1

a) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

b) $A \cdot B \cdot \overline{C}$

c) $A \cdot B \cdot C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

② а)

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0

верно.

б)

A	B	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

верно

c)

A	B	C	$(A \cup B) C$	$AC \cup BC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

верно

d)

A	B	$(A \cup B)\,\overline{AB}$	$A\bar{B} \cup \bar{A}B$
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	0	0
1	1	0	0

верно

3

$$C = A_5 \cup (A_3 \cdot (A_1 A_4 \cup A_2 A_4 \cup A_1 A_2 \cup$$
$$\cup A_4 \cup A_1 A_2 A_4))$$

④ a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap A \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap A \cup$

$\cup B \cap \overline{B} = A \cup A \cap \overline{B} \cup BA = A \cup A = A.$

b) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = AB \cup AC \cup BB \cup BC =$

$= AB \cup AC \cup \underbrace{B \cup BC}_{= B} = \underbrace{B \cup AB}_{= B} \cup AC = B \cup AC$

c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}) = (\cancel{A\overline{A}} \cup A\overline{B} \cup$

$\cup B\overline{A} \cup \cancel{B\overline{B}}) \cap (A \cup \overline{B}) = (A\overline{B} \cup B\overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) =$

$= A\overline{B}A \cup A\overline{B}\,\overline{B} \cup \cancel{B\overline{A}A} \cup \cancel{B\overline{A}\,\overline{B}} = A\overline{B} \cup A\overline{B} =$

$= A\overline{B}$

5

а) $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$

$\omega \in \overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \nexists\, \lambda\in\Lambda : \omega\in A_\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda \hookrightarrow \omega\notin A_\lambda \Leftrightarrow \forall \lambda\in\Lambda \hookrightarrow \omega\in\overline{A_\lambda} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$

в) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} = \overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$

$\omega\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda} \Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\Lambda: \omega\in\overline{A_\lambda}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\Lambda:\omega\notin A_\lambda \Leftrightarrow \omega\notin\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \omega\in\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$

II 7)

а) 3 партии из 4х : $\frac{C_4^3}{2^4} = \frac{1}{4}$

5 партий из 8 : $\frac{C_8^5}{2^8} = \frac{7}{32}$

$\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$

б) не менее 3х :

$$\frac{C_4^3}{2^4} + \frac{C_4^4}{2^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

не менее 5ти :

$$\frac{C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8}{2^8} = \frac{1}{2^8}\left(\frac{8!}{5!\,3!} + \frac{8!}{6!\,2!} + \frac{8!}{7!} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2^8}(56 + 28 + 9) = \frac{93}{256}$$

Ответ: а) 3 из 4   б) не менее 5 из 8.

8) Случайным явл-ся порядок книг на полке. Всего вар расст. книг 40!. Выбрать 3 позиц. для томов C_{40}^{3}.

$$P(A) = \frac{C_{40}^{3}\, 37!}{40!} = \frac{40!\cdot 37!}{3!\,37!\,40!} = \frac{1}{6}$$

9) $$\frac{12!\cdot 124\cdot(28\cdot3+29)\cdot124\cdot120\cdot124\cdot120\cdot124\cdot124\cdot120\cdot124\cdot120\cdot124}{(365\cdot3+366)^{12}}=$$

$$=\frac{124^{7}\cdot120^{4}\cdot(28\cdot3+29)\cdot12!}{(365\cdot3+366)^{12}}\approx 2{,}7\cdot10^{-5}$$

10) $\dfrac{2!\cdot 3!\cdot 2!}{10!} =$ M - 2x, A - 3x, T - 2x

$$= \frac{\cancel{6}\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{6\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$$

$$\approx 6{,}6\cdot 10^{-6}$$

11) Варианты, кот. подходят:

$\{3, 1, 1, 1\}$

$\{2, 2, 1, 1\}$

$$\longrightarrow \frac{4\cdot C_{13}^{3}\cdot 13^{3} + C_{4}^{2}\cdot\left(C_{13}^{2}\right)^{2}\cdot 13^{2}}{C_{52}^{6}} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{13!}{10!\cdot 3!}\cdot 13^{3} + \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\left(\frac{13!}{11!\,2!}\right)^{2}\cdot 13^{2}}{C_{52}^{6}} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 13}{6}\cdot 13^{3} + 6\cdot(6\cdot 13)^{2}\cdot 13^{2}}{C_{52}^{6}} = \frac{4\cdot 22\cdot 13^{4} + 36\cdot 13^{4}\cdot 6}{\frac{52!}{46!\cdot 6!}} =$$

$$= 13^{3}\,\frac{4\cdot 22\cdot 13 + 36\cdot 13\cdot 6}{\frac{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}} \approx 0{,}43$$

12) $$\frac{12!}{(2!)^6\,6!} = 10395$$

13) $C = A_5 \cup A_3 A_1 A_2 \cup A_3 A_4$

$P(C) = P(A_5 \cup A_3(A_4 \cup A_1 A_2)) = P(A_5) +$
$+ P(A_3(A_4 \cup A_1 A_2)) - P(A_5) \cdot P(A_3(A_4 \cup A_1 A_2)) =$
$= P(A_5) + P(A_3) P(A_4 \cup A_1 A_2) - P(A_5) P(A_3) \cdot$
$\cdot P(A_4 \cup A_1 A_2) = P(A_5) + P(A_3) \cdot (P(A_4) + P(A_1) P(A_2)$
$- P(A_4) P(A_1) P(A_2)) \cdot (1 - P(A_5)) =$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) =$
$\approx 0{,}236.$

(14) Пусть $A_i = \{i\text{-е письмо дошло до адр}\}$

Искомое $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{k!} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ //

При $n \to \infty$ $P(A) \to 1 - \frac{1}{e}$ //

15

Способов набрать 1 группу: C_{4n}^{2n}

Набрать n юношей и n девушек: $C_{2n}^{n} \cdot C_{2n}^{n}$

$$P(A) = \frac{C_{2n}^{n} \cdot C_{2n}^{n}}{C_{4n}^{2n}} = \frac{2n! \quad 2n! \quad 2n! \, 2n!}{n! \, n! \quad n! \, n! \quad 4n!}$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{C_{2n}^{n} \cdot C_{2n}^{n}}{C_{4n}^{2n}}$

III 17

Пусть $A = \{$вытащим белый шар из 2-го ящ$\}$

$P(A) - ?$

$B_1 = \{$переложим 2 белых$\}$

$B_2 = \{$перел. 1 белый, 1 чёрн$\}$

$B_3 = \{$перел. 2 чёрных$\}$

$$P(B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(B_2) = \underbrace{\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}}_{\text{сначала бел.}} + \underbrace{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{снач. чёрн}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(B_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

и по ф-ле полной вер-сти:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{15} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{5 + 32 + 18}{90} = \frac{11}{18}$$

(18) $A = \{$на 1 вост. единица$\}$ $B - \{$на всех разные$\}$

$$P(A \cdot B) = C_3^1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{2 \cdot 36} = \frac{5}{18}$$

$$P(B) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5 \cdot 9}{18 \cdot 5} = \frac{1}{2} //$$

(19) $A = \{$стрелок A попал$\}$ $P(A) = 0{,}6$

$B = \{$стрелок B попал$\}$ $P(B) = 0{,}5$

$C = \{$стрелок C попал$\}$ $P(C) = 0{,}7$

$D = \{$две пули попали$\}$ $P(C|D) - ?$

По ф-ле Байеса:

$$P(C|D) = \frac{P(C)\,P(D|C)}{P(C)P(D|C) + P(\bar{C})P(D|\bar{C})} =$$

$$= \frac{0{,}7\cdot(\overset{P(A)}{0{,}6}\cdot 0{,}5^{P(\bar{B})} + \overset{P(B)}{0{,}5}\cdot 0{,}4^{P(\bar{A})})}{0{,}7(0{,}6\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}4) + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5} = \frac{35}{44}$$

(20) $P(AAAA \mid ABCA \text{ получ})$

по ф-ле Байеса:

$$= \frac{0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6}{\underbrace{0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6}_{AAAA} + \underbrace{0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2}_{CCCC} + \underbrace{0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2^2}_{BBBB}}$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,6^2 \cdot 0,2^2}{0,6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,2^3 \cdot 0,6} = \frac{9}{16}$$

(21) N белых, M черн, k - потеряли

Достать белый шар $P(A_k)$ - ?

