5.22

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

$f(x) \in C[0, 2\pi]$, λ - ?

$$\cos(2x - y) = \cos 2x \cos y + \sin 2x \sin y$$

$$(*)\quad \varphi(x) = \lambda a_1 \cos 2x + \lambda a_2 \sin 2x + f(x),$$

где $\quad a_1 = \int_0^{2\pi} \varphi(y) \cos y\,dy \qquad a_2 = \int_0^{2\pi} \varphi(y) \sin y\,dy$

$$a_1 = \lambda a_1 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x\,dx} + \lambda a_2 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos x \sin 2x\,dx} + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\,dx}_{f_1}$$

$$a_2 = \lambda a_1 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin x \cos 2x\,dx} + \lambda a_2 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x\,dx} + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) \sin x\,dx}_{f_2}$$

Получаем $\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[E - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Видно, что уравнение разрешимо при $\forall \lambda$ и имеет единств. решение $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

Подставим в $(*)$, получим решение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y) f(y)\,dy + f(x)$$

5.23(5)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(xy + x^2y^2\right)\varphi(y)\,dy + ax + b$$

Обозначим $\frac{\lambda}{2} \equiv \mu$: $\quad \varphi(x) = \mu \int_{-1}^{1} \left(xy + x^2y^2\right)\varphi(y)\,dy + ax + b$

$\varphi(x) = \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + ax + b$, где

$$a_1 = \int_{-1}^{1} y\,\varphi(y)\,dy \qquad a_2 = \int_{-1}^{1} y^2\varphi(y)\,dy$$

$$(1)\quad a_1 = \mu a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{2/3} + \mu a_2 \cancel{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}^{=0} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\left(ax^2 + bx\right)dx}_{f_1} \hookrightarrow d_{11} = \frac{2}{3},\ d_{12} = 0,\quad f_1 = \frac{2}{3}a$$

$$a_2 = \mu a_1 \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \mu a_2 \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{1}\left(ax^3 + bx^2\right)dx}_{f_2} \hookrightarrow d_{21} = 0\ \ d_{22} = \frac{2}{5},\quad f_2 = \frac{2}{3}b$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2}{5}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3\,a \\ 2/3\,b \end{bmatrix}$$

Зад. 1

Найдём собств. числа: $\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = \frac{5}{2}$

Зад 2

$\mu = \frac{3}{2}$: $\quad (6)'_1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$

$\mu = \frac{5}{2}$: $\quad (6)'_2 \quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$

Зад. 3

$\mu \neq \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$: $\qquad a_1 = \frac{2a}{3 - 2\mu}, \quad a_2 = \frac{2b}{3 - \frac{6}{5}\mu}$

$$\varphi(x) = \mu \frac{2a}{3-2\mu} x + \mu \frac{2b}{3-\frac{6}{5}\mu} x^2 + ax + b$$

$\underline{\mu = \frac{3}{2}}$: решения есть при $a = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \frac{5}{3}b \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = \mu \tilde{C}_1 x + \frac{5}{6} 2\mu b x^2 + b = \frac{3}{2}\tilde{C}_1 x + \frac{5}{2} b x^2 + b$

$\underline{\mu = \frac{5}{2}}$: решения есть при $b = 0$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}$$

Откуда $\varphi(x) = -a\mu x + \tilde{C}_2 \mu x^2 + ax = -\frac{3}{2}ax + \tilde{C}_2 \frac{5}{2} x^2$

5.24(2)

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}K(x,y)\varphi(y)\,dy+f(x)$$

$$K(x,y)=3xy+5x^2y^2,\quad f(x)=ax^2+bx$$

$$\varphi(x)=\lambda 3a_1x+\lambda 5x^2a_2+ax^2+bx$$

где $a_1=\lambda\int_{-1}^{1}3\varphi(y)y\,dy$ $\qquad a_2=\lambda 5\int_{-1}^{1}\varphi(y)y^2\,dy$

$$a_1=3\lambda a_1\int_{-1}^{1}x^2\,dx+5\lambda a_2\int_{-1}^{1}x^3\,dx+\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)x\,dx=$$

$$=2\lambda a_1+\frac{2}{3}b$$

$$a_2=3a_1\lambda\int_{-1}^{1}x^3\,dx+5a_2\lambda\int_{-1}^{1}x^4\,dx+\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)x^2\,dx=$$

$$=2a_2\lambda+\frac{2}{5}a$$

$$\begin{bmatrix}1-2\lambda & 0\\ 0 & 1-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}b\\ \frac{2}{5}a\end{bmatrix}$$

Собств. числа $\lambda=\frac{1}{2}$ $\hookrightarrow$ собств. ф-ции $\varphi(x)=\frac{1}{2}x$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$.

$\underline{\lambda\neq\frac{1}{2}:}$ $\quad\varphi(x)=\dfrac{ax^2+bx}{1-2\lambda}$, т.к. $a_1=\dfrac{2b}{3(1-2\lambda)}$, $a_2=\dfrac{2a}{5(1-2\lambda)}$

$\underline{\lambda=\frac{1}{2}:}$ $\quad\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}b\\ \frac{2}{5}a\end{bmatrix}\rightarrow a=b=0,\ \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{C}_1\\ \tilde{C}_2\end{bmatrix}$

$$\varphi(x)=C_1x+C_2x^2.$$