Упражнение 1.

$$\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}} = R_{20}(r)\underbrace{Y_{00}(\theta,\varphi)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}$$

$$\psi_{21m} = \sqrt{\frac{1}{24a^5}}\, r e^{-\frac{r}{2a}} Y_{1m}(\theta,\varphi) = R_{21}(r) Y_{1m}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad , \quad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$\hat{\vec{d}} = e\hat{\vec{r}}$$

Рассчитаем матричн. эл.-ты для всех 3х коорд. $\vec{d}$.

1) $(d_x)_{ij} = \langle \psi_{2lm} | e\overbrace{r\cos\varphi\sin\theta}^{x} | \psi_{2l'm'} \rangle =$

$$= e\int_0^\infty R_{2l}(r) R_{2l'}(r) r^3 dr \int_0^\pi f(\theta)\, d\theta \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi}\cdot$$

$$\cdot\cos\varphi\, d\varphi = I_1 I_2 I_3$$

$I_3 = 0$ при $m = m'$ ↳ диаг. эл-ты нулевые

$I_2 = \int_0^\pi y_{lm}(\theta)\, y_{l'm'} \sin\theta d\theta$, где $y_{lm}(\theta) = \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{e^{im\varphi}}$

При $l = l' = 1$ и $|m| \neq |m'|$: $I_2 \sim \int_0^\pi \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = 0$

Остаётся 4 ненулевых элемента:

$$\langle \psi_{200} | er\cos\varphi\sin\theta | \psi_{211} \rangle = e\int_0^\infty \frac{r^4}{8a^4\sqrt{3\pi}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{r}{a}} dr \int_0^\pi \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{e}{8\sqrt{8}\pi a^4} \int_0^\infty r^4\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{a}}dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{e\pi}{16\sqrt{8}a^4} \int_0^\infty r^4\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{a}}dr = \frac{e\pi}{16\sqrt{8}}\left(4!-\frac{5!}{2}\right) =$$

$$= \frac{-36e\pi}{16\sqrt{8}} = -\frac{9e\pi}{4\sqrt{8}} = -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} = \langle \psi_{211} | e r \cos\varphi \sin\theta | \psi_{200} \rangle$$

Аналогично: $\langle \psi_{200} | d_x | \psi_{21-1} \rangle = \langle \psi_{21-1} | d_x | \psi_{200} \rangle =$
$= \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}}$

$$(d_x)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} & 0 & -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} \\ \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)
$$(d_y)_{ij} = \langle \psi_{2lm} | e \underbrace{r \sin\varphi \sin\theta}_{y} | \psi_{2l'm'} \rangle$$

Аналогично

$\langle \psi_{200} | d_y | \psi_{211} \rangle = -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i$

$\langle \psi_{200} | d_y | \psi_{21-1} \rangle = \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i$

$$(d_y)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i & 0 & -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i \\ -\frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9e\pi}{8\sqrt{2}} i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $(d_z)_{ij} = \langle \psi_{2lm} | e \overbrace{r\cos\theta}^{z} | \psi_{2l'm'} \rangle = e \int\limits_0^\infty R_{2l} R_{2l'} r^3 dr \cdot$

$\cdot \int\limits_0^\pi f(\theta) d\theta \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$

$I_3 = 2\pi \delta_{mm'} \neq 0$ при $m = m'$

$I_2 = \int\limits_0^\pi y_{lm}(\theta) y_{l'm'}(\theta) \cos\theta d\theta$

При $l = l'$ $I_2 = 0$

Остаётся 2 ненулевых элемента

$\langle \psi_{200} | e r\cos\theta | \psi_{210} \rangle = \langle \psi_{210} | e r\cos\theta | \psi_{210} \rangle =$

$= \int\limits_0^\infty \frac{e}{8a^3}\left(2 - \frac{r}{a}\right) \frac{r}{\sqrt{3}a} e^{-\frac{r}{a}} r^3 dr \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$

$= \frac{e}{8a^3} \frac{1}{\sqrt{3}a} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{2}{3} 2\pi \int\limits_0^\infty r^4 \left(2 - \frac{r}{a}\right) \cdot e^{-\frac{r}{a}} dr = \frac{ea^5}{24a^4}(4! \cdot 2 - 5!) =$

$= -3ae$

$$(d_z)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -3ea & 0 & 0 \\ -3ea & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 4.

