ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 марта)

I. Комбинация событий

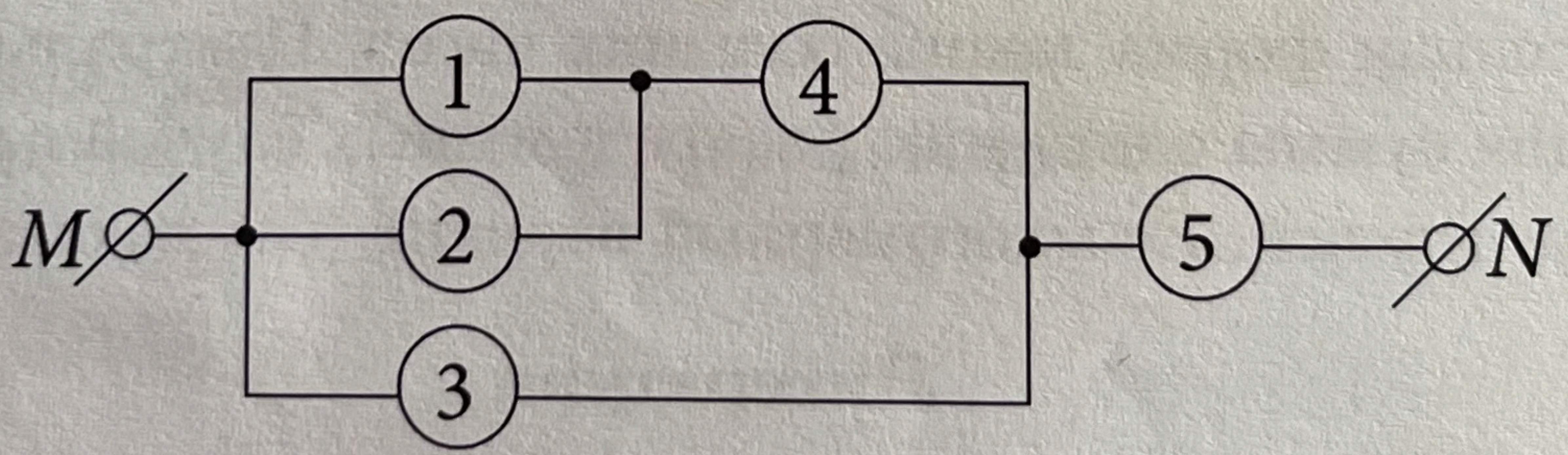
1. Пусть A,B и C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

a) произошло только A;
b) произошло A и B, а C не произошло;
c) все три события произошли;
d) произошло по крайней мере одно из событий;
e) ни одно из событий не произошло.

2. Проверить справедливость следующих равенств:

a) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$;
c) $(A \cup B)C = AC \cup BC$;
d) $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке:



Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

4. Найти простые выражения для событий:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$;
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$.

5. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство подмножеств некоторого множества. Проверить справедливость соотношений

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}, \quad \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}.$$

аксиома выбора

6*. Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность подмножеств некоторого множества. Пусть A_* — подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат бесконечно многим подмножествам последовательности $\{A_n\}$, A^* — подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат всем подмножествам последовательности $\{A_n\}$, кроме конечного их числа. Выразить A_* и A^* через подмножества $\{A_n\}$ с помощью теоретико-множественных операций.

II. Классическое определение вероятности

7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

a) 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

b) не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5 из 8-ми?

8. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (не обязательно рядом).

9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (учесть, что число дней в разных месяцах различно).

10. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

11. Из колоды 52 карты наудачу выбирается 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут карты всех четырех мастей?

12. Для работы выделено 12 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

13. В задаче 3 из предыдущего раздела найти $\mathsf{P}(C)$, если события $(A_i)_{i=1,\dots,5}$ независимы в совокупности и $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{i+1}$.

14. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n — вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

15. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число юношей и девушек?

16*. n мужчин и n женщин случайно рассаживаются вокруг круглого стола. С какой вероятностью их можно разбить на пары (мужчина, женщина)?

III. Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула умножения и формула Байеса

17. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором — 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

19. Стрелки A,B и C поражают мишень с вероятностями 0.6, 0.5 и 0.7 соответственно. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Найти вероятность того, что стрелок C попал в мишень.

20. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что (априорные) вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0.3, 0.4, 0.3. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0.6, а с вероятностями 0.2 и 0.2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

21. Пусть в урне N белых и M черных шаров. Из нее случайно потеряли K шаров. После этого достали шар. Какая вероятность того, что он белый?

22. На связке N ключей. Мы берем наудачу любой ключ. Если он не открывает дверь, то мы откладываем его в сторону. Найти вероятность того, что мы откроем дверь с K-й попытки, если к двери подходит ровно один ключ.

23. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на первой кости выпало меньше очков, чем на второй.

24. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий, причем $C \subset B$. Показать, что события A и $B \setminus C$ также независимы.

25*. Человек с вероятностью p делает шаг вправо, а с вероятностью $1-p$ — влево. С какой вероятностью он упадет, если он находится на расстоянии $n \geq 0$ шагов слева от края пропасти?

26*. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент времени $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента времени t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t+h)$, равна $\lambda h + o(h), h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

IV. Геометрическая вероятность

27. Юноша и девушка условились встретиться в определенном месте от полудня до часа дня. Пришедший (шая) первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

28. Стержень длины L разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность, что из полученных кусков можно составить треугольник?

29. На плоскость, разлинованную линиями, расстояние между которыми равно L, бросили иглу длиной $l < L$. Найти вероятность того, что она пересечет хотя бы одну линию.

30. На отрезке $[0, 1]$ наудачу выбираются точки ξ, η. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет действительные корни одного знака?

31. (Парадокс Бертрана) На окружности случайным образом провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

V. Дискретные случайные величины и их характеристики

32. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возвращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

33. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0, $+1$ с вероятностями $1/3$, $1/6$, $1/2$ соответственно. Найти:

a) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$;

b) совместное распределение и ковариацию случайных величин η и ξ.

34. Рассматривается следующая игра. Игрок покупает билет за N рублей и начинает бросать правильную монету. Если герб первый раз выпал на n-м шаге, игрок получает 2^n рублей и уходит. При какой стоимости входного билета казино будет выгодна такая игра, если:

a) размер разовой выплаты неограничен;

b) размер разовой выплаты не превосходит 1 000 000 рублей.

35. Бросаются две игральные кости. Пусть X_i — число очков (от 1 до 6), выпавшее на i-й кости $i = 1, 2$. Найти совместное распределение случайных величин $Y = \min\{X_1, X_2\}$ и $Z = X_2$, их математическое ожидание, дисперсию и ковариацию. Написать формулу оптимального линейного прогноза величины Y по наблюдению величины Z.

36. Закон распределения случайной величины ξ определяется формулами

$$P(\xi = -1) = P(\xi = +1) = a, \quad P(\xi = 0) = 1 - 2a.$$

Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 1)$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

37. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

а) $\mathsf{P}(\xi = \eta)$; б) $\mathsf{P}(\xi > \eta)$; в) $\mathsf{P}(\xi + \eta = k)$; г) $\mathsf{P}(\xi = l | \xi + \eta = k)$; д) $\mathsf{P}(\xi = k | \xi = \eta)$.

38. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geq k).$$

39. В N ячеек случайно размещается n неразличимых шаров. Найти мат. ожидание и дисперсию числа пустых ячеек.

40. Пусть ξ и η – числа появлений единицы и шестерки при n бросаниях игральной кости соответственно. Найти коэффициент корреляции этих величин.

41. Кидают несимметричную монету. Найти:

а) математическое ожидание количества бросаний до выпадения первого герба;

б)* математическое ожидание количества бросаний до выпадения двух гербов подряд.

42*. Игральная кость бросается до тех пор, пока хотя бы один раз не выпали все грани. Найти мат. ожидание числа бросаний.

43*. Пусть ξ и η — две случайные величины с $M(\xi) = M(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = \rho(\xi, \eta)$. Показать, что

$$M(\max(\xi^2, \eta^2)) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Используя данный результат для произвольных случайных величин ξ и η, получить двумерный аналог неравенства Чебышева:

$$P\left(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\xi)} \ \vee \ |\eta - M(\eta)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\eta)}\right) \leq$$
$$\leq \varepsilon^{-2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2(\xi, \eta)}).$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Характеристики непрерывных случайных величин

1. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

2. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между точками.

3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = g(\xi)$, если:

a) $p(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g(x) = -\ln(1 - x);$
b) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \ln(x);$
c) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \{x\}$ (дробная часть x);
d) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 1/x;$
e) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 2x/(1 - x^2).$

4. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и она является непрерывной и строго возрастающей. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $\eta = F(\xi)$.

5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью $p(x)$. Найти распределение случайных величин $\alpha = \min_{1\le k\le n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1\le k\le n} \xi_k$.

6*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $[a, b]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и взаимную ковариацию случайных величин $\alpha = \min_{1\le k\le n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1\le k\le n} \xi_k$.

7. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $p(x)$. Найти совместную плотность распределения полярных координат (r, φ) точки (ξ_1, ξ_2). Считать, что $0 \le \varphi \le 2\pi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин $\chi_1 = \xi + \eta$, $\chi_2 = \xi - \eta$, $\chi_3 = \xi\eta$ и $\chi_4 = \xi/\eta$.

9. Случайные величины ξ и η независимы. Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а $\mathsf{P}(\eta = -1) = \mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \frac{1}{3}$. Какое распределение имеют $\xi\eta$ и $\xi + \eta$?

10. Пусть ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти $\mathsf{P}(\xi > k | \xi > l)$.

11. Плотность совместного распределения вероятностей случайных величин ξ и η определяется равенствами $p_{\xi,\eta}(x, y) = C(x + y)$ при $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти:

a) постоянную C;
b) одномерные плотности распределения случайных величин ξ и η;
c) плотности распределения случайной величины $\max(\xi, \eta)$.

12. Метод Монте-Карло. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Показать, что

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - \int_0^1 f(x)dx\right| > \varepsilon\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n\varepsilon^2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\right)$$

для любой интегрируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$.

13. Найти характеристические функции:

a) нормального распределения с параметрами (a, σ^2);
b) равномерного распределения на $[0, a]$;
c) распределения Пуассона $p(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
d) распределения с плотностью $p_\alpha(x) = C_\alpha x^{-2}(1 - \cos(x/\alpha))$, $x \in R$, где C_α — параметр, который надо определить.

14. Найти распределение вероятностей случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

$$a)\ \varphi(t) = \cos t; \quad b)\ \varphi(t) = e^{it}\cos t;$$

$$c)\ \varphi(t) = (2 - e^{it})^{-1}; \quad d)\ \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}.$$

15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

a) $\varphi(t) = 4t^{-2}\cos t \sin^2(t/2)$;
b) $\varphi(t) = (1 - it)^{-p}(1 + it)^{-q} \quad p, q > 0$;
c) $\varphi(t) = \arcsin(\theta)^{-1}\arcsin(\theta e^{it}), \quad 0 < \theta < 1$.

16. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

называется χ^2-распределением с n степенями свободы.

a) найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2-распределения с 2-мя степенями свободы;
b) найти характеристическую функцию и формулы для моментов любого порядка χ^2-распределения с n степенями свободы.

17. Пусть $\xi_{m,n}(m = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые случайные величины с функцией распределения

$$F_n(x) = P(\xi_{m,n} \le x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha_n x), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \alpha_n = \lambda n,\ \lambda > 0.$$

Найти предельное распределение при $n \to +\infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \ldots + \xi_{n,n}$.

18. Случайная величина π_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P\left\{\frac{\pi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right\}$.

19. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ принимает значения в R^n и имеет матрицу ковариации $C = \|c_{ij}\|$. Доказать, что:

a) матрица C неотрицательно определена, т.е. $(\vec{x}, C\vec{x}) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j \geq 0$ для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ (указание: рассмотреть $\sum_i x_i \xi_i$);

b)* если $\mathrm{rg} C = r$, то существует r-мерная гиперплоскость L_r в R^n, для которой $P(\vec{\xi} \in L_r) = 1$, и $P(\vec{\xi} \in L_{r-1}) < 1$ для любой $r-1$-мерной гиперплоскости L_{r-1} в R^n.

20. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти распределение выборочного среднего $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ выборочной дисперсии $\beta = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \alpha)^2$.

21*. В условиях предыдущей задачи доказать независимость случайных величин α и β.

II. Пуассоновское и нормальное приближения

22. Пусть в книге из 500 страниц содержится 10 опечаток. Используя биномиальный закон распределения и его наилучшее в данном случае приближение, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее 2 опечаток.

23. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0.515.

24. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, выпавших при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geq 0.1\right\} \leq 0.1.$$

Задания составили:

к.ф.-м.н., доцент А. В. Куликов

д. ф.-м. н., профессор М. Е. Широков