

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2022 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая механика
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: ФАКТ

кафедра: теоретической физики
курс: 4
семестр: 7

лекции – 30 часов Экзамен – 7 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н.
З.В. Хайдуков

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
21 мая 2022 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.

Э. Т. Ахмедов

Приближенные методы квантовой механики

1. Стационарная теория возмущений в дискретном спектре

Постановка задачи теории возмущений, стационарный случай. Ряд стационарной теории возмущений. Поправки к состояниям и уровням энергии дискретного спектра. Случай вырожденного энергетического спектра.

2. Метод функции Грина в теории возмущений

Функция Грина стационарного уравнения Шредингера. Непрерывный спектр. Функция Грина свободной частицы. Интегральное уравнение и задача о рассеянии. Общий вид волновой функции частицы в задаче о рассеянии, упругое рассеяние. Амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение рассеяния. Борновское приближение, особенности рассеяния медленных и быстрых частиц.

3. Нестационарная теория возмущений

Представление взаимодействия, ряд нестационарной теории возмущений, понятие хронологизованного произведения. Функция Грина нестационарного уравнения Шредингера. Представление ряда теории возмущений в виде диаграмм Фейнмана. Вероятность перехода, критерии применимости нестационарной теории возмущений. Соотношение неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике. Возмущения, действующие на системы с непрерывным спектром, вероятность переходов в единицу времени, “золотое правило” Ферми. Квазистационарные состояния, время жизни и мнимая поправка к дискретному уровню энергии.

4. Релятивистские поправки к уравнению Шредингера.

Гамильтониан заряженной частицы в магнитном поле. Понятие калибровочной производной и калибровочной симметрии. Магнитный момент, оператор магнитного момента, его связь со спином частицы. Гамильтониан Паули. Калибровочное преобразование полей и уравнение Шредингера. Спин-орбитальное взаимодействие. Состояния заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле, уровни Ландау. Магнитное диполь-дипольное взаимодействие, сверхтонкое взаимодействие в атоме.

Квантовая механика систем многих частиц

1. Сложные (составные) системы

Состояние системы, состоящей из двух не взаимодействующих подсистем, связь между различными базисами. Сложение моментов, матрица коэффициентов Клебша-Гордана как матрица перехода между

двумя представлениями. Описание слабо взаимодействующих систем, применение теории возмущений. Описание системы связанных гармонических осцилляторов. Действие операторов в составных системах.

2. Методы описания тождественных частиц

Ферми- и бозе-частицы, их связь со спином. Связь многочастичного и одночастичного базисов, детерминант Слеттера, перманент. Разделение координатной и спиновой частей волновой функции системы невзаимодействующих тождественных частиц. Описание систем слабо взаимодействующих тождественных частиц. Обменное взаимодействие.

3. Представление чисел заполнения

Основное состояние и понятие элементарных возбуждений. Описание систем тождественных частиц в представлении чисел заполнения. Представление чисел заполнения, операторы рождения и уничтожения. Гамильтониан системы тождественных частиц с парным взаимодействием.

Сложный атом

1. Атом гелия

Гамильтониан атома гелия. Учет взаимодействия электронов по теории возмущений. Спинные функции двух электронов. Основное состояние, пара- и ортосостояния. Обменное взаимодействие. Вариационный принцип, вычисление энергии основного состояния. Самосоглазованное поле, метод Хартри–Фока.

2. Сложный атом

Приближение центрального поля. Нулевое приближение. Электронные конфигурации. Интегралы движения в сложных атомах. Первое и второе приближение, термы. Правила Хунда. LS -связь. Тонкая структура уровней.

3. Атом в классическом электромагнитном поле

Гамильтониан сложного атома в магнитном поле. Оператор взаимодействия атома с электромагнитным полем. Иерархия магнитных взаимодействий в атомных системах. Расщепление термов во внешнем однородном магнитном поле. Эффекты Зеемана и Пашена–Бака. Правило интервалов Ланде. Парамагнетизм и диамагнетизм атомов, парамагнетизм Ван Флека. Взаимодействие с переменным магнитным полем.

