§22

1(5) $\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4 =$

$= \frac{1}{2^4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)^2 + \frac{1}{2^4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)^2 =$

$= \frac{1}{2^4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{9}{4} - \cancel{6\cos 2x} + 4\cos^2 2x - \cancel{2\cos 2x \cos 4x} + \right.$

$\left. + \frac{\cos^2 4x}{4} + \frac{3}{2}\cos 4x\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{9}{4} + \cancel{6\cos 2x} + \right.$

$\left. + 4\cos^2 2x + \cancel{2\cos 2x \cos 4x} + \frac{\cos^2 4x}{4} + \frac{3}{2}\cos 4x\right) =$

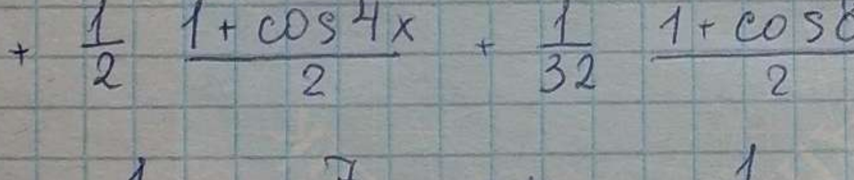
$= \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{\cos^2 2x}{2} + \frac{\cos^2 4x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} =$

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1}{32}\,\frac{1+\cos 8x}{2} + \frac{3\cos 4x}{16} =$

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{4} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64} + \frac{\cos 8x}{64} =$

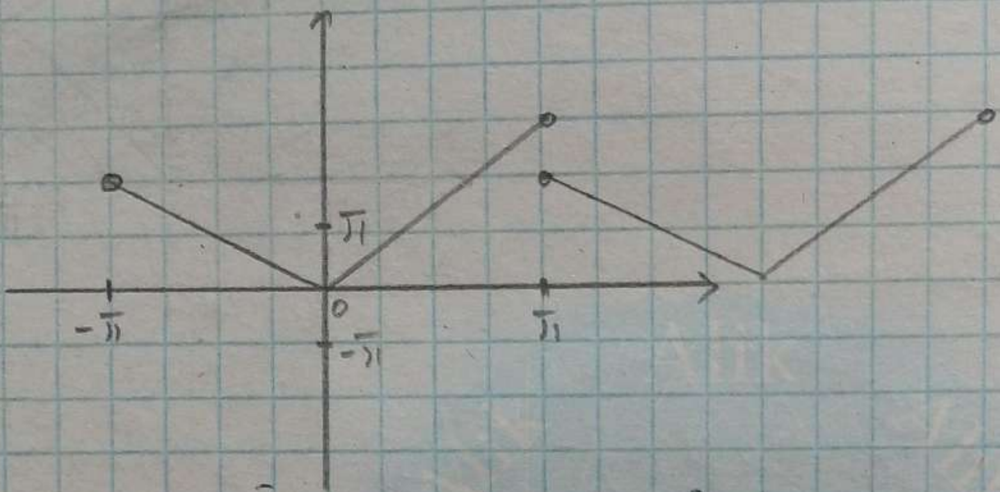
$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{\cos 8x}{64}$ //

Т. к. ряд из конечного числа членов, то он сх-ся равномерно.



§22 11)

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x \le 0 \\ 3x, & 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad x_0 = \pi$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,x^2\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\,\frac{3x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{3}{2}\pi + \pi = \frac{\pi}{2}\cdot 5 \longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}\cdot 5$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} 2x\,d\frac{\sin kx}{k} + \int_{0}^{\pi} 3x\,d\frac{\sin kx}{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-2x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin kx}{k}2\,dx + 3x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} -\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}3\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{2}{k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + 0 +\right.$$

$$\left.+\frac{3}{k^2}\cos kx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi k^2}\left(-2(1-(-1)^k) + 3((-1)^k - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}5\left((-1)^k - 1\right)$$

$a_{2l} = 0 \qquad a_{2l+1} = -\frac{10}{\pi(2l+1)^2}$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x \sin kx\,dx =$

$= \frac{1}{\pi}\Big[\,2x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos kx}{k}\,2\,dx - 3x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} +$

$+ \int_{0}^{\pi} 3\frac{\cos kx}{k}\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\left(0 + 2\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k} - 0 + 3\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k} + 0 + 0\right) =$

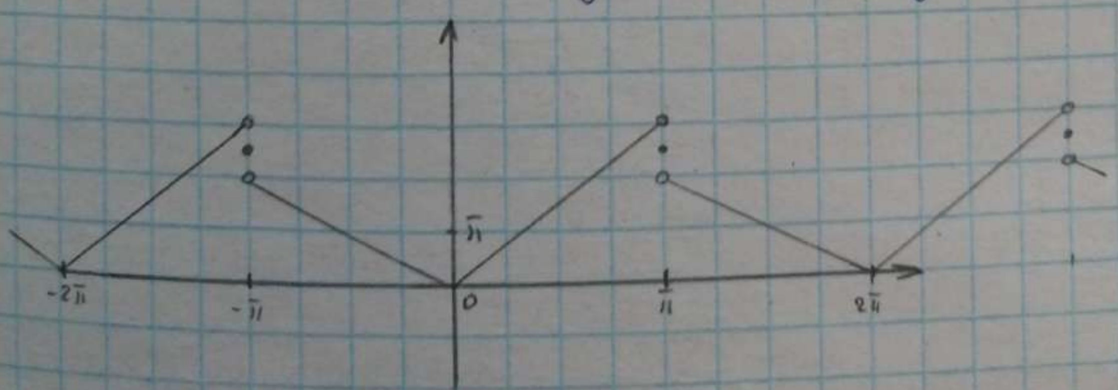
$= \frac{(-1)^{k+1}}{k}5$

$b_{2l} = -\frac{5}{2l} \qquad b_{2l+1} = \frac{5}{2l+1}$

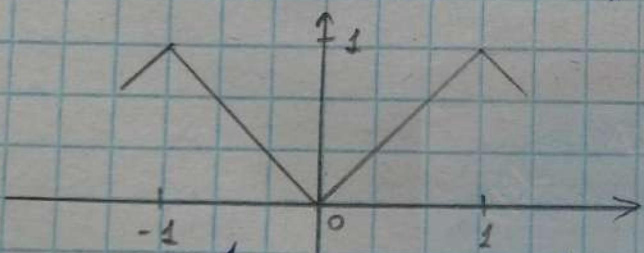
$$f(x) \sim \frac{\pi}{4}5 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5((-1)^k - 1)}{\pi k^2}\cos kx + 5\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right)$$

$$f(x) \sim \frac{5\pi}{4} - 5\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-(-1)^k)\frac{\cos kx}{\pi k^2} + (-1)^k\frac{\sin kx}{k}\right)$$

Т.к. есть точки разрыва, то ряд не сх-ся равномерно. График суммы ряда:



§22 14) $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$



ф-ция чётная, значит $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1 \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| \cos k\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \cos k\pi x \, dx =$$

$$= 2x \, \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \, dx =$$

$$= 2\,\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

$$a_{2l} = 0 \qquad a_{2l+1} = -\frac{4}{\pi^2(2l+1)^2}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(2l+1)x}{(2l+1)^2}$$

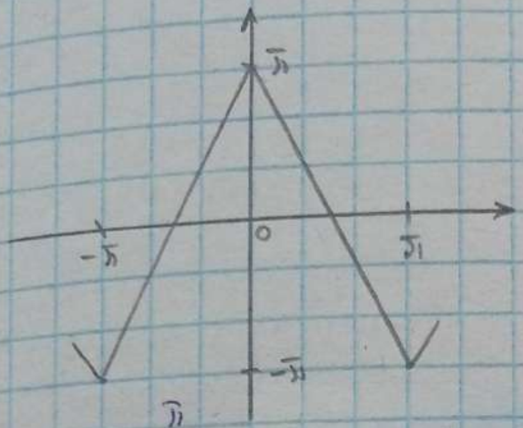
Ряд сх-ся равномерно по признаку Веерштрасса, т.к. $\left|\frac{\cos\pi(2l+1)x}{(2l+1)^2}\right| \le \frac{1}{(2l+1)^2}$ - сх-ся.

График суммы ряда совпадает с графиком ф-ции.

§22 30) $f(x) = \pi - 2x \qquad 0 < x \leq \pi$

1) чётная 2) нечётная

①



Т. к. чётная, то $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\,dx = 0$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\,d\frac{\sin kx}{k}\right] =$$

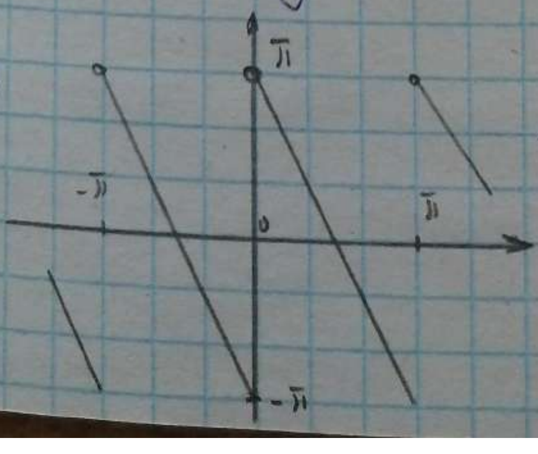
$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{(\pi - 2x)\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}}^{0} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}$$ – сх-ся равномерно по призн. Вейерштрасса

График суммы ряда совп. с графиком ф-ции.

②



Т. к. нечётная, то $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi-2x)\frac{-\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \right.$$

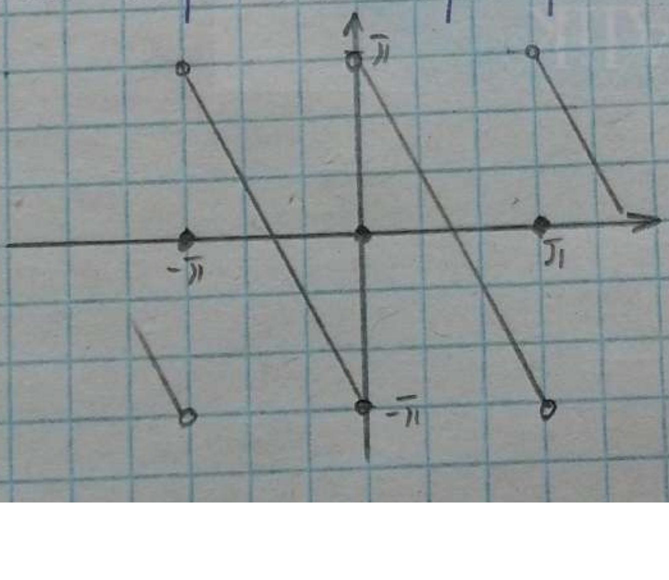
$$\left. + (-2)\cdot\cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx}^{\,0}\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{\pi}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{k}\left(1+(-1)^k\right)$$

$$b_{2l} = \frac{2\cdot 2}{2l} = \frac{2}{l} \qquad b_{2l+1} = 0$$

$$f(x) \sim 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin 2lx}{l}$$

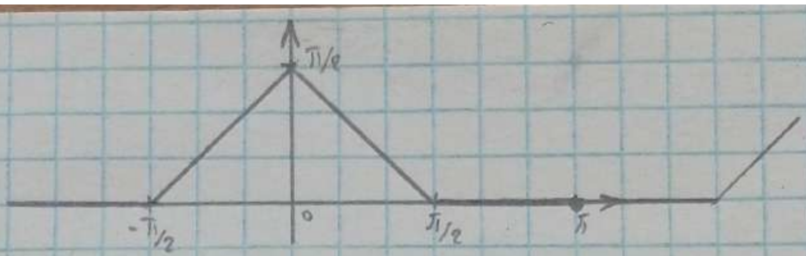
Т.к. есть точки разрыва, то ряд не сх-ся равномерно. График суммы ряда:



§22 42)

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 - x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

Разложить по косинусам. Для этого продолжим её чётным образом:



т.к. ф-ция чётная, то $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)d\,\frac{\sin kx}{k}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\cancel{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi/2}}}_{0} + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\;\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi k^2}\left(\cos k\frac{\pi}{2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi k^2}\left(1 - 2\sin^2\frac{k\pi}{4} - 1\right) = \frac{4}{\pi k^2}\sin^2\frac{k\pi}{4}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k^2}\cos kx$$ – сх-ся равномерно по призн. Вейерштрасса

Т.к. точек разрыва нет, то график суммы ряда совпадает с графиком ф-ции.

