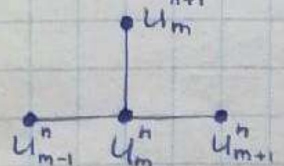
XII.7.2

Для ур-ия $u_t + cu_x = 0$ построить схему max порядка апрокс. и исследовать её сх-сть



Разложим по Тейлору в окрестности u_m^n

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}''$$

$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm h u_x' + \frac{h^2}{2} u_{xx}''$$

$$\delta u_m^{n+1} = \alpha u_{m-1}^n + \beta u_m^n + \gamma u_{m+1}^n$$

$$\frac{\delta\tau^3}{6}u_{ttt}''' + \delta u_m^n + \tau\delta u_t' + \delta\frac{\tau^2}{2}u_{tt}'' = \alpha u_m^n - \alpha h u_x' + \alpha\frac{h^2}{2}u_{xx}'' + \beta u_m^n +$$

$$+ \gamma u_m^n + \gamma h u_x' + \gamma\frac{h^2}{2}u_{xx}'' + O(h^4) + O(\tau^4) - \alpha\frac{h^3}{6}u_{xxx}''' + \gamma\frac{h^3}{6}u_{xxx}'''$$

$$\begin{cases} \delta = \alpha + \beta + \gamma & (1) \\ -c\tau\delta = -\alpha h + \gamma h & (2) \\ \delta\frac{\tau^2}{2}c^2 = \alpha\frac{h^2}{2} + \gamma\frac{h^2}{2} & (3) \\ -\frac{\delta\tau^3c^3}{6} = \frac{-\alpha+\gamma}{6}h^3 & (4) \end{cases}$$

$$(2) \hookrightarrow -c\tau(\alpha+\beta+\gamma) = h(\gamma-\alpha)$$

$$\downarrow$$

$$\beta = -(\gamma-\alpha)\frac{h}{c\tau} - (\alpha+\gamma)$$

Подставим в (3):

$$-(\gamma-\alpha)\frac{h}{\cancel{c\tau}}\frac{\tau^{\cancel{2}}c^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = \frac{(\alpha+\gamma)h^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

$$-\gamma c\tau + \alpha c\tau = \alpha h + \gamma h \rightarrow \alpha = \frac{\gamma h + c\tau\gamma}{c\tau - h}$$

Подставим в (4):

$$+(\gamma-\alpha)\frac{h}{c\tau}\frac{\tau^3c^3}{\cancel{6}} = \frac{-\alpha+\gamma}{\cancel{6}}h^3 \hookrightarrow c^2\tau^2 = h^2$$

Получаем, что если наложить усл-ия на сетку $c\tau = h$, то получим $3^{й}$ порядок аппроксимации.

Но смотря на усл-ия $2^{го}$ пор. $\alpha = \frac{\gamma h + c\tau\gamma}{c\tau - h} \hookrightarrow c\tau \neq h$.

Значит максимально возможный порядок апрокс есть 2. Положим $\delta = 1$. Тогда

$$\gamma = \frac{\tau^2 c^2}{2h^2} - \frac{c\tau}{2h}, \quad \alpha = \frac{\tau^2 c^2}{2h^2} + \frac{c\tau}{2h}, \quad \beta = 1 - \frac{\tau^2 c^2}{h^2}.$$

Получим:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{c\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} c\tau = O(h^2) + O(\tau^2)$$

Второй порядок апрокс.

Либо: $$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} c + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} c^2\tau = 0.$$

Исследуем на сходимость:

$$u_m^n = \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{ikmh} - \lambda^n e^{ikmh}}{\tau^2} + \frac{\lambda^n e^{ik(m+1)h} - \lambda^n e^{ik(m-1)h}}{2\tau h} c + \frac{\lambda^n e^{ik(m+1)h} - \lambda^n e^{ik(m-1)h}}{2h^2} c^2 = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2\tau h} c + \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h^2} c^2 = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + i\left(\frac{\sin kh}{\tau h} c + \frac{\sin kh}{\cancel{2}h^2} c^2\right) = 0$$

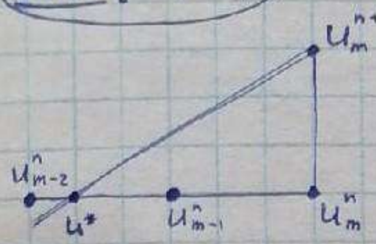
$$\frac{\lambda - 1}{\tau^2} + i\sin(kh)\,\frac{c}{h}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{h}\right) = 0$$

$$|\lambda| = \left|1 - i\sin(kh)\,\frac{c\tau^2}{h}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{h}\right)\right| < 1$$ – усл-ие сх-сти

Т.к. модуль этого компл. числа ≥ 1 $\to$ сх-сти нет.