Пусть $B_k^б$ - {потерять белый шар на k-том шаге}

$B_k^ч$ - {потерять черный шар на k-том}

A_k - {вытащить белый шар ~~на k-том шаге~~ после потери k шаг.}

Покажем, что $P(A_k) = \frac{N}{N+M}$ по индукции.

База:

$$P(A_1) = P(B_1^б)\,P(A_1|B_1^б) + P(B_1^ч)\,P(A_1|B_1^ч) =$$

$$= \frac{N}{N+M}\cdot\frac{N-1}{N+M-1} + \frac{M}{N+M}\cdot\frac{N}{N+M-1} = \frac{N}{N+M}$$

Переход:

Предположим, что ~~для~~ после потери k-го шага верно $P(A_k) = \frac{N}{N+M}$. Далее учтём, что вер-сть потерять ~~на~~ $k+1$ шар равна вер-сти вытащить соотв. шар после потери k шар, тоесть $\frac{N}{N+M}$ - для б. и $\frac{M}{N+M}$ - для ч.

Шаг индукции:

$$P(A_{k+1}) = P(B_{k+1}^б)\,P(A_{k+1}|B_{k+1}^б) + P(B_{k+1}^ч)\,P(A_{k+1}|B_{k+1}^ч) =$$

$$= \frac{N}{N+M}\cdot\frac{N-1}{N+M-1} + \frac{M}{N+M}\cdot\frac{N}{N+M-1} = \frac{N}{N+M}$$

(22) n ключей с откладыванием.

B_k = { откроем с k-той попытки }

A_i = { i-той подошёл }

$P(B_k)$ - ?

$P(B_1) = \frac{1}{n}$ на 1 не подош.

$P(B_2) = P(\overline{A}_1) P(A_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

на 2 под.

$P(B_3) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2 | \overline{A}_1) \cdot P(A_3 | \overline{A}_2 \overline{A}_1) =$

теор-ма умнож.

$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$

И так далее (по индукции понятно), то будет $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$

Получим $P(B_k) = \frac{1}{n}$

(23) Пусть α и β знач. на 2х костях

$$P(\alpha=3 \mid \alpha<\beta) = \frac{P(\alpha<\beta \mid \alpha=3)\cdot P(\alpha=3)}{\sum_i P(\alpha=i)\cdot P(\alpha<\beta \mid \alpha=i)} =$$

$$= \frac{3/6 \cdot 1/6}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{0}{6}} = \frac{3}{15} = \underline{\underline{1/5}}$$

(24) A, B и A, C - пары незав. событ.

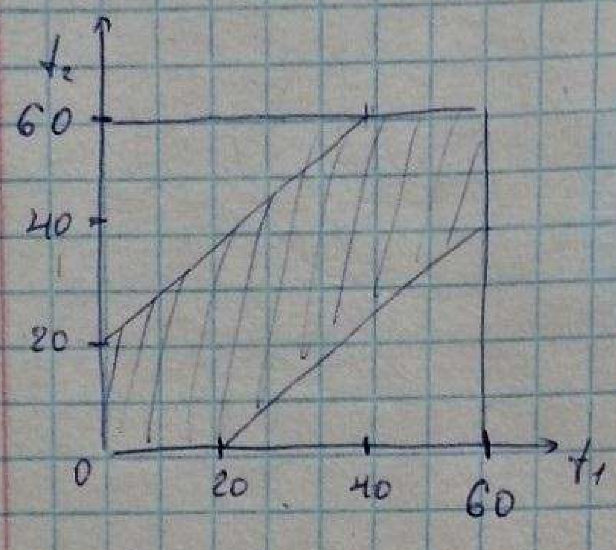
$C \subset B$. Док-ть A и $B \setminus C$ независ.

т. к. $C \subset B$, то $P(B \setminus C) = P(B) - P(C)$

$$P(A \cdot (B \setminus C)) = P(AB) - P(AC) = P(A)P(B) - P(A)P(C) =$$
$$= P(A)(P(B) - P(C)) = P(A) \cdot P(B \setminus C)$$

ч.т.д.

(IV) (27) Рассмотрим геометрич. интерпр.:



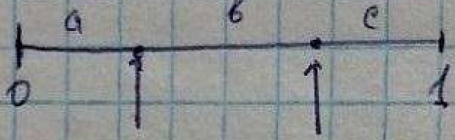
Нас устраивает

$\forall$ точка из закр. точки,

т.е. $|t_1 - t_2| < 20$.

$$P(A) = \frac{60\cdot 60 - 40\cdot 40}{60\cdot 60} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

(28)



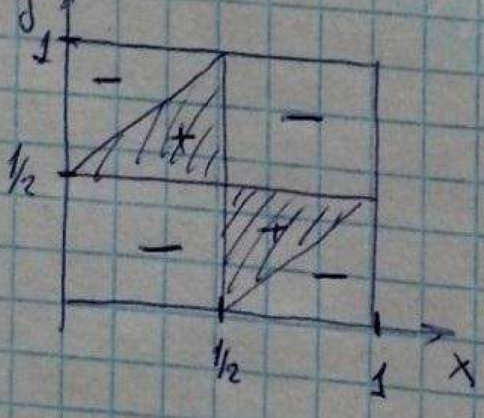
разлом в 2х точках.

Условие, что можно сложить Δ, это

$a + в \geq c$.

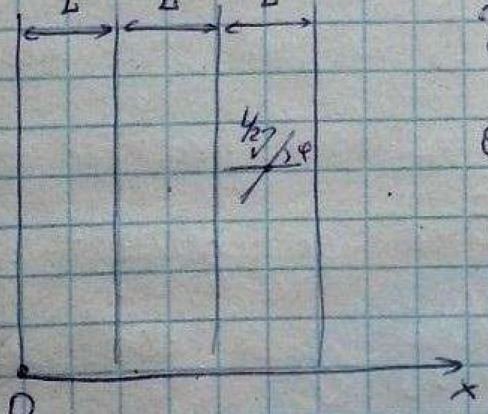
Обозначим x - коорд. 1 т. разлома, y - 2 т. разл.

$$\begin{cases} \min(x, y) < \frac{1}{2} \\ \max(x, y) > \frac{1}{2} \\ |x - y| < \frac{1}{2} \end{cases}$$ → условия, при кот. сложим Δ.



$P(A) = \frac{1}{4}$.