$S_1 = S_2 = 1$

$\hat{\vec{S}} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$

Осуществим переход от базиса $|S_1, S_2, m_1, m_2\rangle$ к базису $|S_1, S_2, S, M\rangle$.

$$\hat{S}_1^2 |s_1, m_1\rangle = s_1(s_1+1)|s_1, m_1\rangle$$

$$\hat{S}_{1z}|s_1, m_1\rangle = m_1|s_1, m_1\rangle$$

$$\hat{S}_2^2 |s_2, m_2\rangle = s_2(s_2+1)|s_2, m_2\rangle$$

$$S_{2z}|s_2, m_2\rangle = m_2|s_2, m_2\rangle$$

$$\hat{S}^2|S_1, S_2, S, M\rangle = S(S+1)|S_1, S_2, S, M\rangle$$

$$\hat{S}_z|S_1, S_2, S, M\rangle = M|S_1, S_2, S, M\rangle$$

$$S = |S_1 - S_2|, \ldots, |S_1 + S_2| \hookrightarrow S = 0, 1, 2$$

$$M = -S, -S+1, \ldots, S$$

Вектора базиса:

$|1,1\rangle|1,1\rangle$ $\quad |1,0\rangle|1,1\rangle$ $\quad |1,-1\rangle|1,1\rangle$

$|1,1\rangle|1,0\rangle$ $\quad |1,0\rangle|1,0\rangle$ $\quad |1,-1\rangle|1,0\rangle$

$|1,1\rangle|1,-1\rangle$ $\quad |1,0\rangle|1,-1\rangle$ $\quad |1,-1\rangle|1,-1\rangle$

Вектора нового базиса:

$|1,1,2,2\rangle$

$|1,1,1,1\rangle$

$|1,1,2,1\rangle$

$|1,1,1,0\rangle$ $\quad |1,1,0,0\rangle$

$|1,1,2,0\rangle$

$|1,1,1,-1\rangle$

$|1,1,2,-1\rangle$

$|1,1,2,-2\rangle$

В-ра разных базисов связаны коэф.

1) $|1,1,2,2\rangle \quad M=2 \hookrightarrow m_1 = m_2 = 1 \hookrightarrow |1,1,2,2\rangle = 1\cdot|1,1\rangle|1,1\rangle$

2) Применим $\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$ к обоим частям

$$\hat{S}_- |s_1, s_2, S, M\rangle = \sqrt{(S+M)(S-M+1)}\,|s_1, s_2, S, M-1\rangle$$

$$\hat{S}_- |1,1,2,2\rangle = \sqrt{(2+2)(2-2+1)}\,|1,1,2,1\rangle = 2|1,1,2,1\rangle$$

$$(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})|1,1\rangle|1,1\rangle = (\hat{S}_{1-}|1,1\rangle)|1,1\rangle + |1,1\rangle\cdot(\hat{S}_{2-}|1,1\rangle) =$$

$$= \sqrt{2}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle + |1,1\rangle|1,0\rangle\right) \hookrightarrow |1,1,2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle + |1,1\rangle|1,0\rangle\right)$$

3) $\hat{S}_- |1,1,2,1\rangle = \sqrt{6}\,|1,1,2,0\rangle$

$$(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle + |1,1\rangle|1,0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|1,-1\rangle|1,1\rangle +\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}|1,0\rangle|1,0\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}|1,0\rangle|1,0\rangle + \sqrt{2}|1,1\rangle|1,-1\rangle\right)$$

$$|1,1,2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1,-1\rangle|1,1\rangle + 2|1,0\rangle|1,0\rangle + |1,1\rangle|1,-1\rangle\right)$$

