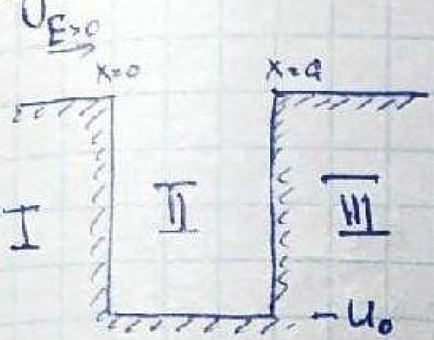
Задача 3.



$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0,\ x > a \end{cases}$$

$$\text{I}: \psi_1'' + k^2\psi_1 = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\text{II}: \psi_2'' + k_1^2\psi_2 = 0, \quad k_1^2 = \frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}$$

$$\text{III}: \psi_3'' + k^2\psi_3 = 0$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x < 0 \\ C_1 e^{ik_1x} + C_2 e^{-ik_1x}, & 0 < x < a \\ t e^{ikx}, & x > a \end{cases}$$

Считаем, что в III нет отраж. волн.

Сшивка:

$$\begin{cases} 1 + r = C_1 + C_2 & (1) \\ ik(1-r) = ik_1(C_1 - C_2) & (2) \\ C_1 e^{ik_1a} + C_2 e^{-ik_1a} = t e^{ika} & (3) \\ ik_1(C_1 e^{ik_1a} - C_2 e^{-ik_1a}) = ikt e^{ika} & (4) \end{cases}$$

$t = C_1 e^{ik_1a - ika} + C_2 e^{-ik_1a - ika}$. Подставим в (4):

$$ik_1(C_1 e^{ika} - C_2 e^{-ik_1a}) = ik(C_1 e^{ik_1a} + C_2 e^{-ik_1a})$$

$$iC_1(k_1 e^{ik_1a} - k e^{ik_1a}) = iC_2(k_1 e^{-ik_1a} + k e^{-ik_1a}). \to \text{в } (1).$$

$$1+r = C_1\left(1+\frac{k_1 e^{ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}\right)$$

$$C_1 = \frac{1+r}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}}$$

$$C_2 = \frac{1+r}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}}\cdot\frac{k_1 e^{ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}$$

C_1 и C_2 подставим в (2):

$$k(1-r) = \frac{k_1(1+r)}{1+\frac{k_1 e^{ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}}\cdot\left(1-\frac{k_1 e^{-ik_1a}-k e^{ik_1a}}{k_1 e^{-ik_1a}+k e^{-ik_1a}}\right)$$

$$r = \frac{(k_1^2-k^2)(e^{ik_1a}-e^{-ik_1a})}{k^2(e^{-ik_1a}-e^{ik_1a})+k_1^2(e^{-ik_1a}-e^{ik_1a})+2kk_1}$$

$$r = \frac{i(k_1^2-k^2)\sin k_1a}{2kk_1\cos k_1a - i(k_1^2+k^2)\sin k_1a}$$

Для t получим следующее:

$$t = \frac{(1+r)(ke^{-ika}+k_1e^{-ika}+k_1e^{-ika}-ke^{-ika})}{k_1e^{-ik_1a}+k_1e^{ik_1a}+ke^{-ik_1a}-ke^{ik_1a}} =$$

$$= \frac{2k_1e^{ika}(2kk_1\cos k_1a-2ik^2\sin k_1a)}{(2k_1\cos k_1a-2ik\sin k_1a)(2k_1k\cos k_1a-i(k_1^2+k^2)\sin k_1a)}$$

$$t = \frac{2kk_1e^{-ika}}{2kk_1\cos k_1a-i(k_1^2+k^2)\sin^2 k_1a}$$

$$R=|r|^2 = \frac{(k_1^2-k^2)\sin^2 k_1a}{4k_1^2k^2\cos^2 k_1a+(k_1^2+k^2)\sin^2 k_1a}$$

$$R = \frac{(k_1^2 - k^2)\sin^2 k_1 a}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}$$

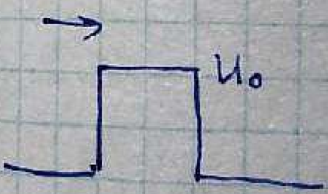
$$T = |t|^2 = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 + (k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 a}$$

$$T = \frac{4E(E + U_0)}{4E(E + U_0) + U_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(U_0+E)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

