Задача 7.

Будем решать задачу точно.

Спиновая часть ур-ия Паули:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{e\hbar}{2mc}(\hat{\vec{\sigma}}, \hat{\vec{H}})\chi = -\mu_0(\hat{\vec{\sigma}}, \hat{\vec{H}})\chi$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{H}_0 \parallel z, \quad \vec{h} \perp \vec{H}_0$$

$$(\hat{\vec{\sigma}}, \vec{h}) = \vec{\sigma}_x \cos\omega t + \vec{\sigma}_y \sin\omega t$$

Обозначим $\omega_0 = \frac{e}{mc}H_0$, $\omega_1 = \frac{e}{mc}h$

Получаем систему:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left(-\hbar\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{\omega_1\hbar}{2}\hat{\sigma}_x\cos\omega t - \frac{\omega_1\hbar}{2}\hat{\sigma}_y\sin\omega t\right)\chi \\ \chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

По условию решение ищем в виде $\chi(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = -\frac{\omega_0}{2}C_1 - \frac{\omega_1}{2}C_2\cos\omega t + \frac{\omega_1}{2}C_2 i\sin\omega t \\ i\dot{C}_2 = \frac{\omega_0}{2}C_2 - \frac{\omega_1}{2}C_1\cos\omega t - \frac{\omega_1}{2}C_2 i\sin\omega t \\ C_1(0) = 1 \\ C_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = -\frac{\omega_0}{2}C_1 - \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}C_2 \\ i\dot{C}_2 = \frac{\omega_0}{2}C_2 - \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}C_1 \\ C_1(0) = 1 \\ C_2(0) = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде $C_1 = e^{-\frac{i}{2}\omega t}a$, $C_2 = e^{\frac{i}{2}\omega t}b$

$$\begin{cases} \frac{\omega}{2}a + i\dot{a} = -\frac{\omega_0}{2}a - \frac{\omega_1}{2}b \\ -\frac{\omega}{2}b + i\dot{b} = \frac{\omega_0}{2}b - \frac{\omega_1}{2}a \\ a(0) = 1 \\ b(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \omega+\omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -\omega-\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение системы выраж. матричной экспонентой.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{\frac{i}{2}\Lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \omega+\omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega+\omega_0) \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{i}{2}\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\Lambda)^k}{k!}\frac{1}{2^k}$$

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \omega+\omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega+\omega_0) \end{pmatrix}^2 = \left((\omega_0+\omega)^2+\omega_1^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \Lambda^{2k} = \Omega^{2k}\,\mathbb{1}, \text{ где } \Omega = \sqrt{(\omega_0+\omega)^2+\omega_1^2}$$

$$\Lambda^{2k+1} = \Lambda\Omega^{2k}$$

$$e^{\frac{i}{2}\Lambda t} = \cos\frac{\Omega}{2}t\,\mathbb{1} + i\frac{\sin\frac{\Omega t}{2}}{\Omega}\Lambda$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \left[\cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\omega+\omega_0}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right]e^{-i\frac{\omega}{2}t} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)e^{i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}(t) = \langle\chi(t)|\hat{\vec{\sigma}}|\chi(t)\rangle$$

$$\frac{\Lambda}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} \omega_0+\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0+\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ - обозначение}$$

$$P_x = \left(\left[\cos\frac{\Omega}{2}t - i\cos\theta\sin\frac{\Omega}{2}t\right]e^{i\frac{\omega}{2}t};\ -i\sin\theta\sin\frac{\Omega}{2}t\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} i\sin\theta\sin\frac{\Omega}{2}t\, e^{i\frac{\omega}{2}t} \\ \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\cos\theta\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\right]e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} =$$

$$= \sin\theta\left[\left(\cos\frac{\Omega}{2}t - i\cos\theta\sin\frac{\Omega}{2}t\right) i\sin\frac{\Omega}{2}t\, e^{i\omega t} - \right.$$

$$\left. - i\sin\frac{\Omega}{2}t\, e^{-i\omega t}\left(\cos\frac{\Omega}{2}t + i\cos\theta\sin\frac{\Omega}{2}t\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\theta(1-\cos\Omega t)\cos\omega t - \sin\Omega t\sin\omega t\right)$$

$$\| \; P_x$$

Аналогично:

$$P_y = \frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\theta(1-\cos\Omega t)\sin\omega t + \sin\Omega t\cos\omega t\right)$$

$$P_z = -\sin^2\theta\sin^2\frac{\Omega t}{2} + \cos^2\frac{\Omega t}{2} + \cos^2\theta\sin^2\frac{\Omega t}{2} =$$

$$= -\sin^2\theta\,\sin^2\frac{\Omega t}{2} + \cos^2\frac{\Omega t}{2} + \cos^2\theta\,\cancel{\sin^2\frac{\Omega t}{2} = \sin^2\theta\,\mathrm{si}} -$$

$$- \cos^2\theta\cos^2\frac{\Omega t}{2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\frac{\Omega t}{2} + (1-\cos^2\theta)\cos^2\frac{\Omega t}{2} =$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\Omega t - P_z$$

Задача 9

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \varkappa}{m}\delta(x) + Fx\cos\omega t$$

Т.к. возмущение периодическое, то для вероятности перехода в состояния непр. спектра справедлива формула

$$w_{n\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\int |F_{kn}|^2\,\delta(E_k^{(0)} - E_n^{(0)} - \hbar\omega)\,d\nu_k,$$ где $\hat{F} = \frac{Fx}{2}$

Для связанного состояния

$$\psi_n = \psi_0 = \sqrt{\varkappa}\,e^{-\varkappa|x|}$$

$$E_n^{(0)} = E_0^{(0)} = -\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}$$

По условию задачи $\hbar\omega > \frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} = |E_0^{(0)}| \hookrightarrow$ δ-потенц. не действует на частицу в конечном состоянии $\hookrightarrow$ волновые ф-ции конечного состояния есть волновые ф-ции свободной частицы.

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \quad E_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}, \quad \nu = k$$

$$|F_{k0}| = \frac{F}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\varkappa|x|+ikx}dx = \frac{F}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\cdot 2\cdot$$

$$\cdot\int_0^{+\infty} x e^{-\varkappa x} i\sin kx\,dx = iF\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-\varkappa x+ikx}dx\right) =$$

$$= iF\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\mathrm{Im}\frac{1}{ik-\varkappa}\cdot\left(x e^{x(ik-\varkappa)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\varkappa x+ikx}dx\right) =$$

$$= iF\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\mathrm{Im}\frac{1}{(ik-\varkappa)^2} = iF\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,\mathrm{Im}\frac{1}{\varkappa^2-k^2-2ik\varkappa} =$$

$$= iF\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\frac{2k\varkappa}{(\varkappa^2-k^2)^2+4k^2\varkappa^2} = i\frac{\sqrt{2}\,k\varkappa^{3/2}F}{\sqrt{\pi}(k^2+\varkappa^2)^2}$$

Пусть $f(k) = E_k^{(0)} - E^{(0)} - \hbar\omega$

$f(k) = 0$ при $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E^{(0)} + \hbar\omega$

$k_{1,2} = \pm\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E^{(0)}+\hbar\omega)}$ - корни.

По св-ву δ-ф-ции

$$\delta(f(k)) = \frac{\delta(k-k_1)}{|f'(k_1)|} + \frac{\delta(k-k_2)}{|f'(k_2)|}$$

Подставляя в вероятность после интегрирования получим:

$$w_{0\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[|F_{k_1 0}|^2 + |F_{k_2 0}|^2\right]\frac{1}{|f'(k_1)|}$$

$$w = \frac{4\pi}{\hbar}\frac{2}{\pi}\frac{k_1^2\varkappa^3F^2}{(k_1^2+\varkappa^2)^4}\frac{m}{\hbar^2 k_1} = \frac{8m}{\hbar^3}F^2\frac{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(E^{(0)}\right)^{3/2}}{\left(\frac{2m}{\hbar^2}E^{(0)}+\frac{2m\omega}{\hbar}-\frac{2m}{\hbar^2}E^{(0)}\right)^4}\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m}\sqrt{E^{(0)}+\hbar\omega} = 8mF^2\frac{(2m)^2\cdot\frac{1}{\hbar^3}|E^{(0)}|^{3/2}}{(2m)^4\omega^4}.$$

$$\cdot \sqrt{E^{(0)} + \hbar\omega}$$

$$w = \frac{2\hbar F^2}{m(\hbar\omega)^4} |E_0|^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - |E_0|}$$