29



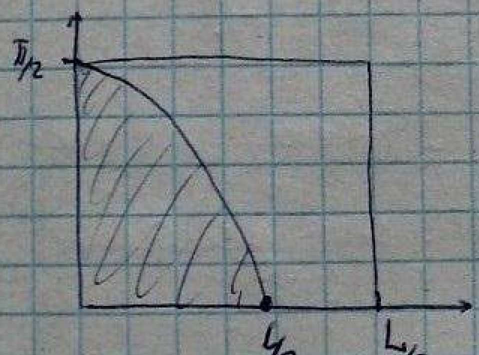
Исход опыта будем описывать X - центр иглы (абсцисса)

φ - угол наклона центра иглы

Ясно, что $0 \le X \le \frac{L}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Чтобы пересеклась линия, надо, чтобы

$X < \frac{L}{2}\cos\varphi$



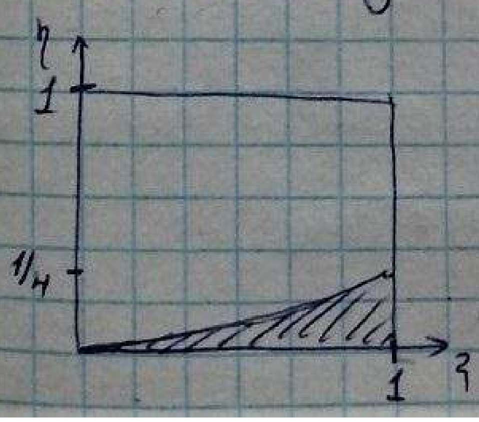
$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{L}{2}\cos\varphi \, d\varphi}{\pi L/4} = \frac{4L}{2\pi L} = \frac{2L}{\pi L}$$

(30)

Чтобы были действ. корни, надо, чтобы

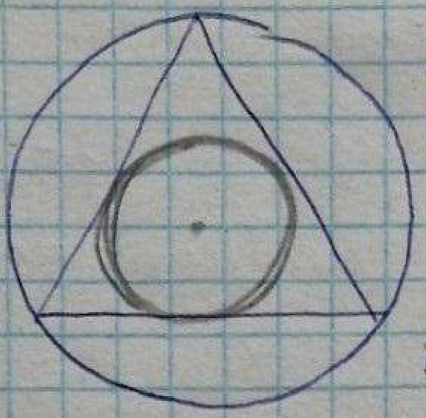
$D = \xi^2 - 4\eta \geq 0. \hookrightarrow \eta \leq \frac{\xi^2}{4}$

Чтобы 1 знака, то $\eta \geq 0$. (это вып-но).



$$P(A) = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{4}}{1} = \frac{x^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

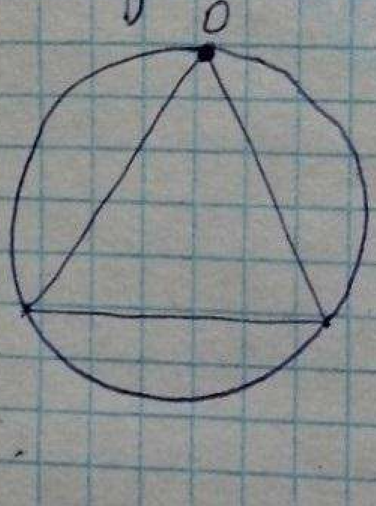
(31)



(I) Пусть у нас случайно выбирается точка в круге. Она определяет единственную хорду, для кот. яви-ся серединой (кроме центра круга).

Эта ~~хорда~~ хорда будет длиннее стороны Δ, если её середина будет внутри круга, кот. вписан в Δ. Его $r = \frac{R}{2}$ ↪ $P(A) = \frac{S_r}{S_R} = \frac{1}{4}$.

(II) Теперь зафиксируем 1 точку на окружности, и случайно определяем 2 точку на окр-сти.



Хорда будет длиннее стороны Δ, если она будет пересекать Δ.

1 дуга подх.

$P(A) = \frac{1}{3}$

3 равн. дуги всего

Получаем зав-сть вероятности 1 события от того, что считать случайным

(V)

(32) m белых, n черных

$p = \frac{m}{n+m}$ - вер-сть вынуть белый

$q = 1-p$ - черной

ξ - число вынутых шаров до появл. белого

$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \ m \geq 1.$

$$E(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} m p q^{\overline{m-1}} = p \sum_{m=1}^{\infty} (q^m)'_q = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{1}{p} = \frac{n+m}{m}$$

$$E(\xi(\xi-1)) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) p q^{m-1} = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' = \frac{2pq}{(1-q)^3}$$

$$D(\xi) = E\xi^2 - E^2(\xi) = E(\xi(\xi-1)) + E(\xi) - E^2(\xi) =$$

$$= \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{n(n+m)^2}{(n+m)m^2} = \frac{n(n+m)}{m^2}$$

(33)

ξ	-1	0	1
P	$1/3$	$1/6$	$1/2$

η	0	1
P	$1/6$	$5/6$

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	0	$1/3$
0	$1/6$	0
1	0	$1/2$

$$E(\eta) = \frac{5}{6}$$

$$E(\eta^2) = 5/6$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{5}{36}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{6}$$

$$E(\xi\eta) = -\frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36}$$

Ответ: $E(\eta) = \frac{5}{6}$ $D(\eta) = \frac{5}{36}$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{36}$

(34) Пусть ξ - выигрыш.

а)

ξ	2	4	...	2^n	...
p	$1/2$	$1/4$		$1/2^n$	

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \to \infty$$ ряд расходится.

Ни для какого n не выгодно.

в)

ξ	2	4 ...	2^{19}	10^6	10^6	...
P	$1/2$	$1/4$ ...	$1/2^{19}$	$1/2^{20}$	$1/2^{21}$	...

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{19} 1 + \sum_{n=20}^{\infty} 10^6 \cdot \frac{1}{2^n} = 19 + 10^6 \cdot \frac{1}{2^{20}} \cdot \frac{1}{1-1/2} =$$

$$= 19 + \frac{10^6}{2^{19}} = 20{,}91$$

При $N \geq 21$ казино будет выгодна эта игра

(35) X_i - число очков на i-той кости, $i=1,2$

Совместное распр. $Y = \min(X_1, X_2)$ и $Z = X_2$, их E, D и cov. $Y_{отн}$ -?

$X_1 \sim$

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$X_2 \sim$

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$Y \sim$

1	2	3	4	5	6
11/36	1/4	7/36	5/36	1/12	1/36

$Z = X_2$

$$Y, Z \sim \begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cccccc} \frac{6}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & \frac{5}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \; Y \\ \hline \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ Z & \end{array}$$

(из форм. полн. вер.)

$$E(Y) = \frac{11}{36} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{9} + \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{91}{36} \approx 2,53$$

$$E(Z) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$E(Y^2) = \frac{11}{36} + \frac{4}{4} + \frac{9 \cdot 7}{36} + \frac{16 \cdot 5}{36} + \frac{25}{12} + \frac{36}{36} = \frac{301}{36} = 8,36$$

$$E(Z^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} = 15,16$$

$$D(Z) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = 2,92$$

$$D(Y) = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = 1,97$$

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y) \cdot E(Z)$$

$$E(YZ) = 1 \cdot \frac{6}{36} + \frac{1}{36}(2+3+4+5+6) + 4\,\frac{5}{36} + \frac{1}{36}(6+8+10+12) +$$

$$+9\cdot\frac{4}{36}+\frac{1}{36}(12+15+18)+16\cdot\frac{3}{36}+4\cdot\frac{1}{36}(5+6)+25\frac{2}{36}+\frac{5}{36}\cdot 6+1=$$

$$=\frac{371}{36}\approx 10,3$$

$$\mathrm{cov}(Y,Z)=\frac{371}{36}-\frac{91}{36}\cdot\frac{21}{6}=\frac{315}{216}\approx 1,46$$

Z - видим, Y - предск.