4) $\hat{S}_- |1,1,2,0\rangle = \sqrt{6}\,|1,1,2,-1\rangle$

$$(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle|1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1,1\rangle|1,-1\rangle\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle|1,0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle\cdot|1,0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1,-1\rangle +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{6}}|1,0\rangle|1,-1\rangle = \sqrt{3}\,|1,-1\rangle|1,0\rangle + \sqrt{3}\,|1,0\rangle|1,-1\rangle$$

$$\hookrightarrow |1,1,2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,-1\rangle|1,0\rangle + |1,0\rangle|1,-1\rangle\right)$$

5) $|1,1,2,-2\rangle \quad M=-2 \hookrightarrow |1,1,2,-2\rangle = |1,-1\rangle|1,-1\rangle$

6) $|1,1,1,1\rangle = \alpha|1,1\rangle|1,0\rangle + \beta|1,0\rangle|1,1\rangle$

Усл-ие нормир. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\langle 1,1,2,1|1,1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1,1|\langle 1,0| + \langle 1,0|\langle 1,1|\right)\cdot$$

$\cdot\,(\alpha|1,1\rangle|1,0\rangle + \beta|1,0\rangle|1,1\rangle) = \frac{\alpha}{\sqrt2} + \frac{\beta}{\sqrt2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt2}$

$|1,1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|1,1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,1\rangle)$

7) $\hat{S}_-|1,1,1,1\rangle = \sqrt2\,|1,1,1,0\rangle$

$(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-})\left(\frac{1}{\sqrt2}|1,1\rangle|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt2}|1,0\rangle|1,1\rangle\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt2}\sqrt2|1,0\rangle|1,0\rangle + \frac{\sqrt2}{\sqrt2}|1,1\rangle|1,-1\rangle - \frac{\sqrt2}{\sqrt2}|1,-1\rangle|1,1\rangle -$

$- \frac{\sqrt2}{\sqrt2}|1,0\rangle|1,0\rangle$

$|1,1,1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,-1\rangle|1,1\rangle)$

8) $|1,1,1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|1,-1\rangle|1,0\rangle - |1,0\rangle|1,-1\rangle)$

9) $|1,1,0,0\rangle = A|1,1\rangle|1,-1\rangle + B|1,0\rangle|1,0\rangle + C|1,-1\rangle|1,1\rangle$

$$\begin{cases} \langle 1,1,1,0|1,1,0,0\rangle = A - C = 0 \\ \langle 1,1,2,0|1,1,0,0\rangle = A + 2B + C = 0 \end{cases}$$

$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 1$

$A = C = -B = \frac{1}{\sqrt3}$

$|1,1,0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt3}(|1,1\rangle|1,-1\rangle - |1,0\rangle|1,0\rangle + |1,-1\rangle|1,1\rangle)$

Упражнение 5.

$\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$

$\hat{j}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$

Подействуем $\hat{j}^2$ на $|L, s, j, m_j\rangle$:

$$\hat{j}^2|l,s,j,m_j\rangle = \hat{L}^2|l,s,j,m_j\rangle + \hat{S}^2|l,s,j,m_j\rangle + 2(\hat{\vec{L}},\hat{\vec{S}})|l,s,j,m_j\rangle$$

$$j(j+1)|l,s,j,m_j\rangle = l(l+1)|l,s,j,m_j\rangle + s(s+1)|l,s,j,m_j\rangle + 2(\hat{\vec{L}},\hat{\vec{S}})|l,s,j,m_j\rangle$$

Домножим на bra-вектор с учётом нормировки $\langle l,s,j,m_j|$

$$\langle l,s,j,m_j|(\hat{\vec{L}},\hat{\vec{S}})|l,s,j,m_j\rangle = \frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}$$

$$\langle \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}\rangle = \frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}$$

$$\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{j}} - \hat{\vec{L}}, \quad \hat{S}^2 = \hat{j}^2 + \hat{L}^2 - 2(\hat{\vec{j}},\hat{\vec{L}})$$

