Задача 17.25

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$

Найти $V(x,\dot{x})$ : $\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) = -E$

Ищем квадратичную форму $x$ и $\dot{x}$:

$V(x,\dot{x}) = ax^2 + bx\dot{x} + d\dot{x}^2$

$$\frac{dV}{dt} = a\cdot 2x\dot{x} + b\dot{x}^2 + bx\ddot{x} + d\cdot 2\dot{x}\ddot{x} =$$

$$= 2ax\dot{x} + b\dot{x}^2 + bx\left(-\frac{\beta\dot{x}}{m} - \frac{cx}{m}\right) + 2d\dot{x}\left(-\frac{\beta\dot{x}}{m} - \frac{cx}{m}\right) =$$

$$= \dot{x}^2\left(b - \frac{2d\beta}{m}\right) + x^2\left(-\frac{bc}{m}\right) + x\dot{x}\left(2a - \frac{b\beta}{m} - \frac{2dc}{m}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2)$$

Откуда

$$b - \frac{2d\beta}{m} = -\frac{1}{2}m \longrightarrow d = \frac{m^2}{2\beta}$$

$$-\frac{bc}{m} = -\frac{c}{2} \longrightarrow b = m/2$$

$$2a - \frac{b\beta}{m} - \frac{2dc}{m} = 0$$

$$a = \frac{b\beta + 2dc}{m \cdot 2} = \frac{\beta/2 + \frac{m}{\beta}c}{2} = \frac{\beta}{4} + \frac{m}{\beta \cdot 2}c$$

Ответ: $V = \frac{\beta^2 + 2mc}{4\beta}x^2 + \frac{m}{2}x\dot{x} + \frac{m^2}{2\beta}\dot{x}^2$

(T1) $\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y)$ $\quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y)$

$V(x,y) = \int\limits_0^x f_3(z)\,dz + \int\limits_0^y f_2(z)\,dz$

Док-ть, что нулевое полож. асимптотич. устойчиво

Во-первых, (0,0) удовл. системе

$$\begin{cases} 0 = -f_1(x) - f_2(y) \\ 0 = f_3(x) - f_4(y) \end{cases} \quad \text{т.к. } \operatorname{sgn}(f_i(z)) = \operatorname{sgn}(z)$$

Значит (0,0) - полож. равновесия

$V(0,0) = \int\limits_0^0 f_3(z)\,dz + \int\limits_0^0 f_2(z)\,dz = 0$

Посмотрим в окрестности т. (0,0) на $V(x,y)$

Пусть это квадрат со ст. длиной $2h$ и центром в (0,0).

I) $x \in [0, h] \hookrightarrow \int\limits_0^x f_3(z)\,dz \geq 0$, т.к. $f_3(z)$ - гладкая и $f_3(z) \geq 0$ для $z \in [0, x)$

II) $x \in [-h, 0] \hookrightarrow \int\limits_0^x f_3(z)\,dz = -\int\limits_x^0 f_3(z)\,dz \geq 0$, т.к $f_3(z)$ гладкая и $f_3(z) \leq 0$ для $z \in [x, 0]$.

Аналогично для $y$. А т.к. $x$ и $y$ не обращаются одновременно в 0 ~~($x \neq 0$, $y \neq 0$~~ кроме т. (0,0), то $V(x,y) > 0$ в окрестности т. (0,0)

$$\frac{dV}{dt} = f_3(x)\dot{x} + f_2(y)\dot{y} = f_3(x)(-f_1(x) - f_2(y)) +$$

$$+ f_2(y)(f_3(x) - f_4(y)) = f_2(y)(f_3(x) - f_3(x)) - f_1(x) f_3(x) -$$

$$- f_2(y) f_4(y) = -(\underbrace{f_1(x) f_3(x) + f_2(y) f_4(y)}_{\geqslant 0})$$

$\dot{V} > 0$ при $(x, y) \neq (0,0)$

Получается, $\exists$ окрестность т. $(0,0)$, в кот. $V(x)$ положит. определена, а её производная - отрицательно определена. Значит по т. Ляпунова об асимптотич. устойчив полож. $(0,0)$ асимпт. уст.