XII.7.4.

$$u_t + c u_x = 0$$



$x_t = c$ – характеристика

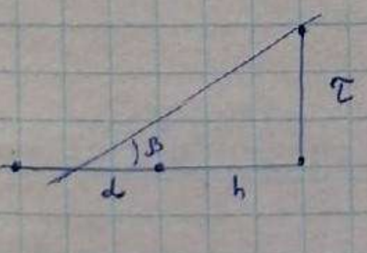
$x - ct = const$

Построим интерполяционный полином в форме Ньютона:

$$\begin{array}{llll} x_m & u_m^n & & \\ & & \dfrac{-u_{m-1}^n + u_m^n}{h} & \\ x_{m-1} & u_{m-1}^n & & \dfrac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} \\ & & \dfrac{-u_{m-2}^n + u_{m-1}^n}{h} & \\ x_{m-2} & u_{m-2}^n & & \end{array}$$

$$P(x) = u_m^n + (x - x_m)\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + (x - x_m)(x - x_{m-1}) \cdot \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2}$$

$$u^* = P(x^*) = u_m^n + (x^* - x_m)\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + (x^* - x_m)(x^* - x_{m-1}) \cdot \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2}$$



$$tg\beta = c^{-1} \rightarrow \frac{\tau}{\alpha + h} = c^{-1} \rightarrow \alpha = c\tau - h$$

$$x^* - x_m = -(h + \alpha) = -c\tau$$

$$x^* - x_{m-1} = -\alpha = h - c\tau$$

$$u^* = u_m^{n+1} = P(x^*) = u_m^n - \frac{\tau c}{h}(u_m^n - u_{m-1}^n) + (c\tau - h)c\tau \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} =$$

$$= u_m^n - \frac{\tau c}{h} u_m^n + \frac{\tau c}{h} u_{m-1}^n + \frac{\tau^2 c^2}{} \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2} - \frac{\tau c}{} \frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h}$$

Преобразуем:

$$U_m^{n+1} - U_m^n = -\frac{\tau c}{h} U_m^n + \frac{\tau c}{h} U_{m-1}^n + c^2\tau^2 \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{2h^2} +$$

$$+ \left(-\tau c \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{2h}\right)$$

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} c + \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{2h} c - \frac{c^2\tau}{2h^2}\left(U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n\right) = 0$$

Итого:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{U_{m-2}^n - 4U_{m-1}^n + 3U_m^n}{2h} c - \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{2h^2} \tau c^2 =$$

$$= \frac{f(t^n, x_m - a\tau) + f(t^{n+1}, x_m)}{2}$$

XII.7.15

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = 6 \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}$$

$$y_m^{n\pm1} = y_m^n \pm y'\tau + y''\frac{\tau^2}{2} \pm y'''\frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

$$y_{m\pm1}^n = y_m^n \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm y'''\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

$$\frac{y'\tau\cdot 2 + y'''\frac{\tau^3}{3} + O(\tau^4)}{2\tau} = 6\,\frac{\cancel{y_m^n} + \cancel{y'h} + y''\frac{h^2}{2} + \cancel{y'''\frac{h^3}{6}} - \cancel{y_m^n} - \cancel{y'\tau} - y''\frac{\tau^2}{2} - \cancel{y'''\frac{\tau^3}{6}} - \cancel{y_m^n} + \cancel{y'\tau} - y''\frac{\tau^2}{2} + \cancel{y'''\frac{\tau^3}{6}} + \cancel{y_m^n} - \cancel{y'h} + y''\frac{h^2}{2} - \cancel{y'''\frac{h^3}{6}}}{h^2}$$

$$y'_t + y'''_t\frac{\tau^2}{6} + O(\tau^3) = 6\left(y''_x - y''_t \underbrace{\frac{\tau^2}{h^2}}_{c\tau}\right) + O(h^2)$$

Получаем, что ур-ие, кот. аппроксим-ся: $y'_t = \sigma y''_{xx}$

Пор. аппрокс. $O(\tau) + O(h^2)$, погреш. $\frac{\tau^2}{6} y'''_t + \sigma \frac{\tau^2}{h^2} y''_t = \Delta$

Исследуем на устойчивость:

$$y^n_m = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\tau} = \sigma \frac{e^{i\varphi} - \lambda - \frac{1}{\lambda} + e^{-i\varphi}}{h^2}$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{2\tau} + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{h^2} = \frac{\sigma}{h^2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\lambda^2\left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{h^2}\right) - \frac{2\sigma\lambda}{h^2}\cos\varphi + \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2\tau} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \overbrace{\frac{2\sigma\cos\varphi}{1 + \frac{h^2}{2\tau}}}^{K} + \overbrace{\frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2\tau}}{\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{h^2}}}^{C} = 0$$

$$D = K^2 - 4C$$

$$\lambda = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4C}}{2} \qquad C_1 = \frac{h^2}{\tau}$$

$$|\lambda| = \left| \frac{\sigma\cos\varphi}{1 + \frac{C_1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2\cos^2\varphi}{\left(1 + \frac{C_1}{2}\right)^2} - \frac{1 - \frac{C_1}{2}}{1 + \frac{C_1}{2}}} \right| =$$

$$= \frac{\sigma|\cos\varphi|}{1 + \frac{C_1}{2}} \cdot \left| 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - \frac{C_1^2}{4}}{\sigma^2\cos^2\varphi}} \right| \leq 1.$$

Уст-сть зависит от параметров σ и $C_1 = \frac{h^2}{\tau}$.

