22.5

$$I = \oint [(ap + bq)\delta q + (\alpha p + \beta q)\delta p]$$

Если он явл-ся универс. инт. инвариантом, то по т. Ли Хуачжуна $I = \gamma I_\pi = \gamma \oint p\delta q$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

где I_π - интегр. инвариант Пуанкаре

$$\oint [((a-\gamma)p + bq)\delta q + (\alpha p + \beta q)\delta p] = 0$$

Должны быть равны вторые произв.:

$$\frac{\partial[(a-\gamma)p + bq]}{\partial p} = a - \gamma = \frac{\partial(\alpha p + \beta q)}{\partial q} = \beta$$

Откуда $\gamma = a - \beta$ - в этом случае инт. будет инвариантом

$$\underline{\underline{I = (a-\beta)\oint p\delta q}}$$

(22.15) $A_i(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ и $B_i(q_1, ..., q_n, ..., p_1, ..., p_n)$

$i = \overline{1, n}$ такие, чтобы $I = \oint\limits_C \sum\limits_{i=1}^{n} (A_i \underbrace{\delta q_i}_{\text{опер}} + B_i \delta p_i)$ был

универс. интегр. инвариантом.

Должна восп-ся т. Ли Хуачжуна: $I = \gamma I_{\Pi}$

$$\oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} [(A_i - \gamma p_i)\delta q_i + B_i \delta p_i] = 0$$

Должны быть равны смешан. произв.

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \gamma \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial B_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \equiv \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \gamma \delta_{ij} \qquad i,j = \overline{1,n}$$

Из мат. анализа знаем, что матрицы смеш. произв. симметрические, откуда

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} = \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \frac{\partial B_j}{\partial q_i}$$

Ответ: $\frac{\partial A_i}{\partial p_j} = \frac{\partial A_j}{\partial p_i}$, $\frac{\partial B_i}{\partial q_j} = \frac{\partial B_j}{\partial q_i}$

$i,j = \overline{1,n}$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_i} = \gamma \delta_{ij}$$

(22.24) Показать, что из сохр. фазового объёма для сист. $\dot{q}_i = Q_i(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$

$\dot{p}_i = P_i(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$ $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$ нельзя сделать вывод, что система гамильтонова.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Если $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, то по т. Лиувилля о сохр. фазового объёма будет сохр. фазовый V.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad n \geq 2.$$

Можем привести пример негамильтоновой системы:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_1 = Q_1 \\ \dot{q}_2 = -q_2 = Q_2 \\ \dot{p}_1 = 0 = P_1 \\ \dot{p}_2 = 0 = P_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} =$$

$$= 1 - 1 + 0 + 0 = 0$$

Выполнена т. Лиувилля значит фазов. V сохр-ся.

Система явл-ся гамильтоновой <=>

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x}\, \partial \vec{x}^T} = \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x}^T\, \partial \vec{x}}$$

Ур-ия Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2 \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$1 = \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} \neq \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} = 0$$

не совп. как минимум 1 компонента, значит критерий того, что система гамильтоновая, не выполнен.

22.32 $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad i = \overline{1, n}$

показать, что фазовый объём сохр-ся <=> $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$

$$V = \int\limits_{\Omega} \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{\Omega_0} \dots \int \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{f}(\bar{x}_0)(t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = E + A \cdot (t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0), \text{ где } A = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0}$$

$$\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = \det \begin{pmatrix} 1 + a_{11}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & a_{12}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & \dots & a_{1n}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) \\ a_{21}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & 1 + a_{22}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1 + a_{11}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t)\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + a_{nn}\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t)\right) + \Psi \;=$$

Ψ - порядка по Δt не выше $1 \cdot 1 + (n-2) \cdot \underset{\alpha \geq 0}{\alpha} + 1 \cdot 1 \geq 2$.

$$= 1 + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\Delta t + \underline{\underline{O}}(\Delta t) = 1 + \left(\frac{\partial f_1(\bar{x}_0)}{\partial x_{01}} + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x}_0)}{\partial x_{0n}}\right)$$

$$\cdot (t - t_0) + O(t - t_0) = 1 + \operatorname{div} \bar{f}(\bar{x}_0)(t - t_0) + \underline{\underline{O}}(t - t_0)$$

$$\dot{V}\Big|_{t = t_0} = \int\limits_{\Omega_0} \dots \int \operatorname{div} \bar{f}(\bar{x}_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}, \quad \forall t_0$$

Если $V = \text{const}$, то $\dot{V} = 0 \hookrightarrow \operatorname{div} \vec{f} = 0$.

Если $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, то $V = \text{const}$.