Основы теории излучения

1. Свободное электромагнитное поле

Гамильтониан свободного электромагнитного поля, представление в виде не взаимодействующих осцилляторов. Энергетический спектр электромагнитного поля. Фотоны, операторы рождения и уничтожения фотонов. Произвольное состояние электромагнитного поля и его связь с основным состоянием или вакуумом. Операторы векторного потенциала и электрического и магнитного полей.

2. Взаимодействие атомов со свободным электромагнитным полем

Гамильтониан системы зарядов с учетом свободного электромагнитного поля, оператор взаимодействия. Учет взаимодействия по теории возмущений для нерелятивистской системы. Невозмущенный гамильтониан и невозмущенные состояния. Переходы между состояниями невозмущенной системы, спонтанное и индуцированное излучение и поглощение электромагнитного поля. Время жизни возбужденного состояния системы зарядов. Электрическое дипольное излучение, правила отбора. Рассеяние фотонов на атомах.

Основы фазовой теории рассеяния

Задача двух тел и общая постановка задачи в теории рассеяния. Метод парциальных волн. Фазы рассеяния. Выражение амплитуды рассеяния через фазы рассеяния. Рассеяние медленных частиц, длина рассеяния. Рассеяние быстрых частиц. Рассеяние в квазиклассическом приближении. Резонансное рассеяние. Неупругое рассеяние. Оптическая теорема. Особенности рассеяния тождественных частиц.

Матрица плотности

Матрица плотности, понятие чистых и смешанных состояний. Свойства матрицы плотности. Открытые системы и применение формализма матрицы плотности для их описания. Уравнение Лиувилля. Понятие сепарабельных и несепарабельных состояний, запутанные состояния (entanglement). Роль смешанных состояний в современной физике. Неравенства Белла и их нарушение в квантовой механике.

Начала релятивистской квантовой механики.

Релятивистские волновые уравнения. Уравнение Клейна–Гордона–Фока. Уравнение Дирака. Матрицы Дирака и их свойства. Киральный базис. Релятивистская ковариантность уравнения Дирака. Уравнение Вейля. Уравнение Дирака во внешнем магнитном поле.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : Наука, 2004.
2. *Белоусов Ю.М.* Методы теоретической физики. Ч. 1. – Москва : МФТИ, 2010.
3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.
4. *Белоусов Ю.М.* Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория. – Москва : МФТИ, 2006.

Дополнительная

1. *Мессиа А.* Квантовая механика. – Москва : Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
2. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.
3. *Белоусов Ю.М., Манько В.И.* Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике. Ч. 1. – Москва : МФТИ, 2004.
4. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смылга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – Москва : МФТИ, 2005.
5. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смылга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2009.

ЗАДАНИЕ 1

Упражнения

- 1.^C Вычислите матричные элементы оператора дипольного момента для состояний первого возбужденного уровня энергии атома водорода ($n = 2$). (2)
- 2.^C Найдите явный вид оператора взаимодействия изотропного гармонического осциллятора с однородным полем в представлении взаимодействия. (1)
3. Получите выражения операторов координаты и импульса свободной частицы в представлении Гайзенберга. (2)
- 4.^C Используя понижающий оператор \hat{S}_- , постройте собственные функции операторов $\hat{\mathbf{S}}^2$ и \hat{S}_z двух бозонов со спинами $s_1 = s_2 = 1$ ($\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$, $\hat{S}_- = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}$). (3)
5. Вычислите средние значения операторов $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}})$, $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{j}})$ и $(\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{s}})$ в состоянии $|l, s, j, m_j\rangle$. (2)
6. Пусть волновая функция преобразуется по закону $\psi'(x, y, z) = e^{i\alpha(x, y, z)}\psi(x, y, z)$. Каким образом связаны поля A'_i и A^i , входящие в ковариантную производную ($D_i = \partial_i - ieA_i(x, y, z)$), которая подчиняется условию:

$$\begin{aligned} & \partial_i \psi'(x, y, z) - ieA'_i(x, y, z)\psi'(x, y, z) = \\ & = e^{i\alpha(x, y, z)}(\partial_i \psi(x, y, z) - ieA_i(x, y, z)\psi(x, y, z)). \end{aligned} \quad (1)$$

Напишите Лагранжиан, который инвариантен относительно полученного закона преобразования. (3)