§22 45) $f(x) = x^2$

1) на $[-\pi, \pi]$ по косинусам

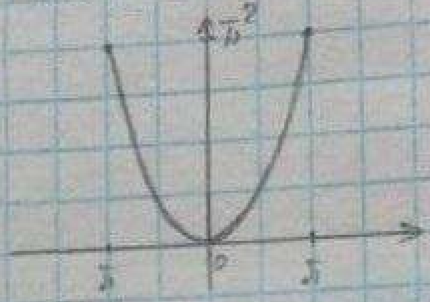
2) на $(0, \pi)$ по синусам

3) на $(0, 2\pi)$ по синусам и косинусам

пользуясь этими разложениями, найти

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\qquad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

① на $[-\pi,\pi]$ по косинусам



Т.к четная, то $b_k=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2\cdot 2}{3}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx^2\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}2x\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(2x\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}2\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(2\pi\cdot\frac{\cos\pi k}{k^2}-0\right)=$$

$$=4\frac{(-1)^k}{k^2}$$

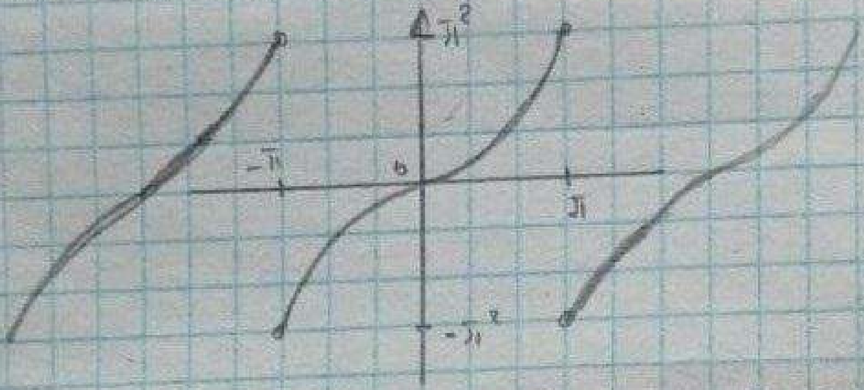
$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2}\ -$$

сх-ся равномерно по призн. Вейерш. График суммы совп. с граф. $f(x)$

② на $(0,\pi)$ по синусам

Для этого ф-цию продлим так, чтобы

она была нечётной:



т.к. нечётная, то $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, d\,\frac{\cos kx}{k} = -\frac{2}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\left(x^2\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,2x\,dx\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2\cos \pi k}{k} -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2x}{k}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k^2}\,2\,dx\right)\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^k}{k} -\right.$$

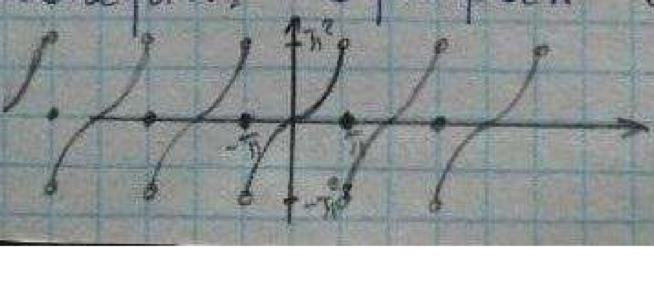
$$\left.-0 - \frac{\cos kx}{k^3}\,2\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k^3}\Big|_0^{\pi} - \frac{2\pi^2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{k} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{k^3} - \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{k^3} - \frac{2\pi^2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{k} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2(-1)^k}{k^3} + \frac{2}{k^3}(-1)^k(-1)^{k+1} -\right.$$

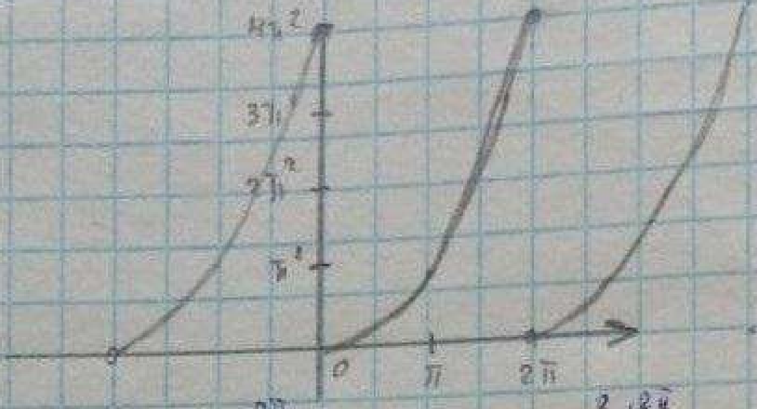
$$\left.-\frac{1\pi^2(-1)^k}{k}\right) = \frac{2}{\pi}(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi^2}{k} - \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k^3}\right)$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi^2}{k} - \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k^3}\right)\sin kx$$

Т.к. есть точки разрыва, то ряд не сх-ся равномерно. График суммы ряда:



③ на $(0, 2\pi)$ по синусам и косинусам



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8}{3}\pi^2 \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi}}^{\,\to 0} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin kx}{k}\,2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos kx}{k^2}\,2x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\,2\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{k^2} - 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{4}{k^2}$$

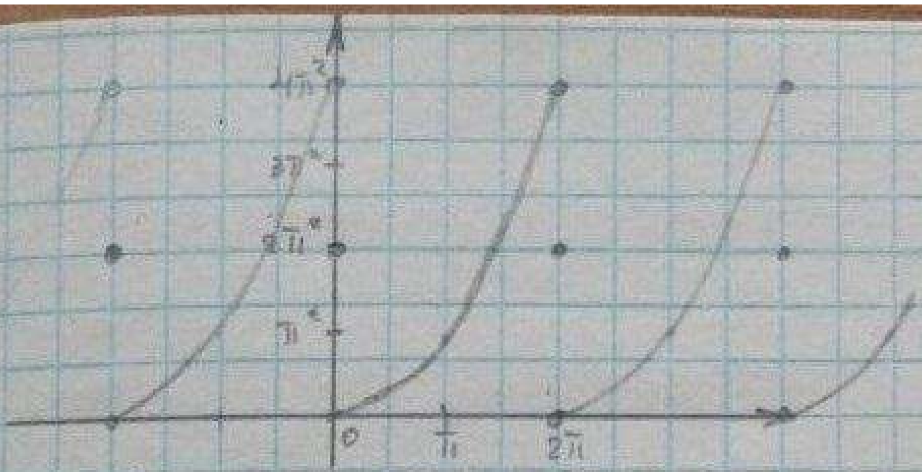
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-x^2\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos kx}{k}\,2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{k} + \cancel{\frac{\sin kx}{k^2}}^{\,\to 0}\,2x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cancel{\frac{\sin kx}{k^2}}^{\,\to 0}\,2\,dx\right) = -\frac{4\pi}{k}$$

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^2} - \frac{\pi\sin kx}{k}\right)$$

Т. к. есть точки разрыва, то ряд не сх-ся равномерно.

График суммы ряда:



Для S_1:

Из ③ в т. $x=0$ сумма ряда равна $2\pi^2$

$$2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{0}{k}\right)$$

$$\frac{6-4}{3}\pi^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Для S_2:

Из ③ в т. $x=\pi$ сумма ряда равна π^2

$$\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - 0\right)$$

$$\pi^2 - \frac{4}{3}\pi^2 = -4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Для S_3:

$$S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

пр-ся непосредственно.

§22 65) Док-ть, что если $f(\pi - x) = f(x)$, то её коэфф обладают св-вами:

а) $a_{2n-1} = 0$ (по косинусам)

б) $b_{2n} = 0$ (по синусам)

(а) Раскладывая по косинусам, ф-цию продолжим на $[-\pi, \pi]$ чётным образом.

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2n-1)x = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \right]$$

Замена $t = \pi - x$:

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cos(2n-1)(\pi - t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \right] =$$

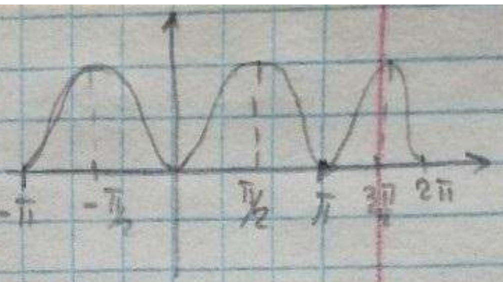
$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cos((2n-1)\pi - (2n-1)t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t) \left(\overset{=-1}{\cos(2n-1)\pi} \cdot \cos(2n-1)t + \overset{\to 0}{\cancel{\sin(2n-1)\pi \cdot \sin(2n-1)t}}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cdot (-\cos(2n-1)t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(2n-1)t\,dt + \right.$$

$$+\int_0^{\pi} f(t)\cos(2n-1)t\,dt\Big] = 0$$



(8) Расклад. по синусам, ф-цию продолжим на $[-\pi, \pi]$ нечётным образом

все $a_k = 0$

$$b_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2nx\,dx +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{2\pi}^{2\pi} f(t)\sin 2n(\pi - t)\,dt +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin(2n\pi - 2nt)\,dt +$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi}^{2\pi} f(t)(\overset{0}{\cancel{\sin 2n\pi}}\cos 2nt -$$

$$-\underset{1}{\cos 2n\pi}\sin 2nt) + \int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin 2nt + \int_0^{\pi} f(t)\sin 2nt\,dx\Big] =$$

$$= 0$$

§22 67) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x$

во-первых т.к. $a_k = 0$, то ф-ция нечетная

И т.к. все $b_{2n} = 0$, то из предыдущ. номера

$f(\pi - x) = f(x)$.

Ответ: $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$.

§22. 68) $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. на $[0, \pi/2]$

① по системе $\{\cos(2n-1)x\}$, $n \in N$

т.к. все $b_k = 0$, то ф-ция чётная

и т.к. $a_{2n} = 0$, то $f(x+\pi) = -f(x)$.

