(T1)

а) $u_t = \Delta u - 8u + 4t\, f(r)\cos\varphi$, $0<r<6$, $0\le\varphi<2\pi$, $t>0$

$u|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi$ $\quad 0<r<6$, $0\le\varphi<2\pi$

$|u|_{r=0} < \infty$, $u|_{r=6} = 0$ $\quad 0\le\varphi<2\pi$, $t>0$

Разобьём на 2 подзадачи:

Задача А. (1А) $v_t = \Delta v - 8v + 4t\, f(r)\cos\varphi$

(2А) $v|_{t=0} = 0$, (3А) $v|_{r=6} = 0$

Шаг 1: разложим $f(r)$ в ряд Фурье-Бесселя

(4А) $f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)$, где $a_k = \dfrac{\int_0^6 r\cdot f(r)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right) dr}{\int_0^6 r\cdot J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right) dr}$ (5А)

Шаг 2: ищем решения в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \quad (6А)$$

Подставляем (6А) в (1А)-(2А):

(1А) $\rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \underset{r,\varphi,t}{\equiv} \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k \underbrace{\Delta\left[J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi\right]}_{-\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6}\right)^2 J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi}$ -

$- \sum\limits_{k=1}^{\infty} 8\, T_k(t)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4t\, a_k\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi$

(2А) $\rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6} r\right)\cos\varphi \underset{r,\varphi}{\equiv} 0$

Достаточно потребовать $(\forall k\in N)$ чтобы выполнялись

усл-ия: $\begin{cases} (7А) & \dot{T}_k(t) + \left[\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{6}\right)^2 + 8\right] T_k(t) = 4a_k t \\ (8А) & T_k(0) = 0 \end{cases}$

Общ. решение однородного $T_k = C_k e^{-\gamma_k t}$

Частн. реш. ищем в виде $\tilde{T}_k = \alpha_k t + \beta_k$

$$\alpha_k + \gamma_k \alpha_k t + \beta_k \gamma_k = 4 a_k t \quad \to \quad \alpha_k = \frac{4a_k}{\gamma_k}$$

$$\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k} = -\frac{4a_k}{\gamma_k^2}$$

$$T_k = C_k e^{-\gamma_k t} + \frac{4a_k t}{\gamma_k} - \frac{4a_k}{\gamma_k^2}$$

С учётом начального усл-ия $C_k = \frac{4a_k}{\gamma_k^2}$

Реш. задачи Коши:

$$T_k = \frac{4a_k}{\gamma_k^2}\left(e^{-\gamma_k t} - 1\right) + \frac{4a_k t}{\gamma_k} \quad (9А)$$

Подставляя (9А) в (6А), получим решение зад. А

<u>Задача Б</u>

(1Б) $w_t = \Delta w - 8w$

(2Б) $w|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi$ (3Б) $w|_{r=6} = 0$

<u>Шаг 1</u>: $g(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)$ (4Б), где

$$b_k = \frac{\int_0^6 r \cdot g(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right) dr}{\int_0^6 r \cdot J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right) dr} \quad (5Б).$$

<u>Шаг 2</u>:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \quad (6Б)$$

Подставим (6Б) в (1Б), (2Б):

$$(1Б) \to \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Q}_k(t)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \underset{r,\varphi,t}{=} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\, \underline{\Delta\left[J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi\right]} -$$

$$\underline{\Delta\left[J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi\right]} = -\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6}\right)^2 J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} 8 Q_k(t)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi$$

$$(2Б) \to \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(0)\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi \underset{r,\varphi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6} r\right)\cos 3\varphi$$

Достаточно потребовать:

$(7Б)$ $\dot{Q}_k(t) + \left[\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6}\right)^2 + 8\right] Q_k(t) = 0$

$(8Б)$ $Q_k(0) = b_k$

Решение есть $(9Б)$ $Q_k = b_k e^{-\gamma_k t}$

Подставив $(9Б)$ в $(6Б)$, получим реш. задачи Б.