- 7.* Выведите формулу для плотности тока вероятности электрона в магнитном поле. (3)

ЗАДАЧИ

- 1.^C В квазиклассическом приближении найти энергетический спектр связанных состояний частицы в потенциале вида $U = -U_0 \chi^2(x/a)$. (3)
- 2.^C Вычислите электрическую поляризуемость атома водорода, находящегося в основном состоянии. (3)

- 3.^C Определите расщепление уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом $n = 2$ в однородном электрическом поле (эффект Штарка). Как зависит энергия расщепления от напряженности поля? Найдите правильные волновые функции нулевого приближения. (2)
- 4.* В результате β -распада ядра атома трития образуется ион ${}^3\text{He}^+$. Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: а) в основном состоянии; б) на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей? (4)
5. Найдите в борновском приближении дифференциальные и полные сечения рассеяния частицы в полях:

$$a) V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}, \quad б) V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

В случае а) покажите, что в пределе $\kappa \rightarrow 0$ дифференциальное сечение принимает вид Резерфордского сечения рассеяния заряженной частицы на отталкивающем кулоновском центре. Запишите критерии применимости борновского приближения для рассматриваемых случаев. (3)

6. Уровни энергии невозмущенной системы зависят от параметра λ и при некотором значении λ_0 два уровня энергии пересекаются: $E_1^{(0)}(\lambda_0) = E_2^{(0)}(\lambda_0)$. В начальный момент времени система находится на первом уровне в состоянии $\psi_1^{(0)}$. Определите вероятность найти систему в состоянии $\psi_2^{(0)}$ в момент времени t , если на систему накладывается малое постоянное возмущение \hat{V} , причем $V_{11} = V_{22} = 0$, но $V_{12} = V_{21}^* \neq 0$. (2)
- 7.^C На мюон, покоящийся в сильном однородном магнитном поле $\mathbf{H} \parallel z$, падает слабое циркулярно поляризованное радиочастотное поле $\mathbf{h}(t) \perp \mathbf{H}$. Найдите зависимость от времени вектора спинового состояния $|\chi(t)\rangle$ и поляризации мюона $\mathbf{P}(t) = \langle \chi(t) | \hat{\boldsymbol{\sigma}} | \chi(t) \rangle$, если в начальный момент $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$. (2)
- 8.* Покоящийся мюон помещен в магнитное поле $\mathbf{H}(t)$, медленно прецессирующее вокруг оси z , составляя с ней постоянный угол θ . Найдите зависимость от времени вектора спинового состояния $|\chi(t)\rangle$ и поляризации $\mathbf{P}(t)$ мюона, если в начальный момент времени его состояние $|\chi(0)\rangle$ определяется положительной проекцией спина на направление магнитного поля. Покажите, что

$\mathbf{P}(t)$ следует за направлением магнитного поля. Покажите, что за один полный оборот вектора магнитного поля спиновая функция приобретает фазу, пропорциональную телесному углу, который охватывает вектор $\mathbf{H}(t)$ (фаза Берри). (6)

9. Найдите вероятность перехода частицы, находящейся в связанном состоянии δ -ямы ($U = \hbar^2 \kappa / m \delta(x)$) в непрерывный спектр под влиянием внешнего поля вида

$$\hat{V}(x, t) = Fx \cos \omega t$$

в случае $\hbar\omega > \hbar^2 \kappa^2 / 2m$. (2)

- 10.^C Исследуйте стационарные состояния бесспиновой частицы с зарядом e и массой m в постоянном и однородном магнитном поле \mathbf{H} . Найдите уровни энергии (уровни Ландау) и кратности их вырождения, считая, что движение частицы ограничено большим объемом V (с линейными размерами L). Решите задачу в декартовых и цилиндрических координатах. (3)

- 11.* Гамильтониан фермионной системы задается в виде

$$H = \sum_{i=x,y,z} p_i \sigma_i, p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2)$$

σ_i - матрицы Паули. Запишите Гамильтониан во внешнем однородном магнитном поле, которое направлено вдоль оси z (можно выбрать калибровку $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$). Покажите каким образом преобразуется Гамильтониан при осуществлении калибровочного преобразования. В калибровке \mathbf{A} перепишите Гамильтониана при помощи операторов рождения и уничтожения. (5)