XII.7.19

Разложим y т. y_m^{n+1}. Получим:

$$\frac{4\tau y'_t - 2\tau^2 y''_t + \frac{2}{3}\tau^3 y'''_t - 2\tau y'_t + 2\tau^2 y''_{tt} - \frac{4}{3}\tau^3 y'''_t + O(\tau^4)}{2\tau} =$$

$$= \sigma \frac{2y_m^{n+1} + h^2 y''_x - 2y_m^{n+1} + O(h^4)}{h^2}$$

$$y'_t - \frac{1}{3}\tau^2 y'''_t = \sigma y''_x + O(h^2) + O(\tau^3)$$

погрешн. аппрокс. $\Delta = -\frac{1}{3}\tau^2 y'''_t$, пор. аппр. $O(\tau^2, h^2)$

XII.7.19

Разложим y т. y_m^{n+1}. Получим:

$$\frac{4\tau y_t' - 2\tau^2 y_t'' + \frac{2}{3}\tau^3 y_t''' - 2\tau y_t' + 2\tau^2 y_{tt}'' - \frac{4}{3}\tau^3 y_t''' + O(\tau^4)}{2\tau} =$$

$$= \sigma \frac{2y_m^{n+1} + h^2 y_x'' - 2y_m^{n+1} + O(h^4)}{h^2}$$

$$y_t' - \frac{1}{3}\tau^2 y_t''' = \sigma y_x'' + O(h^2) + O(\tau^3)$$

погрешн. аппрокс $\Delta = -\frac{1}{3}\tau^2 y_t'''$, пор. аппр. $O(\tau^2, h^2)$

XIV.8.5

Дисперс. соотнош. $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $a \neq const$

Будем искать дисперс. соотнош. в виде $y_m^n = e^{\lambda(k)t_n} \cdot e^{ikx_m} = e^{\lambda n\tau + ikmh}$

Подставим в правый уголок: $\frac{1}{\tau}(e^{\lambda\tau} - 1) + \frac{a}{h}(1 - e^{-ikh}) = 0$

откуда $\lambda(\tau, h, k) = \frac{1}{\tau}\ln\left(1 - \frac{a\tau}{h} + \frac{a\tau}{h}e^{-ikh}\right)$

Сравним дисперсионное соотн. для дифф. и соотв. разностных ур-ий. Предположим $kh \ll 1$, h - малый параметр.

Тогда дисперс. соотнош. будет $\lambda(\tau, h, k) \approx -iak - \frac{ahk^2}{2}\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) =$

$= \lambda(k) - \frac{k^2}{2}ah(1-\sigma)$, где $\sigma = \frac{a\tau}{h}$

Частное решение примет вид $e^{ik(mh - an\tau)} \cdot e^{-\frac{1}{2}ak^2(h - a\tau)n\tau}$

При $a<0$, $h-a\tau>0$ рассматрив. схему нельзя использовать для проведения расчётов. Аналогично $a>0$, $h-a\tau<0$

Если же $a>0$, $h-a\tau>0$, то второй сомножит. затухает с ростом t_n тем быстрее, чем больше k или меньше λ.

Таким образом, по схеме уголок получаем численное решение, отличающееся от точного наличием затухающ. множит. для гармоник с большими k или малыми λ.

Рассмотрим схему второго порядка - Лакса-Вендроффа:
$$\left(y_m^{n+1}-y_m^n\right)+\frac{\sigma}{2}\left(y_{m+1}^n-y_{m-1}^n\right)-\frac{\sigma^2}{2}\left(y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n\right)=0$$

Дисперс. соотнош. будет $\lambda=\frac{1}{\tau}\ln\left(1-i\sigma\sin kh-2\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}\right)$

Считая $kh\ll 1$, получим $\lambda(\tau,h,k)=-ika+ika\frac{k^2h^2}{6}\left(1-3\sigma^2\right)$

Решения дифф. ур-ия переноса имеют вид волн, кот. движ-ся вправо со скор. a: $u(t,x)=e^{ikx+\lambda(k)t}=e^{ik(x-at)}$

Решения разностного ур-ия II пор. апрокс. имеют вид:
$$y(t_n,x_m)=e^{ikx_m+\lambda(\tau,h,k)t_n}=e^{ik\left(x_m-a\left[1-\frac{k^2h^2}{6}(1-3\sigma^2)\right]t_n\right)}=$$
$$=e^{ik\left(x_m-a\left[1+A_k(k)\right]t_n\right)}$$

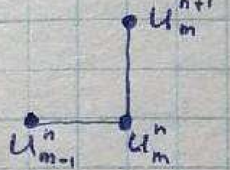
Т.е. каждая волна со своей частотой движется с собств. скоростью $a_k=a(1+A_k)$.