$$\hat{Y}=E(Y)+\sqrt{D(Y)}\cdot\rho(Y,Z)\left[\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{D(Z)}}\right]$$

$$\rho(Y,Z)=\frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{9}{\sqrt{219}}$$

$$\hat{Y}=\frac{91}{36}+\frac{\sqrt{2555}}{36}\cdot\frac{9}{\sqrt{219}}\left(\frac{Z-\frac{21}{6}}{\sqrt{105/6}}\right)=\frac{91}{36}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2553}{22995}}\cdot$$

$$\cdot\left(Z-\frac{21}{6}\right)=\frac{91}{36}+\frac{1}{2}\left(Z-\frac{21}{6}\right)$$

36

$P(\xi=-1)=P(\xi=1)=a \qquad P(\xi=0)=1-2a$

$E(|\xi|)=1\cdot 2a+0\cdot(1-2a)=2a$

Нер-во Чебышева:

$$P(|\xi|\geq 1)\leq E(|\xi|)=2a$$

При этом точное значение

$$P(|\xi|\geq 1)=2a=E(|\xi|).$$

(37) а) $P(\xi=\eta)$ б) $P(\xi>\eta)$ в) $P(\xi+\eta=k)$

г) $P(\xi=l \mid \xi+\eta=k)$ д) $P(\xi=k \mid \xi=\eta)$

ξ и η независимые и имеют геометр. распр. с параметром p.

а) $P(\xi=\eta)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(pq^{m-1})^2=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}$ //

б) $P(\xi>\eta)=P(\eta>\xi)$ - т.к. они независимы и имеют одинаковое распр.

$P(\xi>\eta)+P(\xi=\eta)+P(\xi<\eta)=1$

$P(\xi>\eta)=\frac{1-P(\xi=\eta)}{2}=\frac{1+q-p}{2(1+q)}=\frac{q}{1+q}$ //

в) $P(\xi+\eta=k)=\sum\limits_{i}P(\xi=i)\cdot P(\eta=k-i)=$

$=\sum\limits_{i=1}^{k-1}pq^{i-1}\cdot pq^{k-i-1}=p^2\sum\limits_{i=1}^{k-1}q^{k-2}=p^2q^{k-2}(k-1)$ //

г) при $l > k$: $P(\xi = l \mid \xi + \eta = k) = 0$

если $l \le k$: $P(\xi = l \mid \xi + \eta = k) = \dfrac{P(\xi = l, \xi + \eta = k)}{P(\xi + \eta = k)} =$

$$= \frac{P(\xi = l)\ P(\eta = k - l)}{P(\xi + \eta = k} = \frac{p q^{l-1} \cdot p \cdot q^{k-l-1}}{p^2 q^{k-2} (k-1)} = \frac{1}{k-1}$$

Здесь $k \geq 2$, $1 \le l \le k - 1$.

д) $P(\xi = k \mid \xi = \eta) = P(\eta = k) = p q^{k-1}$

(38) $\xi \geq 0$, $\xi \in \mathbb{Z}$ Док-ть $\underset{E(\xi)}{\overset{\parallel}{M\xi}} = \sum_{k \geq 1}^{\infty} P(\xi \geq k)$

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(\xi = k) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} P(\xi = k) + \sum_{k \geq 2}^{\infty} P(\xi = k) + \ldots = P(\xi \geq 1) + P(\xi \geq 2) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)$$

(39) В N ячеек случайно размещ. n неразл. шаров. ξ - число пустых ячеек.

Мы можем разложить $C^n_{N+n-1} = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!\,n!}$

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-тый пуст} \\ 0, & \text{если } k\text{-тый не пуст} \end{cases}$$

$$\xi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$$

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{N} E(\alpha_k) = NE(\alpha_1)$$

$$E(\alpha_1) = P(\{1\text{-я ячейка пуста}\})$$

$$P(\{1\text{-я пуста}\}) = \frac{C^n_{(N-1)+n-1}}{C^n_{N+n-1}} = \frac{N-1}{N+n-1}$$

$$E(\xi) = \frac{N(N-1)}{N+n-1} . \qquad \xi^2 = \sum_{k,j=1}^{N} \alpha_k \alpha_j$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k,j=1}^{N} E(\alpha_k, \alpha_j) = N E(\alpha_1^2) + (N^2-N) E(\alpha_1 \alpha_2)$$

$$E(\alpha_1^2) = E(\alpha_1)$$

$$E(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = P(\{\text{первые две пусты}\})$$

$$P(\{\text{первые две пусты}\}) = \frac{C^n_{(N-2)+n-1}}{C^n_{N+n-1}} = \frac{(N-2)(N-1)}{(N+n-2)(N+n-1)}$$

$$E(\xi^2) = \frac{N(N-1)}{N+n-1} + \frac{N(N-1)(N-2)(N-1)}{(N+n-2)(N+n-1)}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{N(N-1)}{N+n-1} + \frac{N(N-1)^2(N-2)}{(N+n-2)(N+n-1)} - \frac{N^2(N-1)^2}{(N+n-1)^2}$$

(40) ξ и η – числа появлений единицы и шестёрки при n брос. игральной кости

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{на } k\text{-том выпала „1"} \\ 0, & \text{на } k\text{-том не выпала „1"} \end{cases}$$

Аналогично β_k для „6"

$\xi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, $\eta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{n} E(\alpha_k) = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6} = E(\eta)$$

$$E(\xi^2) = E\left(\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \cdot \alpha_j\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) + E\left(\sum_{k,j:\ k\neq j}^{n} \alpha_k \alpha_j\right) =$$

$$= \frac{n}{6} + (n^2-n)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{n^2}{36} + \frac{5n}{36}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{n^2}{36} + \frac{5n}{36} - \frac{n^2}{36} = \frac{5n}{36} = D(\eta)$$

$$E(\xi\eta) = E\left(\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \beta_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(\alpha_k \beta_k)}_{0} + \sum_{k\neq j} E(\alpha_k \beta_j) =$$

$$= (n^2-n)\cdot\frac{1}{36}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)\cdot E(\eta) = \frac{n^2-n}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}} = -\frac{n\,36}{36\cdot 5n} = -\frac{1}{5}$$

(Н1) Несимметр. монета

мат.ожидание кол-ва бросаний до выпадения первого герба

p - вер-сть выпад. герба

ξ - кол-во бросаний до выпад $1^{го}$ герба.

Аналог. 32, так как это геометр. распр. с параметром p.

$E(\xi) = \frac{1}{p}$

(1)

$$\rho_L(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$L = 2\pi r$, $r = \frac{L}{2\pi}$, $S = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$

$$E(S) = \int_0^1 \rho_L(x) \cdot \frac{x^2}{4\pi}\, dx = \frac{x^3}{12\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{12\pi}$$

$$E(S^2) = \int_0^1 \rho_L(x) \cdot \frac{x^4}{16\pi^2}\, dx = \frac{x^5}{5 \cdot 16\pi^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{80\pi^2}$$

$$D(S) = E(S^2) - E^2(S) = \frac{1}{80\pi^2} - \frac{1}{144\pi^2} = \frac{1}{\pi^2 \cdot 180}$$

Ответ: $E(S) = \frac{1}{12\pi}$, $D(S) = \frac{1}{180\pi^2}$

(2)
$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \rho_\eta(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \in [0,1] \end{cases}$$

$l = |\xi - \eta|$ - расст. между точками

$$E(l) = \iint \rho_\eta(y) \cdot \rho_\xi(x) \cdot |x-y|\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \rho_\eta(y)\, dy \int_0^1 \rho_\xi(x)\, |x-y|\, dx = \int_0^1 dy \left(\int_0^y (y-x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_y^1 (x-y)\, dx \right) = \int_0^1 dy \left(\left(yx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y + \left(\frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_y^1 \right) =$$

$$= \int_0^1 dy \left(y^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} - y - \frac{y^2}{2} + y^2 \right) = \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(l^2) = \int_0^1 \rho_2(y)\, dy \int_0^1 \rho_1(x)\, (y-x)^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 (y^2 - 2xy + x^2)\, dx = \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$D(l) = E(l^2) - E^2(l) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Ответ: $E(l) = \frac{1}{3}$, $D(l) = \frac{1}{18}$

