Задача 10.2

$u = \frac{d\omega}{dk}$ выразить через v и $\frac{dv}{d\lambda}$; v и $\frac{dn}{d\lambda}$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \overset{k=\frac{2\pi}{\lambda}}{=} v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} \overset{v=\frac{c}{n}}{=} v - \lambda c\frac{d\,1/n}{d\lambda} = v + \frac{\lambda c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} =$$

$$= v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

Задача 10.5

2) $v = a\sqrt{\lambda}$ $\quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = a\sqrt{\lambda} - \lambda \cdot a\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{v}{2}$

3) $v = \frac{a}{\sqrt{\lambda}}$ $\quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = \frac{a}{\sqrt{\lambda}} + \lambda\frac{a}{2\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{2}v$

5) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ $\quad u = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} - \frac{\lambda\, b^2\lambda \cdot 2}{2\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{v}$

Задача 1°

Дано:

$N \sim 1{,}5 \cdot 10^6\ см^{-3}$

$\nu - ?$

для атмосферы

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

чтобы было отражение, надо, чтобы $n^2 < 0$, т.е. $\omega < \omega_p$.

$$\omega_p = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N} = 69 \cdot 10^6$$

$$\nu < \frac{\omega}{2\pi} = 10 \cdot 10^6\ Гц = 10\ МГц$$

$$\lambda > \frac{2\pi c}{\omega} = 30\ м$$

Задача 108

$n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$

α

$u - ?$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} = \frac{\omega}{k}$$

$$ck = \omega\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Дифференцируем:

$$c\,dk = \frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

Т.к. $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega} = \frac{c \cdot ck}{\omega} = \frac{c^2}{v}$

$u = \frac{c^2}{v} = cn = c\sin\alpha \leftarrow$ т.к. $n = \sin\alpha$ (полное внутр. отр.)

Ответ: $u = cn = c\sin\alpha$

Задача 10.43

$N(x) = \mu x$

ω

$\tau - ?$

Для критич. концентрации $n = 0$:

$$\omega_p^2 = \omega^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$$

$$X = \frac{\omega^2 m}{4\pi e^2 \mu} \equiv L$$

Из прошлого номера

$$u = cn = c\sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 \mu}{m\omega^2} x} = \frac{dx}{dt}$$

$$c\int_0^{\tau/2} dt = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 \mu}{m\omega^2} x}}$$

$$\frac{c\tau}{2} = \left.\frac{\sqrt{1-\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}x}\cdot 2}{-\frac{4\pi e^2\mu}{m\omega^2}}\right|_0^L = \frac{2m\omega^2}{4\pi e^2\mu}$$

$$\tau = \frac{m\omega^2}{\pi e^2\mu c}$$

Задача 10.75.

$v = 1$ км/с

$f_0 = 30$ МГц

$|\Delta f| = 5$ Гц

$\frac{dN_e(h)}{dh} \cdot 1\text{км} \ll N_e(h)$

$(2\pi f_0)^2 \gg \omega_p^2$

$N_e - ?$

Т.к. источник движется по направлению к приёмнику, то длина волны уменьшается. Частота, которую регистрирует неподвижный приёмник

$$f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c/n}}$$ ← распростр. волн в среде

Т.к. волны (излучаемые источником) разных частот, то т.к. $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ - будет различаться,

нижняя * наз

$$|\Delta f| = |f_2' - f_1'| = \left| \frac{3f_0}{1 - \frac{vn_2}{c}} - \frac{3f_0}{1 - \frac{vn_1}{c}} \right| \overset{v \ll c}{\approx} \left| 3f_0\left(1 + \frac{vn_2}{c}\right) - 3f_0\left(1 + \frac{vn_1}{c}\right) \right| = \left| 0 f_0 + f_0 \frac{v}{c}(3n_2 - 3n_1) \right| = f_0 \frac{v}{c} 3 |n_2 - n_1|$$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \hookrightarrow n \overset{\omega \gg \omega_p}{\approx} 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$$

$$|\Delta f| = 3f_0 \frac{v}{c} \cdot \left| \frac{\omega_p^2}{2\omega_2^2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega_1^2} \right| = 3f_0 \frac{v}{c} \frac{\cancel{4\pi} N e^2}{m \cdot 2 \cdot 4\pi^2} \left| \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right|$$