(T2) $\dot{x} = 2y^3 - x^5$ $\qquad \dot{y} = -x - y^3 + y^5$

т. $(0,0)$ - положение равновесия. Исследуем его на устойчивость

Для этого возьмём ф-цию Ляпунова

$V(x,y) = x^2 + y^4 > 0, \quad (x,y) \neq (0,0)$

$\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 2x(2y^3 - x^5) + 4y^3(-x - y^3 + y^5) =$

$= -2x^6 - 4y^6(1 - y^2)$

$\exists$ окрестность - круг с центром в

(0,0) и радиусом $R = 0,9$, внутри которого $\dot{V} < 0$, $(x, y) \neq (0,0)$

Значит $\exists$ окрестн. т. (0,0) в кот. $V(x,y) > 0$ $\dot{V}(x,y) < 0$ и по т. Ляпунова об асимптотической устойчивости положение $(x,y) = (0,0)$ асимптотич. устойчиво.

(Т3) $\dot{x} = xy - x^3 + y^3 \qquad \dot{y} = x^2 - y^2$

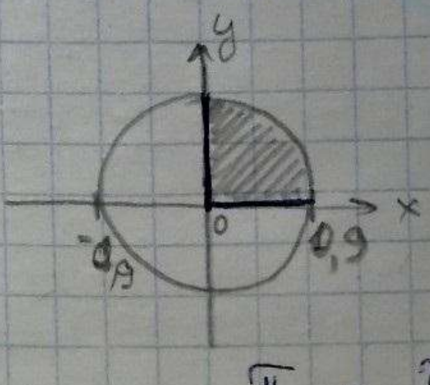
т $(0,0)$ - полож. равновесия. Исследуем его на устойчивость.

Возьмём $V(x,y) = xy$.

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}y + x\dot{y} = \cancel{xy^2} - x^3y + y^4 + x^3 - \cancel{xy^2} =$$

$$= y^4 + x^3(1-y).$$

Рассмотрим окрестность - круг с центром в $(0,0)$ и радиусом $R = 0{,}9$:




На выделенных участках $V(x,y) = 0$, в заштрих. обл. $V(x,y) > 0$, $\dot{V}(x,y) > 0$ (кроме $(x,y) = (0,0)$)

По т. Четаева полож. неустойчиво

T4) $(\alpha, \beta > 0)$

$$\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2)$$

$$\dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2)$$

т. $(0,0)$ - положение равновесия. Исследуем его на устойчивость.

Возьмем ф-цию $V(x,y) = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha x \dot{x} + \beta y \dot{y} = \alpha x (\beta y - x)(1 - ax^2 - by^2) +$$

$$+ \beta y(-y - \alpha x)(1 - ax^2 - by^2) = \underbrace{(-\alpha x^2 - \beta y^2)}_{<0}(1 - ax^2 - by^2)$$

Рассмотрим прямоугольник с центром в $(0,0)$ и сторонами: $|x| \leq \left|\frac{1}{2a}\right|$ $|y| \leq \left|\frac{1}{2b}\right|$. Перед этим договорим, что если $a = b = 0$, то всё верно. Если $a = 0, b \neq 0$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq \left|\frac{1}{2b}\right|$. Если $b = 0, a \neq 0$, $|y| \leq \frac{1}{2}$, $|x| \leq \left|\frac{1}{2a}\right|$.

Тогда $(1 - ax^2 - by^2) \geq \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$.
и $\dot{V} < 0$, $(x,y) \neq (0,0)$.

т.е. $\exists$ окрестн., в кот. $V > 0$, $\dot{V} < 0$ $\Rightarrow$ по т. Ляпунова об асимптотич. устойч. полож. $(0,0)$ асимпт. уст.