③

монотонна

a) $\rho_1(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \qquad g(x) = -\ln(1-x)$

$$\rho_2(y) = \rho_1(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|$$

$y = -\ln(1-x)$

$e^{-y} = 1 - x \longrightarrow x = 1 - e^{-y}$

$g^{-1}(y) = h(y) = 1 - e^{-y}$

$h'(y) = e^{-y}$

$\rho_2(y) = 1 \cdot e^{-y} \qquad 0 \le y < +\infty$

монотонна

б) $\rho_1(x) = e^{-x} \qquad x \ge 0 \qquad g(x) = \ln(x)$

$$\rho_2(y) = \rho_1(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|$$

$y = \ln x \qquad x = e^{y} \longrightarrow g^{-1}(y) = e^{y}$

$$\rho_2(y) = e^{-e^y} \cdot e^{y} = e^{y-e^y} \qquad y \in (-\infty, +\infty)$$

c) $\rho(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0 \qquad g(x) = \{x\}$

$$F_2(y) = P(g(\xi) \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & y \geq 1 \\ ? & y \in [0, 1) \end{cases}$$

Когда $y \in [0, 1)$:

$$F_2(y) = P\Big(\xi \in \bigcup_{k \geq 0}^{\infty} [\underset{\uparrow}{k}, k+y]\Big) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} P(\xi \in [k, k+y]) =$$

дробн часть $\leq y$ на этом [ ]

$$= \sum_{k \geq 0}^{\infty} \int_{k}^{k+y} e^{-x} dx = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \left(e^{-k} - e^{-(k+y)}\right) = (1 - e^{-y}) \sum_{k \geq 0}^{\infty} e^{-k} =$$

$$= \frac{1 - e^{-y}}{1 - e^{-1}}$$ из геом. прогр.

$$\rho_2(y) = F_2'(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 1) \\ \dfrac{e^{-y}}{1 - e^{-1}}, & y \in [0, 1) \end{cases}$$

d) $\rho_3(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1} \quad -\infty < x < +\infty \qquad g(x) = \frac{1}{x}$

$$\rho_2(y) = \rho_3(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|$$

$y = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{y}$

$$\rho_2(y) = \pi^{-1}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| = \frac{1}{\pi(y^2 + 1)} \qquad -\infty < y < +\infty$$

e) $f_\gamma(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1} \quad -\infty < x < +\infty \quad g(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

$$y = \frac{2x}{1-x^2} \qquad y - yx^2 - 2x = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$$

1) $x_1 = -\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$x_1' = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y^2\sqrt{1+y^2}}$$

$$f_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x_1^2} \cdot |x_1'| = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{\pi \cdot 2(y^2+1)(\sqrt{1+y^2}+1)}$$

2) $x_2 = -\frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} \qquad x \in (-1, 1)$

$$x_2' = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y^2\sqrt{1+y^2}}$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x_2^2} |x_2'| = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\pi \cdot 2(y^2+1)(\sqrt{1+y^2}-1)}$$

$$f_\eta(y) = f_1 + f_2 = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{2\pi(y^2+1)(\sqrt{1+y^2}+1)} + \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{2\pi(y^2+1)(\sqrt{1+y^2}-1)} =$$

$$= \frac{1+y^2-1+1+y^2-1}{2\pi(y^2+1)(1+y^2-1)} = \frac{2y^2}{2\pi(y^2+1)y^2} = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$$

$$-\infty < y < +\infty$$

④ $F(x)$ - ф-ция распр. с.в. ξ непр. и стр. возр.

$F(\eta), E(\eta) = ?$ $\eta = F(\xi)$

$$F_\eta(z) = P(F(\xi) \le z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ 1, & z \ge 1 \\ ?, & z \in (0,1) \end{cases}$$

Когда $z \in (0, 1)$:

$$F_\eta(z) = P(\xi \le F^{-1}(z)) = F_\xi(F^{-1}(z)) = z$$

$$F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z, & z \in (0,1) \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

$$E_\eta = \int_0^1 z \cdot 1 \, dz = \frac{1}{2}$$

⑤ с. в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ нез. и один. распр. с плотн. $\rho(x)$.

Найти распр. с. в. $\alpha = \min\limits_{1 \le k \le n} (\xi_k)$ $\beta = \max\limits_{1 \le k \le n} \xi_k$

$$F_\beta(x) = P(\beta \le x) = P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x, \dots, \xi_n \le x) = (F_\xi(x))^n$$

$$F_\alpha(x) = P(\alpha \le x) = 1 - P(\alpha > x) = 1 - P(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \dots, \xi_n > x) =$$

$$= 1 - P(\xi_1 > x) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n > x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$$

так как $P(\xi_i > x) = 1 - P(\xi_i \le x) = 1 - F_{\xi_i}(x)$

Ответ: $F_\beta(x) = (F_\xi(x))^n$ $F_\alpha(x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$.

а так как $\rho(x) = F'(x)$, то $F_\beta(x) = \left(\int \rho(x)\,dx\right)^n$

$F_\alpha(x) = 1 - \left(1 - \int \rho(x)\,dx\right)^n$.

(7) ξ_1 и ξ_2 имеют плотн. распр. $\rho(x)$. Найти совместн. плотн. распр. (r, φ) т. (ξ_1, ξ_2) $\quad 0 \le \varphi < 2\pi$

$\xi_1 = r \cdot \cos\varphi$

$\xi_2 = r \cdot \sin\varphi$

$$A = \begin{cases} x^2 + y^2 \le r_0^2 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \le \varphi_0 \end{cases}$$

$$P(r \le r_0, \varphi \le \varphi_0) = \iint_A \rho_{\xi_1}(x)\, \rho_{\xi_2}(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{r_0} \int_0^{\varphi_0} \rho(r\cos\varphi)\, \rho(r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

Откуда получим $\rho_{r,\varphi}(r_0, \varphi_0) = \rho(r_0 \cos\varphi_0) \cdot \rho(r_0 \sin\varphi_0)\, \underline{r_0}$

где $0 \le r_0 \le +\infty \qquad 0 \le \varphi_0 < 2\pi$

(8) С.в. ξ и η нез. с равном. р. на $[0, a]$

$\rho(\chi_1), \rho(\chi_2), \rho(\chi_3), \rho(\chi_4)$ - ? $\quad \chi_1 = \xi + \eta \quad \chi_2 = \xi - \eta$

$\chi_3 = \xi \cdot \eta \quad \chi_4 = \dfrac{\xi}{\eta}$.