Получаем потерю монот. профиля $u(x)$, появление осцилляций разностного прои-ия.

XIV. 9.2

Ур-ие переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = \psi(x)$

а)



$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}''$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h u_x' + \frac{h^2}{2} u_{xx}''$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

$$u_t' + \frac{\tau}{2} u_{tt}'' + u_x' - \frac{h}{2} u_{xx}'' = 0 \quad \text{пор. аппрокс. } O(\tau, h)$$

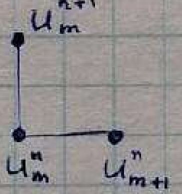
$$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} = 0 \hookrightarrow \lambda = 1 + \frac{\tau}{h}(e^{-i\varphi} - 1)$$

$$|\lambda| < 1 \iff \left|1 - \frac{\tau}{h} + \frac{\tau}{h} e^{-i\varphi}\right| < 1$$

устойчиво

б)



$$u_{m+1}^n = u_m^n + h u_x' + \frac{h^2}{2} u_{xx}''$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

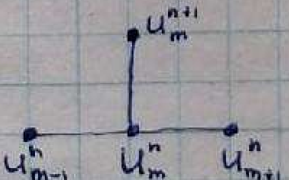
$$u_t' + \frac{\tau}{2} u_{tt}'' + u_x' + \frac{h}{2} u_{xx}'' = 0 \quad \text{пор. аппрокс. } O(\tau, h)$$

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} = 0 \hookrightarrow \lambda = 1 + \frac{\tau}{h}(-e^{i\varphi} + 1)$$

неустойчиво

в)



из XII. 7.2 схема $O(h^2, \tau^2)$:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} \cdot \tau = 0.$$

$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$

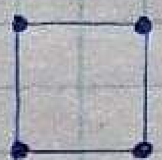
$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{2h} + \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2h^2}\tau = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau}\tau + \frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2h}\tau + \frac{2 - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h^2}\tau^2$$

$$|\lambda| = \left|1 + i\frac{\tau}{h}\sin\varphi + \frac{\tau^2}{h^2} - \cos\varphi\right| < 1$$

если $\frac{\tau^2}{h^2} < 1$, то есть области устойчивости

г)



XIV. 9.11 a)

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \dfrac{-3u_{m+1}^n+4u_m^n-u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-3v_{m+1}^n+3v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n \\ \dfrac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau} + \dfrac{-u_{m+1}^n+u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-v_{m+1}^n+4v_m^n-3v_{m-1}^n}{2h} = g_m^n \end{cases}$$

Иссл. на спектр. устойчивость:

$u_m^n \sim \alpha\lambda^n e^{ikhm}$

$v_m^n \sim \beta\lambda^n e^{ikhm}$

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\lambda-1}{\tau} + \alpha\dfrac{-3e^{ikh}+4-e^{-ikh}}{2h} + \beta\dfrac{-3e^{ikh}+3e^{-ikh}}{2h} = 0 \\ \beta\dfrac{\lambda-1}{\tau} + \alpha\dfrac{-e^{-ikh}+e^{-ikh}}{2h} + \beta\dfrac{-e^{ikh}+4-3e^{-ikh}}{2h} = 0 \end{cases}$$

Смотрим, чтобы детерм. системы обращ. в 0

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda-1}{\tau} + \dfrac{-3e^{ikh}+4-e^{-ikh}}{2h} & -\dfrac{3}{2h}\left(e^{ikh}-e^{-ikh}\right) \\ \dfrac{-e^{-ikh}+e^{-ikh}}{2h} & \dfrac{\lambda-1}{\tau} + \dfrac{-3e^{-ikh}-e^{ikh}+4}{2h} \end{vmatrix} = 0$$

$$a = \frac{\lambda-1}{\tau} \qquad b = \frac{-3e^{ikh}+4-e^{-ikh}}{2h}$$

$$D = \begin{vmatrix} a+b & -\frac{3i}{h}\sin kh \\ -\frac{i}{h}\sin kh & a+\bar{b} \end{vmatrix} = a^2+|b|^2+ab+a\bar{b}+\frac{3}{h^2}\sin^2 kh = 0$$

$$4h^2|b|^2 = (-4\cos kh+4)^2+(2\sin kh)^2 = 64\sin^4\frac{kh}{2}+4\sin^2 kh \quad \text{- def}$$

$$a(b+\bar{b}) = 2a\,\mathrm{Re}(b) = \frac{a}{h}(4-4\cos kh) = \frac{8a}{h}\sin^2\frac{kh}{2}$$

$$a^2 + \frac{16}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2} + \frac{1}{h^2}\sin^2 kh + \frac{8a}{h}\sin^2\frac{kh}{2} + \frac{3}{h^2}\sin^2 kh = 0$$

$$a^2 + \frac{8a}{h}\sin^2\frac{kh}{2} + \frac{16}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2} + \frac{4}{h^2}\sin^2 kh = 0$$