Покажем это:

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\right]$$

Замена $t = x + \pi$:

$$\frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(t)\cos 2n(t-\pi)\,dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\right] =$$

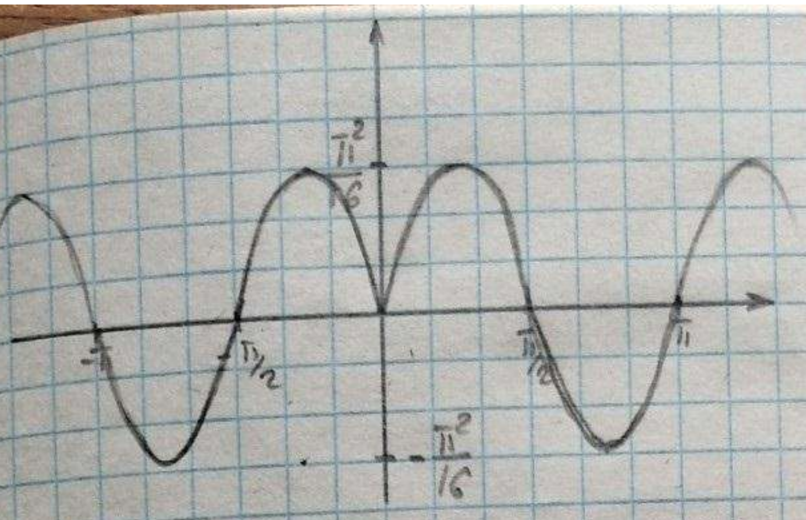
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt - 2n\pi)\,dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(t)\left(\cos 2nt \underbrace{\cos 2n\pi}_{1} + \sin 2nt\,\cancel{\sin 2n\pi}^{\,0}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} f(t)\cos 2nt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(t)\cos 2nt\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos 2nt\,dt\right] = 0.$$

Нарисуем график нашей полученной ф-ции:



Вычислим

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\cos(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x^2 - \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancelto{0}{\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right)\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}}\Bigg|_{0}^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx +\right.$$

$$\left.+\,0 - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)d\,\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} +\right.$$

$$\left.+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)d\,\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{0}^{\pi/2} +\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,2\,dx + \left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,2\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\cdot 2 \Big|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\frac{(-1)}{(2n-1)^2} - 0 - \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\cdot 2 \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{(2n-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\cdot 2 + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{(2n-1)^3} \right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{(2n-1)^2} - \frac{(-1)^n\cdot 4}{(2n-1)^3} \right)$$

Получим $f(x) \sim -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cdot$

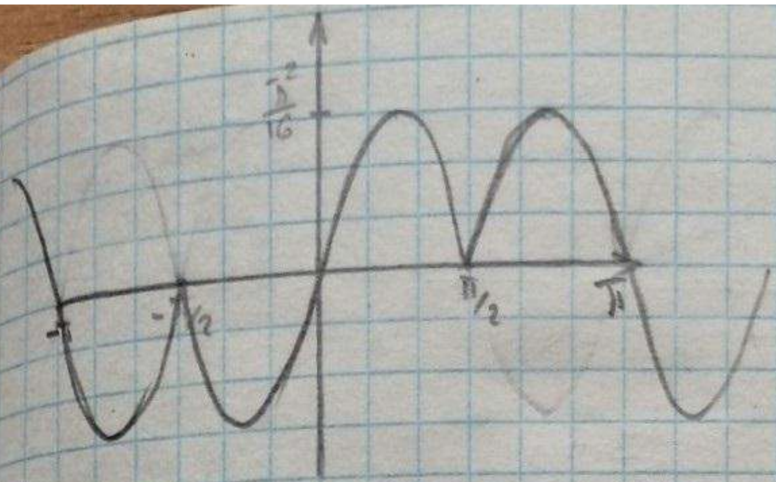
$\cdot\cos(2n-1)x$

2) по системе $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in \mathbb{N}$

т.к. все $a_k = 0$, то ф-ция нечётная

и т.к. $b_{2n} = 0$, то $f(\pi - x) = f(x)$ – из номера 65 2).

Построим график полученной ф-ции:



вычислим.

$$b_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(2n-1)x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(x-\pi)\sin(2n-1)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right) d\,\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}x - x^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) d\,\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{-\left(\frac{\pi}{2}x - x^2\right)\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)d\,\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\cdot 2\,dx + \left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\cdot 2dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}2\Bigg|_0^{\pi/2} + 0 - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cdot\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$- \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3} \cdot 2 \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{2}{(2n-1)^3} +$$

$$+ \frac{2}{(2n-1)^3} \Big] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \pi}{(2n-1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^3} \right)$$

Получим $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \right) \sin(2n-1)x.$

§22 72)

① Центр симметрии в т $(0,0)$ и $(\pm\frac{\pi}{2},0)$.

т.е. ф-ция нечётная и $f(x) = -f(\pi - x)$

Т.к. нечётная, то $a_k = 0$.

И второе условие:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} f(x)\sin kx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]$$

Замена $t = \pi - x$:

$$\frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\sin k(\pi - t)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\sin(k\pi - kt)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\pi/2} f(t)\left(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin k\pi}}\cos kt - \cos k\pi\sin kt\right) +\right.$$

$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big] = \frac{2}{\pi}\Big[-\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\cdot(-\cos k\pi \sin kt) +$

$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big) = \frac{2}{\pi}\Big[\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,(-1)^k \sin kt +$

$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big].$

Видно, что при $k=2n-1$, $b_k=0$

② центр симметрии в $(0,0)$ и оси симметрии $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

т.е. ф-ция нечётная и $f(\pi-x)=f(x)$.

т.к. нечётная, то $a_k=0$

И второе усл-ие в силу № 65 даёт, что $b_{2k}=0$.

Ответ: 1) $a_k=0$, $b_{2k-1}=0$ 2) $a_k=0$, $b_{2k}=0$

§22 110)

Пусть тригонометрич. ряд сх-ся равномерно к своей сумме $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Т.к. ряд сх-ся равномерно, а все его

члены явл-ся непрерывными на $[-\pi, \pi]$ ф-циями, то и его сумма непрер. на $[-\pi, \pi]$, а сам ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \pi a_0$$

Получим $\quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$

Перемножим ряд почленно на $\cos nx$ - он также будет равномерно сх-ся. Проинт.:

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx +}$$

$$\cancel{+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx\,dx =}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\cos nx\,dx} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot$$

$$\cdot \cos nx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx.$$

в силу ортогональности системы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad , \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда останется только:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx \, dx = \pi a_n.$$

Откуда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx \, dx = \pi b_n$$

Откуда $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

Получим, что коэф. a_0, a_n, b_n явл-ся коэфф. Фурье суммы ряда. Значит равном. сх-ся тригонометр. ряд явл-ся рядом Фурье своей суммы.

§22. 11(1)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ – не явл-ся, т.к. его коэфф

$b_n = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

~~5~~ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ - он сх-ся равномерно по

призн. Вейерштрасса, т.к. $\left| \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| \le \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ - сх-ся

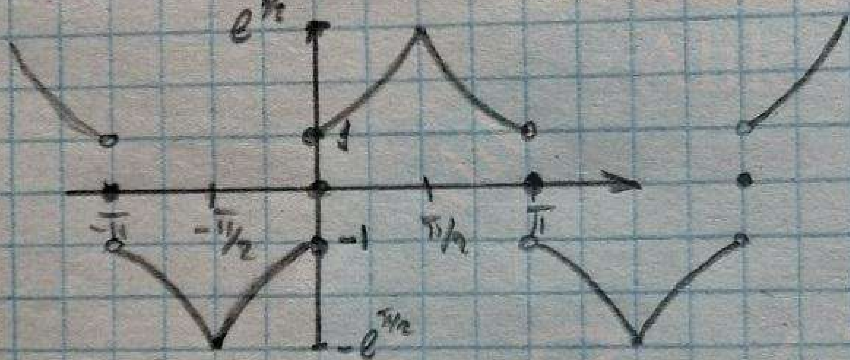
Значит по номеру 110 равномерно сх-ся тригонометр. ряд яви-ся рядом Фурье своей суммы.

(T1) $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi/2]$

а) по системе $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $a_k = 0$, то $f(x)$ нечетная и т.к. $b_{2n} = 0$, то

$f(\pi - x) = f(x)$ – в силу 65(2):



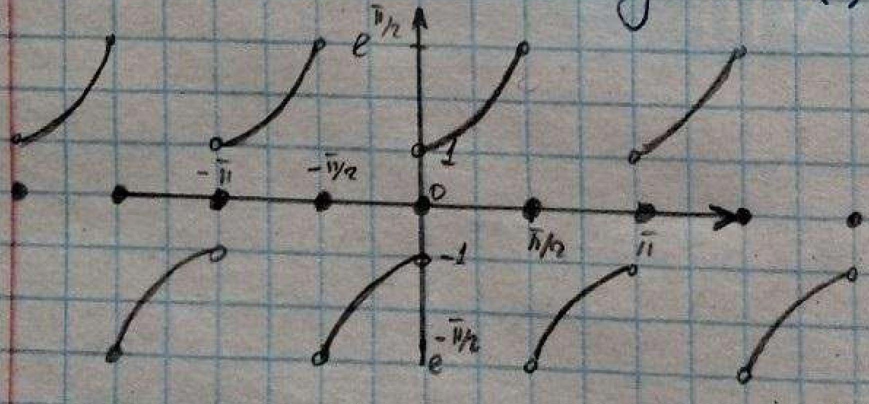
– график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть точки разр.

б) по системе $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $a_k = 0$, то $f(x)$ нечетная и т.к. $b_{2n-1} = 0$, то

$f(x) = -f(\pi - x)$ – в силу 72(1):



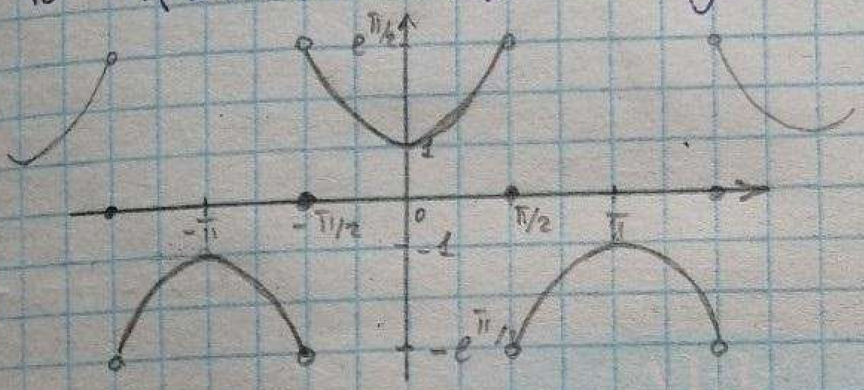
– график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть точки разр.

в) по системе $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$

т.к. $b_k = 0$, то $f(x)$ чётная и т.к. $a_{2n} = 0$,

то $f(x+\pi) = -f(x)$ - показали в 65(1):



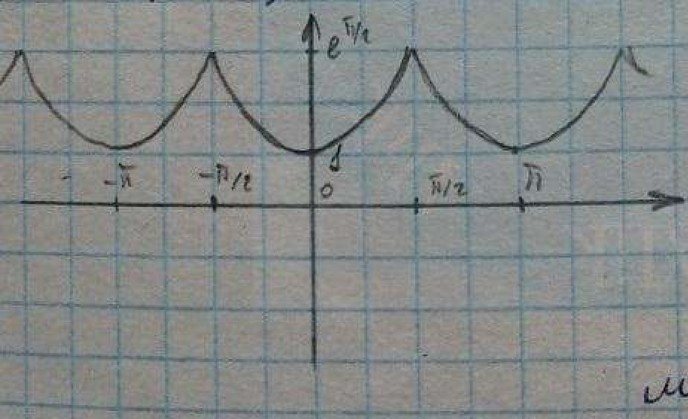
- график суммы ряда.

Ряд не сх-ся равномерно, т.к. есть т. разр.

г) по системе $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$

т.к. $b_k = 0$, то $f(x)$ чётная и т.к. $a_{2n-1} = 0$,

то $f(\pi - x) = f(x)$ - в силу 65(1):



- график суммы ряда

Ряд сх-ся равномерно, т.к. в каждой т. равен ф-ции $f(x)$

Можем показать это:

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{x}\cos 2nx\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}(e^{-x}+\pi)\cos 2nx\,dx}_{I_2}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos 2nx\,dx = \int_0^{\pi/2} e^x\, d\,\frac{\sin 2nx}{2n} =$$

$$= \overset{0}{\cancel{\frac{\sin n2x}{2n}}}\, e^x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{2n}\, e^x\,dx = \int_0^{\pi/2} e^x\, d\,\frac{\cos 2nx}{4n^2} =$$

$$= e^x\, \frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2nx}{4n^2}\, e^x\,dx = e^{\pi/2}\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} -$$

$$- \frac{I_1}{4n^2}$$

$$I_1 = \left(e^{\pi/2}\,\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2}\right)\frac{4n^2}{4n^2+1}$$

Очевидно, что $I_2 = I_1$, т.к.

$$I_2 = I_1 + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi \cos 2nx\,dx = I_1$$

$$a_{2n} = \left(e^{\pi/2}(-1)^n - 1\right)\frac{2}{4n^2+1}$$

$$|a_{2n}| \le \frac{4e^{\pi/2}}{4n^2+1} < \frac{4e^{\pi/2}}{4n^2} = \frac{e^{\pi/2}}{n^2}$$ – сх-ся

Значит по призн. Вейерштрасса ряд сх-ся равномерно.