1) $\rho_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_0^x \rho_\xi(y) \cdot \rho_\eta(x-y)\,dy = \dfrac{x}{a^2}, \quad x \in [0, a]$

$$\rho_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{x-a}^{a} \rho_\xi(y) \cdot \rho_\eta(x-y)\,dy = \frac{2}{a} - \frac{x}{a^2}, \quad x \in [a, 2a]$$

$$\rho_{\chi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2a, +\infty) \\ \dfrac{x}{a^2}, & x \in [0, a) \\ \dfrac{2}{a} - \dfrac{x}{a^2}, & x \in [a, 2a] \end{cases}$$

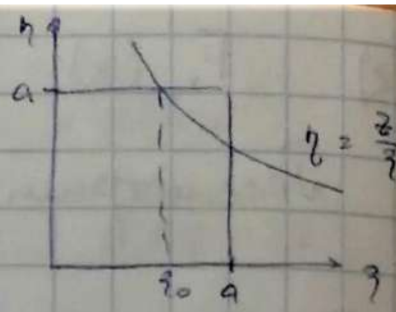
2) $F_{x_2}(x) = P(\xi - \eta \le x)$

Рассмотрим $\zeta = -\eta$: $p_{\zeta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-a, 0] \\ \frac{1}{a}, & x \in [-a, 0] \end{cases}$

При $-a \le x \le 0$, $0 < x \le a$ ан-но п.1 получим:

$$\rho_{x_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-a, a] \\ \frac{x+a}{a^2}, & x \in [-a, 0] \quad \leftarrow \int_{-a}^{x} \rho_\xi(y) \cdot \rho_\zeta(x-y)\, dy = \frac{x+a}{a^2} \\ \frac{2}{a} - \frac{x+a}{a^2}, & x \in (0, a] \end{cases}$$

3) $F_{x_3}(z) = P(\xi\eta \le z) =$



$$= \int_0^{\xi_0} \rho_\xi(x)\,dx \int_0^a \rho_\eta(y)\,dy + \int_{\xi_0}^a \rho_\xi(x)\,dx \int_0^{z/x} \rho_\eta(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\xi_0 a + \int_{\xi_0}^a \frac{z}{x}\,dx\right) = \frac{\xi_0}{a} + \frac{z}{a^2} \ln x \Big|_{\xi_0}^a =$$

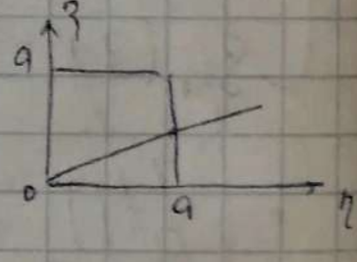
$$= \frac{\xi_0}{a} + \frac{z}{a^2}\ln\frac{a}{\xi_0}$$

$$\text{, где } \xi_0 = \frac{z}{a}$$

$$P(\xi\eta \le z) = \frac{z}{a^2} + \frac{z}{a^2}\ln\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

$$\rho_{x_3}(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0, a^2] \\ \frac{1}{a^2}\ln\frac{a^2}{z}, & z \in [0, a^2] \end{cases}$$

4) $z \in [0, 1]$:



$$P(\xi \le z\cdot\eta) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a\cdot za}{2} = \frac{z a^2}{a^2 2} = \frac{z}{2}$$

если $z > 1$:

$$P(\xi \le z\cdot\eta) = \frac{1}{a^2}\cdot\left(a^2 - \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z}$$

$$\rho_{x_4}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1/2, & z \in [0, 1] \\ \frac{1}{2z^2}, & z \ge 1 \end{cases}$$

⑨ $\xi \sim U[-1,1]$

η	-1	0	1
$P(\eta)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$F_{\xi\eta}(z) = P(\xi\eta \le z) = \sum_{k=-1}^{1} P(\xi k \le z) \cdot P(\eta = k) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(P(-\xi \le z) + P(\xi \cdot 0 \le z) + P(\xi \le z)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(F_{-\xi}(z) + F_0(z) + F_\xi(z)\right)$$

$$F_{\xi\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z \le -1 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & z \in (-1, 0) \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, & z \in [0,1) \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta \le z) = \sum_{k=-1}^{1} P(\xi + k \le z) \cdot P(\eta = k) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(P(\xi - 1 \le z) + P(\xi \le z) + P(\xi + 1 \le z)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(F_\xi(z+1) + F_\xi(z) + F_\xi(z-1)\right)$$

$$F_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z \le -2 \\ \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, & z \in (-2, -1] \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{2}, & z \in [-1, 1] \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}, & z \in (1, 2) \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}$$

(10) $\xi \sim \exp(\lambda)$ $\qquad P(\xi > k \mid \xi > l) - ?$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

если $k \leq l$, то $P(\xi > k \mid \xi > l) = 1$

если $k > l$:

$$P(\xi > k \mid \xi > l) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{P(\xi > l \mid \xi > k)}} \cdot \frac{P(\xi > k)}{P(\xi > l)} =$$

$$= \frac{1 - P(\xi \leq k)}{1 - P(\xi \leq l)} = \frac{1 - F_\xi(k)}{1 - F_\xi(l)} = e^{-\lambda(k - l)}.$$

(11) C найдём из того, что

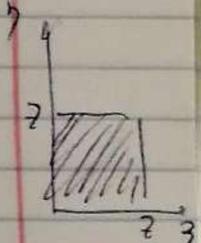
$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$C\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)\,dy = C\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = C\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = C$$

Откуда $C = 1$.

$$\rho_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \int_0^1 \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = y + \frac{1}{2}$$

$$\rho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \int_0^1 \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = x + \frac{1}{2}$$



$$F_{\underset{\max(\xi,\eta)}{\gamma}}(z) = P(\max(\xi,\eta) \le z) = P(\xi \le z,\ \eta \le z) =$$

$$= \iint_A \rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^z dx \int_0^z (x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^z xz + \frac{z^2}{2}\,dx = \frac{z^3}{2} + \frac{z^3}{2} = z^3.$$

$$F_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z^3, & z \in (0,1) \\ 1, & z \ge 1 \end{cases} \longrightarrow \rho_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0,1] \\ 3z^2, & z \in [0,1] \end{cases}$$

(12) $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \sim U[0,1]$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right) = \frac{1}{n}\, n\, E(f(\xi_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \rho_{\xi_1}(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

По нер-ву Чебышева:

$$P\Big(\Big|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}_{\eta} - \underbrace{\int_0^1 f(x)\, dx}_{E\eta}\Big| > \varepsilon\Big) \le \frac{D(\eta)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2} D(f(\xi_1)) = \frac{1}{n\varepsilon^2}\Big(\underbrace{\int_0^1 f^2(x)\, dx}_{E(\eta^2)} - \underbrace{\Big[\int_0^1 f(x)\, dx\Big]^2}_{(E(\eta))^2}\Big)$$

(13) a) $N(a, \sigma^2)$

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Для параметров (0,1)

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \overset{y = x - it}{=\!=} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\xi' = a + \sigma\xi \sim N(a, \sigma^2)$, где $\xi \sim N(0,1)$

$$\varphi_{\xi'}(t) = e^{ita} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

б) $U(0, a)$

~~Дл~~ Для параметров (0,1):

$$\varphi_\xi(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{e^{it} - 1}{it}, & t \neq 0 \end{cases}$$

$\xi' = a\xi$

$$\varphi_{\xi'}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{e^{iat} - 1}{ita}, & t \neq 0 \end{cases}$$

с) $\rho_\xi(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \underline{\underline{e^{\lambda e^{it} - \lambda}}}$$

d) $\quad \rho_\alpha(x) = C_\alpha x^{-2}\left(1 - \cos\frac{x}{\alpha}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\alpha x^{-2}\left(1 - \cos\frac{x}{\alpha}\right) dx = 1$$ – усл-ие нормир.

