① Упражнения

а) • Вычислим обратный оператор по отнош. к $\hat{I}$:

по опред.: $\hat{I}\hat{I}^{-1}=\hat{1}$ $\hookrightarrow$ $\underbrace{\hat{I}\hat{I}}_{\hat{1}}\hat{I}^{-1}=\hat{I}\hat{1} \longrightarrow \hat{I}^{-1}=\hat{I}$

То есть $\hat{I}^{-1}=\hat{I}$

• Найдём эрмитово сопряжённый к $\hat{I}$:

по опред.: $\langle\varphi|\hat{I}\psi\rangle=\langle\hat{I}^{+}\varphi|\psi\rangle$

$$\langle\varphi|\hat{I}\psi\rangle=\int\varphi^*(\vec{r})\underbrace{\hat{I}\psi(\vec{r})}_{\psi(-\vec{r})}dV \overset{\vec{r}'=-\vec{r}}{=\!=} \int\varphi^*(-\vec{r}')\psi(\vec{r}')dV=$$

$$=\int\left(\hat{I}\varphi(\vec{r}')\right)^*\psi(\vec{r}')dV=\langle\hat{I}\varphi|\psi\rangle \hookrightarrow \hat{I}^{+}=\hat{I}$$

То есть $\hat{I}^{+}=\hat{I}$

б) • Найдём обратной оператор по отнош. к $\hat{T}_{\vec{a}}$

по опр.: $\hat{T}_{-a}\hat{T}_{a}f(\vec{r})=f(\vec{r})$ (т.к. $\hat{T}_{\vec{a}}f(\vec{r})=f(\vec{r}-\vec{a})$)

То есть $\hat{T}_a^{-1}=\hat{T}_{-a}$

• Найдём $\hat{T}_a^{+}$: $\underset{\langle\hat{T}_a^{+}\varphi|\psi\rangle}{\langle\varphi|\hat{T}_a\psi\rangle}=\int\varphi^*(\vec{r})\hat{T}_a\psi(\vec{r})dV=\int\varphi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}-\vec{a})dV=$

$$=[\vec{r}'=\vec{r}-\vec{a}]=\int\varphi^*(\vec{r}'+\vec{a})\psi(\vec{r}')dV=\langle\hat{T}_{-a}\varphi|\psi\rangle$$

То есть $\hat{T}^{+}=\hat{T}_{-a}$

И, смотря предыдущий пункт: $\hat{T}_a^{-1}=\hat{T}^{+}$

(2) Оператор инверсии: $\hat{\mathbb{I}} f(\vec{r}) = f(-\vec{r})$

Чтобы найти собств. значения и собств. состояния, решим ур-ие $\hat{\mathbb{I}} f = \lambda f$

$$\hat{\mathbb{I}}^2 f = \hat{\mathbb{I}}(\lambda f) = \lambda^2 f = f \hookrightarrow \lambda^2 = 1 \hookrightarrow \lambda_\pm = \pm 1$$

Для $\lambda_+ = 1$:

$$\hat{\mathbb{I}}\, f_+(\vec{r}) = \underbrace{f_+(-\vec{r})}_{\text{по опред. операт. инверс.}} = \underbrace{f_+(\vec{r})}_{\text{т.к. } \lambda = 1} \hookrightarrow f_+ \text{ - чётная функц.}$$

Для $\lambda_- = -1$:

$$\hat{\mathbb{I}}\, f_-(\vec{r}) = f_-(-\vec{r}) = -f_-(\vec{r}) \hookrightarrow f_- \text{ - нечётная ф-ция}$$

(3) $$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x-a) = \psi(x) - \psi'(x)\cdot a + \frac{1}{2}\psi''(x)a^2 + \ldots =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-a\frac{d}{dx}\right)^n\right]\psi(x) = e^{-a\frac{d}{dx}}\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}a\cdot\hat{p}}\psi(x)$$

Т. е. формально $\hat{T}_a = e^{-\frac{i}{\hbar}a\cdot\hat{p}}$, где $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ - операт. имп.

Собственные ф-ции и собств. значения $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ суть $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ и $p = \hbar k$, где $k \in \mathbb{R}$ - волновое число

Значит оператор $\hat{T}_a$ имеет те же собств. ф-ции, что и $\hat{p}$, т. к. по опред. ф-ции от оператора $\hat{A}\psi_a(x) = a\,\psi_a(x) \xleftrightarrow{def}$

$\xleftrightarrow{def} f(\hat{A})\psi_a(x) = f(a)\psi_a(x)$

Откуда собств. значения $\hat{T}_a$ суть $\lambda = e^{-ika}$, $k \in \mathbb{R}$

④

Используя упр. 3 и учитывая, что в общем случае не x, а $\vec{r}$ и $\frac{d}{dx} \to \nabla$.

Тогда $\hat{T}_a = e^{-a\nabla} = e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}$, где $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

⑤ Явный вид оператора $e^{i\varphi\hat{I}}$

Вспоминая, что $e^{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, а $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^k}{k!}$, получим:

$$e^{i\varphi\hat{I}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varphi\hat{I})^k}{k!} = \sum_{\substack{S=0\\k=2S}}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2S}}{(2S)!}\hat{1} + \sum_{\substack{S=0\\k=2S+1}}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2S+1}}{(2S+1)!}\hat{I} =$$

$$= \sum_{S=0}^{\infty}\frac{(-1)^S\varphi^{2S}}{(2S)!}\hat{1} + \sum_{S=0}^{\infty}\frac{(-1)^S\varphi^{2S+1}}{(2S+1)!}i\hat{I} = \hat{1}\cos\varphi + i\hat{I}\sin\varphi$$

⑥

$$[H, I] \stackrel{def}{=} HI - IH$$

• Рассмотрим $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} =$$

$$= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

• Рассмотрим $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} =$$

$$= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$