(T2) а) x^{10} - на $[-\pi, \pi]$ непрер, $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = 10x^9$ - ~~есть тот~~ $f'(-\pi+0) \neq f'(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k^2}$

б) x^5 - на $[-\pi, \pi]$ непрер. $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k}$

в) $(x^2-\pi^2)^{10}$ - на $[-\pi, \pi]$ непрер. $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = 10(x^2-\pi^2)^9 \cdot 2x$ $f'(-\pi+0) = f'(\pi-0)$

$f'' = 90(x^2-\pi^2)^8 \cdot 4x^2 + 10(x^2-\pi^2)^9 \cdot 2$ $f''(-\pi+0) = f''(\pi-0)$

и так далее до 11 производной.

$f^{(11)}(-\pi+0) \neq f^{(11)}(\pi-0)$

Значит порядок убывания $\frac{1}{k^{12}}$

г) $(\pi^2-x^2)\sin^2 x$ $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$

$f' = \cancel{x(1} -2x\sin^2 x + (\pi^2-x^2)\sin 2x = -x(1-\cos 2x) + (\pi^2-x^2)\sin 2x$

$f'(-\pi+0) = f'(\pi-0)$

$f'' = -1 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 2x\sin 2x + 2(\pi^2-x^2)\cos 2x$

$f''(-\pi+0) = f''(\pi-0)$

$f''' = -2\sin 2x - 4\sin 2x - 8x\cos 2x - 4x\cos 2x +$

$+ 4(\pi^2-x^2)\sin 2x$ $f'''(-\pi+0) \neq f'''(\pi+0) \to \frac{1}{k^4}$

§22 115)

$f(x) = \pi x - x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & x \geq 0 \\ \pi x + x^2, & x < 0 \end{cases}$$

непрер на $[-\pi, \pi]$

$f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$

сх-ся равномерно

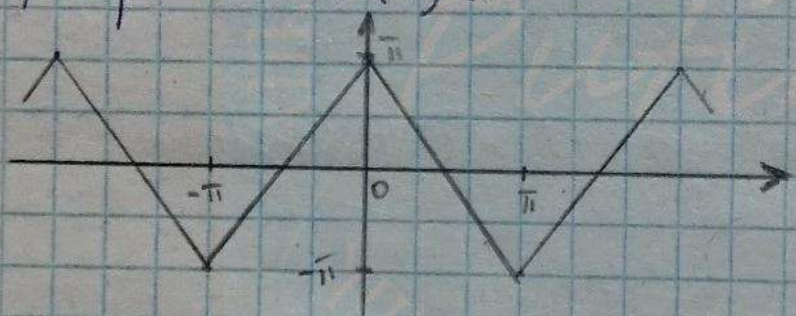
$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x \geq 0 \\ \pi + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

непрер на $[-\pi, \pi]$

$f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$

сх-ся равномерно.

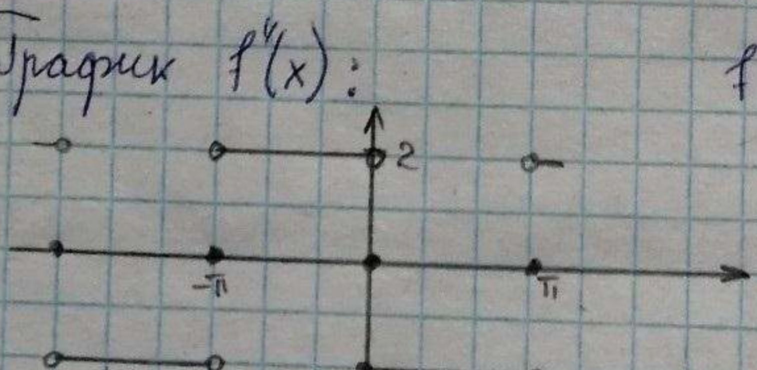
График $f'(x)$:



$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

сх-сть неравномерная, т.к. есть т. разрыва и $f(\pi - 0) \neq f(-\pi + 0)$

График $f''(x)$:



§22 121) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ $\quad 0<x<2\pi$

т.к. $\frac{\pi - x}{2}$ непрер. на $[0, 2\pi]$, то можно спр.ва формула для формального интегрир. ряда Фурье.

$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} - 0$ - если её продолжить с периодом 2π на всю числовую прямую, то получим кусочно-гладкую ф-цию на каждом конечном отрезке.

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad 0<x<2\pi$$

где $C = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \Big|_0^{2\pi} \right) =$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \cdot 4\pi^2}{4} - \frac{8\pi^3}{12} \right) = \frac{1}{\pi} \pi^3 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Окончательно:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

С помощью рав-ва Парсеваля вычислить:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Рассмотрим ф-цию $f(x) = x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

Рав-во Парсеваля выглядит так:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{x^2}})^2 \, dx$$

$$\underbrace{\frac{\pi^4 \cdot 4}{9 \cdot 2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4} = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^5}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4} = \pi^4 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) = \pi^4 \, \frac{8}{45}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4 \cdot 1}{90}$$

С помощью Парсеваля вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

Рассмотрим:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kt$$ и проинтегрируем от 0 до x

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \frac{\sin kx}{k}$$

$$\frac{1}{3} x (x^2 - \pi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3} (-1)^k \sin kx$$

Применим рав-во Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2 x}{3}\right)^2 dx = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}\left(\frac{x^6}{9}-\frac{2\pi^2 x^4}{9}+\frac{\pi^4 x^2}{9}\right) = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2\left(\frac{x^7}{69}-\frac{2\pi^2 x^5}{45}+\frac{\pi^4 x^3}{27}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$2\left(\frac{\pi^6}{69}-\frac{\pi^6 2}{45}+\frac{\pi^6}{27}\right) = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

$$\frac{2}{16}\pi^6\cdot\frac{8}{105\cdot 9} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$$

Ответ: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

§ 16. 48(1, 3)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ $S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1$

Если m - чётно, то $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_m}{m+1} = \frac{m/2 + 1}{m+1} \to \frac{1}{2},\ m \to \infty$

Если m - нечётно, то $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_m}{m+1} = \frac{(m+1)/2}{m+1} = \frac{1}{2}$

$\sigma = \frac{1}{2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta$, $0 < |\theta| < \pi$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2\sin(n\theta)}{2\sin\theta/2} \sin\theta/2 = \frac{1}{2\sin\theta/2} \sum_{n=1}^{k} \left(\cos\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(n\theta + \frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\theta\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\theta\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\theta/2}{2\sin\theta/2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\theta(k+1/2))}{2\sin\theta/2}$$

распис. аналогично, через sin при делении на n и $n \to \infty$ получим $\underline{0}$

$$\sigma = \frac{n \cdot \frac{\cos\theta/2}{2\sin\theta/2}}{n} = \frac{\cos\theta/2}{2\sin\theta/2} \to \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta/2$$

Ответ: $\sigma = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$

(Т3)

① Поточечная сх-сть: $\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow$
$\hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

② Равномерная сх-сть: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \forall x \in [a,b] \hookrightarrow$
$\hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

③ Сх-сть по норме L_2: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} = 0$

④ Сх-сть по норме L_1: $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$

• Понятно, что из $2 \to 1$, т.к. в 2 $n = n(\varepsilon)$, а в 1 $n = n(x, \varepsilon)$, т.е. 2 - более сильное утверждение

• Из $1 \not\to 2$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Т.е. предельная $f(x) = 1,\ x \neq 0$; $f(x) = 0,\ x = 0$

Ясно, что есть поточечная сх-сть. Но нет равномерной, т.к. предельная ф-ция разрывна, а этого в случае равномерной сх-сти не может быть

• Покажем, что из $3 \to 4$

Будем использовать нер-во Коши-Буняковского в интегральной форме.

$$\int_a^b |g_1(x)|\cdot|g_2(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b g_1^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g_2^2(x)\,dx}$$

Положим $g_1(x) \equiv 1$, $g_2(x) = f_n(x) - f(x)$

Получим, что

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2}\cdot(b-a)$$

Переходя к пределу в нер-ве получим, что из $4 \to 3$.

• Из $4 \not\to 3$:

контрпример $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}}$

Предельная ф-ция $f(x) = 0$. Есть сх-сть по норме L_1, но если рассмотреть отрезок $[0, 1]$, то интеграл будет расходиться и сх-сти по норме L_2 не будет.

• Покажем, что из $2 \to 3$:

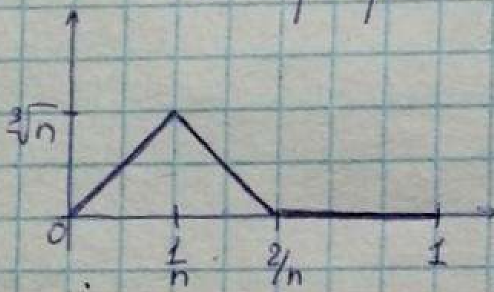
Используя равномерную сх-сть, получим, что

$$\sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b \varepsilon^2\,dx} = \varepsilon\cdot\sqrt{b-a}$$ и все

это $\forall \varepsilon > 0$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx} = 0$ в случае равномерной сх-сти. Получим нужное.

• Из $3 \not\Rightarrow 2$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} n^{4/3}x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ -n^{4/3}x + 2\sqrt[3]{n}, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} < x \le 1 \end{cases}$



$$\sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\int_0^{1/n} n^{8/6} x^2\,dx \cdot 2} = \sqrt{\frac{n^{4/3}\cdot 1}{3\cdot n^3}\cdot 2} \to 0,\ n\to\infty$$

(предельная ф-ция $f(x) = 0$)

Т.е есть сх-сть по норме L_2.

Но равномерной сх-сти нет, т.к. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sqrt[3]{n} \not\to 0$, т.е. не вып-ся необх. усл-ие равномерной сх-сти.

• Из $3 \not\Rightarrow 1$:

контрпример $f_n(x) = \begin{cases} -n^{4/3}x + \sqrt[3]{n}, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

Аналогично предыдущему

$$\sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{n^{4/3}\cdot 1}{3\cdot n^3}} \to 0,\ n\to\infty$$ и есть сх-сть по норме L_2.

Но если для поточечной сх-сти возьмем $x = 0$, то $f_n(0) = \sqrt[3]{n} \to \infty$, $n\to\infty$ значит нет поточ. сход-сти. (т.к. нет конечн. предела)

• Из $4 \nrightarrow 1$:

Возьмём тот же пример, что и в $3 \nrightarrow 1$.

Т.к. есть сх-сть по норме L_2, то по уже доказанному есть сх-сть по норме L_1 $(3 \to 4)$

Но нет поточечной. Значит $4 \nrightarrow 1$

• Из $1 \nrightarrow 3$:

контрпример $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^3x^3}$

Она сх-ся поточечно к $f(x) = 0$ на $\mathbb{R}$

Посмотрим на сх-сть по норме L_2 на отр. $[0,1]$

$$\sqrt{\int_0^1 \frac{n^4x^2}{(1+n^3x^3)^2}dx} \overset{t=nx}{=\!=} \sqrt{\int_0^n \frac{n^2t^2}{(1+t^3)^2}\frac{dt}{n}} \geqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{nt^2}{(1+t^3)^2}dt} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{nt^2}{(1+1)^2}dt} = \sqrt{\int_0^1 \frac{nt^2}{4}dt} = \sqrt{\frac{nt^3}{12}\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{n}{12}} \nrightarrow 0,\ n\to\infty$$

Т.е. нет сх-сти по норме L_2.

• Из $1 \nrightarrow 4$:

Возьмём тот же пример $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^3}$

Есть поточечная сх-сть к $f(x)=0$, но по норме L_1 на $[0,1]$

$$\int_0^1 \left|\frac{n^2x}{1+n^3x^3}\right| dx \overset{t=nx}{=\!=} \int_0^n \frac{t}{1+t^3}dt \geqslant \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2 \nrightarrow 0,\ n\to\infty$$

т.е. нет сх-сти по норме L_1

§18.97) Док-ть, что подпр-во непрер. дифф. ф-ций пр-ва $C[a,b]$ с метрикой

$$\rho(x,y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \quad x, y \in C[a,b]$$ не

явл-ся полным.