Аналогично получим

$$\langle(\hat{\vec{j}},\hat{\vec{L}})\rangle = \frac{j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)}{2}$$

$$\langle(\hat{\vec{j}},\hat{\vec{S}})\rangle = \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2}$$

<u>Упражнение 6</u>

$$\psi'(x,y,z) = e^{i\alpha(x,y,z)}\psi(x,y,z)$$

$$D'\psi' = \partial_i\psi'(x,y,z) - ieA'_i(x,y,z)\psi'(x,y,z) = e^{i\alpha(x,y,z)}D\psi \quad (*)$$

$$\partial_i\psi' = \partial_i e^{i\alpha}\psi = (\partial_i e^{i\alpha})\psi + e^{i\alpha}\partial_i\psi$$

Подставим это в $(*)$:

$$(\partial_i e^{i\alpha})\psi - e^{i\alpha}\cancel{(\partial_i\psi)} - iee^{i\alpha}A'_i\psi = e^{i\alpha}\cancel{(\partial_i\psi)} - iee^{i\alpha}A_i\psi$$

$$(\partial_i e^{i\alpha}) - iee^{i\alpha}A'_i = -iee^{i\alpha}A_i \quad \Big|\cdot e^{-i\alpha}$$

$$-ieA'_i = -ieA_i - e^{-i\alpha}\partial_i(e^{i\alpha})$$

$$A'_i = A_i + \frac{i}{e}\partial_i\alpha(x,y,z)$$

При $\psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)$ ур-ие Дирака примет вид $\left(c\gamma_i\left(\hat{p}_i-\frac{e}{c}A_i\right)+\left(\beta mc+\frac{e\Phi}{c}\right)\right)\psi=0$

γ_i - матрицы Дирака $\quad \beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Лагранжиан:

$$L=\psi^*\left(\gamma_i\left(\partial_i+\frac{ei}{\hbar c}A_i\right)+\frac{i\beta m}{\hbar}+\frac{ei\Phi}{c^2\hbar}\right)\psi$$

Д-но, ур-ие:

$$\partial_i\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\psi^*)}-\frac{\partial L}{\partial\psi^*}=0$$

даёт ур-ие Дирака

$L'=L+i(\partial_i\alpha)\psi^*\gamma_i\psi-i(\partial_i\alpha)\psi^*\gamma_i\psi=L$ - инвариантность есть

Задача 6

$E_i^{(0)}=E_i^{(0)}(\lambda)$

$\exists\lambda_0: E_1^{(0)}(\lambda_0)=E_2^{(0)}(\lambda_0)$

$t=0: \psi=\psi_1^{(0)}$

$W(\psi=\psi_2^{(0)})$ - ? в мом. вр. t

Возмущ. $V_{11}=V_{22}=0$, $V_{12}=V_{21}^*\neq0$

В невозмущ. задаче уровни энергии очень близки или совпадают, поэтому применим теор. возмущ. для близк. ур. эн.

$\tilde{\psi}=C_1\psi_1^{(0)}+C_2\psi_2^{(0)}$ (1)

$(\hat{H}^{(0)}+\hat{V})\hat{\psi}=E\hat{\psi}$ (2)

Подставим (1) в (2), затем скалярно умножаем получ. ур-ие на $\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}$. Получаем два ур-ния:

$$\begin{pmatrix} H_{11}-E & H_{12} \\ H_{21} & H_{22}-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

где $$H_{mn} = \langle \psi_m^{(0)} | \hat{H} | \psi_n^{(0)} \rangle = \begin{cases} V_{nn} + E_n^{(0)}, & m=n \\ V_{mn}, & m \neq n \end{cases} \qquad (4)$$

