(T2)

$$u_{tt} = \Delta u + \sin(\mu_1^{(0)} t), \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r) \qquad a_k = \frac{\int_0^1 r \cdot 1 \cdot J_0(\mu_k^{(0)} r)\, dr}{\int_0^1 r \cdot J_0^2(\mu_k^{(0)} r)\, dr}$$

(1) $$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-(\mu_k^{(0)})^2\right) J_0(\mu_k^{(0)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r) \sin(\mu_1^{(0)} t) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = J_0(\mu_1^{(0)} r) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \left(\mu_k^{(0)}\right)^2 T_k = a_k \sin(\mu_1^{(0)} t) \\ T_k(0) = \delta_{k,1} \\ \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

При $k=1$ получаем резонанс, поэтому рассмотрим отдельно:

$\underline{k=1}$, $\mu \equiv \mu_1^{(0)}$

$$T_{одн} = C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t)$$

$$\tilde{T}_ч = \alpha \cdot t \cos(\mu t)$$

$$\ddot{\tilde{T}}_ч = \left(\alpha \cos(\mu t) - \alpha t \mu \sin(\mu t)\right)'_t = -\alpha \mu \sin(\mu t) \cdot 2 -$$

$$- \alpha t \mu^2 \cos(\mu t)$$

$$-\alpha \mu \sin(\mu t) \cdot 2 - \cancel{\alpha t \mu^2 \cos(\mu t)} + \cancel{\mu^2 \alpha t \cos(\mu t)} = a_1 \sin(\mu t)$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2\mu} \hookrightarrow \tilde{T}_ч = -\frac{a_1 t}{2\mu} \cos(\mu t)$$

$$\dot{T}(0) = C_2 \mu - \frac{a_1}{2\mu} = 0 \hookrightarrow C_2 = \frac{a_1}{2\mu^2}$$

Тогда учитывая нач. усл-ия, получаем $T_1 = \cos(\mu t) - \frac{a_1 t}{2\mu} \cos(\mu t) +$

$$+ \frac{a_1}{2\mu^2} \sin(\mu t) \quad (2)$$

Теперь рассмотрим нерезонансный случай:

$\underline{k \neq 1}$ $\quad T_{одн} = C_1 \cos(\mu_k^{(0)} t) + C_2 \sin(\mu_k^{(0)} t)$

$$\tilde{T}_ч = \alpha \sin(\mu_1^{(0)} t)$$

$$\ddot{\tilde{T}}_ч = -\alpha \left(\mu_1^{(0)}\right)^2 \sin(\mu_1^{(0)} t) + \alpha \left(\mu_k^{(0)}\right)^2 \sin(\mu_1^{(0)} t) = a_k \sin(\mu_1^{(0)} t)$$

Откуда $\alpha = \frac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \hookrightarrow \tilde{T}_1 = \frac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \sin(\mu_1^{(0)} t)$

$\dot{T}_k(0) = C_2 \mu_k^{(0)} + \frac{a_k \mu_1^{(0)}}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} = 0 \hookrightarrow C_2 = \frac{a_k \mu_1^{(0)}}{(\mu_1^{(0)})^2 - (\mu_k^{(0)})^2} \cdot \frac{1}{\mu_k^{(0)}}$

Тогда учитывая начальные усл-ия, получим:

(3) $T_k = \frac{1}{\mu_k^{(0)}} \frac{\mu_1^{(0)} a_k}{(\mu_1^{(0)})^2 - (\mu_k^{(0)})^2} \sin(\mu_k^{(0)} t) + \frac{a_k}{(\mu_k^{(0)})^2 - (\mu_1^{(0)})^2} \sin(\mu_1^{(0)} t), \ k \neq 1$

Ответ задачи получим, подставив (2), (3) в (1)

T3

$$u_t = \Delta u + y + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r) \qquad x^2 + y^2 < 1, \ t > 0$$

$$u|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad x^2 + y^2 < 1$$

$$u|_{r=1} = ty, \quad x^2 + y^2 = 1, \ t > 0$$

Замена $u = v + ty$

$$v_t = \Delta v + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r)$$

$$v|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v|_{r=1} = 0$$

Задача А: $w_t = \Delta w + e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} J_0(\mu_2^{(0)} r)$

$$w|_{t=0} = 0$$

$$w|_{r=1} = 0$$

$w = T(t) J_0(\mu_2^{(0)} r) \quad (1A)$

$\dot{T} + (\mu_2^{(0)})^2 T = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \qquad T(0) = 0$

$T_{одн.} = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \cdot C$

$\tilde{T}_ч = Bt\, e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t}$

$B e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} - Bt(\mu_2^{(0)})^2 e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} + Bt\, e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t}(\mu_2^{(0)})^2 = e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t} \hookrightarrow B = 1$

Используя нач. усл-ия: $T = t e^{-(\mu_2^{(0)})^2 t}$ (2А)

Подставив (2А) в (1А), получим решение задачи А.