- 12.^C Найдите величину сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода. Вычислите длину волны излучения, испускаемого при переходе между расщепленными подуровнями. (3)
- 13.* Найдите величину тонкого расщепления состояния атома водорода с главным квантовым числом n и орбитальным квантовым числом l . Выразите величину этого расщепления в атомных единицах энергии. Нарисуйте схему расщепленных уровней с $n = 3$. (6)

ЗАДАНИЕ 2

Упражнения

- 1.^C Операторы \hat{f} и \hat{g} удовлетворяют коммутационному соотношению $[\hat{f}, \hat{g}] = iC$, где C – число. Докажите справедливость соотношения (правило “расщепления” операторных экспонент) (1):

$$e^{\hat{f}+\hat{g}} = e^{\hat{f}} e^{\hat{g}} e^{iC/2}.$$

2. Докажите, что для операторов рождения и уничтожения бозе-частиц, соответственно \hat{b}^\dagger и \hat{b} , имеет место тождество (1):

$$e^{\tau(\hat{b}^\dagger + \hat{b})} = e^{\tau\hat{b}^\dagger} e^{\tau\hat{b}} e^{\tau^2/2}.$$

- 3.^C Докажите, что для операторов рождения и уничтожения ферми-частиц, соответственно \hat{a}^\dagger и \hat{a} , имеет место тождество (1):

$$e^{\tau(\hat{a}^\dagger + \hat{a})} = \text{ch } \tau + (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \text{sh } \tau.$$

4. Для системы N тождественных ферми-частиц, находящихся в состоянии с числами заполнения n_k : $\sum n_k = N$, вычислите среднее значение оператора $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_p$. (2)
5. Для системы N тождественных бозе-частиц, находящихся в состоянии с числами заполнения n_k : $\sum n_k = N$, вычислите среднее значение оператора $\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \hat{b}_p$. (2)
6. Выразите оператор импульса квантованного электромагнитного поля через операторы рождения и уничтожения фотонов. (2)
- 7.* Найти флуктуацию электрического поля $\langle (\Delta \mathbf{E})^2 \rangle$ в вакууме (в основном состоянии свободного электромагнитного поля). (4)
8. Вычислите следующие матричные элементы:

$$\langle 2p|\hat{x}|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{y}|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{z}|1s\rangle$$

для атома водорода. Какие правила отбора они определяют? (4)

9. То же упражнение, но для матричных элементов (4):

$$\langle 2p|\hat{p}_x|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{p}_y|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{p}_z|1s\rangle.$$

- 10.^C Покажите, что в безмассовом случае с учетом уравнения Дирака, выполняется соотношение:

$$\partial_\mu j^{5\mu} = 0, j^{5\mu} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x). \quad (3)$$

- 11.^C Пусть в двумерном случае матрицы Дирака задаются в виде:

$$\gamma_0 = \sigma_x, \gamma_1 = i\sigma_y \quad (4)$$

Найдите матрицу γ_5 . Как выглядит метрика? Запишите в явном виде 2 мерное уравнение Дирака и найдите соответствующий ему Гамильтониан. (3)

ЗАДАЧИ

- 1.^C Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний двух не взаимодействующих тождественных частиц в потенциальном ящике:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, \ x > a, \end{cases}$$

если этими частицами являются: а) ферми-частицы со спинами $s = 1/2$; б) бозе-частицы со спинами $s = 0$; в) бозе-частицы со спинами $s = 1$. Чему равна в каждом из этих случаев энергия основного состояния N частиц? (2)

- 2.* Рассмотрите фермиевские операторы a, a^+ . Найдите все канонические преобразования сохраняющие соотношения: $a^2 = 0, (a^+)^2 = 0$ и $aa^+ + a^+a = 1$. Рассмотрите представления фермиевских операторов спинными матрицами Паули:

$$\sigma_x = a + a^+, \sigma_y = i(a - a^+), \sigma_z = 2a^+a - 1 \quad (5)$$

Запишите Гамильтониан фермионного осциллятора при помощи матриц Паули. (4)