$$\frac{D}{4} = \cancel{\left(\frac{4}{h}\sin^2\frac{kh}{2}\right)^2} - \cancel{\frac{16}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2}} - \frac{4}{h^2}\sin^2 kh = -\frac{4}{h^2}\sin^2 kh$$

$$a = -\frac{4}{h}\sin^2 kh \pm \frac{2i}{h}\sin kh$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau}{h}\sin^2\frac{kh}{2} \pm \frac{2i\tau}{h}\sin kh$$

$$|\lambda|^2 = \left(1 - \frac{4\tau}{h}\sin^2\frac{kh}{2}\right)^2 + \frac{4\tau^2}{h^2}\sin^2 kh = 1 - \frac{8\tau}{h}\sin^2\frac{kh}{2} +$$

$$+ \frac{16\tau^2}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2} + \frac{4\tau}{h^2}\sin^2 kh \le 1$$

$$-\frac{8\tau}{h} + \frac{16\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2} + \frac{16\tau^2}{h^2}\cos^2\frac{kh}{2} \le 0$$

$$\frac{16\tau^2}{h^2} - \frac{8\tau}{h} \le 0 \hookrightarrow \frac{\tau}{h} \le \frac{1}{2}$$ – усл-ие устойчивости схемы

XIV.9.14

б)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} + 3\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(t,x) \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = g(t,x) \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = h(t,x) \end{cases}$$

$u(0,x) = \varphi_1(x)$, $v(0,x) = \varphi_2(x)$, $w(0,x) = \varphi_3(x)$, $0 \le x \le 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 3) +$$

$$+ 2(-1-\lambda-1) + 3(3-1+\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-4) + 2(-2-\lambda) +$$

$$+ 3(2+\lambda) = (\lambda+2)\big((2-\lambda)(\lambda-2) - 2 + 3\big) = 0$$

$\lambda = -2,\ 1,\ 3$ $\hookrightarrow$ система гиперболическая

$\underline{\lambda = -2:}$

$$(\omega_1^1\ \omega_2^1\ \omega_3^1)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^1 = -\frac{1}{14}\omega_3^1$$

$$\omega_1^1 = -\frac{11}{14}\omega_3^1 \qquad (\omega_1^1\ \omega_2^1\ \omega_3^1) = \begin{pmatrix} -11/14 \\ -1/14 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \omega_3^2 \qquad \omega_1^2 = -\omega_3^2 \qquad \hookrightarrow (\omega_1^2\ \omega_2^2\ \omega_3^2) =$$

$$-\omega_3^2 - 2\omega_3^2 + 3\omega_3^2 = 0 \hookrightarrow \omega_3^2 = 1 \qquad = (-1\ 1\ 1)$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{11}{14} & -\frac{1}{14} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \Omega \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{14}u - \frac{1}{14}v + w \\ -u + v + w \\ u + v + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial t} - 2\dfrac{\partial R_1}{\partial x} = -\dfrac{11}{14} f - \dfrac{1}{14} g + h \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial t} + \dfrac{\partial R_2}{\partial x} = -f + g + h \\ \dfrac{\partial R_3}{\partial t} + 3\dfrac{\partial R_3}{\partial x} = f + g + h \end{cases}$$

1) Здесь 3 ур-ия на левой границе, 3 на правой. подходит

2) 4 на правой (ЛНЗ) $\Rightarrow$ не подходит

3) Аналогично пункту 1

4) Аналогично пункту 1

(2) Схема с аппроксим. выше 1 пор. по т. Годунова не может быть монотонной.

Рассм. обычный правый уголок

$$\frac{R_{1m}^{n+1} - R_{1m}^{n}}{\tau} - 2\,\frac{R_{1m+1}^{n} - R_{1m}^{n+1}}{h} = 0$$

Схема устойчива при $\left|\frac{2\tau}{h}\right| < 1$

XIV. 9.6

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a = const > 0$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a\,\frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = \xi\tau\,\frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$$

$\xi = \frac{h}{2}$ - схема Лакса

$\xi = 1$ - Лакса-Вендрофора

$\xi = 0$ - Куранта-Изаксона-Риса

Иссл. на устойчивость:

$$y_m^n \sim \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a\,\frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} = \xi\tau\,\frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h^2}$$

$$\lambda = 1 - i\frac{a\tau}{h}\sin kh - \frac{\xi\tau^2}{h^2}4\sin^2\frac{kh}{2}$$

$$|\lambda|^2 = \left(1 - \frac{\xi\tau^2}{h^2}4\sin^2\frac{kh}{2}\right)^2 + \frac{a^2\tau^2}{h^2}\sin^2 kh = 1 - 8\frac{\xi\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2} +$$

$$+ 16\frac{\xi^2\tau^4}{h^4}\sin^4\frac{kh}{2} + 4\frac{a^2\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2}\left(1 - \sin^2\frac{kh}{2}\right) =$$

$$= 1 + 4\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2}\left(a^2 - 2\xi\right) + \frac{4\tau^2}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2}\left(4\frac{\xi^2\tau^2}{h^2} - a^2\right) \leq 1$$

$$a^2 - 2\xi + \sin^2\frac{kh}{2}\left(4\frac{\xi^2\tau^2}{h^2} - a^2\right) \leq 0$$

$$\sin^2\frac{kh}{2} \geq \frac{2\xi - a^2}{a^2 - \frac{4\xi^2\tau^2}{h^2}} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

