Упражнение 2

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \qquad \forall \alpha, \beta$$

$\hookrightarrow$ следует (1 утв.)

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta - \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma \qquad \forall \alpha, \beta$$

т.е. $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma$

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \sigma_\alpha a_\alpha \sigma_\beta b_\beta = a_\alpha b_\beta (\delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma) =$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}) + i(\vec{\sigma}, [\vec{a} \times \vec{b}])$$

Упражнение 3

$$e^{i\alpha(\vec{\sigma}\vec{n})} = \cos(\alpha\vec{\sigma}\vec{n}) + i\sin(\alpha\vec{\sigma}\vec{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}(\vec{\sigma}\vec{n})^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}(\vec{\sigma}\vec{n})^{2k+1}}{(2k+1)!} \ominus$$

$$(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = \sigma_\alpha n_\alpha \sigma_\beta n_\beta = (\vec{n}\vec{n}) + i(\vec{\sigma}, \vec{n} \times \vec{n}) = 1$$

$$\ominus \cos\alpha + i(\vec{\sigma}\vec{n})\sin\alpha$$

Упражнение 4.

$$\hat{\sigma}_n = (\hat{\vec{\sigma}}\vec{n}) \qquad \vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_\alpha n_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Найдём собств. значения:

$$|\sigma - \lambda E| = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta =$$

$$= -(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = -1 + \lambda^2 = 0$$

Откуда $\lambda = \pm 1$.

Рассмотрим $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{\sin\theta e^{i\varphi}}{1+\cos\theta}\alpha_1 = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\alpha_1 = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}\alpha_1$$

Длина вектора 1 $\hookrightarrow$ $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$

$$|\alpha_1|^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = 1 \hookrightarrow |\alpha_1| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Считаем, что фаза нулевая $\hookrightarrow$ $\alpha_1 = \cos\frac{\theta}{2}$, $\beta_1 = \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$

Собств. вектор есть $\vec{\chi}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

В силу ортонормированности базиса из собств. векторов

$\vec{\chi}_2 = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, т.к. $(\vec{\chi}_1^{\dagger}, \vec{\chi}_2) = 0$

$\vec{n} \parallel Ox$: $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = 0$

$\vec{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \parallel Oy$: $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\vec{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\vec{n} \parallel Oz$: $\theta = 0$, $\varphi = 0$

$\vec{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Упражнение 5.

Т.к. проекция на z и сох. 1/2, то $\chi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$W_+ = |(\chi_1^+ \chi)|^2 = \left|\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \underline{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$W_- = |(\chi_2^+ \chi)|^2 = \underline{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Задача 1

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi, \quad \hat{H} = -\mu_0(\vec{B}\vec{\sigma}), \quad \Psi(t) = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$$

$t=0$: $\Psi(t=0) = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{B} \parallel Ox$

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -\mu_0 B\sigma_x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -\mu_0 B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -\mu_0 B\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\dot{a} = -\underbrace{\left(\frac{\mu_0 B}{\hbar}\right)}_{=\Omega} b \\ i\dot{b} = -\frac{\mu_0 B}{\hbar} a\end{cases} \hookrightarrow \begin{cases}\dot{a} = i\Omega b \\ \dot{b} = i\Omega a\end{cases}$$

$$\ddot{a} = i\Omega i\Omega a = -\Omega^2 a$$

$$\begin{aligned}&\ddot{a} + \Omega^2 a = 0 \\ &\ddot{b} + \Omega^2 b = 0\end{aligned} \hookrightarrow \quad a(t) = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t$$

$$a(0) = C_1 = 1$$

$$b = \frac{1}{i}(-\sin\Omega t + C_2\cos\Omega t)$$

$$b(0) = \frac{C_2}{i} = 0$$

Откуда $a(t) = \cos\Omega t$, $b(t) = i\sin\Omega t$

$\Psi(t) = \cos\Omega t\,|\uparrow\rangle + i\sin\Omega t\,|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ i\sin\Omega t\end{pmatrix}$ – зав-сть спиновой ф-ции от времени

$\langle\Psi(t)| = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)$

$\langle\sigma_x\rangle = \langle\Psi(t)|\sigma_x|\Psi(t)\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ i\sin\Omega t\end{pmatrix} = 0$

$\langle\sigma_y\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ i\sin\Omega t\end{pmatrix} = \sin 2\Omega t$

$\langle\sigma_z\rangle = (\cos\Omega t, -i\sin\Omega t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ i\sin\Omega t\end{pmatrix} = \cos 2\Omega t$

Вектор поляризации

$\vec{P} = \begin{pmatrix}\langle\sigma_x\rangle\\ \langle\sigma_y\rangle\\ \langle\sigma_z\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \sin 2\Omega t\\ \cos 2\Omega t\end{pmatrix}, \quad |\vec{P}| = 1$ – длина пост.

↑ движение по окр-сти в плоск. Oyz с центр. в нач. коорд. и радиусом 1.

В представлении Гейзенберга:

$(\sigma_x)_Г = e^{-i\Omega t\sigma_x}\,\sigma_x\, e^{i\Omega t\sigma_x} = \sigma_x$

$(\sigma_y)_Г = e^{-i\Omega t\sigma_x}\,\sigma_y\, e^{i\Omega t\sigma_x} = (\cos\Omega t - i\sigma_x\sin\Omega t)\sigma_y\cdot$

$\cdot(\cos\Omega t + i\sigma_x\sin\Omega t) = \cos^2\Omega t\,\sigma_y - i\sin\Omega t\cos\Omega t\cdot$

$\cdot(\underbrace{\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x}_{[\sigma_x,\sigma_y] = 2i\sigma_z}) + \sin^2\Omega t\,\underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_x}_{-\sigma_x^2\sigma_y = -\sigma_y,\ \sigma_x^2 = 1} = \sigma_y(\cos^2\Omega t - \sin^2\Omega t) -$

$-i2i\sin\Omega t\cos\Omega t\,\sigma_z = \sigma_y\cos 2\Omega t + \sigma_z\sin 2\Omega t$

$(\sigma_z)_Г = \sigma_z\cos 2\Omega t - \sigma_y\sin 2\Omega t$

Откуда вектор поляризации есть:

$$(\vec{P})_r(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ 0 & -\sin 2\Omega t & \cos 2\Omega t \end{pmatrix}$$ – поворот в (y, z)

Длина 1, постоянна

<u>Задача 3</u>

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + U_{эфф} u = E u$$

S-состояние $\hookrightarrow l = 0 \hookrightarrow m = 0$

$$U_{эфф} = U(r)$$

- $-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \underset{0}{\underbrace{U(r)}} u = E u, \quad r < a$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' = E u \hookrightarrow u'' + \overbrace{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}^{=k^2} u = 0$$

$u(r) = A \sin kr$ (т.к. $u(0) = 0$), в силу нормировки

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \hookrightarrow u(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin kr$$

- $r > a \quad u(r) = 0 \quad u(a) = 0 \hookrightarrow \sin ka = 0$

$$ka = \pi n_r \hookrightarrow u(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} n_r^2, \quad n_r = 1, 2, \dots \qquad l = 0$$

Откуда получим, что

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right)\overbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}^{Y_{00}} = \psi_{n_r 00}(\vec{r})$$

Ответ: $E_{n_r} = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} n_r^2$, $n_r = 1, 2, \ldots$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}\cdot r}\,\sin\left(\frac{\pi n_r}{a} r\right)$$