- 3.^C Гамильтониан системы двух бозе-частиц имеет вид

$$\hat{H} = E(\hat{b}_1^+\hat{b}_1 + \hat{b}_2^+\hat{b}_2 + g(\hat{b}_1\hat{b}_2 + \hat{b}_1^+\hat{b}_2^+).$$

Определите преобразование базисных состояний, диагонализующее данный гамильтониан, т.е. сводящее систему к двум не взаимодействующим подсистемам ($(u - v)$ -преобразование Боголюбова). (3)

4.* Гамильтониан системы тождественных бозе-частиц имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} E(p) \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} g(p) (\hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{-\mathbf{p}}^+ + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}),$$

где $E(p)$ и $g(p)$ зависят только от модуля импульса.

Используя результаты предыдущей задачи, определите энергетический спектр элементарных возбуждений $\varepsilon(p)$. Параметры $(u - v)$ -преобразования считать действительными и зависящими только от модуля p . Определите энергию системы в состоянии с заданным распределением квазичастиц по импульсам $n(p)$. (6)

5. Вычислите энергию основного состояния атома водорода из вариационного принципа. В качестве пробных функций возьмите: $\psi(r) = (\pi a^3)^{-1/2} \exp(-r/a)$ и $\psi(r) = (\pi b^2)^{-3/4} \exp(-r^2/2b^2)$. Определите параметры a и b . (3)

6. Пользуясь правилами Хунда, определите значения квантовых чисел L , S и J в основных состояниях следующих атомов: (а) кремния, (б) фосфора, (в) серы, (г) ванадия, (д) кобальта, (е) церия. Для случаев “а”, “б” и “в” найдите все термы. Запишите спектроскопические символы полученных состояний. (2)

7. Используя второй порядок стационарной теории возмущений, определите, как зависит энергия взаимодействия от расстояния R между: (4)

а) атомом и ионом ($\sim 1/R^4$);

б) двумя атомами ($\sim 1/R^6$).

8.^C Желтый дублет натрия соответствует оптическим переходам ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ и ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$. Исследуйте расщепление этого дублета в слабом и сильном магнитном поле. (4)

9. Выразите дифференциальное сечение рассеяния:

а) α -частиц на α -частицах,

б) протонов на протонах,

через амплитуду рассеяния двух точечных заряженных частиц друг на друге. (2)

10.^C Найдите угловое распределение фотонов, излучающихся в переходе $|2p\rangle \rightarrow |1s\rangle$ атома водорода, и время жизни $|2p\rangle$ состояния. Выразите это время в атомных единицах времени. (2)

11. Нейтрон находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0 \parallel z$. Определите время жизни состояния с проекцией спина на направление поля $m_s = +1/2$. Получите численное значение времени жизни для $H_0 = 1$ кГс. Сравните полученную величину с временем жизни нейтрона. (3)
- 12.* Используя формализм матрицы плотности, покажите, что магнитный момент электрона прецессирует в однородном постоянном магнитном поле \mathbf{H} в соответствии с уравнением Лармора. (3)
- 13.^C Найдите спектр уровней Ландау для безмассового уравнения Дирака во внешнем однородном магнитном поле, которое направлено вдоль оси z . Найдите волновую функцию для низшего уровня Ландау. (8)
- 14.** Для фермионного Гамильтониана вида:

$$H = \hbar\omega(S_- a^+ + S^+ a^-) - S_z i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6)$$

где $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, $S_i, i = x, y, z$ -операторы спина $3/2$, a, a^+ - операторы уничтожения и рождения для бозонного осциллятора.

Найдите все волновые функции для которых энергия обращается в нуль. Численно постройте зависимость энергии от импульса p_z для этих решений. (15)

Срок сдачи 1-го задания: 17.10–24.10.2022 г.

Срок сдачи 2-го задания: 05.12–12.12.2022 г.

¹ В скобках указано количество баллов за соответствующие упражнения и задачи.

За первое задание базовый балл равен **36** и дополнительный балл – **24**.

Максимально возможный балл за первое задание равен **60**.

За второе задание базовый балл равен **56** и дополнительный балл – **32**.

Максимально возможный балл за второе задание равен **88**.

Подписано в печать 15.06.2022. Формат $60 \times 84^{1/16}$.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ .

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru