§22 65) Док-ть, что если $f(\pi - x) = f(x)$, то её коэфф обладают св-вами:

а) $a_{2n-1} = 0$ (по косинусам)

б) $b_{2n} = 0$ (по синусам)

(а) Раскладывая по косинусам, ф-цию продолжим на $[-\pi, \pi]$ чётным образом.

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\right]$$

Замена $t = \pi - x$:

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(2n-1)(\pi-t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\right] =$$

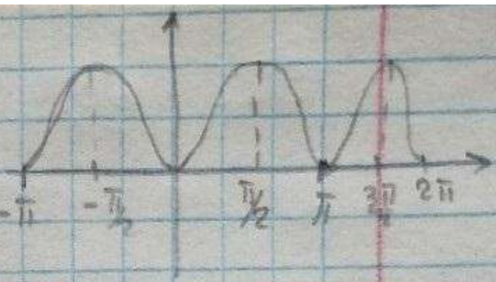
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos\left((2n-1)\pi - (2n-1)t\right)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\left(\overset{-1}{\cos(2n-1)\pi}\cdot\cos(2n-1)t + \overset{0}{\cancel{\sin(2n-1)\pi\cdot\sin(2n-1)t}}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cdot(-\cos(2n-1)t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(2n-1)t\,dt + \right.$$

$+\int_0^{\pi} f(t)\cos(2n-1)t\,dt\Big] = 0$



(8) Расклад. по синусам, ф-цию продолжим на $[-\pi, \pi]$ нечётным образом

все $a_k = 0$

$$b_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2nx\,dx +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{2\pi}^{2\pi} f(t)\sin 2n(\pi - t)\,dt +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin(2n\pi - 2nt)\,dt +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\big(\cancel{\sin 2n\pi}^{\,0}\cos 2nt -$$

$$-\underbrace{\cos 2n\pi}_{1}\sin 2nt\big) + \int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin 2nt + \int_0^{\pi} f(t)\sin 2nt\,dx\Big] =$$

$= 0$

§22 67) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x$

во-первых т.к. $a_k = 0$, то ф-ция нечетная

И т.к. все $b_{2n} = 0$, то из предыдущ. номера

$f(\pi - x) = f(x)$.

Ответ: $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$.

§22. 68) $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. на $[0, \pi/2]$

1 по системе $\{\cos(2n-1)x\}$, $n \in N$

т.к. все $b_k = 0$, то ф-ция чётная

и т.к. $a_{2n} = 0$, то $f(x+\pi) = -f(x)$.

Покажем это:

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\Big]$$

Замена $t = x + \pi$:

$$\frac{1}{\pi}\Big[-\int_{0}^{\pi} f(t)\cos 2n(t-\pi)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\Big] =$$

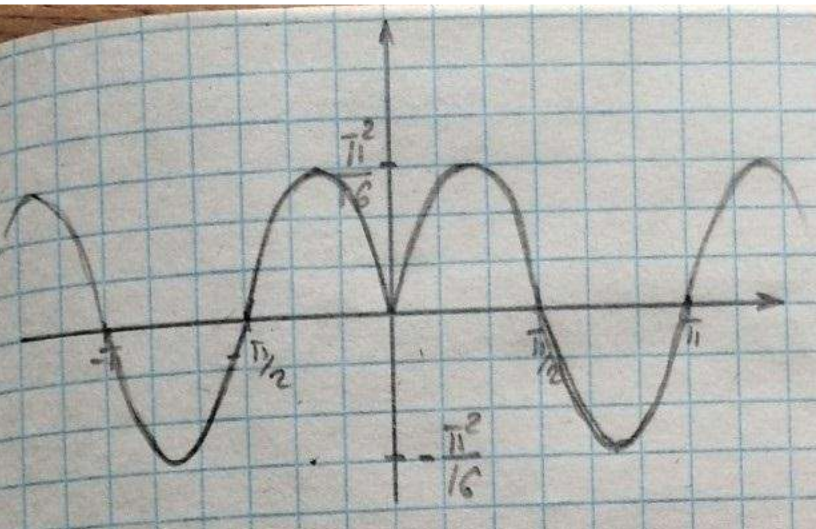
$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(2nt - 2n\pi)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{0}^{\pi} f(t)\big(\cos 2nt \underbrace{\cos 2n\pi}_{1} + \sin 2nt \cancel{\sin 2n\pi}^{0}\big)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} f(t)\cos 2nt\,dt\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{0}^{\pi} f(t)\cos 2nt\,dt + \int_{0}^{\pi} f(t)\cdot$$

$$\cdot \cos 2nt\,dt\Big] = 0.$$

Нарисуем график нашей полученной ф-ции:



Вычислим

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dX =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cancel{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\cos(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}x-x^2\right) d\,\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x^2-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{2}\right) d\,\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancelto{0}{\left(\frac{\pi}{2}x-x^2\right)\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_{0}^{\pi/2}} - \int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dX +\right.$$

$$\left. + 0 - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)dX\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\frac{d\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} +\right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right) d\,\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{0}^{\pi/2} +\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,2dX + \left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,2dX\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\cdot 2 \Big|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\frac{(-1)}{(2n-1)^2} - 0 - \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\cdot 2 \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{(2n-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\cdot 2 + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{(2n-1)^3} \right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{(2n-1)^2} - \frac{(-1)^n\cdot 4}{(2n-1)^3} \right)$$

Получим $f(x) \sim -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cdot$

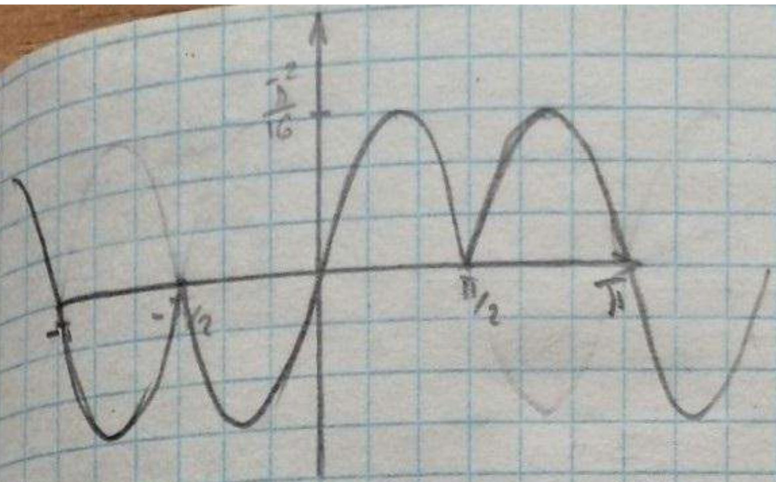
$\cdot \cos(2n-1)x$

2) по системе $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in \mathbb{N}$

т.к. все $a_k = 0$, то ф-ция нечётная

и т.к. $b_{2n} = 0$, то $f(\pi - x) = f(x)$ – из номера 65 2).

Построим график полученной ф-ции:



вычислим.

$$b_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(x-\pi)\sin(2n-1)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right)d\,\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}x - x^2 - \frac{\pi^2}{2}\right)d\,\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\overbrace{-\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right)\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2}}^{0} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\cdot 2\,dx + \left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\cdot 2\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}\,2\Bigg|_0^{\pi/2} + 0 - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cdot\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$-\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}\cdot 2\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Bigg] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{2}{(2n-1)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(2n-1)^3}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi}{(2n-1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^3}\right)$$

Получим $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x.$

§22 72)

① Центр симметрии в т $(0,0)$ и $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$.

т.е. ф-ция нечётная и $f(x) = -f(\pi - x)$

Т.к. нечётная, то $a_k = 0$.

И второе условие:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} f(x)\sin kx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]$$

Замена $t = \pi - x$:

$$\frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\sin k(\pi - t)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\sin(k\pi - kt)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\left(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin k\pi}}\cos kt - \cos k\pi\sin kt\right) + \right.$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big] = \frac{2}{\pi}\Big[-\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\cdot(-\cos k\pi \sin kt)\,+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big) = \frac{2}{\pi}\Big[\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,(-1)^k \sin kt\,+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big].$$

Видно, что при $k=2n-1$, $b_k=0$

② центр симметрии в $(0,0)$ и оси симметрии $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

т.е. ф-ция нечётная и $f(\pi-x)=f(x)$.

т.к. нечётная, то $a_k=0$

И второе усл-ие в силу № 65 даёт, что $b_{2k}=0$.

Ответ: 1) $a_k=0$, $b_{2k-1}=0$ 2) $a_k=0$, $b_{2k}=0$

§22 110)

Пусть тригонометрич. ряд сх-ся равномерно к своей сумме $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Т.к. ряд сх-ся равномерно, а все его

члены явл-ся непрерывными на $[-\pi, \pi]$ ф-циями, то и его сумма непрер. на $[-\pi, \pi]$, а сам ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \underline{\underline{\pi a_0}}$$

Получим $\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

Перемножим ряд почленно на $\cos nx$ - он также будет равномерно сх-ся. Проинт.:

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx +}$$

$$\cancel{+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx\,dx =}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\cos nx\,dx} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot$$

$$\cdot \cos nx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx.$$

в силу ортогональности системы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad . \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда останется только:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx \, dx = \pi a_n.$$

Откуда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx \, dx = \pi b_n$$

Откуда $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

Получим, что коэф. a_0, a_n, b_n явл-ся коэфф. Фурье суммы ряда. Значит равном. сх-ся тригонометр. ряд явл-ся рядом Фурье своей суммы.

§22. 1131)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ – не явл-ся, т.к. его коэфф

$b_n = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

~~5~~ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ - он сх-ся равномерно по

призн. Вейерштрасса, т.к. $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ - сх-ся

Значит по номеру 110 равномерно сх-ся тригонометр. ряд явл-ся рядом Фурье своей суммы.