При этом $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\sin^2\frac{kh}{2} \leq 1$

$$\hookrightarrow \frac{2\xi - a^2}{a^2 - \frac{4\xi^2\tau^2}{h^2}} \leq 1$$

$$2\xi - a^2 \leq a^2 - \frac{4\xi^2\tau^2}{h^2}$$

$$a^2 \geq \xi + \frac{2\xi^2\tau^2}{h^2}$$

$$\xi^2 + \frac{h^2}{2\tau^2}\xi - \frac{h^2}{2\tau^2}a^2 \leq 0$$

$$\xi = \left[-\frac{h^2}{2\tau^2} \pm \sqrt{\frac{h^4}{4\tau^4} + a^2\frac{2h^2}{\tau^2}}\right]\frac{1}{2}$$

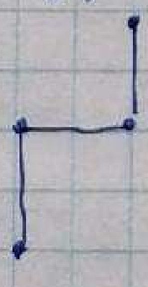
Нер-во вып-но при:

$$-\frac{h^2}{2\tau^2} - \sqrt{\frac{h^4}{4\tau^4} + \frac{2h^2}{\tau^2}a^2} \leq \xi \leq -\frac{h^2}{2\tau^2} + \sqrt{\frac{h^4}{4\tau^4} + \frac{2h^2}{\tau^2}a^2}$$

Сл-но так схема будет устойчива

XIV.9.8

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = const > 0$$



Метод неопр. коэфф.

$$\alpha u_m^{n-1} + \beta u_m^n + \gamma u_{m+1}^n + \delta u_{m+1}^{n+1} = 0$$

$$u_m^{n-1} = u_m^n - \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt} + O(\tau^3)$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h u'_x + \frac{h^2}{2} u''_{xx} + O(h^3)$$

$$u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + \tau u'_t + h u'_x + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt} + \frac{h^2}{2} u''_{xx} + \tau h u''_{tx} + O(h^3, \tau^3)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + \delta = \frac{1}{\tau} \\ \gamma + \delta = \frac{a}{h} \\ \alpha + \delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{2\tau}, \quad \alpha = -\frac{1}{2\tau} \\ \gamma = -\frac{1}{2\tau} + \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{1}{2\tau} - \frac{a}{h} \end{array}$$

$$\frac{u_{m+1}^{n+1} + u_m^n}{2} - \frac{u_{m+1}^n + u_m^{n-1}}{2} + \frac{a\tau}{h}(u_{m+1}^n - u_m^n) = 0$$

При $\sigma = \frac{a\tau}{h} = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{h} = \frac{1}{2\tau} \hookrightarrow \gamma = 0, \beta = 0$

$$u_{m+1}^{n+1} = u_m^{n-1}$$

$$\tau u'_t + h u'_x = -\tau u'_t$$

$u'_t + \frac{h}{2\tau} u'_x = u'_t + a u'_x = 0 \hookrightarrow$ схема точна при $\sigma = \frac{a\tau}{h}$

XII. 7.6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ - ур-ие теплопроводности

Схема Кранка-Николсона:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{D}{2}\left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$u_m^{n+1}\left(1 + \frac{\tau D}{h^2}\right) = u_m^n\left(1 - \frac{D\tau}{h^2}\right) + \frac{D\tau}{2h^2}\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}\right)$$

Все коэфф. должны быть неотрицательны для монотонности по Фридриху

$$1 - \frac{D\tau}{h^2} \geqslant 0 \longrightarrow \underline{D \leqslant \frac{h^2}{\tau}}$$

XIII. 7.3

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = D\,\frac{y_{m-1}^n - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^n}{h^2}$$

$$y_m^{n+1}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2D}{h^2}\right) = \frac{y_m^n}{\tau} + D\,\frac{y_{m-1}^n + y_{m+1}^n}{h^2}$$

Схема эквивалентна явной с уменьшенным шагом по времени $\tau^* = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{2D}{h^2}}$

XIII. 9.3

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$$

$$y_m^{n+1} = y_m^n + \tau y_t' + \frac{\tau^2}{2} y_{tt}'' + O(\tau^3)$$

$$y_{m\pm1}^n = y_m^n \pm h y_x' + \frac{h^2}{2} y_{xx}'' \pm \frac{h^3}{6} y_{xxx}''' + \frac{h^4}{24} y_{xxxx}^{(IV)} + \frac{h^5}{120} y_x^{(V)} + O(h^6)$$

$$y_t' + \frac{\tau}{2} y_{tt}'' = y_{xx}'' + \frac{h^2}{12} y_{xxxx}^{(IV)} + O(h^4) + O(\tau^2)$$

