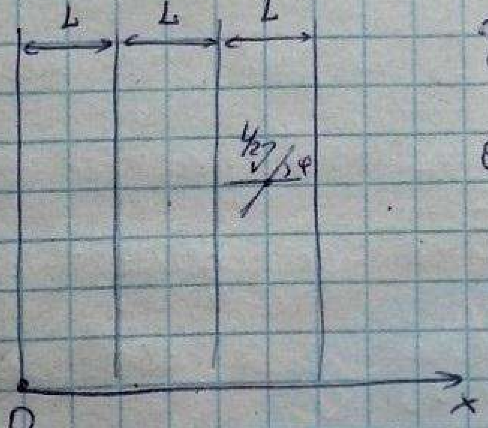
29



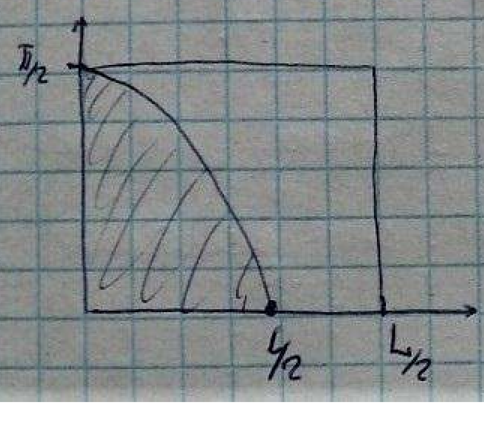
Исход опыта будем описывать X – центр иглы (абсцисса)

φ – угол наклона центра иглы

Ясно, что $0 \le X \le \frac{L}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Чтобы пересеклась линия, надо, чтобы

$X < \frac{L}{2}\cos\varphi$



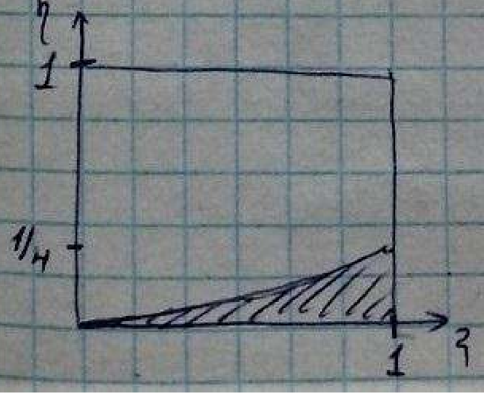
$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{L}{2}\cos\varphi \, d\varphi}{\pi L/4} = \frac{4L}{2\pi L} = \frac{2L}{\pi L}$$

30

Чтобы были действ. корни, надо, чтобы

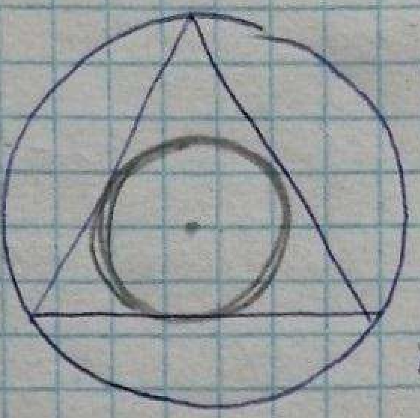
$D = \xi^2 - 4\eta \geq 0 \hookrightarrow \eta \leq \frac{\xi^2}{4}$

Чтобы 1 знака, то $\eta \geq 0$. (это вып-но).



$$P(A) = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{4}}{1} = \frac{x^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

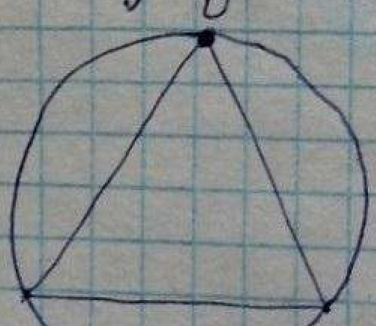
31



I Пусть у нас случайно выбирается точка в круге. Она определяет единственную хорду, для кот. явл-ся серединой (кроме центра круга).

Эта хорда будет длиннее стороны Δ, если её середина будет внутри круга, кот. вписан в Δ. Его $r = \frac{R}{2}$ ↪ $P(A) = \frac{S_r}{S_R} = \frac{1}{4}$.

II Теперь зафиксируем 1 точку на окружности, и случайно определяем 2 точку на окр-сти.



Хорда будет длиннее стороны Δ, если она будет пересекать Δ.

1 дуга подх.

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

3 равн. дуги всего

Получаем зав-сть вероятности 1 события от того, что считать случайным

V

(32) m белых, n черных

$p = \frac{m}{n+m}$ - вер-сть вынуть белый

$q = 1-p$ - черной

ξ - число вынутых шаров до появл. белого

$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m \geq 1$

$$E(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} m p q^{m-1} = p \sum_{m=1}^{\infty} (q^m)'_q = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{1}{p} = \frac{n+m}{m}$$

$$E(\xi(\xi-1)) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) p q^{m-1} = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' = \frac{2pq}{(1-q)^3}$$

$$D(\xi) = E\xi^2 - E^2(\xi) = E(\xi(\xi-1)) + E(\xi) - E^2(\xi) =$$

$$= \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{n(n+m)^2}{(n+m)m^2} = \frac{n(n+m)}{m^2}$$

33

ξ	-1	0	1
P	$1/3$	$1/6$	$1/2$

η	0	1
P	$1/6$	$5/6$

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	0	$1/3$
0	$1/6$	0
1	0	$1/2$

$$E(\eta) = \frac{5}{6}$$

$$E(\eta^2) = \frac{5}{6}$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{5}{36}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{6}$$

$$E(\xi\eta) = -\frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36}$$

Ответ: $E(\eta) = \frac{5}{6}$ $D(\eta) = \frac{5}{36}$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{36}$

(34) Пусть ξ - выигрыш.

a)

ξ	2	4	...	2^n	...
p	$1/2$	$1/4$		$1/2^n$	

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \to \infty$$ ряд расходится.

Ни для какого n не выгодно.

в)

ξ	2	4 ...	2^{19}	10^6	10^6	...
P	$1/2$	$1/4$ ...	$1/2^{19}$	$1/2^{20}$	$1/2^{21}$	...

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{19} 1 + \sum_{n=20}^{\infty} 10^6 \cdot \frac{1}{2^n} = 19 + 10^6 \cdot \frac{1}{2^{20}} \cdot \frac{1}{1-1/2} =$$

$$= 19 + \frac{10^6}{2^{19}} = 20,91$$

При $N \geq 21$ казино будет выгодна эта игра