§15 1(4)

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx$$

Замена $\ln x = -t \qquad x = e^{-t}$

$\frac{1}{x}dx = -dt$

Интеграл станет:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(-b-1)} - e^{t(-a-1)}}{t}\, dt$$

Т.к. интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ сх-ся, то по ф-ле Фруллани исходный равен $= 1 \cdot \ln \frac{a+1}{b+1}$ //

§15 2(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}\,dx$

Замена $x^3 = t$ $\hookrightarrow$ $dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\,dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}\;3\sqrt[3]{t^2}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

§ 15 3(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,(1-\sin^2 x)}{x} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2x} - \frac{\cos 2x \sin x}{2x} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2x} - \left(\frac{\sin 3x}{2x} - \frac{\sin x}{2x} \right) \right) dx = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx}_{\to \pi/2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{2x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

§15 5(2)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x - \sin \alpha x}{x^2}\, dx \quad , \quad \alpha > 0$$

Возьмём $f(t) = \frac{1}{t} \sin t$

$$I = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x}$$

Так как $\forall A > 0 \int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сх-ся по призн. Дирихле ($\frac{1}{t}$ монот. убыв, $\int_A^x \sin t\, dt$ огр.), то применима формула Фруллани.

Значит

$$I = \alpha f(0) \ln \alpha = \alpha \ln \alpha$$

$f(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (доопр. в т. 0 как 1 для непрер-сти на $[0, +\infty)$)

Ответ: $\alpha \ln \alpha$.

§15 6(1, 4, 5)

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$, $\beta>0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} = 0$$

Значит доопределим подынтегральную ф-цию в т. $x=0$ $f=0$ - она станет непрерывной на $[0, +\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \begin{cases} \sin \alpha x\, e^{-\beta x} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

Значит:

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны на прямоуг. $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq e^{-\beta x} \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ сх-ся равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$ при фикс. β по призн. Вейерштр.

3) $\int_0^{+\infty} f(x,0)\,dx$ сх-ся.

Значит применима т. о дифференцировании по параметру

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x\, e^{-\beta x}\,dx = -e^{-\beta x}\frac{\cos \alpha x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\cos \alpha x\, e^{-\beta x}\,dx =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\sin \alpha x\, e^{-\beta x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot I'_\alpha \longrightarrow I'_\alpha\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

Откуда $I'_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \rightarrow I = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2) + C$

Ответ: $I = \frac{1}{2}\ln$

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin\alpha x \, e^{-\beta x} dx = -e^{-\beta x}\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\cos\alpha x \, e^{-\beta x} dx =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x \, e^{-\beta x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} I'_\alpha$$

$$I'_\alpha \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha} \longrightarrow I'_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2) + C(\beta)$$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{I(0,\beta)}} = \frac{1}{2}\ln\beta^2 + C(\beta) \longrightarrow C(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\beta^2$$

Ответ: $I = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x \, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x = \beta - \alpha$ ← доопр. в т. $x=0$ ф-цию этим значением.

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda} = \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right)\sin\lambda x$$

α, β фиксируем.

1) $f(x,\lambda)$ и $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ непрер на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right| \le e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} \hookrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)dx$ сх-ся равном. по $\lambda\in\mathbb{R}$ по призн. Вейерштр.

3) при $\lambda=0$ $\quad I(\alpha,\beta,0)=\int\limits_0^1 \underbrace{\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx}_{\text{сх-ся}}+\int\limits_1^{+\infty}\underbrace{\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx}_{\text{сх-ся}}$

Значит I сх-ся при $\lambda=0$

Применима т. о дифф. по параметру

$$I'_\lambda=\int\limits_0^{+\infty}(e^{-\beta x}-e^{-\alpha x})\sin\lambda x\,dx=\frac{\lambda}{\lambda^2+\beta^2}-\frac{\lambda}{\lambda^2+\alpha^2}$$ –

как в прошлом примере (6.1)

$$I=\frac{1}{2}\ln(\lambda^2+\beta^2)-\frac{1}{2}\ln(\lambda^2+\alpha^2)+C(\alpha,\beta)$$

$$I(\alpha,\beta,0)=\frac{1}{2}\ln\beta^2-\frac{1}{2}\ln\alpha^2+C(\alpha,\beta)=\ln\frac{\beta}{\alpha}+C(\alpha,\beta)$$

Из определения $I(\alpha,\beta,0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}$ – по ф-ле Фрулани

Значит $C(\alpha,\beta)=0$

Ответ: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2+\beta^2}{\lambda^2+\alpha^2}$

(5) $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}=\alpha$ ← доопр. в т. $x=0$ ф-цию этим знач.

