > 0$

Сначала построим ф-цию Грина для шара (при $|y| \neq 0$)

Поместим заряд q в точку y^* так, чтобы y^* был симм. y, т.е. $|y| \cdot |y^*| = R$ (y и y^* лежат на одной прямой)

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{R} = \frac{R}{|y^*|} = \frac{|x|}{|y^*|}$$

Откуда ΔOxy и ΔOy^*x подобны $\hookrightarrow$ $\dfrac{|y|}{R} = \dfrac{|x-y|}{|x-y^*|}$

Ф-ция $G^*(x,y)$ на сфере должна быть нулевой

$$G^*(x,y) = \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\Bigg|_{|x|=R} = \left(\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\Bigg|_{|x|=R} = 0$$

Откуда $q = \dfrac{R}{|y|}$

$$G^*(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y|\cdot|x-y^*(y)|}, \quad y^*(y) = y\,\frac{R^2}{|y|^2}$$

Для полусферы отразим полученные y и y^* относит. плоскости Ox_1x_2: $y^{**} = (y_1, y_2, -y_3)$, $y^{***} = y^{**}\frac{R^2}{|y|^2}$

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \underbrace{\left[-\frac{R}{4\pi|y|}\frac{1}{|x-y^*(y)|} - \frac{1}{4\pi|x-y^{**}(y)|} + \frac{R}{4\pi|y||x-y^{***}(y)|}\right]}_{g(x,y)}$$

Аналогично $G(x,y)$ - ф-ция Грина, т.к.

- $g(x,y)$ гармонична всюду, кроме y^*, y^{**}, y^{***}, которые не лежат в замыкании исслед. области
- $G(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \quad \forall y \in \Omega$
- $g(x,y) \to 0, \ |x| \to \infty$

17.4(1)

$$\Delta u = -f(x), \ x_3 > 0, \ u|_{x_3=0} = u_0(x)$$

f, u_0 непрерывны и ограничены

Решение задачи задаётся ф-цией Грина:

$$u(x) = -\int_{\partial D}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}_y}u_0(y)\,dS_y - \int_D G(x,y) f(y)\,dy$$

Из задачи 17.1(1)

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, $y_3 > 0$

Внешняя нормаль к границе области $D = \{y \in R^3, y_3 > 0\}$ направлена вдоль оси Oy_3, вниз

Откуда $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}_y} = -\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_3}\right|_{y_3=0} = \left[\frac{x_3-y_3}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{3/2}} - \frac{-(x_3+y_3)}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2\right)^{3/2}}\right]\Bigg|_{y_3=0} =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{3/2}}$$

<u>Ответ:</u> $u(x) = \dfrac{x_3}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{u_0(y)}{|x-y|^3}\,dS_y + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}\left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}\right)f(y)\,dy$

17.12(3)

$$\Delta u = 0,\ y>0,\ u|_{y=0} = u_0(x)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,b] \\ 0, & x\notin[a,b] \end{cases}$$

Найдём ф-цию Грина. Она получается аналогично задаче 17.1(1), но только тут случай двумерный:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|\xi-\eta| - \frac{1}{2\pi}\ln|\xi-\eta^*|,\ \text{где } \eta=(x',y'),\ \eta^*=(x',-y'),\ \xi=(x,y)$$

Решение имеет вид

$$u(x,y) = -\int\limits_{y'=0}\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial \vec{n}_\eta}\,u_0(\eta)\,dS_\eta$$

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{(x-x')^2+(y+y')^2}}$$

Внешняя нормаль направлена вниз вдоль Oy':

$$\left.\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial \vec{n}_\eta}\right|_{y'=0} = -\left.\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial y'}\right|_{y'=0} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}}\;\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\cdot\frac{-(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{(x-x')^2+(y+y')^2} =$$

$$\left. \frac{- \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,\dfrac{y+y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}}{} \right|_{y'=0} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{-2y}{(x-x')^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}$$

$$u(x,y) = -\int_a^b \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\,dx' = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x'-x}{y}\right)\Big|_b^a =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a-x}{y}\right) + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{b-x}{y}\right)$$