т.к. $f_2 = 3f_0$, $f_1 = f_0$, то:

$$|\Delta f| = \frac{3f_0 v N e^2}{cm \cdot 2\pi} \left| \frac{1}{9f_0^2} - \frac{1}{f_0^2} \right| = \frac{3\cancel{f_0} v N e^2}{2\pi c m} \frac{8}{9f_0^{\cancel{2}}}$$

$$\Delta f = \frac{4vNe^2}{3\pi c m f_0} \hookrightarrow N = \frac{3}{4}\pi \Delta f \frac{c}{v} m \frac{f_0}{e^2}$$

Ответ: $N = \frac{3}{4}\pi \Delta f \frac{c}{v} m \frac{f_0}{e^2} = 4,18 \cdot 10^5$ см$^{-3}$

Задача 10.77

$\tau = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ с

$\nu_0 = 10^8$ Гц

$\lambda_{кр} = 10$ м

$z - ?$

Разложим по Тейлору

$$k(\omega_0 + \Omega) = k(\omega_0) + \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} d\Omega + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} d\Omega^2 + \ldots$$

частотный пакет

Условие того, что пакет не меняет

форму, есть

$$\frac{1}{2} \left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} (\Delta\Omega)^2 \cdot z \ll \pi$$

домножением на z получим фазу.

Для ионосферы

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{\omega_p^2}{2c\omega^2}; \quad \frac{d^2k}{d\omega^2} = -\frac{\omega_p^2}{2c}\,\frac{2\omega}{\omega^4} = -\frac{\nu_p^2}{2\pi c \nu^3}$$

Получим, что $z \ll \dfrac{2\pi}{\left.\dfrac{d^2K}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} \Delta\Omega^2}$, где $\Delta\Omega\,\tau \simeq 2\pi$

смотрим по модулю

соотнош. неопред.

$(\Delta\Omega)^2 = \left(\dfrac{2\pi}{\tau}\right)^2$, $\omega_p = \dfrac{2\pi c}{\lambda_{кр}} \hookrightarrow \nu_p = \dfrac{c}{\lambda_{кр}} = \dfrac{3\cdot 10^8}{10} = 30\,МГц. < \nu_0$

значит сигнал есть

$$z \ll \frac{(2\pi)^2 c\, \nu^3 \tau^2}{\nu_p^2 (2\pi)^2} = \frac{c\,\nu^3 \tau^2}{\nu_p^2} \simeq 10\,км$$

Задача 10.21

$\nu_1 = 80\cdot 10^6$ Гц

$\Delta t = 7$ с

$\nu_2 = 2000\cdot 10^6$ Гц

$N \approx 0{,}05$ см$^{-3}$

$L - ?$

Для соответств. имп. имеем:

$$u_1 t = u_2 t' = L \qquad t - t' = \Delta t$$

$$u_1 t = u_2 t - u_2 \Delta t \quad , \; t = \frac{L}{u_1}$$

$$\frac{-u_1 + u_2}{u_1 u_2} L = \Delta t$$

Зная, что $u = cn = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \overset{\text{по Тейлору}}{\approx} c\left(1 - \frac{4\pi N e^2}{2m 4\pi^2 \nu^2}\right) =$

$$= c\left(1 - \frac{Ne^2}{2\pi m \nu^2}\right)$$

$$1 - \frac{Ne^2}{2\pi m \nu^2} \approx 1.$$

$$\Delta t = L\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) = L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} \approx L\,\frac{Ne^2\left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2}\right)}{2\pi m c}$$

$$L = \frac{\Delta t\, 2\pi m c}{Ne^2}\,\frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}$$

Ответ: $L = \frac{\Delta t\, c\, m\, 2\pi}{Ne^2}\,\frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \simeq 7\cdot 10^{20}$ см ≈ 700 св. лет

Задача 10.24

$\varepsilon = 5$ эВ

$A = 108$ г/моль

$\rho = 10{,}5$ г/см^3

z - своб. e^- ?