Из усл-ия разреш. сист. (3) ($\det = 0$) находим знач. ур. энергии для $\tilde{\psi}_{1,2}$: $E_{1,2} = \frac{1}{2}\left((H_{11}+H_{22}) \pm \hbar\omega\right)$ (5)

где $\hbar\omega = \sqrt{(H_{11}-H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2}$

Из сист. (3) для E_i находим C_1^i, C_2^i, что выражает $\tilde{\psi}_i$ через $\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}$.

$$\begin{cases} C_1^{1,2} = \left(\beta_{12}(1 \pm \alpha)\right)^{1/2} \\ C_2^{1,2} = \pm\left(\beta_{21}(1 \mp \alpha)\right)^{1/2} \end{cases}, \quad \alpha = \frac{H_{11}+H_{22}}{\hbar\omega}, \quad \beta_{mn} = \frac{H_{mn}}{2|H_{mn}|} \qquad (6)$$

Таким обр. мы выразили $\tilde{\psi}_i$ через $\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}$, найдя тем самым ВФ после налож. возмущ. Для учёта н.у. сделаем обр. операцию: $\psi_i^{(0)}$ через $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_1 = C_1^1 \psi_1^{(0)} + C_2^1 \psi_2^{(0)} \\ \tilde{\psi}_2 = C_1^2 \psi_1^{(0)} + C_2^2 \psi_2^{(0)} \end{cases} (7) \hookrightarrow \quad \psi_{1,2}^{(0)} \overset{C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = -1}{=} \mp\left(C_{2,1}^2 \tilde{\psi}_1 - C_{2,1}^1 \tilde{\psi}_2\right) \quad (8)$$

Ф-ции $\tilde{\psi}_{1,2}$ описыв. сост. с опред. энергией, поэтому восст. зав-сть от t, получим:

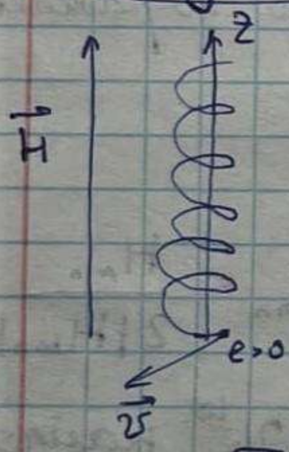
$$\Psi_1^{(0)}(x,t) = C_2^1 \tilde{\psi}_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} - C_2^2 \tilde{\psi}_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \qquad (9)$$

$$\Psi_1^{(0)}(x,0) = \psi_1^{(0)} \hookrightarrow \Psi_1^{(0)}(x,t) = \psi_1^{(0)}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} C_2^1 C_1^2 - C_2^2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} C_1^1\right) + \psi_2^{(0)}\left(C_2^1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} C_2^2 - C_2^2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} C_2^1\right)$$

Вероятн. смысл коэф. перед $\psi_2^{(0)}$:

$$W = \left|C_2^1 C_2^2 \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\right)\right|^2 \overset{(6)}{=} \frac{2|H_{12}|^2}{(\hbar\omega)^2}(1-\cos\omega t) = \frac{4|H_{12}|^2}{(\hbar\omega)^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Задача 10



$$\vec H = H \cdot \vec e_z$$

Т.к. спин 0, то в Ур. Паули выбросим слаг. с магн. моментом

$$\vec H = \mathrm{rot}\,\vec A, \quad \varphi \equiv 0$$

Ур-ие Паули:

$$\left(\hat{\vec p} - e\frac{\vec A}{c}\right)^2 \psi(\vec r) = E\psi(\vec r)$$ - получим стац. ур-ие Шредингера для бесспин. частицы в пост. однор. магн. поле

Нужно найти вектор-потенциал, кот. будет давать нужное магнитн. поле.

$$H \cdot \vec e_z = \mathrm{rot}\,\vec A = [\nabla \times \vec A] = \ldots + \vec e_z(\nabla_x A_y - \nabla_y A_x)$$

Выбрать $\vec A$ можно ∞ числ. способов.