Из ур-ия $y_t' = D y_{xx}''$

$$y_{tt}'' = D y_{xxt}''' = D(y_t')_{xx}'' = D^2 y_x^{(IV)}$$

$$D^2 \frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12} = 0 \qquad \tau = \frac{h^2}{6D^2}$$

Ответ: при $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6D^2}$

XIII. 9.8

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}$$

$$y_m^n \sim \lambda^n e^{ikmh}$$

$$\frac{\lambda^2-1}{2\tau} = \frac{\lambda e^{ikh} - \lambda^2 - 1 + \lambda e^{-ikh}}{h^2}$$

$$\lambda^2 - 1 = \frac{4\tau}{h^2}\lambda \cos kh - \frac{\lambda^2+1}{h^2} 2\tau$$

$$\lambda^2\left(1+\frac{2\tau}{h^2}\right) - \frac{4\tau}{h^2}\lambda\cos kh - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{4\tau^2}{h^4}\cos^2 kh + 1 + \frac{2\tau}{h^2} > 0 \hookrightarrow \lambda = \frac{\frac{2\tau}{h^2}\cos kh \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{1+\frac{2\tau}{h^2}}$$

$$|\lambda| \le 1$$

Если $\frac{\Delta}{4} = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} - \frac{2\tau}{h^2}\cos kh\right)^2$

$$\frac{4\tau^2}{h^4}\cos^2 kh + 1 + \frac{2\tau}{h^2} \leq 1 + \frac{4\tau}{h^2} + \frac{4\tau^2}{h^4} + \frac{4\tau^2}{h^4}\cos^2 kh -$$

$$- \frac{2\tau}{h^2}\cos kh - \frac{4\tau^2}{h^4}\cos kh$$

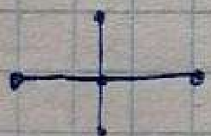
$$\frac{2\tau}{h^2} + \frac{4\tau^2}{h^4} - \frac{2\tau}{h^2}\cos kh - \frac{4\tau^2}{h^4}\cos kh \geqslant 0$$

$\frac{2\tau}{h^2} 2\sin^2 kh + \frac{4\tau^2}{h^4} 2\sin^2 kh \geqslant 0$ – верно $\forall \tau, h$

Если $\frac{\Delta}{4} = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} + \frac{2\tau}{h^2}\cos kh\right)^2$

$\frac{2\tau}{h^2} 2\cos^2 kh + \frac{4\tau^2}{h^4} 2\cos^2 kh \geqslant 0$ $\to$ аналогично

Значит схема устойчива при любых шагах



Разложим отн. центральной точки

$$y_m^{n\pm1} = y_m^n \pm \tau y_t' + \frac{\tau^2}{2} y_{tt}'' + O(\tau^3)$$

$$y_{m\pm1}^n = y_m^n \pm h y_x' + \frac{h^2}{2} y_{xx}'' \pm \frac{h^3}{6} y_{xxx}''' + O(h^4)$$

$$y_t' + O(\tau^2) = -\frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}'' + y_{xx}'' + O(h^2) + O\left(\frac{\tau^3}{h^2}\right)$$

$$y_t' + c^2 y_{tt}'' = y_{xx}'' + O(h^2) + O(\tau)$$

Схема аппрокс. ур-ие при $c = const$ с порядком $O(\tau, h^2)$.

XIII. 9.9

$$\frac{1}{12}\frac{y_{m+1}^{n+1}-y_{m+1}^{n}}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{y_{m}^{n+1}-y_{m}^{n}}{\tau}+\frac{1}{12}\frac{y_{m-1}^{n+1}-y_{m-1}^{n}}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{y_{m+1}^{n}-2y_{m}^{n}+y_{m-1}^{n}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{y_{m+1}^{n+1}-2y_{m}^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

Порядок есть $O(\tau, h^2)$

На устойчивость: $y_m^n - \lambda^n e^{ikmh}$

$$\lambda\left[\frac{1}{12\tau}\left(e^{ikh}+e^{-ikh}\right)\right]+\frac{5}{6\tau}(\lambda-1)-\frac{1}{12\tau}\left(e^{ikh}-e^{-ikh}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{ikh}+e^{-ikh}-2}{h^2}+\frac{1}{2\lambda}\frac{e^{ikh}+e^{-ikh}-2}{h^2}$$

$$\lambda\left(\frac{\cos kh}{6\tau}+\frac{5}{6\tau}+\frac{2\sin^2\frac{kh}{2}}{h^2}\right)=\frac{\cos kh}{6\tau}+\frac{5}{6\tau}-\frac{2\sin^2\frac{kh}{2}}{h^2}$$

$$\lambda=\frac{\frac{1}{6}\cos kh+\frac{5}{6}-\frac{2\tau}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2}}{\frac{1}{6}\cos kh+\frac{5}{6}+\frac{2\tau}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2}}$$

$$|\lambda|\leq 1$$

XIII. 9.17

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,t)$$

а) $$\begin{cases}\dfrac{u^{n+\frac{1}{2}}-u^n}{\tau/2}=\Lambda_{xx}u^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_{yy}u^n+f\\[2ex] \dfrac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2}=\Lambda_{xx}u^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_{yy}u^{n+1}+f\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(1-\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)u^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^{n}=\frac{\tau}{2}f\\ \left(1-\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^{n+1}-\left(1+\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)u^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{2}f\end{cases}$$

