ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Метод Фурье

20.23(2); 20.38; 20.60(2).

1. Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, (r, φ) — полярные координаты (x, y):

а) $u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r)\cos\varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u|_{r=0}| < \infty, \quad u|_{r=6} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$

б) $4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{0,3}r), \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u|_{r=0}| < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
где μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k \in \overline{0, \infty}$, $j \in \mathbb{N}$.

2. Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$u_{tt} = \Delta u + \sin \mu_{0,1} t, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_0\left(\mu_{0,1} r\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

где μ_{01} — первый положительный ноль функции Бесселя.

3. Решить смешанную задачу для круга:

$$u_t = \Delta u + y + e^{-\mu_{0,2}^2 t} J_0(\mu_{0,2} r), \quad x^2 + y^2 < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_2(\mu_{2,3} r)\cos(2\varphi - \frac{\pi}{6}), \quad x^2 + y^2 < 1;$$

$$u|_{r=1} = ty, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad t > 0;$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \varphi(x, y)$ — полярные координаты точки (x, y), $\varphi(0, 0) = 0$; $\mu_{n,i}$ — i-тый положительный нуль функции Бесселя $J_n(\rho)$.

II. Интегральные уравнения

5.22; 5.23(5); 5.24(2); 5.25(2).

4. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin|x| + |x|y)\, \varphi(y)\, dy + a|x| + bx.$$

5. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(xe^{x^2} \cos^3 t + \frac{1-\cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t)\, dt + f(x).$$

При каких $f(x) \in C\,[-1;1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

6. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2)\, \varphi(y)\, dy + |x|^2 + \alpha,$$

$$|x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

5.34; 5.41(2); 5.44*.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Задача Штурма–Лиувилля

15.4(8); 15.15(6,7); 15.17.

1. Свести к интегральному виду задачи:

а) $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y'(\ln 2) = 0$;

б) $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha \geq 0$, f — непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция;

в) $x^2 u_{xx} - 2u = \lambda x\sqrt{x}u, \quad 0 < x < 2,$
$u(x) = O(\sqrt{x})$ при $x \to +0, \quad u(2-0) = 0$, где параметр $\lambda \neq 0$.

II. Уравнения Лапласа и Пуассона в круговых областях. Метод Фурье

16.1(3); 16.2(3).

2. Решить краевые задачи:

а) $\Delta u = 12x$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 < r < 2$,
$u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi$,
$u|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi$;

б) $\Delta u = 4\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$, $\quad 1 < r < 2, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$(2u - u_r)|_{r=1} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \quad u_r|_{r=2} = \dfrac{8x^2}{x^2+y^2}$.

3. а) Решить внутреннюю задачу Неймана для круга:

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \bar n}\right|_{x^2+y^2=1} = y + \alpha, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

для каждого значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (или доказать, что решений нет).

б) Решить краевую задачу:

$$\Delta u = \frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad r > 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$$

$$u_r|_{r=1} = -2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

III. Сферические функции

16.26(2); 16.28(2); 16.30(7); 16.31(1); 16.24*.

4. Для шара $D : x^2 + y^2 + z^2 < 4$ найти все функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar D)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in D$ и граничному условию $\left.\left(u + \dfrac{\partial u}{\partial \bar n}\right)\right|_{x^2+y^2+z^2=1} = xz^2$, $x^2+y^2+z^2 < 4$, где $\bar n$ – внешняя нормаль к границе области D.

5. Для сферического слоя $D : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$ найти все функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar D)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in D$, и граничному условию $\left.\left(u + \dfrac{\partial u}{\partial \bar n}\right)\right|_{x^2+y^2+z^2=1} = y$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar n}\right|_{x^2+y^2+z^2=4} = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, где $\bar n$ – внешняя нормаль к границе области D.

IV. Функция Грина задачи Дирихле

17.1(1,2); 17.2(2); 17.4(1); 17.11*; 17.12(3); 17.15(4).

V. Потенциалы

18.6(1); 18.16; 18.18(4); 18.19(1); 18.20; 18.22(3); 18.43*.

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков
ст. преподаватель С. И. Колесникова