$\vec{A} = (0, Hx, 0)^T$; $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H}, \vec{r}] = (-H\frac{y}{2}, H\frac{x}{2}, 0)^T$

1) Решаем зад. в декарт. коорд.

Возьмём $\vec{A} = (0, Hx, 0)^T$. Тогда ур-ие Шред.

$$\underbrace{\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(\hat{p}_y - eHx\frac{1}{c})^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m}\right)}_{\hat{H}} \psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

Найдём операторы, с кот. коммутирует $\hat{H}$

$[\hat{H}, \hat{p}_x] \neq 0$, т.к. стоит x

$[\hat{H}, \hat{p}_y] = [\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$

Собств. ф-ции операт. импульса - волна де Бройля

$\hookrightarrow \psi(x,y,z) = \varphi(x)\, e^{i\frac{p_y y + p_z z}{\hbar}}$, $p_y = const$, $p_z = const$

Подставляя $\psi(x,y,z)$ в ур-ие, получим одном. ур-ие на $\varphi(x)$:

$$\underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m}}_{\text{опер. кин. эн.}}\varphi(x) + \underbrace{\frac{(p_y - eHx\frac{1}{c})^2}{2m}}_{\text{опер. потенц. эн.}}\varphi(x) = \underbrace{\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right)}_{const}\varphi(x)$$

$\hookrightarrow$ это ур-ие сводится к осциллятору

Преобразуем:

$\frac{(p_y - eH\frac{x}{c})^2}{2m} = \frac{m\omega^2(x-x_0)^2}{2}$ - колебания относительно т. x_0.

$m^2\omega^2(x-x_0)^2 = \left(\frac{eH}{c}\right)^2\left(\frac{cp_y}{eH} - x\right)^2$

Откуда $\omega = \frac{eH}{mc}$ - циклотр. ч-та, $x_0 = \frac{cp_y}{eH}$

$\hookrightarrow$ полная энергия движ. частицы в магн. поле:

(*) $E = \underbrace{\dfrac{p_z^2}{2m}}_{\substack{\text{своб. движ.} \\ \text{вдоль сил. линий}}} + \underbrace{\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{квантованная} \\ \text{эн. поперечн.} \\ \text{движ.}}}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Движение вдоль поля не квантуется, кв. число p_z может принимать зн-я $-\infty < p_z < \infty$. Ур-ни энергии (*) вырождены, т.к. они не зависят от кв. числа p_y, кот. также может изменяться от $-\infty$ до ∞

Если огран. обл. движ. частицы есть ящик в виде куба с ребром L, то p_z и p_y ст-ся дискретн.

$p_i = \dfrac{2\pi\hbar}{L} n_i \quad , n_i = 0, \pm 1, \ldots \qquad$ (из $\psi(x_i + L) = \psi(x_i)$)

На одно кв. сост-ие (в одном. измер.) прих-ся фаз. объем $2\pi\hbar \hookrightarrow \Delta N = \left(\dfrac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 \Delta p_y \Delta p_z$ - число квант. сост.

$0 < x_0 < L \qquad \Delta p_y = \dfrac{eHL}{c} \hookrightarrow \Delta N = \dfrac{eH}{c} \dfrac{V}{(2\pi\hbar)^2} \Delta p_z$

Ответ: $E = \dfrac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, $\Delta N = \dfrac{eH}{c} \dfrac{V}{(2\pi\hbar)^2} \Delta p_z$

2) Решаем зад. в цилиндр. коорд.:

Возьмём $\vec{A} = \dfrac{1}{2}[\vec{H} \times \vec{r}]$

$A_z = 0, \ A_\rho = 0, \ A_\varphi = \dfrac{1}{2} H \rho$

$\hat{H} = \dfrac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = \dfrac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 - \dfrac{e\hbar H \hat{l}_z}{2mc} + \dfrac{e^2 H^2 \rho^2}{8mc^2}$

