Задача 20.1

Вычислить (K_i, p_j), (K_i, K_j), (K^2, K_j), (x_i, K_j)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} x_2 p_3 - p_2 x_3 \\ p_1 x_3 - p_3 x_1 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{bmatrix}$$

Вычислим (K_1, p_1):

$$\frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial p_1}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} \frac{\partial p_1}{\partial \vec{x}} = [0 \quad p_3 \quad -p_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- [0 \quad -x_3 \quad x_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Аналогично получим $(K_i, p_i) = 0$

Для $i \neq j$ остаётся 1 компонента у p, равная 1:

$(K_1, p_2) = -(K_2, p_1) = p_3$ $\qquad (K_3, p_1) = -(K_1, p_3) = p_2$

$(K_2, p_3) = -(K_3, p_2) = p_1$

Вычислим (x_i, K_j):

$$\frac{\partial x_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial x_i}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial x_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}}$$

Получим $(x_i, K_i) = 0$

Для $i \neq j$ остаётся 1 компонента у x, равная 1:

$(x_1, K_2) = -(x_2, K_1) = x_3$ $\qquad (x_3, K_1) = -(x_1, K_3) = x_2$

$$(x_2, K_3) = -(x_3, K_2) = x_1$$

Вычислим (K_i, K_j):

$$\frac{\partial K_i}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_i}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_j}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \text{для } i = j$$

Иначе:

$$\frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{x}} = [0 \ p_3 \ -p_2] \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} - [0 \ -x_3 \ x_2] \begin{bmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{bmatrix} =$$

$$= K_3$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_3}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_3}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_2}{\partial \vec{p}} = [-p_3 \ 0 \ p_1] \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} - [p_2 \ -p_1 \ 0] \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= K_1$$

$$\frac{\partial K_3}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_1}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial K_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial K_3}{\partial \vec{p}} = [p_2 \ -p_1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} - [0 \ p_3 \ -p_2] \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= K_2$$

Вычислим $(K^2, K_j) = (K_1^2, K_j) + (K_2^2, K_j) +$
$+ (K_3^2, K_j) = 2K_1(K_1, K_j) + 2K_2(K_2, K_j) + 2K_3(K_3, K_j) =$
$= 0$ – т.к. скобки либо занулятся, либо сократятся

Задача 20.15

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Y(f) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial Y(f)}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial X}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ где } Z_i = X(Y_i) - Y(X_i)$$

Задача 20.16

Док-ть $((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) + ((f, \varphi), \psi) \equiv 0$,

где $\varphi = \varphi(q, p, t)$, $\psi = \psi(q, p, t)$, $f = f(q, p, t)$

Пусть $f = f(q, p, t) \equiv \chi(q, p, t)$, а f - ф-ция $f(x_1, .., x_n)$

Пусть A и B - дифф. операторы первого порядка над ф-цией $f(x_1, x_2, .., x_n)$:

$$Af = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_1, .., x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{и} \quad Bf = \sum_{k=1}^{n} B_k(x_1, .., x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

По задаче 20.15 „коммутатор"

$C = AB - BA$ также будет оператором первого порядка $Cf = A(Bf) - B(Af) = \sum_{k=1}^{n} [A(B_k) - B(A_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}$

Скобки Пуассона можно рассматр. как применение оператора к ф-ции f.

Для (φ, f) это $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}\right)$

Аналогично определим Ψ и X для ф-ций ψ и χ.

Если формально раскрыть скобки Пуассона (как например раскрывали в 20.15), то получим производные каждой из ф-ций второго порядка. Но $((\varphi, \psi), \chi)$ не содержит производн. второго порядка ф-ции χ, а сумма

$$((\psi\chi)\varphi)+((\chi\varphi)\psi)=(\psi(\varphi\chi))-(\varphi(\psi\chi))=$$

$$=(\Psi\Phi-\Phi\Psi)\chi$$ есть дифференц. оператор первого порядка относительно ф-ции χ (по доказанному ранее).

Значит в левую часть тождества Пуассона не входят производные второго порядка ф-ции χ, а в силу симметрии и произв. второго порядка ф-ций φ и ψ.

А как говорилось выше, каждый член нужного рав-ва есть произведение произв. второго порядка на две производные первого порядка.