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=\frac{1}{(1+(\alpha x)^2)\sqrt{1-x^2}}$$

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)$ непрер. на $[0,1)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ сх-ся $\hookrightarrow$ $\int\limits_0^1\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$ сх-ся равн-но по $\alpha\in\mathbb{R}$ по пр. Вейер.

3) $I(x,0)=0$

Значит применима т. о дифф. по параметру.

$$I'_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{(1+(\alpha x)^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{x=\sin u}{=\!=} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\, du}{(1+\alpha^2\sin^2 u)\cos u} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\alpha^2\sin^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 u \cos^2 u} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 u\,(\operatorname{tg}^2 u + 1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 u)}\,du \overset{\operatorname{tg} u = t}{=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\alpha^2+1)t^2+1} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+\alpha^2}\,t)}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + C$$

$$I(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$

§ 15 13 (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x \, dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x \, dx = \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\alpha x^2 + x\beta} + e^{-\alpha x^2 - x\beta} \right) dx =$$

$$= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\left(\sqrt{\alpha} x - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} + e^{-\left(\sqrt{\alpha} x + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot$$

$$\cdot 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

§15 15(4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}\, dx$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)} = \alpha^2$$ ← доопределим ф-цию в т. $x=0$ этим значением

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 2\alpha, & x = 0 \end{cases}$$

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, dx$ - сх-ся равном. по пр Вейерштр, так как $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq \frac{1}{x^3}$

3) $\int_0^{+\infty} f(x,0)\, dx = 0$

применима теорема о дифф. по параметру.

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\, dx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}$$

1) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x,\alpha)$ непрер на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right| \leq \frac{2}{1+x^2}$ - сх-ся $\hookrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x,\alpha)\, dx$ сх-ся равном. по призн. Вейерштрасса

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, 0) = 0$

Применима теорема о дифф. по параметру.

$$I''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|2\alpha|}$$

интегр. Лапласа

$$I'(\alpha) = -\frac{\pi}{2} e^{-|2\alpha|} + C_1$$

$$I'(0) = 0 \hookrightarrow C_1 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow I'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-|2\alpha|}\right)$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-|2\alpha|} + C_2$$

$$I(0) = 0 \hookrightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{4}\left(2|\alpha| - 1 + e^{-|2\alpha|}\right)$

§16 7(4)

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}} = \int_0^2 x^{-\frac{3}{5}}(2-x)^{-\frac{2}{5}}dx = 2^{-\frac{2}{5}}\int_0^2 x^{-\frac{3}{5}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}dx =$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x}{2}}} \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}(1-t)^{-\frac{2}{5}}dt = B\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{5}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}} \;//$$

§16 9(3)

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{t=\frac{x^2}{a^2}}{=} \int_0^1 \frac{a}{2\sqrt{t}}\, a^2 t \sqrt{a^2-a^2t^2}\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1/2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{2}\, B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\, B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{a^4}{2} = \frac{1}{4\cdot 2}\, B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{a^4}{2} =$$

$$= \frac{a^4}{16}\,\frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{,\sqrt{\pi}}}{\Gamma(1)} = \underline{\underline{\frac{\pi a^4}{16}}}$$

§16 12(g)

$$\int_0^{\pi/2} tg^{2\alpha-1} x \, dx \quad , 0<\alpha<1$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1} x \cos^{1-2\alpha} x \, dx \overset{t=\sin x}{=\!=} \int_0^1 t^{2\alpha-1} (1-t^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \int_0^1 t^{2\alpha-1} (1-t^2)^{-\alpha} dt \overset{u=t^2}{=\!=} \int_0^1 u^{\frac{2\alpha-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\alpha} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{-\alpha} du = \frac{1}{2} B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} //$$