б)

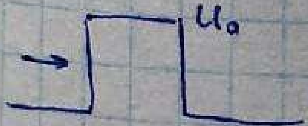
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,\ x \geq a \\ U_0, & 0 < x < a \end{cases}$$

1) $E > U_0$ Заменим U_0 на $-U_0$



$$\rightarrow \quad T = \frac{4E(E - U_0)}{4E(E - U_0) + U_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E-U_0)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

2) $E < U_0$ $R = 1 - T$



$$\rightarrow \quad T = \frac{4E(U_0 - E)}{4E(U_0 - E) + U_0^2 \operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{2m(U_0-E)a^2}{\hbar^2}}\right)}$$

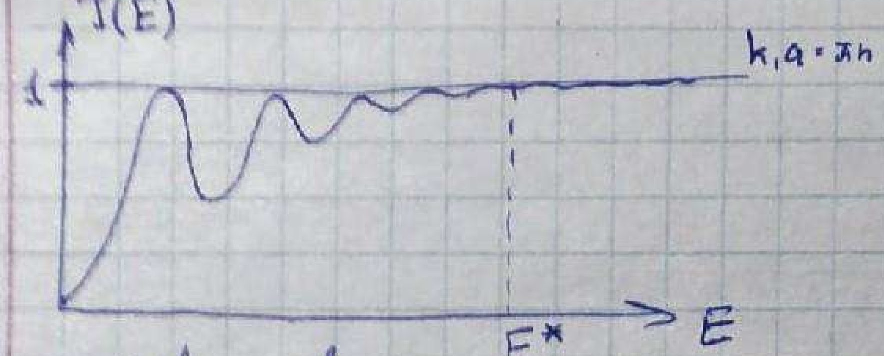
Яма прозрачна ($T = 1$) при $\sin k_1 a = 0 \Leftrightarrow k_1 a = \pi n$

$$\sqrt{\frac{2m(U_0+E)a^2}{\hbar^2}} = \pi n$$

~~Бр~~ Барьер прозрачен при $\sqrt{\frac{2m(U_0-E)a^2}{\hbar^2}} = \pi n$

Физич. опр-ся усл-ия прозрачности:

$k_1 a = \pi n \Rightarrow 2a = \frac{2\pi n}{k_1} = \lambda n \Rightarrow a = \frac{\lambda_1 n}{2}$ - длина ямы есть полуцелое число волн



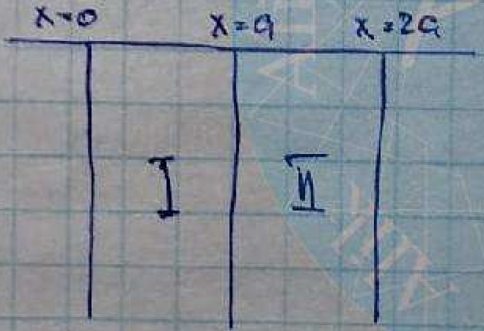
Квантовые рез-ты практически совпадают с классическими для ямы при $\frac{U_0^2}{4E^*(E^*+U_0)} \leq 10^{-2}$

$E^* \gtrsim 5U_0 = 50$ эВ

Задача 7.

$$U(x) = -\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\quad)$$

а) $E > 0$



$\text{I}: \quad 0 < x < a$

$\psi_1(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$

$\text{II}: \quad a < x < 2a$

$U(x+a) = U(x)$

$\hat{T}_a U(x) f(x) = U(x+a) f(x+a) = U(x) \hat{T}_a(x) f(x)$

Откуда $[\hat{T}_a, \hat{U}] = 0$

т.к. $\hat{T}_a = e^{\frac{ia\hat{p}}{\hbar}} \hookrightarrow \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{T}_a\right] = 0 \hookrightarrow [\hat{H}, \hat{T}_a] = 0$

можем искать волн. ф-цию в виде собств. ф-ций оператора $\hat{T}_a$.