Ответ: $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x-a}{y}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{b-x}{y}\right)\right)$

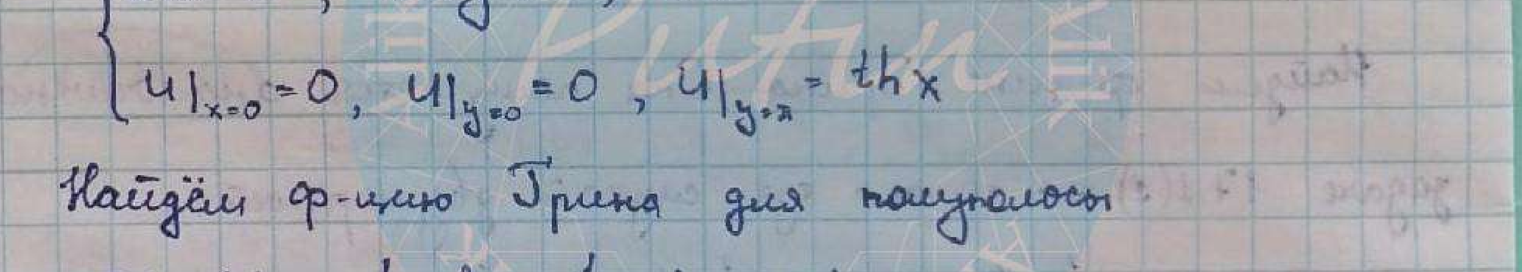
17.15(4)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0<y<\pi,\ x>0 \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=\pi} = \mathrm{th}\,x \end{cases}$$

Найдём ф-цию Грина для полуполосы

$$G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z,\xi)|}$$

где $w(z,\xi)$ - конформное отображение полуполосы на внутренность единичного круга, переводящее точку ξ в центр круга



$$w_2 = e^z + e^{-z} = 2\,\mathrm{ch}\,z$$

Точка ξ перейдёт в $2\,\mathrm{ch}\,\xi$

Верхняя полуплоск. переводится во внутр. окр-сти с помощью ДЛО:

$$w = \frac{w_2(z) - w_2(\xi)}{w_2(z) - \overline{w_2(\xi)}} = \frac{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\xi}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\bar{\xi}}$$

$$G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\bar{\xi}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\xi} \right|$$

Перейдём к действит. перем.: $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$

$$|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\bar{\xi}| = 2\left|\operatorname{sh}\frac{z+\bar{\xi}}{2}\operatorname{sh}\frac{z-\bar{\xi}}{2}\right| = 2\operatorname{sh}\left|\frac{z+\bar{\xi}}{2}\right| \operatorname{sh}\left|\frac{z-\bar{\xi}}{2}\right| =$$

$$= 2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2}}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}{2}$$

$$|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\xi| = 2\operatorname{sh}\left|\frac{z+\xi}{2}\right|\operatorname{sh}\left|\frac{z-\xi}{2}\right| = 2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{2}$$

Решение имеет вид

$$u(\xi, \eta) = -\int\limits_{y'=\pi} \frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_2} \operatorname{th} x' \, dx'$$

$$\left.\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_2}\right|_{y'=\pi} = \left.\frac{\partial G}{\partial y'}\right|_{y'=\pi}$$

$$G(x, x', y, y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2}{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y'}\right|_{y'=\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4}{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2} \cdot \frac{(p_1' \operatorname{ch} p_1 \operatorname{sh} p_2 + p_2' \operatorname{ch} p_2 \operatorname{sh} p_1)\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4 -}{}$$

$$\left.\frac{-(p_3' \operatorname{ch} p_3 \operatorname{sh} p_4 + p_4' \operatorname{ch} p_4 \operatorname{sh} p_3)\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2}{(\operatorname{sh} p_3)^2 (\operatorname{sh} p_4)^2}\right|_{y'=\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{p_1' \operatorname{ch} p_1 \operatorname{sh} p_2 + p_2' \operatorname{ch} p_2 \operatorname{sh} p_1}{\operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2} - \frac{1}{2\pi} \frac{p_3' \operatorname{ch} p_3 \operatorname{sh} p_4 + p_4' \operatorname{ch} p_4 \operatorname{sh} p_3}{\operatorname{sh} p_3 \operatorname{sh} p_4} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left.\left(p_1' \operatorname{cth} p_1 + p_2' \operatorname{cth} p_2 - p_3' \operatorname{cth} p_3 - p_4' \operatorname{cth} p_4\right)\right|_{y'=\pi}$$