Для этого достаточно найти фундамент. посл-сть, которая сх-ся не к непрер. дифф. ф-ции.

Возьмём $|x|$. Его ряд Фурье есть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{где} \quad |a_k| \leq \frac{C}{k^2}.$$

Значит ряд сх-ся равномерно и посл-сть частичных сумм непр. дифф. Но сх-ся к $|x|$, кот. не явл-ся непрер. дифф. в т. 0.

Чтобы эта точка (в кот. $|x|$ не дифф.) лежала в $[a,b]$, то возьмём не $|x|$, а $|x-c|$, где $c \in (a,b)$.

Поэтому подпр-во непр. дифф. ф-ций пр-ва $C[a,b]$ не явл-ся полным.

(14) Док-ть, что сист. ф-ций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пр-вах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

Рассмотрим $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$ $0 \leq t \leq \pi$

Продолжим $f^*(t)$ на $[-\pi, 0]$ чётным образом, т.е. $f^*(-t) = f^*(t)$ $0 \leq t \leq \pi$.

Если продолжить f^* на всю числовую прямую с периодом 2π, то к полученной ф-ции можно применить первую теорему Вейерштрасса. Значит $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригоном. многочлен $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ такой, что $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |f^*(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2$

А т.к. $P_n(t)$ - аналитич. ф-ция с радиусом сх-сти ряда Тейлора по степеням t, равным $+\infty$. Тогда этот ряд Тейлора равномерно сх-ся на $\forall$ конечном отрезке. Т.к. частичные суммы ряда Тейлора - алгебраич. многочлены, то посл-сть $Q_n(x)$ этих частичн. сумм равномерно сх-ся к $P_n(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Значит $\exists Q_n(x)$: $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |P_n(x) - Q_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Окончательно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ алгебр. многочлен

$Q_n(t)$: $\forall t \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow |f^*(t) - Q_n(t)| \leq |f^*(t) - P_n(t)| +$
$+ |P_n(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Выберем t: $a + \frac{b-a}{\pi} t = x \in [a, b]$

$$t = \frac{x-a}{b-a}\pi \qquad f^*\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) = f(x)$$

Тогда получим.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$: $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \left| f(x) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)\right| < \varepsilon.$

т.е. сист. ф-ций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $C[a, b]$ на $\forall$ отрезке $[a, b]$

Из <u>Т.3</u> следует, что из полноты в $C[a, b]$ следует полнота в $CL_2[a, b]$ и отсюда следует полнота в $CL_1[a, b]$. (т.к. равномерная метрика - более сильное утв-ие)

$\left(\text{т.к. } 0 < \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b |f|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} \leq \max_{x \in [a, b]} |f| \sqrt{b-a}\right)$

§19 116)

① В подпр-ве $C^*[-\pi,\pi]$ пр-ва $C[-\pi,\pi]$:

состоит из $x(t)$: $x(-\pi)=x(\pi)$, система

1) $\{1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx, \dots\}$ полна, а сист.

2) $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos nx\}$ не полна

• Первое утв. следует из 1 теоремы Вейерштрасса, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \, T_n(x) : \forall x \in [-\pi,\pi] \hookrightarrow$

T_n — триг. мн.

$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$

• Для этого покажем, что $\exists f_0(x)$ $\exists \varepsilon > 0$

$\exists x_0 \in [-\pi, \pi]$: $\forall P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \hookrightarrow \left| f_0(x_0) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx_0 \right| \geq$
$\geq \varepsilon$

Предположим противное:

пусть система полна на $[-\pi, \pi]$. Тогда для не равной тождественно 0 нечётной непрерывной $f(x)$ $\exists x_0 \in (0, \pi)$:

$f(x_0) = A > 0$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\left| f(x_0) - P_n(x_0) \right| < \varepsilon$,

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$. Заметим, что $P_n(x)$ - чётная ф-ция по построению

При этом $\exists\, x' = -x_0 \in (-\pi, 0)$ где в силу нечёт. $f(x)$ и чётн. $P_n(x)$ справедливо:

$$|f(x') - P_n(x')| = |f(x_0) + P_n(x_0)|$$

А в силу предыдущ нер-ва $|P_n(x_0)| > A_0 - \varepsilon$

Значит

$$|f(x') - P_n(x')| > 2A_0 - \varepsilon$$

Значит система не полна на $[-\pi, \pi]$

Если же $f(x) < 0 \ \forall x \in [0, \pi)$, то проводим аналогичные рассуждения для ф-ции непрерывной, четной $g(x) = -f(x)$.

② В подпр-ве простр-ва $C[0, \pi/2]$ ф-ций, удовл. условию $f(0) = 0$ система $\{\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x\}$ полна.

Продолжим ф-ции из $C[0, \frac{\pi}{2}]$ так, что $f(\pi - x) = f(x)$ на $[0, \pi]$ и продолжим затем на $[-\pi, 0]$ так, что $f(x) = -f(-x)$

Наша ф-ция непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$ по построению.

Тогда можем вос-ся т. Фейера и ряд Фурье ф-ции f будет равномерно сх-ся к своей сумме. Но по построению все $a_k = 0$ и $b_{2k} = 0$. Значит остаются только $\sin x, \sin 3x \ldots$

Значит всякая ф-ция из нашего мн-ва может быть приближена тригоном. многочленом от $\sin x, \sin 3x$. Значит исходная система полна в $C[0, \frac{\pi}{2}]$.

(T5) Полна ли $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$ в пр-ве

а) $C([1,2])$

Продолжим ф-ции из $C([1,2])$ непрерывно на $[0,\pi]$ так, чтобы $f(0) = f(\pi) = 0$. После этого по нечётности на $[-\pi, 0]$, и $f(-\pi) = -f(\pi) = 0$

Значит $f(x)$ удовл. теореме 2 Вейерштрасса

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \alpha_k x^k \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \hookrightarrow$

$\hookrightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$

Но также $|f(-x) - P_n(-x)| < \varepsilon$

$$R_n(x) = \frac{P_n(x) - P_n(-x)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1} \cdot 2/2 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1}$$

$f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$ в силу нечётн.

из тожд-ва

$2f(x) = f(x) - f(-x)$ т.к. $f(x) = -f(-x)$

Значит $\left|f(x) - R_n(x)\right| = \left|\frac{f(x) - f(-x)}{2} - \frac{P_n(x) - P_n(-x)}{2}\right| \le$

$\le \frac{1}{2}\left|f(x) - P_n(x)\right| + \frac{1}{2}\left|f(-x) - P_n(-x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$

В частности $\forall x \in [1, 2]$.

Значит система <u>полна</u> в $C[1,2]$

б) в пр-ве $C([0,1])$.

Пусть система полна. Тогда $\forall f \in C[0,1]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P(x) \ \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$

Возьмем $f(x) = \frac{1}{2} \ \forall x \in [0,1]$

$\|f(x) - P(x)\|_{C[0,1]} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| \geq |f(0) - \overset{0}{P(0)}| =$

$= \frac{1}{2}$.

$P(0) = 0$, т.к. это есть линейная комбинация степеней x^{n} ($n \geq 1$) без свободного члена

Получим противоречие, т.к. $\exists \ \varepsilon = \frac{1}{2}$ для кот. $\sup \geq \varepsilon$. Значит система <u>не полна</u>.

(T6) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пр-ве

а) $C([0, \frac{\pi}{2}])$

Пусть система полна. Тогда $\forall f \in C([0, \frac{\pi}{2}])$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T(x) : \| f(x) - T(x) \| < \varepsilon.$

Рассмотрим $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$.

$$\|f(x) - P(x)\| = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - P(x)| \geq |f(\tfrac{\pi}{2}) - P(\tfrac{\pi}{2})| = |1 - 0| = 1$$

Получим противоречие. Значит система __не полна__.

б) $C([0, 2])$.

Аналогично возьмём $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$$\|f(x) - P(x)\| = \sup_{x \in [0, 2]} |f(x) - P(x)| \geq |f(\tfrac{\pi}{2}) - P(\tfrac{\pi}{2})| = |1 - 0| = 1$$

Получим противоречие. Значит система __не полна__.

§13 2(5)

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\pi} x \cos(1+\alpha)x \, dx$$

Т.к. подынтегр. ф-ция непрерывна в прямоуг-ке $\Pi = \{(x, \alpha): 0 \le x \le \pi, \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}$ для $\forall \alpha_1, \alpha_2$, то $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_0^{\pi} x \cos(1+\alpha) x \, dx =$

$$= \int_0^{\pi} \lim_{\alpha \to 0} (x \cos(1+\alpha)x) \, dx = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} x \, d \sin x = \xcancel{x \sin x \Big|_0^{\pi}}^{\,0} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.$$

§13 14(2)

$$\Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx$$

$$\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha), \alpha)\, \psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha), \alpha)\, \varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx.$$

В нашем случае $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\psi(\alpha) = 2\alpha$.

$$\Phi'(\alpha) = \frac{\sin 2\alpha^2}{2\alpha} \cdot 2 - \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} \cdot 1 + \int_{\alpha}^{2\alpha} \cos \alpha x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\sin 2\alpha^2 - \sin \alpha^2\right) + \frac{\sin 2\alpha^2}{\alpha} - \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\sin 2\alpha^2 - \sin \alpha^2\right) = \frac{2}{\alpha}\left(\sin 2\alpha^2 - \sin \alpha^2\right)$$

§ 13 17 $\int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ Найти $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} \Big|_0^b = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} \equiv I_0$$

$$I_0' = -\int_0^b \frac{2\alpha\, dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$$

Искомый интеграл $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} \equiv I$

$$I = -\frac{I_0'}{2\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+b^2/\alpha^2} \cdot \frac{b}{\alpha^2}\right) =$$

$$= +\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \frac{b}{\alpha^2+b^2}\right).$$

Ответ: $I = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$ //

§ 15 1(3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx$$ Здесь $f(\sqrt{a}x) = e^{-ax^2}$,

$f(\sqrt{b}x) = e^{-bx^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\sqrt{a}x)^2} - e^{-(\sqrt{b}x)^2}}{x}\,dx =$$

$$= e^{-0^2} \ln\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

§14 1(1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $E = [\alpha_0; +\infty),\ \alpha_0 > 1$

а) $E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1$

Интеграл сх-ся $\forall \alpha > 1$, т.е. при $\forall$ фиксированном $\alpha \in E$.

Пусть $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$, а $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}$.

$\forall x \in [1, \infty)\ \forall \alpha \in E \hookrightarrow |f(x,\alpha)| \leq g(x)$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, т.к. $\alpha_0 > 1$.

Значит по признаку Вейерштрасса равномерной сх-сти интеграла он $(I(\alpha))$ сх-ся равномерно на мн-ве E (даже абсолютно)

б) $\alpha \in (1, +\infty) = E_2$

Интеграл сх-ся при $\forall$ фиксир. $\alpha \in E_2$

$$\int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{\xi^{-(\alpha-1)}}{(\alpha-1)} = \frac{e^{-(\alpha-1)\ln\xi}}{\alpha-1} = \varphi(\xi,\alpha)$$

$$\sup_{\alpha>1} \int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \geq \varphi\left(\xi, 1 + \frac{1}{\ln\xi}\right) = e^{-1}\ln\xi$$

$$\sup_{\alpha>1} \int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \not\to 0,\ \xi \to +\infty.$$ Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

§ 14 1(2)

а) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$.

$I(\alpha)$ сх-ся $\forall \alpha \in E$

$f(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x) \quad \forall x \in (0,1) \ \forall \alpha \in E$

$\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ сх-ся, т.к. $\alpha_0 < 1$

Значит по признаку Вейерштрасса равномерной сх-сти интеграла $I(\alpha)$ сх-ся равномерно на мн-ве E.