СФ $\hat{T}_a$: $e^{i\mu x} u(x)$, где $u(x+a) = u(x)$.

$$\psi_2(x) = u(x) e^{i\mu x} = u(x-a) e^{i\mu(x-a)} e^{i\mu a} = \psi_1(x-a) e^{i\mu a} =$$

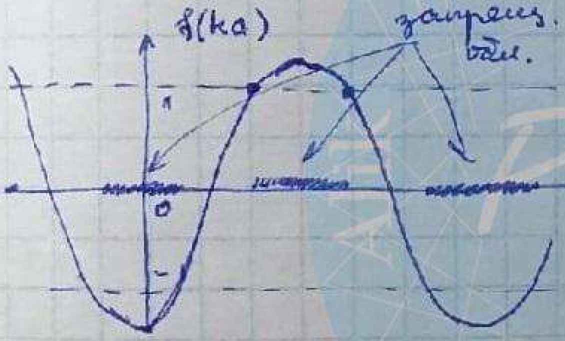
$$= \left(C_1 \cos k(x-a) + C_2 \sin k(x-a)\right) e^{i\mu a}$$

Сшивка:

$$\begin{cases} \psi_1(a) = \psi_2(a) \\ \psi_2'(a) - \psi_1'(a) = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a) \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = C_1 e^{i\mu a} \\ C_1 k \sin ka - k C_2 \cos ka + \\ + C_2 k e^{i\mu a} = C_1 e^{i\mu a}\left(-\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\right) \end{cases}$$

$$\cos \mu a = \cos ka - \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin ka = f(ka)$$

$$|f(ka)| \leq 1$$



1) $\alpha = 0 \leftrightarrow E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ - свободн. частица

2) $\alpha \to 0$, $\lambda \ll 1$ (слабая связь)

$$\cos \mu a = \cos ka - \lambda \frac{\sin ka}{ka}$$

$$\lambda = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Запрещ. зона уменьш-ся. В пределе $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

3) $\alpha \to \infty$, $\lambda \gg 1$ (сильная связь)

Разрешены лишь случаи: $\sin ka = 0$

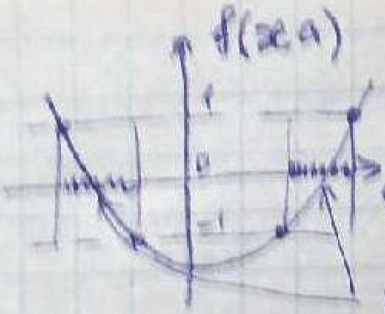
$ka = \pi n \leftrightarrow E = \dfrac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$ - разреш. зоны есть дискр. (точки).

б) $E < 0$

Сделаем замену $k = i\varkappa$. Получим:

$$\cos \mu a = \mathrm{ch}\, \varkappa a - \frac{\lambda\, \mathrm{sh}\, \varkappa a}{\varkappa a} = f(\varkappa a)$$

$$|f(\varkappa a)| < 1$$



разреш. обл.

1) $\alpha = 0$ (нет ям) — всё пр-во запрещено

2) $\alpha \to 0$, $\lambda \ll 1$ (слабая связь)

— 1 разреш. зона. В пределе — точка, кот. соотв. 0-ой энергии.

3) $\alpha \to \infty$, $\lambda \gg 1$ (сильная связь)

$$\varkappa = \frac{\lambda}{a} = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\operatorname{ch} \varkappa a \approx \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}}, \quad \operatorname{sh} \varkappa a \approx \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}}$$

$$\cos \mu a = \frac{1}{2} e^{\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \left(1 - \frac{m\alpha}{\hbar^2 \varkappa}\right)$$

$$\frac{m\alpha}{\hbar^2 \varkappa} = 1 - 2 e^{-\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \cos \mu a$$

$$\varkappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \left(1 + 2 e^{-\frac{m\alpha a}{\hbar^2}} \cos \mu a\right)$$

$$E = -\frac{\varkappa^2 \hbar^2}{2m}$$ — единств. разр. энергия

(ненулевой дискр. уровень).