Осталось посчитать интеграл

18.6(1)

$$\rho = \rho(|x|) \in C$$

$$|x| < R$$

$$V(x) = \int\limits_{|y|<R} \frac{\rho(|y|)\,dy}{|x-y|}$$

Зафиксируем x. Тогда $\exists$ ортог. матрица S: $x = S\begin{pmatrix}0\\0\\|x|\end{pmatrix}$.

Замена $y = S\tilde{y}$

$$V(x) = \int\limits_{|S\tilde{y}|<R} \frac{\rho(|S\tilde{y}|)\,|\det S|\,d\tilde{y}}{\left|S\left(\begin{pmatrix}0\\0\\|x|\end{pmatrix} - \tilde{y}\right)\right|} = \int\limits_{|\tilde{y}|<R} \frac{\rho(|\tilde{y}|)\,d\tilde{y}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+(y_3-|x|)^2}}$$

Перейдём в сферич. координаты:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ \tilde{y}_2 = r\sin\theta\cos\varphi \\ \tilde{y}_3 = r\cos\theta \end{cases} \qquad V(x) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho(r)r^2dr \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta}}}_{I(x)}$$

① $x = \vec{0}$

$$I(\vec{0}) = \frac{2}{r} \hookrightarrow V(\vec{0}) = 4\pi\int\limits_0^R \rho(r)\,r\,dr$$

② $x \neq \vec{0}$

$$I(x) = \frac{1}{2r|x|}\int\limits_0^{\pi} \frac{d(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta)}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta}} = -\frac{1}{r|x|}\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta}\,\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{r+|x|-|r-|x||}{r|x|}$$

a) $|x| \geq R \hookrightarrow |r-|x|| = |x|-r \quad \forall r \leq R$

$$I(x) = \frac{r+|x|-(|x|-r)}{r|x|} = \frac{2}{|x|}, \quad V(x) = \frac{4\pi}{|x|}\int\limits_0^R \rho(r)r^2dr$$

б) $0 < |x| < R$

$$I(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|}, & r \le |x| \\ \frac{2}{r}, & r > |x| \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^{|x|} \rho(r) r^2 dr + 4\pi \int_{|x|}^{R} \rho(r) r dr$$

18.16 Потенциал простого слоя на сфере $|x| = R$:

$$V^{(0)}(x) = \int_{|y|=R} \frac{\mu_0}{|x-y|} dS_y$$

Параметризуем сферу:

угол между $\vec{x}$ и $\vec{y}$ есть θ, φ - полярный угол в плоск. $\perp \vec{x}$

Учитывая, что $|y| = R$:

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x| R \cos\theta}$$

$$V^{(0)}(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 R^2 \sin\theta}{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x| R\cos\theta}} d\theta = 2\pi \mu_0 R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x| R\cos\theta}} =$$

$$= 2\pi \mu_0 R^2 \left. \frac{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x| R\cos\theta}}{|x| R} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi \mu_0 R^2}{|x| R} \left(R + |x| - \left| R - |x| \right| \right)$$

1) $|x| \geq R$

$$V^{(0)}(x) = \frac{2\pi \mu_0 R}{|x|} \left(R + |x| + R - |x| \right) = 4\pi \mu_0 \frac{R^2}{|x|}$$

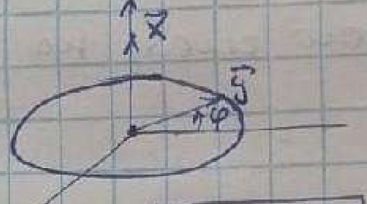
2) $|x| < R$

$$|x| < R \hookrightarrow V^{0}(x) = 4\pi \mu_0 R$$

18.18(4)

$$V^{(0)}(x)=\int\limits_{0<|y|<R}\frac{\mu(\varphi)}{|x-y|}\,dS_y$$

Параметриз. диск полярн. координатами:



т.к. на оси диска

$$|x-y|\Big|_{|y|=r}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}\Big|_{|y|=r}=\sqrt{|x|^2+r^2}=\sqrt{x_3^2+r^2}$$

$$V^{(0)}(x)=\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi\int_0^R\frac{r\,dr}{\sqrt{x_3^2+r^2}}=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{dr^2}{\sqrt{x_3^2+r^2}}\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\left(\sqrt{x_3^2+R^2}-|x_3|\right)\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi$$

18.19(1)

$$V^{(0)}(x)=\mu_0\int\limits_S\frac{1}{|x-y|}\,dS_y$$

$$S=\{x_1^2+x_2^2=R,\ 0\le x_3\le H\}$$

Пов-сть S параметризуем полярным углом и вертик. координатой z

$$|x-y|=\sqrt{(z-x_3)^2+R^2}$$

$$V^{(0)}(x)=\mu_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H\frac{R\,dz}{\sqrt{(z-x_3)^2+R^2}}=$$

$$=2\pi\mu_0R\ln\left|R\sqrt{(z-x_3)^2+R^2}+R(z-x_3)\right|\Big|_0^H=2\pi\mu_0R\ln\frac{H-x_3+\sqrt{R^2+(H-x_3)^2}}{\sqrt{R^2+x_3^2}-x_3}$$

18.20

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y$$

$$\nabla_y \frac{1}{|x-y|} = \nabla_y \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} = \frac{x-y}{|x-y|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right)$$

Обозначим $\vec{a} = \frac{x-y}{|x-y|^3}$.

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y$$

1) $\rceil$ $|x| > R$

$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \nabla_y \frac{1}{|x-y|} = 0$

По ф-ле Гаусса-Остроградского $V^{(1)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \nu_0 \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0$

2) $\rceil$ $|x| < R$

Рассмотрим область $G_\varepsilon = \{|y|<R \setminus \{|y-x|\leq\varepsilon\}$

$\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в G_ε аналогично 1)

По т. Острогр.-Гаусса для обл. G_ε

$$\underbrace{\int\limits_{|y|=R} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y}_{V^{(1)}(x)} + \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y = 0$$

$$V^{(1)}(x) = -\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y = -\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0 \frac{(x-y, x-y)}{|x-y|^3 \varepsilon} dS_y =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \nu_0\, dS_y = -\frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 \nu_0 = -4\pi \nu_0$$

③] $|x| = R$

По св-ву потенциала двойного слоя:

$$V^{(1)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| > R}} V^{(1)}(x) = 2\pi \nu_0 + V_3^{(1)}(x_0), \text{ где } |x_0| = R$$

$$V^{(1)}(x_0) = 2\pi\nu_0 - 4\pi\nu_0 = -2\pi\nu_0 \quad \forall x_0 : |x_0| = R$$

Ответ:

$$V^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > R \\ -2\pi\nu_0, & |x| = R \\ -4\pi\nu_0, & |x| < R \end{cases}$$

18.22(3)

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y$$

Аналогично прошлой задаче

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \left(\frac{x-y}{|x-y|^3}, \vec{n}_y\right) dS_y$$

$\vec{n}_y = -\vec{k}$ – против оси x_3, по условию

$$V^{(1)}(x) = \int\limits_{0<|y|<R} \nu(\varphi) \frac{-x_3 + y_3}{|x-y|^3} dS_y$$

Аналогично 18.18(4) параметризуем диск и получаем

$$V^{(1)}(x) = \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi \int_0^R \frac{(y_3 - x_3)\, r\, dr}{(x_3^2 + r^2)^{3/2}}$$

При этом $x_3 - y_3 = x_3 - 0 = x_3$

$$V^{(1)}(x) = \frac{-x_3}{2} \int_0^R \frac{d r^2}{(x_3^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi = x_3 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} - \frac{1}{|x_3|}\right) \int_0^{2\pi} \nu(\varphi)\, d\varphi, \; x_3 \neq 0$$