15.4(8)

$$Ly = -\frac{1}{x^2}y'' + \frac{2}{x^3}y' - \frac{2}{x^4}y \ , \ y'(0) = y(1) = 0$$

$$M: \begin{aligned} &0\cdot y(0) + 1\cdot y'(0) = 0 \\ &1\cdot y(1) + 0\cdot y'(1) = 0 \end{aligned} \qquad 0 < x < 1$$

$$Ly = -\Big(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{p(x)} y'\Big)' + \underbrace{\Big(-\frac{2}{x^4}\Big)}_{q(x)} y$$

$\hookrightarrow$ случ. нестандартный

Надо выяснить, что $\lambda = 0$ не собств. знач. оператора L

Найдём общ. решение $Ly = 0$:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \hookrightarrow \lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0 \hookrightarrow \lambda = 1, 2$$

Общ. реш. есть $y = C_1 x + C_2 x^2$

$y' = C_1 + 2C_2 x$

Подставим в M: $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 - 1\cdot C_1 - 2\cdot C_2 \cdot 0 = 0 \hookrightarrow C_1 = 0$

$C_1 + C_2 + 0\cdot(\ldots) = 0 \hookrightarrow C_2 = 0$

Только тривиальные решения $\in M \hookrightarrow \lambda = 0$ не явл. собств. знач.

<u>Шаг 1</u>: $v_1 = x^2$, $v_2 = x - x^2$

<u>Шаг 2</u>: $$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x - x^2 \\ 2x & 1 - 2x \end{vmatrix} = x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 = -x^2$$

$$K = -1 \quad \Big(K = p(x)\cdot W(x) = \frac{1}{x^2}\cdot(-x^2)\Big)$$

$$G = 1\cdot \begin{cases} x^2(\xi - \xi^2), & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \xi^2(x - x^2), & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

15.15(6, 7)

6) $\begin{cases} Ly = -x^2y'' - 2xy' + (2\cos^2 x - 1)y = \lambda y \cos 2x \\ y(1) = 0, \ y'(2) = 0 \qquad 1 < x < 2 \end{cases}$

$$Ly = -(\underbrace{x^2}_{p(x)\geq 0} y')' + (\underbrace{2\cos^2 x + 1}_{q(x)\geq 0})y$$

Случай стандартный, $h_1 = \infty$ $\hookrightarrow$ $\lambda = 0$ не явл-ся собств. знач. операт. L

Оператор равносилен следующему:

$-(x^2y')' + 2y = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\mu} \cos 2x \cdot y$, $\tilde{M} = M$, $\mu = 0$ - не собств. знач.

$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0 \hookrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \hookrightarrow \lambda = -2, 1$

Общ. решение есть $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$

Шаг 1:

$v_1 = x - \frac{1}{x^2}$, $v_2 = x + \frac{4}{x^2}$

Шаг 2:

$\tilde{W}(x) = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{x^2} & x + \frac{4}{x^2} \\ 1 + \frac{2}{x^3} & 1 - \frac{8}{x^3} \end{vmatrix}$ $\qquad \tilde{W}(1) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ +3 & -7 \end{vmatrix} = -15$

$K = p(1) \cdot \tilde{W}(1) = -15$

$\tilde{G}(x, \xi) = \frac{1}{15} \cdot \begin{cases} (x - \frac{1}{x^2})(\xi + \frac{4}{\xi^2}), & 1 \leq x \leq \xi \leq 2 \\ (\xi - \frac{1}{\xi^2}) \cdot (x + \frac{4}{x^2}), & 1 \leq \xi \leq x \leq 2 \end{cases}$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = (\lambda - 1) \int_1^2 \tilde{G}(x, \xi)(\cos 2\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

7) $\begin{cases} Ly = -y'' = \lambda y, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$

$$Ly = -(1 \cdot y')' + 0 \cdot y$$

Случай стандартный $\hookrightarrow$ $\lambda = 0$ явл-ся собств. знач. операт. L

$h_1 = H_1 = 0 = q(x)$

Возьмём $-y'' + y = (\lambda + 1) y$

$\tilde{p}(x) = 1$, $\tilde{q}(x) = 1 > 0$ $\hookrightarrow$ для нового $\tilde{L}$ случ. стандартный и

$\lambda = 0$ не явл-ся собств. знач. операт. $\tilde{L}$ на $\tilde{M} = M$

$-\lambda^2 + 1 = 0 \hookrightarrow \lambda = \pm 1$

Общ. реш. есть $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$

<u>Шаг 1:</u>

$$v_1(x) = \operatorname{ch} x \qquad v_2(x) = \operatorname{ch}(x-1)$$

<u>Шаг 2:</u>

$$W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{ch}(x-1) \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{sh}(x-1) \end{vmatrix} = -\operatorname{sh} 1$$

$K = -\operatorname{sh} 1$

$$G = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch}(\xi - 1), & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \operatorname{ch} \xi \, \operatorname{ch}(x-1), & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = (\lambda + 1) \int_0^1 G \, y(\xi) \, d\xi$$

15.17

$$\begin{cases} -xy'' + y' = \lambda y & 1 < x < 2 \\ y(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$-\left(\frac{y'}{x}\right)' = \lambda x^{-2} y \quad \hookrightarrow \quad p(x) = \frac{1}{x}, \; q(x) = 0$$

Случай стандартный, $h_1 = 1 \hookrightarrow \lambda = 0$ не явл. С.З. опер. L.

$$\frac{y'}{x} = \tilde{C}_1 \quad \hookrightarrow \quad y = C_1 x^2 + C_2 \text{ - общ. решение.}$$

Шаг 1:

$$v_1 = x^2 - 1 \qquad v_2 = 1$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \quad , K = -2$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} x^2 - 1, & 1 \le x \le \xi \le 2 \\ \xi^2 - 1, & 1 \le \xi \le x \le 2 \end{cases}$$

Выпишем ИУ:

$$y(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \frac{y(\xi)}{\xi^2} d\xi$$