§14 1(1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $E = [\alpha_0; +\infty),\ \alpha_0 > 1$

а) $E = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1$

Интеграл сх-ся $\forall \alpha > 1$, т.е. при $\forall$ фиксированном $\alpha \in E$.

Пусть $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$, а $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}$.

$\forall x \in [1, \infty)\ \forall \alpha \in E \hookrightarrow |f(x,\alpha)| \le g(x)$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, т.к. $\alpha_0 > 1$.

Значит по признаку Вейерштрасса равномерной сх-сти интеграла он ($I(\alpha)$) сх-ся равномерно на мн-ве E (даже абсолютно)

б) $\alpha \in (1, +\infty) = E_2$

Интеграл сх-ся при $\forall$ фиксир. $\alpha \in E_2$

$$\int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{\xi^{-(\alpha-1)}}{(\alpha-1)} = \frac{e^{-(\alpha-1)\ln\xi}}{\alpha-1} = \varphi(\xi, \alpha)$$

$$\sup_{\alpha>1} \int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \geqslant \varphi\left(\xi, 1 + \frac{1}{\ln\xi}\right) = e^{-1}\ln\xi$$

$$\sup_{\alpha>1} \int\limits_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \not\to 0,\ \xi \to +\infty.$$ Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

§ 14 1(2)

а) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$.

$I(\alpha)$ сх-ся $\forall \alpha \in E$

$f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x) \quad \forall x \in (0, 1) \ \forall \alpha \in E$

$\int\limits_0^1 g(x)\, dx$ сх-ся, т.к. $\alpha_0 < 1$

Значит по признаку Вейерштрасса равномерной сх-сти интеграла $I(\alpha)$ сх-ся равномерно на мн-ве E.

б) $\alpha \in (0, 1) = E_2$

Интеграл сх-ся при $\forall$ фикс. $\alpha \in E_2$

$$\int\limits_0^\xi \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1}\Bigg|_0^\xi = \frac{\xi^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} = \frac{e^{-(\alpha-1)\ln\xi}}{\alpha-1} = \varphi(\xi, \alpha)$$

$$\sup_{\alpha<1} \left| \int\limits_0^\xi \frac{dx}{x^\alpha} \right| \geq \left| \varphi\left(\xi, 1 + \frac{1}{\ln\xi}\right) \right| = \left| e^{-1} \ln\xi \right| \not\to 0, \ \xi \to 0$$

рассм. $\xi \in (0, 0.3)$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2.

§14 6(3,4)

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$ $\quad E_1 = (-\infty, 0]$

$E_2 = [0, +\infty)$

На мн-ве E_1 можем оценить:

$\frac{1}{4+(x-\alpha)^6} < \frac{1}{1+x^6}$ - сх-ся. Значит по призн. Вейерштрасса равномерной сх-сти интегр. $I(\alpha)$ сх-ся равномерно на E_1.

Рассмотрим на E_2:

запишем ~~при~~ условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \ \forall \alpha \in E_2 \hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6} \right| < \varepsilon$

$x_1 = b \quad x_2 = b+1 \quad \alpha = b$ - возьмём такие парам.

$$\int\limits_b^{b+1} \frac{dx}{4+(x-b)^6} \overset{t=x-b}{=\!=} \int\limits_0^1 \frac{dt}{4+t^6} \geqslant \int\limits_0^1 \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}.$$

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{5} \quad \forall b > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \ \exists \alpha \in E_2$:

$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6} \right| \geqslant \varepsilon.$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

Оба интеграла сх-ся при $\forall$ фикс. α

4) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ $\qquad E_1 = [0, 2]$

$E_2 = [0, +\infty)$

Рассмотрим на E_1

$t = x - \alpha \qquad I(\alpha) = \int\limits_{-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$\sup\limits_{\alpha \in E_1} \left| \int\limits_{b-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| \leq \int\limits_{b-2}^{+\infty} e^{-t^2} dt \longrightarrow 0, \ b \to +\infty$

Сх-ся равном. на E_1

Рассмотрим на E_2.

