

# ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## 1-е задание

1. Начало координат системы  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$  относительно системы  $K$ , а оси координат составляют со скоростью  $\mathbf{V}$  те же самые углы, что и оси системы  $K$ . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$  (а также обратного преобразования). Определить положение осей  $(x', y')$  в системе  $K$  в момент времени  $t = 0$  по часам системы  $K$ .

Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости  $\mathbf{V}$  векторов:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ , где  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} / V^2$ ,  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} / V^2$ .

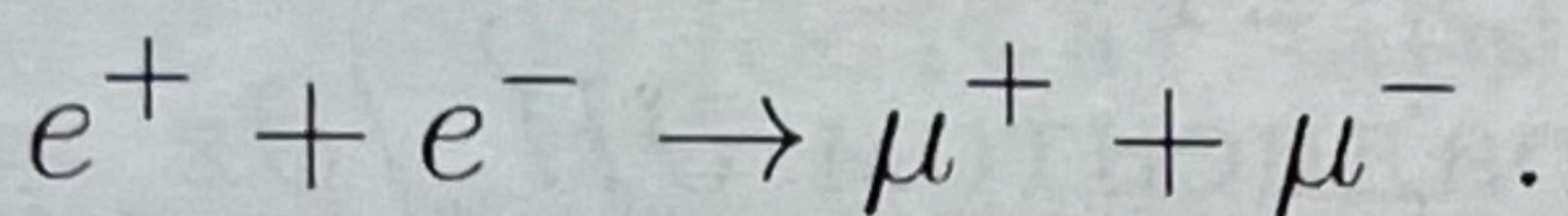
2. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?

3.) Доказать, что трехмерные тензоры  $\delta_{\alpha\beta}$  и  $e_{\alpha\beta\gamma}$  являются инвариантными тензорами. Вычислить свертки  
 а)  $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\mu\alpha}$ ;  
 б)  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}$ ,  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}$ ,  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}$ ;  
 покоординатно проверить, что  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  эквивалентно  $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$ .

4.) Раскрыть в тензорных обозначениях выражения:  
 $\text{rot rot } \mathbf{A}$ ,  $\text{rot } [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $\text{rot}(f\mathbf{A})$ ,  $\text{div}(f\mathbf{A})$ ,  $\text{div } [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .  
 Вычислить: а)  $\text{rot } [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ ,  $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{a}$  — постоянные векторы; б)  $\text{grad } r$ ,  $\text{div } \mathbf{r}$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$ ,  $\text{grad } f(r)$ ,  $\text{rot } \mathbf{a}(r)$ ,  $\text{div } \mathbf{a}(r)$ ,  
 $(r \equiv |\mathbf{r}|)$ .

5.) Для получения  $\gamma$ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией  $\mathcal{E} = 200$  ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов  $\varepsilon = 2$  эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.

6.) В ускорителе на встречных пучках идет реакция



Зная энергию  $\mathcal{E}^+$  и  $\mathcal{E}^-$  каждого из пучков  $e^+$  и  $e^-$  соответственно, найти энергию и импульсы  $\mu^+$  и  $\mu^-$ . Каков энергетический порог этой реакции? Рассмотреть общий случай  $\mathcal{E}^+ \neq \mathcal{E}^-$ . Сравнить порог реакции в частном случае  $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-$  с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

7.) Для нейтрино, образующихся при распаде  $\pi$ -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса  $\pi$ -мезона  $\approx 140$  МэВ, масса  $\mu$ -мезона  $\approx 105$  МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергию и угловое распределение, если известно, что в системе покоя  $\pi$ -мезона распад  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  происходит изотропно.

8.) Плоское зеркало движется со скоростью  $V$  в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом  $\theta$  к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

9.) Показать, что однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , направленное по оси  $z$ , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}.$$

Градиентным преобразованием перейти к потенциалу  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{r}]$ .

10. Найти движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В случае  $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$  определить скорость дрейфа.
11. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина  $p_{\perp}^2/H$  остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения  $H_1$  до  $H_2$ . Получить формулу для адиабатического инварианта в случае, когда импульс частицы направлен произвольно.
12. Магнитное поле, направленное по оси  $z$  вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом  $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$ . Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси  $z$ ? Найти радиальные компоненты поля вне оси  $z$ . Представить картину силовых линий.
13. Получить формулу  $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}$  для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном постоянном магнитном поле, и найти (в релятивистском случае) уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы и скорость дрейфа. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.)
14. \* На больших расстояниях магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}\}/r^5$  с магнитным моментом

$$\mathbf{m} = 8.1 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3.$$

- а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол  $\alpha$  с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достижимую частицей. Найти угол  $\alpha$ , при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной

плоскости, значительно больше радиуса Земли. в) Используя результаты предыдущей задачи 13, найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

## 2-е задание

15. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ .

16. Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью электронного облака

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где  $e$  — заряд электрона и  $a \sim 10^{-8}$  см — боровский радиус. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром:

а) считая ядро точечным зарядом;

б) считая ядро сферически-симметричным заряженным шаром радиуса  $r_0 \sim 10^{-13}$  см с плотностью заряда  $\rho_{\text{ядра}}(r)$ . Получить ответ для частного случая равномерно заряженного шара.

17. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом  $Q$  и полуосами  $a$ ,  $b$  и  $c$  относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, а также энергию взаимодействия этого эллипса с диполем  $\mathbf{d}$ , расположенным в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  на большом расстоянии от эллипса (с учетом диполь-квадрупольного члена).

18. Вычислить средние значения произведений компонент единичных векторов:

$$\langle n_\alpha \rangle, \langle n_\alpha n_\beta \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle.$$

Усреднение ведется по единичной сфере  $n_\alpha n_\alpha = 1$ .

19. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но не обязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

20. \* Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте  $L$  над идеально проводящей металлической плоскостью. Найти угловое

распределение интенсивности излучения диполя в зависимости от углов наблюдения ( $\theta$  и  $\varphi$ ) и угла между диполем и нормалью к плоскости  $\alpha$ . Исследовать предельные случаи  $L \ll \lambda$  и  $L \gg \lambda$ .

- 21) Два одноименных заряда ( $e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0$ ) испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности  $v_\infty \ll c$ . Отдельно рассмотреть случай  $e_1/m_1 = e_2/m_2$  (квадрупольное излучение).
22. \* Два противоположных заряда ( $e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 < 0$ ) обращаются один вокруг другого по круговой орбите радиуса  $R$ . Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени.
- 23) Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце —  $5 \cdot 10^{12}$ . Оценить характерную длину волны излучения.
- 24) Релятивистский электрон пролетает со скоростью  $V$  через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой  $\omega_0$ . Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла  $\theta$  между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.
- 25) Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния естественного света с частотой  $\omega$  (а также линейно поляризованного света) осциллятором с затуханием.
26. \* Найти сечение рассеяния линейно поляризованного света на идеально проводящем металлическом шаре радиуса  $R$  в пределе  $R \ll \lambda$ .