Но мы показали, что произв. второго порядка не входят в левую часть тождества Пуассона, значит все члены тождества Пуассона взаимно уничтожаются.

Доказано.

Задача 20.30

$H_1(q,p)$ и $H_2(q,p)$. Известны решения $q(q_0, p_0, t)$ и $p(q_0, p_0, t)$ одной из систем

Найти реш. ур-ий движ. сист. с гамильтонианом $f(H_1, H_2)$, если H_1 и H_2 нах-ся в инволюции: $(H_1, H_2) = 0$.

Покажем, что H_1 и H_2 - первые интегралы для системы с гамильт. $f(H_1, H_2)$. Для этого воспольз. критерием 1-го интеграла

Для того, чтобы H_1 был перв. интегр. необх. и достаточно, чтобы $\frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + (H_1, f) = 0$

$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0$ по условию, т.к. $H_1 = H_1(q,p)$

$$(H_1, f(H_1, H_2)) = \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial q} =$$

$$= \frac{\partial H_1}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial p}\right) - \frac{\partial H_1}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial H_2}\underbrace{\left(\frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial q}\right)}_{(H_1, H_2) = 0} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial H_1}\underbrace{\left(\frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q}\right)}_{0} = 0$$

Аналогично для H_2.

Значит H_1 и H_2 - перв. интегралы системы.

Считаем H_2 - const $\hookrightarrow$ $\exists F: \ f(H_1, H_2) = F(H_1)$

Ур-ия движения:

$$\dot{q} = \frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \dot{q}^*$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial f(H_1, H_2)}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial H_1} \dot{p}^*$$

где q^* и p^* - решения сист. с гамильт. H_1.

Тогда $$q = \frac{\partial F}{\partial H_1} q^* = q\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial H_1} p^* = p\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$$

Ответ: $q = q\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$, $p = p\left(q_0, p_0, \frac{\partial F}{\partial H_1} t\right)$

(20.37) $L = f(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \Omega(t)(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)$

Док-ть, что пр-ие поворота отн. оси Ox_3 удовл. усл. теор. Нётер.

Поворот относит. Ox_3 зад-ся:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_2' = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \\ x_3' = x_3, \quad t' = t \end{cases}$$

Оно непрер. дифф., тождественно при $\varphi = 0$, $\vec{q}' = \vec{q}$.

Проверим инвариантность лагранжиана относит. этого пр-ия:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\vec q}, \vec q, t)\,dt = \int_{t_0'}^{t_1'} L \frac{dt}{dt'}\,dt' = \int_{t_0'}^{t_1'} L'\,dt'$$

$$\delta W = \delta \int_{t_0'}^{t_1'} L'\,dt' = 0$$ на прямом пути

$$L'(\dot{\vec q}', \vec q', t') = L(\dot{\vec q}, \vec q, t)\frac{dt}{dt'}$$

А так как $t' = t$, то $\frac{dt}{dt'} = 1$ и

$$L' = L(\dot{\vec q}, \vec q, t) = f(\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + \dot x_3^2) + \Omega(t)(x_1 \dot x_2 - x_2 \dot x_1) =$$

$$= f\left[(\dot x_1 \cos\varphi - \dot x_2 \sin\varphi)^2 + (\dot x_1 \sin\varphi + \dot x_2 \cos\varphi)^2 + \dot x_3^2\right] +$$

$$+ \Omega(t)\left[(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi)(\dot x_1 \sin\varphi + \dot x_2 \cos\varphi) -\right.$$

$$\left.- (x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)(\dot x_1 \cos\varphi - \dot x_2 \sin\varphi)\right] =$$

$$= f(\dot x_1'^2 + \dot x_2'^2 + \dot x_3'^2) + \Omega(t')(x_1' \dot x_2' - x_2' \dot x_1')$$

Лагранжиан инвариантен относит. этого пр-ия.

Вычислим первый интеграл:

$$g(\vec p, \vec q, t) = \vec p^{\,T} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} - H(\vec p, \vec q, t)\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0}$$ - перв. инт.

Ψ - пр-ие коорд. Φ - времени и $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi \\ x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Откуда $g = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi \\ x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = \underline{\underline{-x_2 p_1 + p_2 x_1 = const}}$