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\frac{x}{\alpha}}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\alpha^2} & x = 0 \end{cases}$$

при $\alpha \to +\infty$ интеграл сх-ся

$$f'(x,\alpha) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha^2}\,\dfrac{\sin\frac{x}{\alpha}}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{\alpha^3}, & x = 0 \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{x}{\alpha}}{x}\,dx$ – инт. Дирихле, сх-ся равном. по $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0], \alpha_0 > 0$

Значит можем применить теорему о дифф. по параметру:

$$I'(\alpha) = -\frac{C_\alpha}{\alpha^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{x}{\alpha}}{x}\,dx}_{\text{инт. Дирихле}} = -\frac{C_\alpha}{\alpha^2}\,\pi\,\mathrm{sign}\,\alpha$$

$$I(\alpha) = \frac{C_\alpha}{|\alpha|}\pi + \mathrm{const} \qquad I(\alpha \to +\infty) = 0 \hookrightarrow \mathrm{const} = 0$$

$$C_\alpha = \frac{|\alpha|}{\pi} \hookrightarrow \varphi_\alpha(t) = \frac{|\alpha|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{x}{\alpha}}{x^2} e^{itx}\,dx$$

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{2|\alpha|}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{x}{\alpha}}{x^2} \cos tx\,dx = \frac{2|\alpha|}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx - \frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{\alpha} - t\right) - \frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{x^2}\,dt.$$

Применим т. о дифф. по параметру к этому интегралу (сх-ся равном. по призн. Дирихле, как и продиф. интегр.)

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \cancel{t}x - \frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{\alpha} - t\right) - \frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{x^2}\, dx$$

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\alpha} - t\right) + \sin x\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{x}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\operatorname{sign}\left(\frac{1}{\alpha} - t\right) + \operatorname{sign}\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)\right)$$

$$I'(\alpha) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4\alpha^2} \operatorname{sign}\alpha \cdot 2, & |t| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| \\ -\frac{\pi}{4\alpha^2} \operatorname{sign}\alpha, & |t| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| \\ 0, & |t| > \left|\frac{1}{\alpha}\right| \end{cases}$$

Откуда

$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2|\alpha|} + \text{const}, & |t| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| \\ 0, & |t| \geq \left|\frac{1}{\alpha}\right| \end{cases}$$

(доопр. в т. разрыва 0 и в т. 0 const = 0, т. к. $I(\alpha \to +\infty) = 0$, $|t| \geq \frac{1}{\alpha}$

$$I\left(\alpha = \frac{1}{t}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt - 1}{x^2}\, dt = -\frac{\pi t}{2}$$

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} 1 - |\alpha t|, & |t| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| \\ 0, & |t| \geq \left|\frac{1}{\alpha}\right| \end{cases}$$

(14) a) $\varphi(t) = \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ - дискр. случ. велич.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

в) $\varphi(t) = e^{it} \cos t = \dfrac{e^{2it} + 1}{2}$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

в ряд Тейлора

c) $\varphi(t) = (2 - e^{it})^{-1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{it}} = \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{itk}}{2^k}$

$P(\xi = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ - откуда ясна ф-ция распред.

d) $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos t}{2} + i \dfrac{\sin t}{6} = \dfrac{1}{2} + e^{it} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} e^{-it}$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{6}, & -1 \le x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(15) a) $\varphi(t) = 4t^{-2}\cos t \cdot \sin^2\frac{t}{2} = \frac{2\cos t}{t^2} - \frac{2\cos^2 t}{t^2}$

$$E\xi = \frac{1}{i}\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t^2}(\cos t - \cos^2 t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left[-\frac{4}{t^3 i}(\cos t - \cos^2 t) + \frac{2}{it^2}(\sin 2t - \sin t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$\lim_{t\to 0} -\frac{4}{t^3 i}\left(\cancel{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{4t^2}{2\cdot 2} - \frac{16t^4}{24\cdot 2} + o(t^5)\right) +$$

$$+ \frac{2}{it^2}\left(2t - \frac{8t^3}{6} - t + \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{2}{t\cdot i} + \frac{2}{it} + o(t^2) = \underline{0}$$

$$E\xi^2 = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Big|_{t=0} = -\Big[+\frac{12}{t^4}(\cos t - \cos^2 t) +$$

$$+ \frac{4}{t^3}(\sin t - \sin 2t) - \frac{4}{t^3}(\sin 2t - \sin t) +$$

$$+ \frac{2}{t^2}(2\cos 2t - \cos t)\Big]\Big|_{t=0}$$

$$-\lim_{t\to 0}\Big[\frac{12}{t^4}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{7}{24}t^4 + o(t^4)\right) - \frac{8}{t^3}\left(t - \frac{7}{6}t^3 + o(t^3)\right) +$$

$$+ \frac{2}{t^2}\left(1 - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)\right)\Big] = -\left(-\frac{7}{2} + \frac{28}{3} - 7\right) = \frac{7}{6}$$

$$D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \frac{7}{6}$$

b) $\varphi_\xi(t) = (1-it)^{-p}(1+it)^{-q} \qquad p, q > 0$

$E\xi = \frac{1}{i}\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = \Big[\frac{1}{i}\big(pi(1-it)^{-p-1}(1+it)^{-q} - qi(1+it)^{-q-1}\cdot$

$\cdot(1-it)^{-p}\big)\Big]\Big|_{t=0} = p - q$

$E\xi^2 = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Big|_{t=0} = -\Big(-p(+p+1)(1-it)^{-p-2}(1+it)^{-q} +$

$+ p\cdot 1(1-it)^{-p-1}\cdot q(1+it)^{-q-1} - q(q+1)(1+it)^{-q-2}\cdot(1-it)^{-p} +$

$+ qp(1+it)^{-q-1}(1-it)^{-p-1}\Big)\Big|_{t=0} = p(p+1) - pq +$

$+ q(q+1) - pq = (p-q)^2 + p + q$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p + q$

c) $\varphi_\xi(t) = (\arcsin\theta)^{-1}\arcsin(\theta e^{it}), \quad 0 < \theta < 1$

$E\xi = \frac{1}{i}\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i\arcsin\theta}\frac{i\theta e^{it}}{\sqrt{1-\theta^2 e^{2it}}}\Big|_{t=0} = \frac{\theta}{\arcsin\theta\sqrt{1-\theta^2}}$

$E\xi^2 = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Big|_{t=0} = \Big[\frac{\theta e^{it}}{\arcsin\theta\sqrt{1-\theta^2 e^{2it}}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\arcsin\theta}\frac{2i^2\theta^3 e^{3it}}{(1-\theta^2 e^{2it})^{3/2}}\Big]\Big|_{t=0} =$

$= \frac{\theta}{\arcsin\theta\sqrt{1-\theta^2}} + \frac{1}{\arcsin\theta}\frac{\theta^3}{(1-\theta^2)^{3/2}} = \frac{\theta}{\arcsin\theta\sqrt{(1-\theta^2)^3}}$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{\theta}{\arcsin\theta(1-\theta^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} - \frac{\theta}{\arcsin\theta}\right)$$

(16) $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim N(0,1)$

$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$

а) $f(x) = x^2 \hookrightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

$$\rho_2(x) = \rho\left(f_1^{-1}(x)\right)\left|\left(f_1^{-1}(x)\right)'\right| + \rho\left(f_2^{-1}(x)\right)\left|\left(f_2^{-1}(x)\right)'\right| =$$

"+" "−"

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Для 2х степеней с.в. восп-ся формулой свёртки.

$$\rho_2(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-t}{2}} dt, & x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi\sqrt{x}} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dt, & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

Значит $F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ //

Характ. ф-ция:

$$\varphi_2(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} e^{ixt} dx = \frac{1}{2} \left.\frac{e^{x(it-\frac{1}{2})}}{it-\frac{1}{2}}\right|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{1-2it}$$ //

в) $\varphi_{\eta_2}(t) = \varphi_{\xi_1^2+\xi_2^2}(t) \hookrightarrow \varphi_{\xi_1^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}$

$$\hookrightarrow \varphi_{\eta_n}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2it}}\right)^n = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}$$

$$E(\eta_n^k) = \frac{1}{i^k} \left.\frac{d^k \varphi_{\eta_n}(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

$$\frac{d\varphi_{\eta_n}(t)}{dt} = \frac{n}{-2} \frac{-2i}{(1-2it)^{n/2+1}} = \frac{n}{(1-2it)^{n/2+1}}$$

$$\frac{d^k\varphi_{\eta_n}(t)}{dt^k} = \frac{i^k n(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+(k-1)\cdot 2)}{(1-2it)^{n/2+k}}$$

$$E(\eta_n^k) = \prod_{i=0}^{k-1}(n+2i)$$

(17) $\xi_{m,n} \quad (m=1,2,\dots,n)$ – н.с.в.

$$F_n(x) = P(\xi_{m,n} \le x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha_n x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \alpha_n = \lambda n,\ \lambda > 0$$

$$\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{n,n} \longrightarrow ? \quad n \to +\infty$$

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \prod_{m=1}^{n} \varphi_{\xi_{m,n}}(t) = \left(\varphi_{\xi_{m,n}}(t)\right)^n$$

$$\varphi_{\xi_{m,n}}(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\,\alpha_n e^{-\alpha_n x}\,dx = \alpha_n \int_0^{+\infty} e^{x(it-\alpha_n)}\,dx = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - it}$$

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n - it}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda n}}\right)^n = \left(1-\frac{it}{\lambda n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{\frac{it}{\lambda}},\ n \to +\infty$$

Откуда $$F_{n\to\infty}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{\lambda} \\ 1, & x \ge \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

(18)

$$P(\pi_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E\pi_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot 1 = \lambda$$

$$E\pi_\lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(\pi_\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Исходя из центр. предельн. теоремы:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\pi_\lambda - \overset{E\pi_\lambda}{\lambda}}{\underbrace{\sqrt{\lambda}}_{D(\pi_\lambda)}} \le x\right) = P(\eta \le x) = \quad , \quad \eta \sim N(0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

(19) $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

a) $E\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\xi_i - E\xi_i)\right)^2\right) = E\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j (\xi_i - E\xi_i)\cdot\right.$
$\left.\cdot(\xi_j - E\xi_j)\right) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j E\left((\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\right) =$

$= \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \vec{x}^T C \vec{x} \geq 0,$

т.к. случ величина $\geq 0 \hookrightarrow E$ сл.в. ≥ 0

Откуда видно, что вып. опред. неотриц. опр. матрицы

ч.т.д.

(20) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нез. $\sim N(a, \sigma^2)$

$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ – имеет норм. распр.

$E\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k = E\xi_i = a$.

$D\alpha = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \frac{1}{n} D\xi_i = D\frac{\xi_i}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma^2}{n}$ //

Значит $\alpha \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$.

(20) $\beta = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbb{C} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ C_{21} & C_{22} \dots & C_{2n} \\ - & - & - \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{nn} \end{vmatrix}$$

где C_{ij} выбраны так, что

1) $\mathbb{C}$ - ортогон. матрица, т.е. $\mathbb{C}^T = \mathbb{C}^{-1}$

2) $\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2 = 1$

3) $\sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 0, \quad i \geq 2$

Рассмотрим столбец

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

И длина вектора не изменится, т.к. $\mathbb{C}$ - ортогон. матрица

значит:

$$\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \quad (*)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sqrt{n}\,\alpha \quad - \text{ т.к. } \alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

$$E\eta_i = E\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\overbrace{E\xi_j}^{a} = a\cdot\overbrace{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}}^{0} = 0$$

$$D\eta_i = D\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\underbrace{D\xi_i}_{\sigma^2} = \sigma^2\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2}_{1} = \sigma^2$$

верно при $i \geq 2$.

$E\eta_1 = \sqrt{n}\,a$

Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 - 2\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}^{\alpha n}\alpha + n\cdot\alpha^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 - \underbrace{n\alpha^2}_{\eta_1^2}$$

Откуда используя $(*)$ получим:

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2 = \sum_{k=2}^{n}\eta_k^2 = \sigma^2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\eta_k}{\sigma}\right)^2$$

где случ. величины $\frac{\eta_k}{\sigma}$ имеют норм. распр. с парам. $N(0,1)$.

Нормальное, т.к. получены в рез-те действ. невырожд. преобр-ия на норм. вектор. (матрица $\mathbb{C}$ невырождена)

Покажем, что эти случ. величины независимы в совокупности.

Для этого достаточно показать, что $E(\eta_k \eta_j) = 0$, откуда будет следовать, что $cov(\eta_k \eta_j) = E(\eta_k \eta_j) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E\eta_k}} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E\eta_j}} = E(\eta_k \eta_j) = 0$ и т.к. η_i имеют норм. распр, то они будут независимы в совокупности.

$$E(\eta_k \eta_j) = E\Big(\sum_{i,t=1}^{n} C_{ki}\, \xi_i\, C_{jt}\, \xi_t\Big) = \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki}\, C_{jt}\, E(\xi_i \xi_t) =$$

они независимы

$$= \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki}\, C_{jt}\, \underset{a}{\underset{\shortparallel}{E\xi_i}} \cdot \underset{a}{\underset{\shortparallel}{E\xi_t}} = a^2 \cdot \sum_{i,t=1}^{n} C_{ki}\, C_{jt} = a^2 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n} C_{ki}}} \; \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sum_{t=1}^{n} C_{jt}}} = 0$$

Значит они независ. в совокупности

Откуда следует, что $\beta = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{n-1}$ – имеет распределение хи квадрат с $n-1$ степенью свободы.

(22) Пусть m - число опечаток.

$$P(m \geq 2) = 1 - P(m=1) - P(m=0) = 1 - C_{10}^{1}(1-p)^9 \cdot p -$$

$$-(1-p)^{10} = 1 - \frac{1}{50}\left(1-\frac{1}{500}\right)^9 - \left(1-\frac{1}{500}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{50}\left(\frac{499}{500}\right)^9 -$$

$$-\left(\frac{499}{500}\right)^{10} = 178{,}1 \cdot 10^{-6}$$

$n=10$ - всего опечаток $\quad pn = \frac{1}{50} = const$

применим Пуассон. прибл. $\left(\lambda = \frac{1}{50}\right)$

$$P(m=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(m \geq 2) = 1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1} - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{1} = 197{,}4 \cdot 10^{-6}$$

Ответ: $P(m \geq 2) \approx 197{,}4 \cdot 10^{-6}$.

(23) $p = 0,515 \quad n = 10000 \quad m_0 = 5000$

Так как n велико и $p<1$, то справедл. интегр. пред. т. Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx -3$$

$$P(m \geq m_0) = 1 - \varphi(x_1) = 1 - \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - 1,35 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0,9986}}$$

24

$$P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right| \geq 0{,}1\right\} \leq 0{,}1$$

$\xi_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

отдельные броски

$$E(\xi_i) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} \qquad E\xi_i^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D\xi_i = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$$

Используя центральную предельную теорему:

$$\frac{\xi_n - nE\xi_i}{\sqrt{nD\xi_i}} \xrightarrow{Law} \eta \sim N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right| \geq 0{,}1\right) \xrightarrow{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\eta\sqrt{D\xi_i}}{\sqrt{n}}\right| \geq 0{,}1\right) =$$

$$= P\left(|\eta| \geq \frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}\right) \leq 0{,}1$$

из-за оценки по модулю

$$P\left(|\eta| \geq \frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}\right) = \int_{\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leq 0{,}1$$

В случ. рав-ва

$$\frac{0{,}1\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_i}} = 1{,}645 \qquad n = \left(\frac{1{,}645}{0{,}1}\right)^2 D\xi_i = 789{,}26$$

Ответ: $n \geq 790$.