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \forall \alpha \in E_2$

$\hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\alpha)^2} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём $x_1 = b, \ x_2 = b+1, \ \alpha = b$.

$\int\limits_{b}^{b+1} e^{-(x-b)^2} dx \geq \frac{1}{e^{(b+1-b)}} \int\limits_{b}^{b+1} dx = \frac{1}{e} \cdot 1$

Значит

$\exists \ \varepsilon = \frac{1}{e} : \forall b > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \exists \alpha \in E_2 :$

$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\alpha)^2} dx \right| \geq \varepsilon$

Интеграл сх-ся неравномерно на E_2

§14 7(3, 5, 6)

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \qquad E = (0, +\infty)$

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b > 0: \ \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём $x_1 = b,\ x_2 = 2b,\ \alpha = \frac{1}{b^2}$

$$\int\limits_b^{2b} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx = \int\limits_b^{2b} \frac{1}{b}\, e^{-\frac{x^2}{b^2}} dx \overset{\frac{x}{b}=t}{=} \int\limits_1^2 e^{-t^2} dt \geqslant \int\limits_1^2 \frac{1}{e^4} dt = \frac{1}{e^4}$$

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{e^4} : \ \forall b > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [b, +\infty) \ \exists \alpha \in E:$

$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \right| \geqslant \varepsilon$ Интеграл сх-ся неравномерно на E

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \qquad E = \mathbb{R}$

условие Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b > 0: \ \forall x_1, x_2 \in [b, +\infty) \quad \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \sin\alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| < \varepsilon$

Возьмём $x_1 = b,\ x_2 = 2b,\ \alpha = \frac{1}{10b}$

$$\int\limits_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1+x^2}{100b^2}} dx \geqslant \int\limits_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1+4b^2}{100b^2}} dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{5b^2}{100b^2}} dx = \int\limits_b^{2b} \sin\frac{1}{10b}\, e^{-\frac{1}{20}} dx \geqslant \left(\frac{1}{10b} + o(1)\right) e^{-\frac{1}{20}} \cdot b =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{1}{20}} + o(1)\, e^{-\frac{1}{20}} b \geqslant \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}}.$$

Значит

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}} : \ \forall b > 0 \quad \exists\, x_1, x_2 \in [b; +\infty) \ \exists\, \alpha \in E :$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin\alpha \ e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| \geq \varepsilon.$$ Интеграл сх-ся неравномерно на E

6) $$I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x} \ \frac{dx}{x^\alpha} \qquad E = (0,2)$$

Условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \in (0,1) : \forall x_1, x_2 \in (0, b] \quad \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin\frac{1}{x} \frac{dx}{x^\alpha} \right| < \varepsilon$$

Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$ $\quad dt = -\frac{dx}{x^2}$

Тогда $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt$ - сх-ся по призн. Дирихле.

Условие Коши станет

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, b > 1 : \quad \forall t_1, t_2 \in [b, +\infty) \ \forall \alpha \in E \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \left| \int_{t_1}^{t_2} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt \right| < \varepsilon.$$

Возьмем $$t_1 = 2\pi n, \ t_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \ \alpha = 2 - \frac{1}{n}$$

где $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{2\pi n}^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin t \cdot t^{\alpha-2} dt \right| \geq \left| \int_{2\pi n}^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^{1/n}} \right| = \frac{1}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (2\pi n + \frac{\pi}{2})^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2\pi n + \frac{\pi}{2})} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln(2\pi n + \frac{\pi}{2})} = e^0 = 1$$

Откуда $\exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^{1/n} < 2$

и $\forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \sin t \cdot t^{\alpha-2} \, dt \right| > \frac{1}{2}$

Значит

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall b > 1 : \exists t_1, t_2 \in [b, +\infty) \ \exists \alpha \in E \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \sin t \ t^{\alpha-2} \, dt \right| \geqslant \varepsilon$ Интеграл сх-ся неравномерно на E

§14 8(2)

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx \qquad E=[0,1]$$

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx=\int_0^\alpha \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx+\int_\alpha^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx$$

Рассмотрим $\int_0^\alpha \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx$:

так как $\left|\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx\right| \leq \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}=2\sqrt{\eta}$