б) $\alpha \in (0,1) = E_2$

Интеграл сх-ся при $\forall$ фикс. $\alpha \in E_2$

$\int\limits_0^\xi \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1}\Big|_0^\xi = \frac{\xi^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} = \frac{e^{-(\alpha-1)\ln\xi}}{\alpha-1} = \varphi(\xi,\alpha)$

$\sup\limits_{\alpha<1}\left|\int\limits_0^\xi \frac{dx}{x^\alpha}\right| \geq \left|\varphi\left(\xi, 1+\frac{1}{\ln\xi}\right)\right| = \left|e^{-1}\ln\xi\right| \not\to 0, \ \xi \to 0$

рассм. $\xi \in (0, 0.3)$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2.

§14 6(3,4)

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$ $E_1 = (-\infty, 0]$

$E_2 = [0, +\infty)$

На мн-ве E_1 можем оценить:

$\frac{1}{4+(x-\alpha)^6} < \frac{1}{1+x^6}$ - сх-ся. Значит по призн. Вейерштрасса равномерной сх-сти интегр. $I(\alpha)$ сх-ся равномерно на E_1.

Рассмотрим на E_2:

запишем ~~при~~ условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \forall \alpha \in E_2 \hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6} \right| < \varepsilon$

$x_1 = b \quad x_2 = b+1 \quad \alpha = b$ - возьмём такие парам.

$$\int\limits_b^{b+1} \frac{dx}{4+(x-b)^6} \overset{t=x-b}{=\!=} \int\limits_0^1 \frac{dt}{4+t^6} \geqslant \int\limits_0^1 \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}.$$

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{5} \quad \forall b > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \exists \alpha \in E_2$:

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6} \right| \geqslant \varepsilon.$$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

Оба интеграла сх-ся при $\forall$ фикс. α

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ $\qquad E_1 = [0,2]$

$E_2 = [0, +\infty)$

Рассмотрим на E_1

$t = x - \alpha \qquad I(\alpha) = \int\limits_{-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$$\sup_{\alpha \in E_1} \left| \int\limits_{b-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| \leq \int\limits_{b-2}^{+\infty} e^{-t^2} dt \longrightarrow 0, \; b \to +\infty$$

Сх-ся равном. на E_1

Рассмотрим на E_2.

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \forall \alpha \in E_2$

$\hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\alpha)^2} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём $x_1 = b, \; x_2 = b+1, \; \alpha = b$.

$$\int\limits_b^{b+1} e^{-(x-b)^2} dx \geq \frac{1}{e^{(b+1-b)}} \int\limits_b^{b+1} dx = \frac{1}{e} \cdot 1$$

Значит

$\exists \; \varepsilon = \frac{1}{e} : \forall b > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \exists \alpha \in E_2 :$

$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\alpha)^2} dx \right| \geq \varepsilon$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

§14 7(3, 5, 6)

3) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \qquad E = (0, +\infty)$

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists b > 0 : \;\; \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \;\; \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём

$x_1 = b,\ x_2 = 2b,\ \alpha = \frac{1}{b^2}$

$$\int_b^{2b} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx = \int_b^{2b} \frac{1}{b} e^{-\frac{x^2}{b^2}} dx \overset{\frac{x}{b}=t}{=} \int_1^2 e^{-t^2} dt \geqslant \int_1^2 \frac{1}{e^4} dt = \frac{1}{e^4}$$

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{e^4} : \;\; \forall b > 0 \;\; \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \;\; \exists \alpha \in E :$

$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \right| \geqslant \varepsilon$ Интеграл сх-ся неравномерно на E

5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin\alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \qquad E = \mathbb{R}$

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists b > 0 : \;\; \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \;\; \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin\alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём

$x_1 = b,\ x_2 = 2b,\ \alpha = \frac{1}{10b}$

$$\int_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1+x^2}{100b^2}} dx \geqslant \int_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1+4b^2}{100b^2}} dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{5b^2}{100b^2}} dx = \int_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1}{20}} dx \geqslant \left(\frac{1}{10b} + o(1)\right) e^{-\frac{1}{20}} \cdot b =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{1}{20}} + o(1)\, e^{-\frac{1}{20}} \geqslant \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}}.$$

Значит

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}} : \ \forall b > 0 \quad \exists\, x_1, x_2 \in [b; +\infty) \quad \exists\, \alpha \in E :$$

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sin\alpha \ e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| \geq \varepsilon.$$

Интеграл сх-ся неравномерно на E

6) $$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x} \ \frac{dx}{x^\alpha} \qquad E = (0,2)$$

Условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \in (0,1) : \forall x_1, x_2 \in (0, b] \quad \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sin\frac{1}{x} \frac{dx}{x^\alpha} \right| < \varepsilon$$

Сделаем замену $t = \frac{1}{x} \qquad dt = -\frac{dx}{x^2}$

Тогда $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt$ - сх-ся по призн. Дирихле.

Условие Коши станет

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, b > 1 : \quad \forall t_1, t_2 \in [b, +\infty) \ \forall \alpha \in E \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt \right| < \varepsilon.$$

Возьмем $t_1 = 2\pi n, \ t_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \ \alpha = 2 - \frac{1}{n}$

где $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt \right| \geq \left| \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^{1/n}} \right| = \frac{1}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2\pi n + \frac{\pi}{2})} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln(2\pi n + \frac{\pi}{2})} = e^0 = 1$$

Откуда $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^{1/n} < 2$

и $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \sin t \cdot t^{\alpha - 2} \, dt \right| > \frac{1}{2}$.

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall b > 1 : \exists t_1, t_2 \in [b, +\infty) \ \exists \alpha \in E \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \sin t \ t^{\alpha - 2} \, dt \right| \geq \varepsilon$ Интеграл сх-ся неравномерно на E

§14 8(2)

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx \qquad E=[0,1]$$

$$\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx = \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx$$

Рассмотрим $\int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx$:

так как $\left| \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx \right| \leqslant \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = 2\sqrt{\eta}$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$ такое, что

$\left| \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx \right| < \varepsilon$ - значит сх-ся равномерно при $\alpha \in [0,1]$

Для второго интеграла $\int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx$

так как $\left| \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx \right| \leqslant \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}} = 2\sqrt{\eta}$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$ такое, что

$$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| < \varepsilon$$ – значит сх-ся равномерно при $\alpha \in [0, 1]$

Значит исходный интеграл сх-ся равномерно при $\alpha \in [0, 1]$

(T1)

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

Пусть $\alpha > 0$ Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad , \beta > 0 \qquad (*)$$

При фиксированном $\beta > 0$ интеграл $(*)$ сх-ся для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сх-сти несобств. интегралов, т.к. ф-ция $\frac{1}{x} e^{-\beta x}$ убывает на $(0, +\infty)$, а ф-ция $\sin \alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int\limits_0^x \sin \alpha t \, dt = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha} \right)$

При $\alpha = 0$ интеграл $(*)$ равен 0. Кроме того, интеграл $K(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$, полученный из $(*)$ дифференцированием по α подынтегральной ф-ции, сх-ся равномерно по α на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса.

Используя правило Лейбница и то, что

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$, получим

$$\varphi'_\alpha(\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos\alpha x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Интегрируя на отрезке $[0,\alpha]$ полученное рав-во, находим

$$\varphi(\alpha,\beta) - \varphi(0,\beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$

Так как $\varphi(0,\beta)=0$, то $\forall \beta>0 \hookrightarrow \varphi(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. $(**)$

Теперь вычислим исходный интеграл, считая, что $\alpha>0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha>0$ интеграл $(*)$ сх-ся равномерно по β на отрезке $[0,1]$, т.к. ф-ция $\sin\alpha x$ имеет огранич. первообразную ($\alpha>0$ фиксировано), а ф-ция $g = \frac{e^{-\beta x}}{x}$ монотонно убывает ($g'_x<0$ при $x>0, \beta\geq 0$) и $g(x,\beta) \rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ на отрезке $[0,1]$. По признаку Дирихле интеграл $(**)$ сх-ся равномерно по β на отрезке $[0,1]$. Из равномерной сх-сти интеграла (**) и непрерывности ф-ции $e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ на множестве

$$G=\{(x,\beta):\ 0\leq x<+\infty,\ 0\leq\beta\leq 1\}$$

следует непрерывность по β ф-ции $\Phi(\alpha,\beta)$ на отрезке $[0,1]$ и, в частности, непрерывность по β этой ф-ции справа в т. $\beta=0$.

Это означает, что в интеграле (**) можно перейти к пределу при $\beta\to+0$ под знаком интеграла. След-но:

$$\lim_{\beta\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\lim_{\beta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

Учитывая, что $\frac{\sin\alpha x}{x}$ - нечётная по α ф-ция, получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\ ,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ $\qquad K(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$

Пусть $\alpha>0$. Т.к. ф-ция $\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}$ непрерывна $\forall \alpha$ и $\forall x$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$$

сх-ся равномерно по α на отрезке $[\alpha_0, +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то, применяя правило Лейбница, получаем

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Складывая почленно полученное рав-во с рав-вом $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$, $\alpha > 0$, получим:

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Дифференцируя полученное рав-во почленно, имеем $I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$

Таким образом, $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному ур-ию $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общ. решение кот. имеет вид $I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$

Заметим, что $|I(\alpha)| \le I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

Кроме того, $e^{-\alpha} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, а $e^{\alpha} \to +\infty$, $\alpha \to +\infty$.

Отсюда следует, что $C_1 = 0$, поэтому $I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая $I(0) = \frac{\pi}{2}$, получим

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \text{ при } \alpha > 0.$$

т.к. $I(\alpha)$ – чётная ф-ция, то

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

В прошлых рав-вах мы получили, что

$$I'(\alpha) = -K(\alpha) \hookrightarrow K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

т.е. $$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

откуда в силу нечётности ф-ции $K(\alpha)$

следует, что $$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

§15 1(4)

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx$$

Замена $\ln x = -t$ $x = e^{-t}$

$\frac{1}{x}dx = -dt$

Интеграл станет:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(-b-1)} - e^{t(-a-1)}}{t} dt$$

Т.к. интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ сх-ся, то по ф-ле Фрулани исходной равен $= 1 \cdot \ln \frac{a+1}{b+1}$ //

§15 2(4)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}\,dx$$

Замена $x^3 = t \hookrightarrow dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\,dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}\;3\sqrt[3]{t^2}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

§ 15 3(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,(1-\sin^2 x)}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2x} - \frac{\cos 2x \sin x}{2x}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2x} - \left(\frac{\sin 3x}{2x} - \frac{\sin x}{2x}\right)\right) dx = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\pi/2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{2x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$ //

§15 5(2)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x - \sin \alpha x}{x^2} dx, \quad \alpha > 0$$

Возьмём $f(t) = \frac{1}{t} \sin t$

$$I = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x}$$

Так как $\forall A > 0$ $\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сх-ся по призн Дирихле ($\frac{1}{t}$ монот. убыв, $\int_A^x \sin t\, dt$ огр.), то применима формула Фруллани.

Значит

$$I = \alpha f(0) \ln \alpha = \alpha \ln \alpha$$

$f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (доопр. в т. 0 как 1 для непрер-сти на $[0, +\infty)$)

Ответ: $\alpha \ln \alpha$.

§15 6(1, 4, 5)

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$, $\beta>0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} = 0$$

Значит доопределим подынтегральную ф-цию в т. $x=0$ $f=0$ - она станет непрерывной на $[0, +\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \begin{cases} \sin\alpha x\, e^{-\beta x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Значит:

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны на прямоуг. $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq e^{-\beta x} \to \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ сх-ся равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$ при фикс. β по призн. Вейерштр.

3) $\int_0^{+\infty} f(x,0)\,dx$ сх-ся.

Значит применима т. о дифференцировании по параметру

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin\alpha x\, e^{-\beta x}\,dx = -e^{-\beta x}\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\, e^{-\beta x}\,dx =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\, e^{-\beta x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot I'_\alpha \longrightarrow I'_\alpha\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

Откуда $I'_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \to I = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C}}$

Ответ: $I = \frac{1}{2}\ln$

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin\alpha x\, e^{-\beta x}\, dx = -e^{-\beta x}\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\, e^{-\beta x} dx =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\, e^{-\beta x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} I'_\alpha$$

$$I'_\alpha\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha} \longrightarrow I'_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2) + C(\beta)$$

$$\underbrace{I(0,\beta)}_{=0} = \frac{1}{2}\ln\beta^2 + C(\beta) \longrightarrow C(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\beta^2$$

Ответ: $I = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x\, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x = \beta - \alpha \leftarrow$ доопр. в т. $x=0$ ф-цию этим значением.