$\omega = \dfrac{eH}{mc} \qquad \hat{l}_z = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$

$\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + \dfrac{i}{2}\hbar\omega\dfrac{\partial}{\partial\varphi} +$

$+\frac{1}{8}m\omega^2\rho^2$

$[\hat{H},\hat{p}_z]=[\hat{H},\hat{L}_z]=0 \hookrightarrow$ реш. ур. шр. следует искать в виде общей собств. ф. 3х опер.: $\hat{H},\hat{L}_z,\hat{p}_z$,

т.е. $\psi(z,\rho,\varphi)=\psi_z(z)\,\Phi(\varphi)\,R(\rho)$, где

$$\psi_z(z)\equiv\psi_{p_z}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ip_zz}{\hbar}}$$

$$\Phi(\varphi)\equiv\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

$$\hookrightarrow \psi(z,\rho,\varphi)=\frac{e^{im\varphi}\,e^{\frac{i}{\hbar}p_zz}\,R(\rho)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dR}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R\right)-\frac{1}{2}\hbar\omega mR+$$

$$+\frac{1}{8}m\omega^2\rho^2R=E_HR$$

$$E=E_z+E_H$$

Замена $\varepsilon=\frac{E_H}{\hbar\omega}$ $\quad \xi=\frac{\sqrt{2}\,\rho}{\rho_H}=\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\rho$

$\rho_H=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ - осцилл. ед. длины

$$R''+\frac{1}{\xi}R'+\left(\varepsilon-\frac{m^2}{\xi^2}+\frac{m}{2}-\frac{\xi^2}{16}\right)R=0$$

2.1) $\xi\to 0$

$R_0''+\frac{1}{\xi}R_0'-\frac{m^2}{\xi^2}R_0=0$ - ур-ие Эйлера

Ищем решение в виде $R_0\sim\xi^s$

$s(s-1)+s-m^2=0 \quad \hookrightarrow \quad s=\pm m$

$\hookrightarrow R\big|_{\xi\to 0} \sim \xi^{|m|}$

2.2) $\xi \to \infty$

$$R''_\infty - \frac{1}{16}\xi^2 R_\infty = 0$$

Ищем решение в виде: $R_\infty \sim e^{-\alpha\xi^2}$

$\alpha = \frac{1}{8} \hookrightarrow R\big|_{\xi\to\infty} \sim e^{-\frac{\xi^2}{8}}$

Таким образом:

$$R(\xi) = e^{-\xi^2/8}\,\xi^{|m|}\,W(\xi)$$

$$z\frac{d^2W}{dz^2} + (|m|+1-z)\frac{dW}{dz} + \left(\varepsilon - \frac{|m|-m+1}{2}\right)W = 0$$

где $z^2 \equiv \xi^2/4$

$W(z)$ ищем в виде $W(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k\left((k+1)(k+1+|m|)a_{k+1} + \left(\varepsilon - k - \frac{|m|-m+1}{2}\right)a_k\right) = 0$$

$$\hookrightarrow a_{k+1} = a_k\frac{2k+|m|-m+1-2\varepsilon}{2(k+1)(k+1+|m|)}$$

Если ряд не прерывается, то $a_k \sim \frac{a_0}{k!}$

$\hookrightarrow$ ряд растёт как $e^z = e^{\xi^2/4}$ - слишком быстро

Нужно оборвать ряд при некотором $k = n_\xi$

$$2n_\xi + (|m|-m+1) = 2\varepsilon$$

$$\varepsilon = n_\xi + \frac{|m|-m+1}{2}$$

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2M}, \quad n = n_\xi + \frac{|m|-m}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Рез-т совпадает с п. 1).

Уровни энергии вырожд. по знач. проекций мом. на направл. МП: каждому фиксир. знач. числа n отвечают сост-я с $m = -n, -n+1, \ldots$
$\ldots 0, 1, \ldots, \infty$.