Задача Б:

$\tilde{w}_t = \Delta \tilde{w}$

$\tilde{w}|_{t=0} = J_2(\mu_3^{(2)} r)\cos(2\varphi - \frac{\pi}{6})$

$\tilde{w}|_{r=1} = 0$

$\tilde{w} = T(t)\, J_2(\mu_3^{(2)} r)\cos(2\varphi - \frac{\pi}{6})$ (1Б)

$\begin{cases} \dot{T} + (\mu_3^{(2)})^2 T = 0 \\ T(0) = 1 \end{cases} \rightarrow T = e^{-(\mu_3^{(2)})^2 t}$ (2Б)

Подставив (2Б) в (1Б), получим решение задачи Б.

Решение исходной задачи есть $u = w + \tilde{w} + ty$

20.23(2)

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

$$u|_{r=R} = 0, \quad u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = F(r).$$

Заметим, что $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \equiv \Delta u$ в сферич. коорд.

Поэтому получим, что $u_{tt} = a^2 \Delta u$.

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } a_k = \frac{\int_0^R r f(r) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

$$F(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } b_k = \frac{\int_0^R r F(r) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

(1) $u = \sum_{k=1}^{\infty} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$

Получим следующую систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T(t) \cdot \left(-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2\right) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Это равносильно системе:

$$\begin{cases} \ddot{T} + \frac{a^2 (\mu_k^{(0)})^2}{R^2} T = 0 \\ T(0) = a_k \\ \dot{T}(0) = b_k \end{cases} \rightarrow T = a_k \cos\left(\frac{a \mu_k^{(0)}}{R} t\right) + \frac{b_k R}{a \mu_k^{(0)}} \sin\left(\frac{a \mu_k^{(0)}}{R} t\right) \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим решение задачи.

20.38 $(xu_x)_x = u_{tt}, \quad 0 < x < \frac{1}{4}, \quad t > 0$

$u|_{x=1/4} = 0, \quad t \geq 0$

$u|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}\sqrt{x}), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

Сделаем замену $r = \sqrt{x}, \quad 0 < r < \frac{1}{2}$

$u(x,t) \leftrightarrow v(r,t) \ : \ u(x,t) \equiv v(\sqrt{x}, t)$

$u_x = v_r \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$u_{xx} = v_r\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}} + v_{rr}\frac{1}{4}x^{-1} = -\frac{1}{4r^3}v_r + \frac{1}{4r^2}v_{rr}$

Откуда исходная задача станет следующей:

$v_{tt} = r^2\left(-\frac{1}{4r^3}v_r + \frac{1}{4r^2}v_{rr}\right) + v_r\frac{1}{2r}$

$v|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}r), \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v|_{r=\frac{1}{2}} = 0$

Упрощая, и учитывая, что $v_{rr} + \frac{1}{r}v_r \equiv \Delta v$, получим:

$v_{tt} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Delta v$

$v|_{t=0} = J_0(2\mu_1^{(0)}r), \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v|_{r=\frac{1}{2}} = 0$

$v = T(t)\, J_0(2\mu_1^{(0)}r)$

Получим систему:

$$\begin{cases} \ddot{T}\, J_0(2\mu_1^{(0)}r) + \frac{1}{4}4(\mu_1^{(0)})^2\, T\, J_0(2\mu_1^{(0)}r) = 0 \\ T(0)\, J_0(2\mu_1^{(0)}r) = J_0(2\mu_1^{(0)}r) \\ \dot{T}(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow T = \cos(\mu_1^{(0)}t)$$

Ответ: $u = \cos(\mu_1^{(0)}t)\cdot J_0(2\mu_1^{(0)}\sqrt{x})$

20.60(2)

$$u_t = \frac{1}{a^2}\Delta u$$

$u|_{t=0} = 0$, $u|_{r=R} = u_0$

Сделаем замену $v = u - u_0$

Получим следующую задачу:

$$v_t = \frac{1}{a^2}\Delta v$$

$v|_{t=0} = -u_0$, $u|_{r=R} = 0$

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right), \text{ где } a_k = \frac{\int_0^R r u_0 J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) dr}$$

Ищем решения в виде:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Получим систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} T(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$

Она равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dot{T} + \frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} T = 0 \\ T(0) = -a_k \end{cases} \to T = C e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t}$$

Учитывая нач. усл-ия, получим $T = -a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t}$

Тогда $v = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$

Решение исходной будет

$$u = u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}{R^2} t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right)$$