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda} = \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right)\sin\lambda x$$

α, β фиксируем.

1) $f(x,\lambda)$ и $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ непрер на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right| \le e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} \hookrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\,dx$ сх-ся равном. по $\lambda\in\mathbb{R}$ по призн. Вейерштр.

3) при $\lambda = 0$ $\quad I(\alpha, \beta, 0) = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$ сх-ся $\qquad\qquad\qquad \uparrow$ сх-ся

Значит I сх-ся при $\lambda = 0$

Применима т. о дифф. по параметру

$$I'_\lambda = \int_0^{+\infty} (e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) \sin \lambda x \, dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \alpha^2} -$$

как в прошлом примере (6.1)

$$I = \frac{1}{2} \ln (\lambda^2 + \beta^2) - \frac{1}{2} \ln (\lambda^2 + \alpha^2) + C(\alpha, \beta)$$

$$I(\alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2} \ln \beta^2 - \frac{1}{2} \ln \alpha^2 + C(\alpha, \beta) = \ln \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha, \beta)$$

Из определения $I(\alpha, \beta, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}$ — по ф-ле Фруллани

Значит $C(\alpha, \beta) = 0$

Ответ: $I = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 + \beta^2}{\lambda^2 + \alpha^2}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x \sqrt{1 - x^2}} = \alpha$ ← доопр. в т. $x=0$ ф-цию этим знач.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{1}{(1 + (\alpha x)^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

1) $f(x, \alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ непрер. на $[0, 1) \times \mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \le \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ сх-ся $\hookrightarrow \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$ сх-ся равн-но по $\alpha \in \mathbb{R}$ по пр. Вейер.

3) $I(x, 0) = 0$

Значит применима т. о дифф. по параметру.

$$I'_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{(1+(\alpha x)^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{x=\sin u}{=\!=\!=} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u \, du}{(1+\alpha^2\sin^2 u)\cos u} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\alpha^2\sin^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 u \cos^2 u} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 u\,(\operatorname{tg}^2 u + 1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 u)}\,du \overset{\operatorname{tg} u = t}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\alpha^2+1)t^2+1} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+\alpha^2}\,t)}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right) + C$$

$$I(0) = 0 \hookrightarrow C = 0$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)$

§ 15 13 (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch}\beta x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch}\beta x \, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch}\beta x \, dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x^2 + x\beta} + e^{-\alpha x^2 - x\beta} \right) dx =$$

$$= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} + e^{-\left(\sqrt{\alpha}x + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot$$

$$\cdot\, 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

§15 15(4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}\, dx$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)} = \alpha^2$$ ← доопределим ф-цию в т. $x=0$ этим значением

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 2\alpha, & x = 0 \end{cases}$$

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ - сх-ся равном. по пр Вейерштр,

так как $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq \frac{1}{x^3}$

3) $\int_0^{+\infty} f(x,0)\,dx = 0$

применима теорема о дифф. по параметру.

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}$$

1) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x,\alpha)$ непрер на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right| \leq \frac{2}{1+x^2}$ - сх-ся $\hookrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x,\alpha)\,dx$ сх-ся

равном. по призн. Вейерштрасса

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, 0) = 0$

Применима теорема о дифф. по параметру.

$$I''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|2\alpha|}$$

интегр. Лапласа

$$I'(\alpha) = -\frac{\pi}{2} e^{-|2\alpha|} + C_1$$

$$I'(0) = 0 \hookrightarrow C_1 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow I'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-|2\alpha|}\right)$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-|2\alpha|} + C_2$$

$$I(0) = 0 \hookrightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{4}\left(2|\alpha| - 1 + e^{-|2\alpha|}\right)$

§16 7(4)

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}} = \int_0^2 x^{-\frac{3}{5}}(2-x)^{-\frac{2}{5}}dx = 2^{-\frac{2}{5}}\int_0^2 x^{-\frac{3}{5}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}dx =$$

$$\underset{t=\frac{x}{2}}{=} \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}(1-t)^{-\frac{2}{5}}dt = B\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{5}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}\cdot\frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}} \;//$$

§16 9(3)

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{t=\frac{x^2}{a^2}}{=} \int_0^1 \frac{a}{2\sqrt{t}}\,a^2 t\sqrt{a^2-a^2t^2}\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{2}\,B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{a^4}{2} = \frac{1}{4\cdot 2}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{a^4}{2} =$$

$$= \frac{a^4}{16}\;\frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\;\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma(1)} = \frac{\pi a^4}{16}$$

§16 12(g)

$$\int_0^{\pi/2} tg^{2\alpha-1} x\, dx \quad , 0<\alpha<1$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1} x \cos^{1-2\alpha} x\, dx \overset{t=\sin x}{=\!=} \int_0^1 t^{2\alpha-1} (1-t^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \int_0^1 t^{2\alpha-1}(1-t^2)^{-\alpha} dt \overset{u=t^2}{=\!=} \int_0^1 u^{\frac{2\alpha-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\alpha} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha} du = \frac{1}{2} B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \,//$$

§12 248

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$$

В смысле главного значения:

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \sin x \, dx = \lim_{A \to +\infty} -\cos x \Big|_{-A}^{A} = \lim_{A \to +\infty} 0 = 0$$

254

$$\int_{-0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$$

Сделаем замену

$t = \ln x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^t}{1-e^{2t}}$$ в смысле главного значения:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{de^t}{1-e^{2t}} = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right|\Bigg|_{-A}^{A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2A}-1}{e^{2A}+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-2A}-1}{e^{-2A}+1}\right|\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-2A}-1}{e^{-2A}+1}\cdot\frac{e^{2A}+1}{e^{2A}-1}\right| = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-2A}-e^{2A}}{e^{2A}-e^{-2A}}\right| = \lim_{A\to+\infty} 0 = 0$$

§17. $\underline{\underline{1(3)}}$

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-a) - \operatorname{sign}(x-b), \quad b > a$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 2, & a < x < b \\ 0, & x > b \\ 1, & x = a \text{ и } x = b \end{cases}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{a} 0\cdot\cos ty\,dt + \int_a^b 2\cos ty\,dt + \int_b^{+\infty} 0\cos ty\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin by - \sin ay}{y}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_a^b 2\sin ty\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos ay - \cos by}{y}$$

$$I_f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin by - \sin ay}{y}\cos xy + \frac{\cos ay - \cos by}{y}\cdot\sin xy\right]dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(y(x-a)) - \sin(y(x-b))}{y}\,dy.$$

§17 <u>2(4)</u>

$$f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & \text{если } |x|\leqslant 2\pi n/\omega\\ 0, & \text{если } |x|>\dfrac{2\pi n}{\omega}\end{cases}\qquad n\in N,\ \omega>0$$

Эта ф-ция нечётная $\rightarrow$ $a(y)=0$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{2\pi n}{\omega}}^{\frac{2\pi n}{\omega}} \sin \omega t \sin ty \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{2\pi n}{\omega}} \sin \omega t \sin ty \, dt = \frac{2}{\pi \cdot 2} \int_{0}^{\frac{2\pi n}{\omega}} \big(\cos(\omega t - ty) -$$

$$- \cos(\omega t + ty) \big) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega t - ty)}{\omega - y} - \frac{\sin(\omega t + ty)}{\omega + y} \right] \Bigg|_{0}^{\frac{2\pi n}{\omega}} =$$

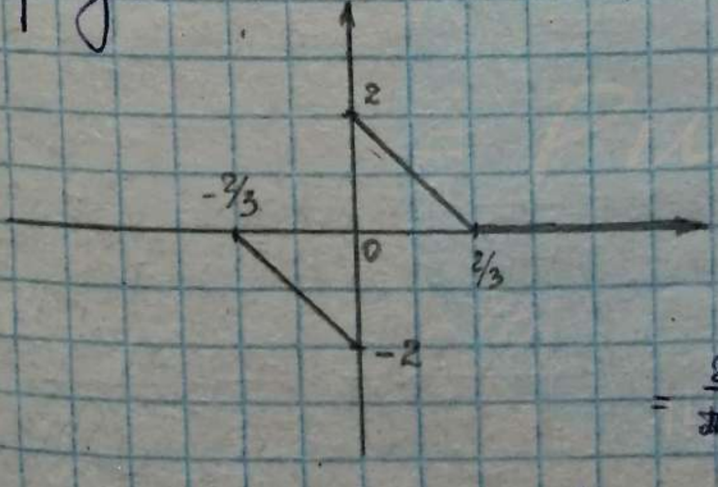
$$= \frac{1}{\pi} \frac{-\sin \frac{2\pi n}{\omega} y}{\omega - y} - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{2\pi n}{\omega} y}{\omega + y} = \frac{2\omega}{\pi} \frac{\sin \frac{2\pi n}{\omega} y}{y^2 - \omega^2}$$

$$I_f(x) = \frac{2\omega}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n}{\omega} y}{y^2 - \omega^2} \sin xy \, dy$$

5(2)

$$f(x) = \begin{cases} 2-3x, & 0 \le x < \frac{2}{3} \\ 0, & x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Продолжим её нечётным образом на $(-\infty, 0)$



$a(y) = 0$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2/3}(2-3t)\sin ty\,dt = \frac{2}{\pi}\left(2\,\frac{1-\cos\frac{2}{3}y}{y} + \right.$$

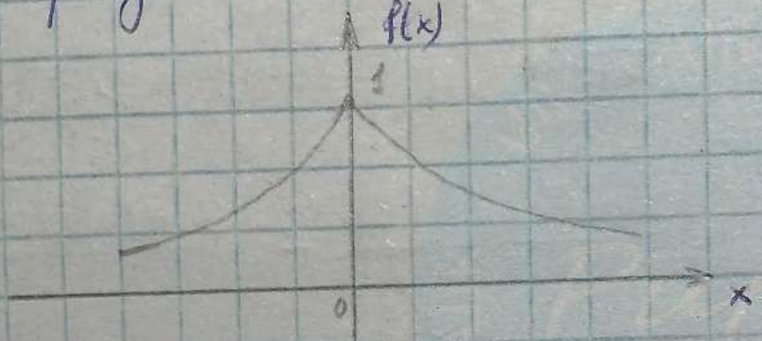
$$\left. + \frac{3}{y}\left(t\cos ty\Big|_0^{2/3} - \int_0^{2/3}\cos ty\,dt\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{y} - 3\frac{\sin\frac{2}{3}y}{y^2}\right)$$

$$I_f = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2y - 3\sin\frac{2}{3}y}{y^2}\sin xy\,dy$$

6(1)

$$f(x) = e^{-\alpha x}, \; x \geqslant 0, \; \alpha > 0$$

Продолжим её чётным образом на $(-\infty, 0)$:



$$b(y) = 0$$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos ty \, dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(iy-\alpha)} dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha - iy} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$$

$$I_f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\alpha^2 + y^2} dy$$

7(4)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \le \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi \end{cases}$$

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, e^{-ixy} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (-i \sin xy \cdot \sin x) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\cos(x - xy) -$$

$$- \cos(x + xy)] dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(x - xy)}{1-y} - \frac{\sin(x + xy)}{1+y} \right) \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \pi y}{1 - y^2}$$

8(1,5)

1) $f(x) = x e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0$

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha|x|} e^{-ixy} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (-i x e^{-\alpha x} \sin xy) dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x + ixy} dx =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(\frac{x e^{-\alpha x + ixy}}{iy - \alpha} - \frac{e^{-\alpha x + ixy}}{(iy-\alpha)^2} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(iy-\alpha)^2} \right) =$$

$$= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\alpha y}{(\alpha^2 + y^2)^2} = -i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha y}{(y^2 + \alpha^2)^2}$$

5) $f(x) = \frac{d}{dx} \left(x^2 e^{-|x|} \right)$

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(x^2 e^{-|x|} \right) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} \left(x^2 e^{-|x|} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} \cdot e^{-ixy} \cdot iy \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} iy \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} e^{-ixy} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} iy \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cos xy \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} iy \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x(1+iy)} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} iy \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{1+iy} \left[\left(e^{-x(1+iy)} x^2 \right) \Big|_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+iy)} dx \right] \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} iy \cdot 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+iy} \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+iy)} dx \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2iy \; Re\left(\frac{1}{(1+iy)^2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-x(1+iy)} dx - x e^{-x(1+iy)}\Big|_0^{+\infty}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \, iy \; Re\left(\frac{1}{(1+iy)^3}\right) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \, iy \; Re\left(\frac{1}{1+3iy-3y^2-iy^3}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \, iy \; \frac{1-3y^2}{(1-3y^2)^2+(3y-y^3)^2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \, iy \; \frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3} \; //$$

14 (1, 3) $\quad \alpha = \dfrac{1}{1+|x|^5}$

1) $\hat{f}(y)$ - пр-ие ф-ции α.

