T1

a) $\begin{cases} e^{2x}(y''-4y'+3y)=\lambda y, & 0<x<\ln 2 \\ y'(0)-y(0)=0, & y'(\ln 2)=0 \end{cases}$

$Ly = e^{-4x}(y''-4y'+3y) = (y'e^{-4x})' + e^{-4x}3y = \lambda y e^{-6x}$

$p(x) = -e^{-4x}, \quad q(x) = 3e^{-4x}$

$y''-4y'+3y=0$

$\begin{cases} C_1+3C_2-C_1-C_2=0 \\ C_1\cdot 2+3C_2\cdot 2^3=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2C_2=0 \\ 2C_1+24C_2=0 \end{cases}$

Общ. решение есть $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

$\lambda=0$ - не СЗ $L$

Шаг 1:

$v_1 = e^{x} \qquad v_2 = 12e^{x} - e^{3x}$

Шаг 2:

$W = \begin{vmatrix} e^{x} & 12e^{x}-e^{3x} \\ e^{x} & 12e^{x}-3e^{3x} \end{vmatrix} = 12e^{2x} - 3e^{4x} - 12e^{2x} + e^{4x} = -2e^{4x}$

$p\cdot W = +2$

$G = -\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} e^{x}(12e^{\xi}-e^{3\xi}), & 0\le x\le\xi\le\ln 2 \\ e^{\xi}(12e^{x}-e^{3x}), & 0\le\xi\le x\le\ln 2 \end{cases}$

Воспишем ИУ: $y(x) = \lambda\int_0^{\ln 2} G(x,\xi)\,y(\xi)\,e^{-6\xi}\,d\xi$

в) $\begin{cases} x^2 u_{xx} - 2u = \lambda x\sqrt{x}\, u, & 0<x<2 \\ u(x) = O(\sqrt{x}), & x \to +0 \\ u(2-0) = 0, & \lambda \neq 0 \end{cases}$

$Lu = u''_{xx} - \frac{2}{x^2} u = \frac{\lambda}{\sqrt{x}} u \qquad p(x) = +1 \quad q(x) = -\frac{2}{x^2}$

$Lu = 0 \hookrightarrow x^2 u''_{xx} - 2u = 0$

$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda = 2, -1$

Общ. реш. есть $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2. \hookrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \frac{C_1}{2} + 4C_2 = 0 \end{cases} \hookrightarrow \lambda = 0$ - не СЗ Ц

$x \to +0 \qquad u = O(\sqrt{x}) \hookrightarrow v_1 = x^2$

$u(2-0) = 0 \hookrightarrow v_2 = -\frac{8}{x} + x^2$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 - \frac{8}{x} \\ 2x & 2x + \frac{8}{x^2} \end{vmatrix} = 2x^3 + 8 - 2x^3 + 16 = 24$$

$$p \cdot W = 24$$

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{24} \cdot \begin{cases} x^2\left(-\frac{8}{\xi} + \xi^2\right), & 0 \le x \le \xi \le 2 \\ \xi^2\left(-\frac{8}{x} + x^2\right), & 0 \le \xi \le x \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$u(x) = \lambda \int_0^2 G(x, \xi) \frac{u(\xi)}{\sqrt{\xi}} \, d\xi$$

б) $$\begin{cases} -(x+1)^2 y'' - 3(x+1) y' = \lambda y + f(x) & 0 < x < 1 \\ y'(0) = \alpha y(0), \; y'(1) = 0 & \alpha > 0, \; f \in C(0,1) \end{cases}$$

$t = x + 1$, $1 < t < 2$, $z(t) = y(t-1)$ $\quad g(t) = f(t-1)$

$Lz = -t^2 z'' - 3t z' = \lambda z + g(t)$, $1 < t < 2$

$z(t) \in M$: $\alpha \cdot z(1) - z'(1) = 0$, $z'(2) = 0$

Замет. $Lz$ не эрмитов (не представи. в виде

$Lz = -(p(t) z')' + q(t) z$

Получим домножением на $t$ равносильную краевую задачу:

$\tilde{L} z = -(t^3 z')' + 0 \cdot z = \lambda t z + t g(t)$, $1 < t < 2$

$z(t) \in \tilde{M} = M$ $\quad h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0 \hookrightarrow$ случ. стандартн.

$\lambda = 0$ - собств. знач. опер. $\tilde{L} \Leftrightarrow h_1 = 0, H_1 = 0, q(t) = 0$

При $\alpha = 0$ $\quad \lambda = 0$ - с.з. опер. $L$

Перейдём к равносильному:

$$\tilde{L}(z) = -(\underbrace{t^3}_{p>0} z')' + \underbrace{3tz}_{q(t)>0} = \underbrace{(\lambda+3)}_{\mu} tz + t \cdot g(t)$$

Для $\tilde{L}$: $\mu = 0$ не собств. знач.

Общ. решение $\tilde{L}z = 0$: $\quad t^2 z'' + 3tz' - 3z = 0$

$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = 1, -3$

Общ. решение есть $\quad z = \dfrac{C_1}{t^3} + C_2 t$

$z'(t) = -\dfrac{3C_1}{t^4} + C_2$

Шаг 1:

Ищем $v_1(x) \neq 0$, $Lv_1(x) \equiv 0$

$\alpha(C_1 + C_2) = -3C_1 + C_2 \hookrightarrow C_1 = 1 - \alpha, \; C_2 = \alpha + 3$

$v_1 = \dfrac{1-\alpha}{t^3} + (\alpha + 3)t$

$v_2(t) = \dfrac{16}{t^3} + 3t$

Шаг 2:

$$\tilde{W}(1) = \begin{vmatrix} 4 & 19 \\ 4\alpha & -45 \end{vmatrix} = -(76\alpha + 180)$$

Шаг 3:

$$\tilde{G}(t, \tau) = \frac{1}{76\alpha + 180} \begin{cases} v_1(t) v_2(\tau), & 1 \le t \le \tau \le 2 \\ v_1(\tau) v_2(t), & 1 \le \tau \le t \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$z(t) = \mu \int\limits_1^2 \tilde{\tilde{G}}(t,\tau)\,\tau\, z(\tau)\, d\tau + \int\limits_1^2 \tilde{\tilde{G}}(t,\tau)\, t \cdot g(\tau)\, d\tau$$

В исходных перем.:

$$y(x) = (\lambda+3) \int\limits_0^1 \tilde{\tilde{G}}(x+1, \xi+1)(\xi+1)\, y(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tilde{\tilde{G}}(x+1, \xi+1)(\xi+1)\, f(\xi)\, d\xi.$$