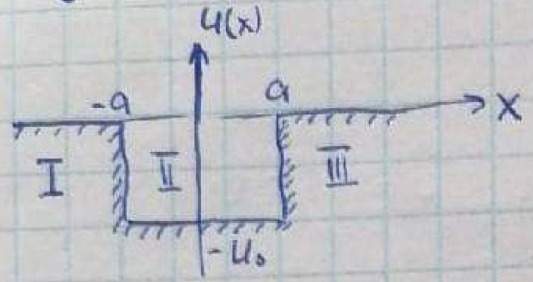
Задача 1.

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$$



Рассм. обл. I: $x<-a$.

$$\psi'' - \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{\varkappa^2}\psi = 0$$

$$\psi'' - \varkappa^2\psi = 0$$

$$\psi(x) = Ae^{\varkappa x} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0,\ \text{т.к. } \psi(x)\to 0,\ x\to-\infty}}{\tilde{A}} e^{-\varkappa x}$$

$$\psi(x) = Ae^{\varkappa x}, \quad x<-a$$

Рассм. обл. II:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - U_0\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\psi''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(\underbrace{U_0-|E|}_{>0})}_{k^2}\psi(x) = 0$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0$$

$$\psi(x) = B\cos kx + C\sin kx$$

Рассм. обл. III:

аналогично I $\hookrightarrow$ $\psi(x) = De^{-\varkappa x}$

Получим следующее:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\varkappa x}, & x<-a \\ B\cos kx + C\sin kx, & |x|<a \\ De^{-\varkappa x}, & x>a \end{cases}$$

Заметим, что $U(x) = U(-x)$, и если $\psi(x)$ - решение, то $\psi(-x)$ тоже решение с той же E. Можем искать решение в виде чётных и нечётн. ф-ций.

Сшивка:

$$\begin{cases} A e^{-\varkappa a} = B\cos ka - C\sin ka \\ A\varkappa e^{-\varkappa a} = +Bk\sin ka + Ck\cos ka \end{cases} \Bigg] \; x=-a \quad \begin{matrix}\psi \\ \psi'\end{matrix}$$

$$\begin{cases} D e^{-\varkappa a} = B\cos ka + C\sin ka \\ -\varkappa D e^{-\varkappa a} = -Bk\sin ka + Ck\cos ka \end{cases} \Bigg] \; x=a \quad \begin{matrix}\psi \\ \psi'\end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2B\cos ka = (D+A)e^{-\varkappa a} \\ 2C\sin ka = (D-A)e^{-\varkappa a} \\ 2Ck\cos ka = \varkappa(A-D)e^{-\varkappa a} \\ 2Bk\sin ka = \varkappa(A+D)e^{-\varkappa a} \end{cases}$$

Из симметрии $A = D$ (чётн.) либо $A = -D$ (нечётн)

1) $A = D \hookrightarrow \quad k\,tg\,ka = \varkappa, \quad C = 0, \quad B = \dfrac{Ae^{-\varkappa a}}{\cos ka}$