<u>Упражнение 10</u>

$$\hat{T}_a f(x) = f(x+a), \quad \hat{T}_{\vec{a}} = e^{\frac{i \vec{a}\hat{\vec{p}}}{\hbar}}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{a},\hat{\vec{p}})} U(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{a},\hat{\vec{p}})} \psi(\vec{r}) = \hat{T}_{\vec{a}} U(\vec{r})\, \hat{T}_{-\vec{a}} \psi(\vec{r}) = \hat{T}_{\vec{a}} U(\vec{r}) \cdot$$

$$\cdot \psi(\vec{r} - \vec{a}) = U(\vec{r} + \vec{a}) \psi(\vec{r})$$

Упражнение 11

$$\hat{f}(\lambda)|n(\lambda)\rangle = f_n(\lambda)\,|n(\lambda)\rangle$$

$$\langle n|\hat{f}(\lambda)|n\rangle = f_n(\lambda)\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = f_n(\lambda)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial\lambda} = \langle n(\lambda)|\frac{\partial\hat{f}}{\partial\lambda}|n\rangle + \langle\frac{\partial n}{\partial\lambda}|\hat{f}|n\rangle + \langle n|\hat{f}|\frac{\partial n}{\partial\lambda}\rangle$$

$$\langle n|\hat{f}^{+} = \langle n|f_n^{*}$$

Т.к. f эрмитов $\hookrightarrow$ $\hat{f}^{+} = \hat{f}$, $f_n^{*} = f_n$

$$\frac{\partial f_n}{\partial\lambda} = \langle n(\lambda)|\frac{\partial\hat{f}}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle + \langle\frac{\partial n}{\partial\lambda}|f_n(\lambda)|n(\lambda)\rangle +$$

$$+ \langle n|f_n|\frac{\partial n}{\partial\lambda}\rangle = \langle n(\lambda)|\frac{\partial f}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle + \hat{f}\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle n|n\rangle =$$

$$= \langle n(\lambda)|\frac{\partial f}{\partial\lambda}|n(\lambda)\rangle$$

Упр. 12

$$\varphi = (\vec{r}, \vec{p})$$

φ - физич. величина, то операт. должен быть эрмитов:

$$\hat{\varphi} = \frac{(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) + (\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{r}})}{2} = \frac{-i\hbar(\vec{r}, \vec{\nabla}) - i\hbar(\vec{\nabla}, \vec{r})}{2} =$$

$$= -i\hbar\left((\vec{r}, \vec{\nabla}) + \frac{3}{2}\mathbb{1}\right)$$

Упр. 15

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta] = e_{\alpha\mu\nu}[x_\mu p_\nu, x_\beta] = e_{\alpha\mu\nu}x_\mu[p_\nu, x_\beta] =$$

$$= -i\hbar\, e_{\alpha\mu\beta}x_\mu = i\hbar\, e_{\alpha\beta\mu}x_\mu$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i e_{\alpha\beta\mu}\hat{p}_\mu$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, \hat{r}^2] = [\hat{l}_\alpha, x_\beta x_\beta] = x_\beta [\hat{l}_\alpha, x_\beta] +$$

$$+ [\hat{l}_\alpha, x_\beta] x_\beta = x_\beta i e_{\alpha\beta\mu} x_\mu + i e_{\alpha\beta\mu} x_\mu x_\beta = 0$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, (\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})] = \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} [\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma, \hat{x}_m \hat{p}_m] =$$

$$= \hbar e_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{m\beta} x_m \nabla_\gamma - \delta_{m\gamma} x_\beta \nabla_m) = \hbar e_{\alpha\beta\gamma} (x_\beta \nabla_\gamma -$$

$$- x_\beta \nabla_\gamma) = 0$$

$$\bullet\ [\hat{l}_\alpha, f(r)] \psi = \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} [\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma, f(r)] \psi =$$

$$= \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} (\hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma (f(r)\psi) - f(r) \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma \psi) =$$

$$= \frac{1}{\hbar} e_{\alpha\beta\gamma} (-i\hbar x_\beta \nabla_\gamma (f(r)\psi) + i\hbar x_\beta f(r) \nabla_\gamma \psi) =$$

$$= -i e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \psi \nabla_\gamma f(r) = -i e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta f'(r) \frac{x_\gamma}{r} \psi = \underline{\underline{0}}$$

$$\bullet\ [\hat{l}_z, f(\rho)] \psi = -i \frac{\partial}{\partial\varphi} (f \psi) + i f(\rho) \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi =$$

$$= -i \psi \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\rho) = 0 \hookrightarrow \underline{\underline{0}}$$