Обозначим $A=1-\frac{\tau}{2}\Lambda$ $\quad B=\frac{\tau}{2}\Lambda+1$

$$\begin{cases}A_x u^{n+\frac{1}{2}}-B_y u^n=\frac{\tau}{2}f & \mid\cdot B_x\\ A_y u^{n+1}-B_x u^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{2}f & \mid\cdot A_x\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_x A_x u^{n+\frac{1}{2}}-B_x B_y u^n=\frac{\tau}{2}B_x f\\ A_x A_y u^{n+1}-A_x B_x u^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{2}A_x f\end{cases}$$

$$A_x A_y u^{n+1}-B_x B_y u^n-\underbrace{\cancel{(A_x B_x-B_x A_x)}}_{0}u^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{2}(A_x+B_x)f$$

$$\left(1-\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\left(1-\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^{n+1}-\left(1+\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\left(1+\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^n=$$
$$=\tau f$$

Оставляем линейные по τ слагаемые:

$$u^{n+1}-\left(\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}+\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^{n+1}-u^n-\left(\frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}+\frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^n=\tau f$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=(\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy})\frac{u^{n+1}+u^n}{2}+f$$

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+f+O(\tau)+O(h_x^2)+O(h_y^2)$$ — аппроксим.

$$u^n\sim\lambda^n e^{i(kh_x+mh_y)}$$

$$\Lambda_{xx}u^n=-\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{kh_x}{2}\qquad \Lambda_{yy}u^n=-\frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{mh_y}{2}$$

$$\frac{\lambda_1^{1/2}-1}{\tau/2}=-\frac{4}{h_x^2}\underbrace{\sin^2\frac{kh_x}{2}}_{a}\lambda_1^{1/2}-\frac{4}{h_y^2}\underbrace{\sin^2\frac{mh_y}{2}}_{b}$$

$$\lambda_1^{1/2}=\frac{1-\frac{\sigma_y b}{2}}{1+\frac{\sigma_x a}{2}}$$, где $\sigma_x=\frac{\tau}{h_x^2}$, $\sigma_y=\frac{\tau}{h_y^2}$

Аналогично $\lambda_2^{1/2} = \dfrac{1 - \frac{6_x a}{2}}{1 + \frac{6_y b}{2}}$

$$\lambda = \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} = \frac{1 - \frac{6_y b}{2}}{1 + \frac{6_x a}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{6_x a}{2}}{1 + \frac{6_y b}{2}}$$

$|\lambda| \leq 1$, т.к. числит. меньше знаменателя

Схема безусловно устойчива

б)
$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_{xx} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{yy} u^n\right) + f \\ \dfrac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_{xx} u^{n+1} + \Lambda_{yy} u^n\right) \end{cases}$$

Обозначим $A = 1 - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}$, $B = 1 + \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}$

$$\begin{cases} A u^{n+\frac{1}{2}} - B u^n = f\tau & \Big| \cdot B \\ A u^{n+1} - B u^{n+\frac{1}{2}} = 0 & \Big| \cdot A \end{cases}$$

$$AAu^{n+1} - BBu^n = Bf\tau$$

Оставим линейные по τ слагаемые:

$$u^{n+1} - \tau \Lambda_{xx} u^{n+1} - u^n - \tau \Lambda_{yy} u^n = f\tau$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx} u^{n+1} + \Lambda_{yy} u^n + f$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + f \text{ - аппрокс}$$

$$u^n \sim \lambda^n e^{i(kh_x + mh_y)}$$

$$\frac{\lambda_1^{1/2} - 1}{\tau} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{h_x^2}\underbrace{\sin^2\frac{kh_x}{2}}_{a}\lambda_1^{1/2} - \frac{4}{h_y^2}\underbrace{\sin^2\frac{mh_y}{2}}_{b}\right)$$

$$\lambda_1^{1/2} = \frac{1 - \frac{\sigma_y b}{2}}{1 + \frac{\sigma_x a}{2}}$$

$$\lambda_2^{1/2} = \frac{1 - \frac{\sigma_y b}{2}}{1 + \frac{\sigma_x a}{2}} \longrightarrow \lambda = \lambda_1^{1/2}\lambda_2^{1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_y b}{2}}{1 + \frac{\sigma_x a}{2}}\right)^2$$

$|\lambda| < 1 \hookrightarrow$ схема безусловно устойчива