Решение исходной есть $u = v + w$

б) $4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi \quad ; \; 0<r<1, \; 0\le\varphi<2\pi, \; t>0$

$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_3^{(0)} r), \quad 0<r<1, \; 0\le\varphi<2\pi$

$u|_{r=1} = 0 \quad 0\le\varphi<2\pi, \; t>0$

Задача А:

$$v_{tt} = \frac{1}{4}\Delta v + \frac{1}{8} f(r) \qquad (1A)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = J_0(\mu_3^{(0)} r) \qquad (2A)$$

$$\frac{1}{8} f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad a_k = \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(\mu_k^{(0)} r)\,dr}{\int_0^1 r J_0^2(\mu_k^{(0)} r)\,dr}$$

$$(3A) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Подставим $(3A)$ в $(1A)$-$(2A)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t)\, J_0(\mu_k^{(0)} r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} T_k(t)\left(-(\mu_k^{(0)})^2\right) J_0(\mu_k^{(0)} r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, J_0(\mu_k^{(0)} r) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0)\, J_0(\mu_k^{(0)} r) = J_0(\mu_k^{(0)} r)$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4} T_k (\mu_k^{(0)})^2 = a_k \\ T_k(0) = 0, \quad \dot{T}_k(0) = \delta_{k3} \end{cases}$$

Общ. реш. однородн. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right)$

Частн. реш. неодн. $\tilde{T}_k = \frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2}$

(4А) $\begin{cases} \text{Используя нач. усл-ия: } T_k = -\frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2} \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} t\right) + \frac{4a_k}{(\mu_k^{(0)})^2}, \ k \neq 3 \\ T_3 = -\frac{4a_3}{(\mu_3^{(0)})^2} \cos\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} t\right) + \frac{4a_3}{(\mu_3^{(0)})^2} + \frac{2}{\mu_3^{(0)}} \sin\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} t\right) \end{cases}$

Подставив (4А) в (3А), получим решение задачи А

<u>Задача Б:</u>

$$\tilde{v}_{tt} = \frac{1}{4} \Delta \tilde{v} - \frac{1}{8} f(r) \cos 4\varphi \qquad (1Б)$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = 0 \qquad \tilde{v}_t|_{t=0} = 0 \qquad (2Б)$$

(3Б) $\frac{1}{8} f(r) = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_4(\mu_k^{(4)} r), \quad a_k = \frac{\int_0^1 r f(r) J_4(\mu_k^{(4)} r)\, dr}{\int_0^1 r J_4^2(\mu_k^{(4)} r)\, dr}$

(4Б) $\tilde{v} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi$

Подставим (4Б) в (1Б)-(2Б):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_4(\mu_k^{(4)} r)^{\cos 4\varphi} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(-(\mu_k^{(4)})^2\right) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi -$$

$$- \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0) J_4(\mu_k^{(4)} r) \cos 4\varphi = 0$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4} T_k (\mu_k^{(4)})^2 = -\frac{1}{8} a_k \\ T_k(0) = 0 \quad , \quad \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Общ. реш. однор. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right)$

Частн. реш. неоднор. $\tilde{T}_k = -\frac{1}{2(\mu_k^{(4)})^2} a_k$

Используем нач. усл-ия: $T_k = \frac{a_k}{2(\mu_k^{(4)})^2} \cos\left(\frac{\mu_k^{(4)}}{2} t\right) - \frac{a_k}{2(\mu_k^{(4)})^2}$ (5Б)

Подставив (5Б) в (4Б), получим решение зад. Б

Задача В:

(1В) $w_{tt} = \frac{1}{4} \Delta w$

(2В) $w|_{t=0} = g(r) \cos 2\varphi$, $w_t|_{t=0} = 0$

(3В) $g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2(\mu_k^{(2)} r)$, $a_k = \dfrac{\int_0^1 r g(r) J_2(\mu_k^{(2)} r) dr}{\int_0^1 r J_2^2(\mu_k^{(2)} r) dr}$

(4В) $w = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi$

Подставим (4В) в (1В)-(2В):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(-(\mu_k^{(2)})^2\right) J_2(\mu_k^{(2)} r) \cos 2\varphi \, T_k(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(0)\, J_2(\mu_k^{(2)} r)\cos 2\varphi = 0$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{T}_k + \frac{1}{4}(\mu_k^{(2)})^2 T_k = 0 \\ T_k(0) = a_k, \quad \dot{T}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Общ. реш. есть $T_k = C_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right) + D_k \sin\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right)$

Использ. нач. усл-ия: $T_k = a_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} t\right)$ (5B)

Подставив (5B) в (4B), получим решение зад. B

Решение исходной задачи есть $u = v + \tilde{v} + w$.