⑨

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta \hat{p}_\beta] = \hat{p}_\beta [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta]\hat{p}_\beta =$$

$$= \hat{p}_\beta\, i\hbar\delta_{\alpha\beta} + i\hbar\delta_{\alpha\beta}\cdot\hat{p}_\beta = 2i\hbar\hat{p}_\alpha$$

Итого: $[\hat{x}_\alpha, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$

$$[U(\vec r), \hat p_\alpha]\psi(\vec r) = U(\vec r)(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\psi(\vec r) - (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(U(\vec r)\cdot$$

$$\cdot\psi(\vec r)) = -i\hbar \cancel{U(\vec r)}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + i\hbar\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}\psi + i\hbar \cancel{U(\vec r)}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} = i\hbar \frac{\partial U}{\partial r_\alpha}\psi(\vec r)$$

Итого: $[U(\vec r), \hat{\vec p}] = i\hbar \frac{\partial U}{\partial \vec r} = i\hbar\nabla U$

$$[U(r), \hat{p}^2]\psi = \hat{p}_\beta [U(r), \hat{p}_\beta]\psi + [U(r), \hat{p}_\beta]\hat{p}_\beta\psi =$$

$$= \hat{p}_\beta\, i\hbar(\nabla_\beta U(r))\psi + i\hbar(\nabla_\beta U(r))\cdot\hat{p}_\beta\psi = \hbar^2\psi\Delta U(r) +$$

$$+ \hbar^2(\nabla_\beta U(r))\cdot\nabla_\beta\psi + \hbar^2(\nabla_\beta U(r))\nabla_\beta\psi = \left(\hbar^2\Delta U(r) +\right.$$

$$\left.+ 2\hbar^2(\nabla U(r), \nabla)\right)\psi$$

Итого: $[U(r), \hat{p}^2] = \hbar^2(\Delta U(r) + 2(\nabla U(r), \nabla))$

14

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta\hat{p}_\gamma] = \hat{x}_\beta[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\gamma] + \cancelto{0}{[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta]}\hat{p}_\gamma = i\hbar\delta_{\alpha\gamma}\hat{x}_\beta$$

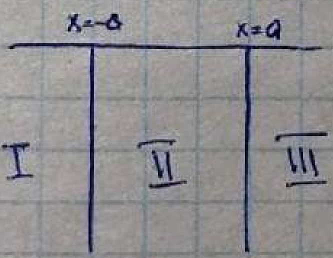
$$[\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta\hat{p}_\gamma] = \hat{x}_\beta\cancelto{0}{[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\gamma]} + [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta]\hat{p}_\gamma = i\hbar\delta_{\alpha\beta}p_\gamma = \hbar^2\delta_{\alpha\beta}\nabla_\gamma$$

$$[\hat{x}_\alpha\hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma\hat{p}_\nu] = \hat{x}_\gamma[\hat{x}_\alpha\hat{p}_\beta, \hat{p}_\nu] + [\hat{x}_\alpha\hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma]\hat{p}_\nu =$$

$$= -x_\gamma\hbar^2\delta_{\nu\alpha}\nabla_\beta - i\hbar\delta_{\alpha\beta}x_\alpha(-i\hbar\nabla_\nu) = -\hbar^2(\delta_{\nu\alpha}x_\gamma\nabla_\beta + \delta_{\gamma\beta}x_\alpha\nabla_\nu)$$

Задача 6

$$U(x) = -\alpha\,\delta(x+a) - \alpha\,\delta(x-a)$$



$$\mathrm{I}: \; -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi = -|E|\psi$$

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi = \varkappa^2\psi \to \psi = \tilde{A}e^{\varkappa x}$$

Для II и III по аналогии. Получим след.:

$$\psi(x) = \begin{cases} \tilde{A}e^{\varkappa x}, & x < -a \\ C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}, & |x| < a \\ \tilde{B}e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

В силу симметричности потенциала $(U(x) = U(-x))$

следует $[\hat{H}, \hat{I}] = 0 \Rightarrow$ можно выбр. собств. ф-ции

$\psi_\pm$: $\psi_\pm(x)$ - собств. ф-ции для $\hat{H}$ и $\hat{I}$ (т.е. чётн. и нечётн.)

$$\psi_\pm(x) = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}$$

$$\psi(-x) = \begin{cases} \tilde{B} e^{\varkappa x}, & x < -a \\ C_1 e^{-\varkappa x} + C_2 e^{\varkappa x}, & |x| < a \\ \tilde{A} e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

Откуда получим:

$$\psi_+(x) = \begin{cases} A e^{\varkappa(x+a)}, & x < -a \\ B \operatorname{ch} \varkappa x, & |x| < a \\ A e^{-\varkappa(x-a)}, & x > a \end{cases} \qquad \psi_-(x) = \begin{cases} A_1 e^{\varkappa(x+a)}, & x < -a \\ B_1 \operatorname{sh} \varkappa x, & |x| < a \\ A_1 e^{-\varkappa(x-a)}, & x > a \end{cases}$$

Учитывая усл-ия на границах:

$$\begin{cases} \psi(a+0) = \psi(a-0) \\ \psi'(a+0) - \psi'(a-0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a) \end{cases}$$

Получим для $\psi_+(x)$:

$$\begin{cases} A = B \operatorname{ch} \varkappa x \\ -\varkappa A - \varkappa B \operatorname{sh} \varkappa a = -\frac{2m\alpha A}{\hbar^2} \end{cases}$$

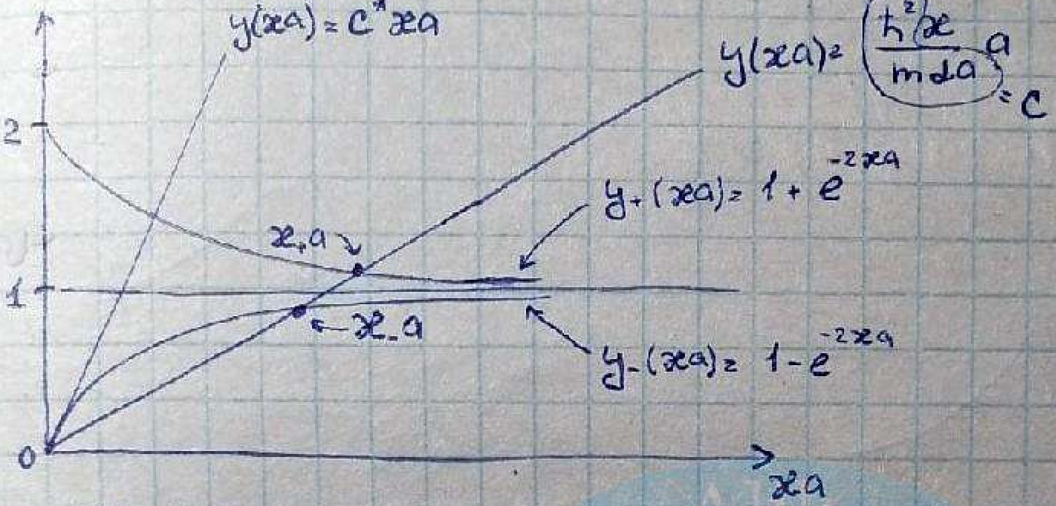
$$A\left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} - 1\right) = B \operatorname{sh} \varkappa a \Rightarrow \operatorname{th} \varkappa a = \frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} - 1$$

$$\frac{2m\alpha}{\hbar^2\varkappa} = 1 + \operatorname{th} \varkappa a = 1 + \frac{e^{\varkappa a} - e^{-\varkappa a}}{e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a}} = \frac{2e^{\varkappa a}}{e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a}}$$

$$\frac{\hbar^2\varkappa}{m\alpha} = 1 + e^{-2\varkappa a}$$

Для $\psi_-(x)$ аналогично получим $\frac{\hbar^2 \varkappa}{m\lambda} = 1 - e^{-2\varkappa a}$

Эти ур-ия решим графически:



Из графика получаем, что $\varkappa_- < \varkappa_+ \hookrightarrow |E_-| < |E_+| \hookrightarrow$

$\hookrightarrow E_- > E_+$. Энергию $E_\pm$ можно вычислить по $E_\pm = -\frac{\hbar^2 \varkappa_\pm^2}{2m}$

Причём решение $\varkappa_- a$ $\exists$ только если $C \leq C^*$

Чтобы опред. C^*, запишем усл-ие касания:

$$(C^* x)'\Big|_{x=0} = (1 - e^{-2x})'\Big|_{x=0} \hookrightarrow C^* = 2.$$

Усл-ие $C \leq C^*$ равносильно $\frac{\hbar^2}{m\lambda a} \leq 2$

То есть, если $\frac{\hbar^2}{2m\lambda a} \leq 1$, то имеем два решения: $\psi_\pm(x)$

Если $\frac{\hbar^2}{2m\lambda a} > 1$, то будет только 1 реш. $\psi_+(x)$.

Исследуем случай $\frac{\hbar^2}{2m\lambda a} \ll 1$:

$$x = \frac{m\lambda a}{\hbar^2}\left(1 \pm e^{-2x}\right)$$

С помощью метода прост. итераций:

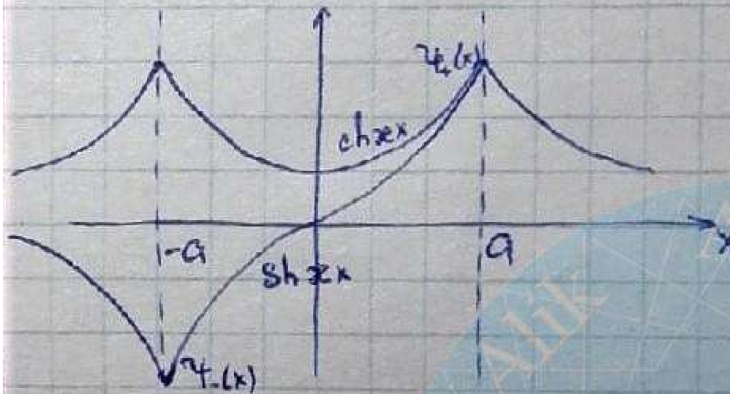
$$x^{(0)} = \frac{m\lambda a}{\hbar^2} \qquad x^{(1)} = \frac{m\lambda a}{\hbar^2}\left(1 \pm e^{-\frac{2m\lambda a}{\hbar^2}}\right)$$

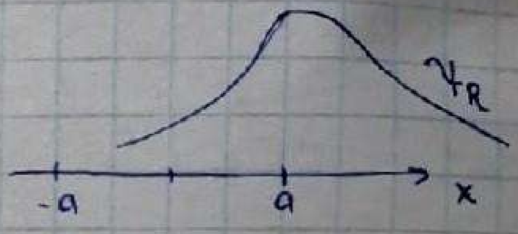
Откуда $|E_\pm| = \frac{\hbar^2 \varkappa_\pm^2}{2m} = \frac{\hbar^2 x_\pm^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{m\lambda a}{\hbar^2}\right)^2\left(1 \pm e^{-\frac{2m\lambda a}{\hbar^2}}\right)^2 \simeq$

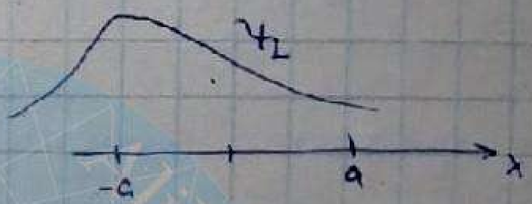
$$\simeq \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 \pm 2 e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)$$

$$E_+ = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 + 2 e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right)$$

$$E_- = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(1 - 2 e^{-\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}}\right) > E_+$$







Волновая ф-ция частицы в общем виде:

$$\psi(x,t) = C_1 \psi_+ e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} + C_2 \psi_- e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}$$

$$\psi(t=0) = C_1\psi_+ + C_2\psi_-$$

Рассм. волнов. ф-цию, соотв. нахожд. частицы в правой яме:

$$\psi_R = A_1\psi_+(x) + A_2\psi_-(x)$$

Т.к. собств. ф-ции эрмит. операт., отвеч. различным собств. знач. ортогональны $\Rightarrow$ $\langle\psi_+|\psi_-\rangle = 0$ $\Rightarrow$ част. будет иметь волнов. ф-цию ψ_+ или ψ_-.

т.к. мы рассм. $\frac{\hbar^2}{2m\alpha a} \ll 1 \Rightarrow E_+ \approx E_- \Rightarrow A_1 \approx A_2$

Из физич. смысла коэф.: $1 = A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\psi_R(x) = \frac{\psi_+(x)+\psi_-(x)}{\sqrt{2}}$$

Аналогично для $\psi_L(x)$: $\psi_L(x) = \frac{\psi_+ - \psi_-}{\sqrt{2}}$

По условию:

$$\psi(t=0) = \psi_L(x) = C_1\psi_+ + C_2\psi_- \hookrightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\psi_R + \psi_L}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\psi_R - \psi_L}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} =$$

$$= \psi_R \cdot \left(\frac{e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}}{2}\right) + \psi_L \cdot \left(\frac{e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}}{2}\right)$$

Получим вер-сть нахожд. частицы в мом. врем. t в правой яме:

$$P_R(t) = \left|\frac{e^{-iE_+\frac{t}{\hbar}} - e^{-iE_-\frac{t}{\hbar}}}{2}\right|^2 = \sin^2\left(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar} \cdot t\right)$$