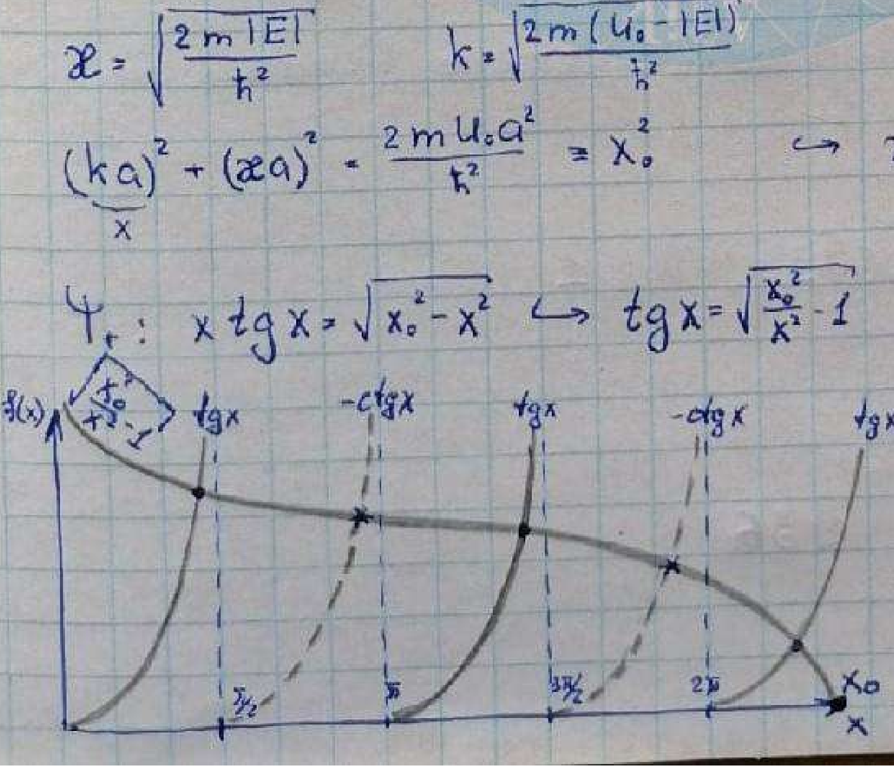
2) $A = -D \hookrightarrow \quad k\,ctg\,ka = -\varkappa, \quad B = 0, \quad C = \dfrac{Ae^{-\varkappa a}}{\sin ka}$

Это трансцендентные ур-ия, решим графически

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2m(U_0 - |E|)}{\hbar^2}} \qquad k^2 + \varkappa^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}$$

$$\underbrace{(ka)}_{x}{}^2 + (\varkappa a)^2 = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2} = X_0^2 \quad \hookrightarrow \quad \varkappa a = \sqrt{X_0^2 - x^2}$$

$$\psi_+ : \; x\,tg\,x = \sqrt{X_0^2 - x^2} \hookrightarrow tg\,x = \sqrt{\frac{X_0^2}{x^2} - 1} \qquad \psi_- : \; ctg\,x = -\sqrt{\frac{X_0^2}{x^2} - 1}$$



Координаты точек пересеч. – дадут k и $\varkappa$

$k = \dfrac{x}{a}$, $\varkappa = \sqrt{\dfrac{2mU_0}{\hbar^2} - \dfrac{x^2}{a^2}}$

Откуда и получим уровни энергии

т.к. $U_0 + E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} X_n^2 \hookrightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} X_n^2 - U_0$

Число решений опр-ся X_0: $N = \left[\frac{X_0}{\pi/2}\right] + 1 = \left[\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}}\right] + 1$

для чётных ф-ций всегда есть решение.

Определим значения коэф. B, A, C из усл-ия нормировки:

чётн. случ.: $\int_{-\infty}^{-a} B^2 e^{2\varkappa a} \cos^2 ka \, e^{2\varkappa x} dx + \int_{-a}^{a} B^2 \cos^2 kx \, dx +$

$+ \int_{a}^{\infty} e^{-2\varkappa x} B^2 e^{2\varkappa a} \cos^2 ka \, dx = 1 \hookrightarrow B = \left(\sqrt{a + \frac{\sin 2ka}{2k} + \frac{\cos^2 ka}{\varkappa}}\right)^{-1}$

Откуда найдём A.

нечётн. случ.: $C = \left(\sqrt{a - \frac{\sin 2ka}{2k} + \frac{\sin^2 ka}{\varkappa}}\right)^{-1}$ Откуда найдём A.

Если $U_0 \to 0$, то $X_0 \to 0$. Из графика видно, что если Ψ - нечётн., то связанных состояний может не быть. Если Ψ - чётн., то связ. сост. есть всегда.

Оценим число уровней электрона в металл. обр. $U_0 = 10$ эВ:

а) $a = 0{,}1$ нм

$X_0 = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2} = 0{,}073$, $N = 1$

б) $a = 10$ нм

$X_0 = 734$, $N = 468$

в) $a = 1$ см

$X_0 = 734 \cdot 10^{12}$ $N = 4{,}7 \cdot 10^{14}$