Док-ть $\hat{f}(y)$ имеет непрер. на R произв. 3-го пор.

□ Пусть $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x^k}{1+|x|^5}\right| dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^5}\,dx = \underbrace{2\int_0^1 \frac{x^k}{1+x^5}\,dx}_{\text{собств.}} +$$

$$+ 2\int_1^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^5}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^5}\,dx \leq \int_1^{+\infty} x^{k-5}\,dx \qquad k-5<-1 \hookrightarrow$$

интегр. сх-ся по пр. сравн.

Значит $\alpha(x)$, $x\alpha(x)$, $x^2\alpha(x)$ и $x^3\alpha(x)$ абс. интегрируемы.

По т. о производной пр-ия Фурье

$\exists\ (\hat{f}(y))''' = (-i)^3 \widehat{x^3\alpha}(y)$

то есть $F'''[\alpha](y) = i\,F[x^3\alpha](y)$

$x^3\alpha(x)$ абс. интегрир. $\hookrightarrow$ $F'''[\alpha](y)$ непрер.

3) $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right)$ при $y \to \infty$.

Разложим в окрестн. 0:

$\alpha(x) = 1 - |x|^5 + o(x^5)$ $\hookrightarrow$ первые 4 произв.

$\alpha(x)$ непрерывны (и $\exists$)

Пятая произв. $\exists$ и явл-ся кусочно-непр.

По т. о пр-ии Фурье произв.

$$F[\alpha^{(5)}(x)] = (iy)^5 F[\alpha(x)]$$

По лемме Римана об осцилляции

$$F[\alpha^{(5)}(x)] \to 0,\ y \to +\infty \hookrightarrow F[\alpha(x)] = \hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right)$$

§21. 60

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$ - ? $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ - ?

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$(\sin nx, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx \, dx \longrightarrow 0 = (0, \varphi)$$

по лемме Римана

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$

(T2) Док-ть, что в D':

а) $\lim\limits_{a \to +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$

Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[-A, A]$, $A > 0$

Тогда $\left(\frac{a}{a^2 + x^2}, \varphi\right) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{a\,\varphi(x)}{a^2 + x^2}\, dx$

Рассмотрим $\forall x \neq 0$ ф-цию $\lambda(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} =$
$= \varphi'(\xi(x))$. $\xi(x) \in (0, x)$ или $\xi(x) \in (x, 0)$ - смотря что больше (по т. Лагранжа).

Т.к. $\varphi \in D$, то и $\varphi' \in D \hookrightarrow \varphi'$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$, поэтому $|\lambda(x)| \leq M \quad \forall x \neq 0$

Тогда $\varphi(x) = \varphi(0) + x\lambda(x)$ и:

$$\left(\frac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) = a\varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{dx}{a^2+x^2} + a\int_{-A}^{A}\frac{dx\cdot\lambda(x)x}{a^2+x^2} \equiv I_1 + I_2$$

Получим след. рав-ва:

$$I_1 = a\varphi(0)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{-A}^{A} = \varphi(0)\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{A}{a} \to \pi\varphi(0),\ a\to+0$$

Для второго интеграла:

$$|I_2| \leq Ma\int_{-A}^{A}\frac{|x|\,dx}{x^2+a^2} = 2Ma\int_{0}^{A}\frac{x\,dx}{x^2+a^2} =$$

$$= Ma\ln(x^2+a^2)\Big|_0^A = Ma\ln(A^2+a^2) - 2Ma\ln a$$

$$\lim_{a\to+0} Ma\ln(A^2+a^2) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{a\to+0} a\ln a = 0$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{\ln a}{a^{-1}} = \lim_{a\to+0}\frac{\frac{1}{a}}{-a^{-2}} = -\lim_{a\to+0} a = 0$$

Поэтому $\lim\limits_{a\to+0} I_2 = 0$

Значит, $\lim\limits_{a\to+0}\left(\frac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi)$ //

б) $\lim\limits_{a\to+0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} = \pi\delta(x)$

Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[-A, A]$, $A > 0$

Тогда $\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\cdot(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \int\limits_{-A}^{A}\varphi(0)\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx$$

Аналогично по т. Лагранжа $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leq C|x|$

$$\left|\int\limits_{-A}^{A}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx\right| \leq \int\limits_{-A}^{A}\left|\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \leq$$

$$\leq 2\cdot C\int\limits_{0}^{A}\left|\sin\frac{x}{a}\right|dx = -2Ca\cos\frac{x}{a}\Big|_0^A =$$

$$= 2aC\left(1-\cos\frac{A}{a}\right)$$

Т.к. $\cos\frac{A}{a}$ - огранич. ф-ция, то $1-\cos\frac{A}{a}$ тоже огранич. и $\lim\limits_{a\to+0} 2aC\left(1-\cos\frac{A}{a}\right) = 0$

$$\int\limits_{-A}^{A}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\varphi(0)\,dx = \varphi(0)\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}}\,d\frac{x}{a} = \pi\varphi(0)$$

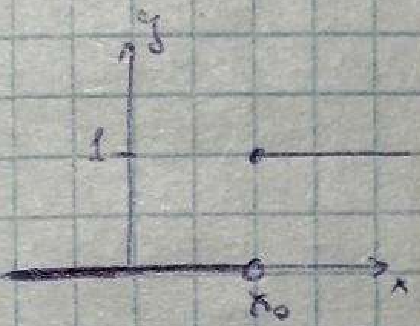
2 инт. Дирихле $= \frac{\pi}{2}\cdot 2$

~~Значит, $\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right)$~~

Значит, $\lim\limits_{a\to+0}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi)$ //

§ 21. 71

Вычислить произв. $y = \theta(x-x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$



$$(y', \varphi) = -(y, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-x_0)\, \varphi' dx = -\int_{x_0}^{+\infty} \varphi' dx =$$

$$= \varphi(x_0) = (\delta(x-x_0), \varphi)$$

сдвинутая δ-ф-ция

Ответ: $y' = \delta(x-x_0)$.

§21. 84

Док-ть, что если f - кус. гладкая на $\mathbb{R}$ ф-ция, имеющ. в т. $x_1, \dots, x_n$ разрывы 1 рода со скачками $p_1, p_2, \dots, p_n$, то $$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k)$$

Пусть $\varphi \in D$

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x)\, dx$$

т.к. φ финитна, то $\exists [x_0, x_{n+1}] : \operatorname{supp} \varphi \cup \{x_k\}_{k=1}^{n} \subset (x_0, x_{n+1})$

Разобьём наш интеграл на сумму по отрезкам:

$$-\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi'(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \varphi'(x)\, dx + \dots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \varphi'(x) dx \right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} f(x)\,\varphi(x)\Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} + \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\Big(f(x_{k+1}-0)\,\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\,\varphi(x_k)\Big) + \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\Big[f(x_k+0)\,\varphi(x_k) - f(x_{k+1}-0)\,\varphi(x_{k+1})\Big] + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\varphi(x_k)}^{\delta(x-x_k)}\, \overbrace{\Delta f(x_k)}^{p_k} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

т. к. $\varphi(x_0) = \varphi(x_{n+1}) = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta(x-x_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta(x-x_k) + \frac{df(x)}{dx}.$$

(T3) $\lim\limits_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}$ в $\mathcal{D}'$.

Из T2 следует, что $\lim\limits_{\xi\to+0} \frac{\xi}{x^2+\xi^2} = \pi\delta(x)$ в $\mathcal{D}'$.

Т.к. оператор дифференц. в пр-ве $\mathcal{D}'$ непрерывен, т.е. если $f_n \to f$ в $\mathcal{D}'$, то и $f_n' \to f'$ в $\mathcal{D}'$ ($\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $(f_n', \varphi) = -(f_n, \varphi') \longrightarrow -(f, \varphi') = (f', \varphi)$, т.е. $f_n' \to f'$ в $\mathcal{D}'$),

то $\lim\limits_{\xi\to+0} \left(\frac{\xi}{x^2+\xi^2}\right)' \overset{\mathcal{D}'}{=} \pi\delta'(x)$

Т.к. ф-ция $\frac{\xi}{x^2+\xi^2}$ непрер. дифф-ма, то её обобщ. производная совпадает с обычной, т.е. $\left(\frac{\xi}{x^2+\xi^2}\right)' = -\frac{2\xi x}{(x^2+\xi^2)^2}$ в $\mathcal{D}'$.

Поэтому $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{\xi x}{(x^2+\xi^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$.

T4

а) $\underbrace{\left(e^{\sin x} + x\cos x\right)}_{\substack{\text{бесконечно} \\ \text{дифф. на } (-\infty, +\infty)}} \delta(x)$ $\qquad p(x) \equiv e^{\sin x} + x\cos x$

Значит $(p\delta, \varphi) = (\delta, p\varphi) = p(0)\varphi(0) = (p(0)\delta, \varphi)$

Значит исходное выраж. $= 1 \cdot \delta(x) = \delta(x)$

б) $\underbrace{\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)}_{\substack{\text{бесконечно} \\ \text{дифф. на } (-\infty, +\infty)}} \delta'(x)$ $\qquad p(x) \equiv \frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x$

Покажем, что $(p\delta)' = p'\delta + p\delta'$:

$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad ((p\delta)', \varphi) = -(p\delta, \varphi') = -(\delta, p\varphi') =$

$= -(\delta, (p\varphi)' - p'\varphi) = -(\delta, (p\varphi)') + (\delta, p'\varphi) = (\delta', p\varphi) +$

$+ (p'\delta, \varphi) = (p\delta' + p'\delta, \varphi) \hookrightarrow (p\delta)' = p\delta' + p'\delta$

Значит $p(x)\delta'(x) = \underbrace{(p(0)\delta(x))'}_{\text{из а)}} - \underbrace{p'(0)\delta(x)}_{\substack{\text{из а) с} \\ \text{заменой } p \to p'}} = p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x)$

Откуда исходное выраж. $= -\delta'(x) + \delta(x)$

в) $e^{x^2}\delta''(x) = (e^{x^2}\delta'', \varphi) = -(\delta', (e^{x^2}\varphi)') =$

$= -(\delta', 2xe^{x^2}\varphi) - (\delta', e^{x^2}\varphi') = (\delta, (2xe^{x^2}\varphi)') +$

$+ (\delta, (e^{x^2}\varphi')') = (\delta, 2e^{x^2}\varphi + 4x^2e^{x^2}\varphi + 2xe^{x^2}\varphi') +$

$+ (\delta, 2xe^{x^2}\varphi' + e^{x^2}\varphi'') = (\delta, (2e^{x^2} + 4x^2)\varphi) +$

$+ (\delta, 4xe^{x^2}\varphi') + (\delta, e^{x^2}\varphi'') = 2\varphi(0) + 1\varphi''(0) =$

$= 2(\delta, \varphi) + (\delta, \varphi'') = 2\delta(x) + \delta''(x)$ //