Значит $\forall\, \varepsilon>0$ возьмём $0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$ такое, что

$\left|\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx\right|<\varepsilon$ - значит сх-ся равномерно при $\alpha\in[0,1]$

Для второго интеграла $\int_\alpha^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx$

так как $\left|\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}}=2\sqrt{\eta}$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$ такое, что

$\left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| < \varepsilon$ - значит сх-ся равномерно при $\alpha \in [0, 1]$

Значит исходный интеграл сх-ся равномерно при $\alpha \in [0, 1]$

(T1)

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

Пусть $\alpha > 0$ Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad , \beta > 0 \qquad (*)$$

При фиксированном $\beta > 0$ интеграл $(*)$ сх-ся для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сх-сти несобств. интегралов, т.к. ф-ция $\frac{1}{x} e^{-\beta x}$ убывает на $(0, +\infty)$, а ф-ция $\sin \alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int\limits_0^x \sin \alpha t \, dt = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha} \right)$

При $\alpha = 0$ интеграл $(*)$ равен 0. Кроме того, интеграл $K(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$, полученный из $(*)$ дифференцированием по α подынтегральной ф-ции, сх-ся равномерно по α на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса.

Используя правило Лейбница и то, что

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \text{ получим}$$

$$\varphi'_\alpha(\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos\alpha x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Интегрируя на отрезке $[0,\alpha]$ полученное рав-во, находим

$$\varphi(\alpha,\beta) - \varphi(0,\beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$$

Так как $\varphi(0,\beta)=0$, то $\forall \beta>0 \hookrightarrow \varphi(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. $(**)$

Теперь вычислим исходный интеграл, считая, что $\alpha>0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha>0$ интеграл $(*)$ сх-ся равномерно по β на отрезке $[0,1]$, т.к. ф-ция $\sin\alpha x$ имеет огранич. первообразную ($\alpha>0$ фиксировано), а ф-ция $g = \frac{e^{-\beta x}}{x}$ монотонно убывает ($g'_x<0$ при $x>0, \beta\geq 0$) и $g(x,\beta) \rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ на отрезке $[0,1]$. По признаку Дирихле интеграл $(**)$ сх-ся равномерно по β на отрезке $[0,1]$. Из равномерной сх-сти интеграла (**) и непрерывности ф-ции $e^{-\beta x}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ на множестве

$$G=\{(x,\beta):\ 0\leq x<+\infty,\ 0\leq\beta\leq 1\}$$

следует непрерывность по β ф-ции $\Phi(\alpha,\beta)$ на отрезке $[0,1]$ и, в частности, непрерывность по β этой ф-ции справа в т. $\beta=0$.

Это означает, что в интеграле (**) можно перейти к пределу при $\beta\to+0$ под знаком интеграла. След-но:

$$\lim_{\beta\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\lim_{\beta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

Учитывая, что $\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ - нечётная по α ф-ция, получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\quad,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

2) $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ $\qquad K(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$

Пусть $\alpha>0$. Т.к. ф-ция $\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}$ непрерывна $\forall \alpha$ и $\forall x$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$$

сх-ся равномерно по α на отрезке $[\alpha_0, +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то, применяя правило Лейбница, получаем

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Складывая почленно полученное рав-во с рав-вом $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$, $\alpha > 0$, получим:

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Дифференцируя полученное рав-во почленно, имеем $I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$

Таким образом, $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному ур-ию $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общ решение кот. имеет вид $I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$

Заметим, что $|I(\alpha)| \le I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

Кроме того, $e^{-\alpha} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, а $e^{\alpha} \to +\infty$, $\alpha \to +\infty$.

Отсюда следует, что $C_1 = 0$, поэтому $I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая $I(0) = \frac{\pi}{2}$, получим

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$.

т.к. $I(\alpha)$ - чётная ф-ция, то

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

В прошлых рав-вах мы получили, что

$I'(\alpha) = -K(\alpha) \hookrightarrow \quad K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$

т.е. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$

откуда в силу нечётности ф-ции $K(\alpha)$

следует, что $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$