Для критического n:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \geq 0 \quad \text{имеем} \quad \omega_p^2 = \omega^2$$

$$\frac{4\pi N e^2}{m} = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}$$

$$N = \frac{m\pi c^2}{\lambda^2 e^2}$$

С другой стороны, $N_e = z \cdot N_{атомов}$

$$\frac{N_{атом}}{N_A} = \frac{M}{A} \xrightarrow[\text{на } V]{\text{делим}} \frac{N_{ат}}{N_A} = \frac{\rho}{A} \hookrightarrow N_{ат} = \frac{\rho}{A} N_A$$

$$N_e = z \rho \frac{N_A}{A}$$

А для энергии $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

Подставим:

$$N = \frac{m\pi^2 c^2}{\lambda^2 e^2} = \frac{z\rho N_A}{A} \hookrightarrow z = \frac{m\pi c^2 A}{\lambda^2 e^2 \rho N_A} =$$

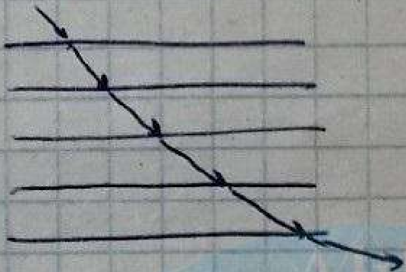
$$= \frac{m\pi A^2 \varepsilon^2}{h^2 e^2 \rho N_A} \approx 0{,}31 \approx \frac{1}{3}.$$

Задача 10.35

$n_0 = 1,0003$

$\frac{S}{S_0}$ - ?

Представим, что атмосфера состоит из плоскопараллельных слоёв со своими n:



$n = \frac{v}{c}$

Можем записать:

сост. силы вдоль $\vec{N}$

$$\frac{mv^2}{R} = F_{норм} = -\frac{\partial U}{\partial N}$$

Вдоль $\vec{N}$ запишем ЗСЭ: $\frac{mv^2}{2} + U = const$

$$\frac{mv\,dv}{dN} + \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \longrightarrow F_{норм} = mv\frac{dv}{dN}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{mv\,dv}{dN} \longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dN} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N}$$

Рефракция горизонт. луча:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{N}\frac{dn}{dh}$$ h - высота

$$n = \sqrt{1+4\pi\alpha N} = 1+2\pi\alpha N \quad \left(n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1+4\pi\alpha N}\right)$$

поляризуемость

$$N(h) = \frac{P_0}{kT}e^{-\frac{mgh}{kT}} \approx \frac{P_0}{kT}\left(1-\frac{mgh}{kT}\right)$$

при $h=0$ $n_0 - 1 = 2\pi\alpha\frac{P_0}{kT} \rightarrow n-1 = (n_0-1)\left(1-\frac{mgh}{kT}\right)$

$$\frac{\partial n}{\partial h} = -(n_0 - 1)\frac{mg}{kT}$$

$(n-1) \ll 1$, т.е. $n \approx 1$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\left[-(n_0 - 1)\frac{mg}{kT}\right] \longrightarrow R = -\frac{1}{n_0 - 1}\frac{kT}{mg}$$

$$R = -\frac{1}{3\cdot 10^{-4}}\frac{8{,}3\cdot 300}{0{,}029\cdot 9{,}81} = -2{,}9\cdot 10^{7}\,м = -2{,}9\cdot 10^{4}\,км$$

При круговой рефракции $R = R_З$

$$R \sim \frac{1}{n_0 - 1} \sim \frac{1}{P_0} \longrightarrow$$ давл. и плотн.

$$\frac{R}{R_З} = \frac{29}{6{,}4} = 4{,}5 \text{ раза}$$

Задача Т3.

$\lambda = 500 \cdot 10^{-9}$ м

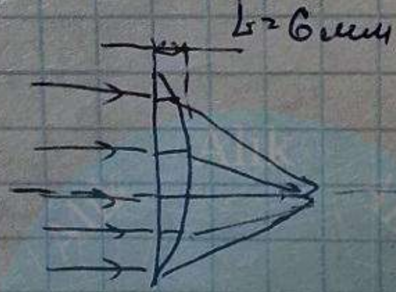
$\Delta t = 100 \cdot 10^{-15}$ с

$L = 6 \cdot 10^{-3}$ м

$n = 1,7$

$v_{гр} = 0,55c$

τ – ?



Лучи, проходящие через край линзы, "не замедляются", и сх-ся в фокусе. Те, кот. проходят через центр линзы, зам-ся больше всего, из-за чего происх. задержка импульса

$$\Delta t = \frac{L}{v_{гр}} - \frac{L}{v_{ф}} = L\left(\frac{1}{v_{гр}} - \frac{n}{c}\right) \approx 2,4 \text{ пс}$$