ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определите тип уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + 2\alpha u_{yz} + \alpha u_{zz} = 0$$

при различных вещественных значениях α.

2. Определите тип уравнения

$$(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$$

в различных областях плоскости (x, y).

3. 2.1(2).

II. Метод характеристик в случае двух независимых переменных

4. Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \alpha\beta u = 0, \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

5. 12.3.

6. Решите задачи Коши:

а) $yu_{xx} + (x + y)u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|,$
$u|_{x=1} = 1, \quad u_x|_{x=1} = 1 - \frac{1}{y}, \quad y > 1;$

б) $u_{xx} + \cos x u_{xy} + (\cos x - 1)u_{yy} - \frac{\sin x}{2-\cos x}(u_x + u_y) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
$u|_{x=0} = 3y, \quad u_x|_{x=0} = -2, \quad y \in \mathbb{R}.$

Решите задачи Коши и укажите наибольшую область, где решение определено однозначно.

в) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^2, \quad y < |x|,$
$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 2;$

г) $y^3u_{xx} + 2y^2u_{xy} + yu_{yy} - u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$
$u|_{y=2} = 0, \quad u_y|_{y=2} = 1, \quad 1 < x < 4.$

7. Решите задачи Гурса:

а) 14.46;

б) $2x^2u_{xx} - xyu_{xy} - y^2u_{yy} + 2xu_x - yu_y = \ln xy, \quad x > 0, y > 0,$
$u|_{xy=1} = x^{-3}, \quad u|_{y^2=x} = x\sqrt{x}, \quad 1 < x < 2,$
определите максимальную область, в которой решение единственно.

8. Решите задачу
$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad -2 < x \leq 0,$
$u|_{y=x} = 5x^2 + 3x^3, \quad 0 \leq x < 1$ и определите максимальную область, в которой решение единственно.

III. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^1$

9. Для задачи Коши: $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$
где $u_0(x) = (1+\cos x)^2\theta(\pi - |x|)$, докажите, что функция $u_0(x) \in \in C^2(\mathbb{R})$, и постройте графики граничной функции $u_0(x)$ и решения при $t = \frac{\pi}{2a}$, $t = \frac{\pi}{a}$, $t = \frac{2\pi}{a}$.

10. Решите смешанные задачи на полупрямой:

а) 21.13; 21.18;

б) $9u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 6x, \quad u_t|_{t=0} = 4e^{-3x} + 2, \quad x \geq 0,$
$u_x|_{x=0} = -6t + 6e^{-t}, \quad t \geq 0;$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad x > 0, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0,$
$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0;$

г) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{2x+1}(u_x - u_t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = \sin x^2, \quad u_t|_{t=0} = -\cos x^2, \quad x > 0,$
$(u - u_x)|_{x=0} = -t, \quad t > 0;$

д) $4u_{tt} = u_{xx} + t^2 \operatorname{ch} x, \quad x > 0, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = \operatorname{ch} x, \quad u_t|_{t=0} = 2x - \operatorname{sh} x, \quad x > 0;$
$u_x|_{x=0} = 2\operatorname{sh}\frac{t}{2}, \quad t > 0,$

е) 21.28(5); 21.29(5);

ж) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{2x+1}(u_x - u_t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = \sin x^2, \quad u_t|_{t=0} = -\cos x^2, \quad x > 0;$
$u|_{x=0} - u_x|_{x=0} = -t, \quad t > 0.$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 01–07 декабря)

I. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

1. Решите задачи Коши:

а) 12.43(2,4,6,8); 12.44(1,8);

б) $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos(x - y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

в) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x + 2y), \quad t > 0,$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$
$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} = \Delta u + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{8}y^2 - \frac{3}{8}z^2\right)\operatorname{ch} t, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = xe^z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

<u>*Указание.*</u> Решение задачи $u_{tt} = \Delta u$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0$
искать в виде $u(t,r) = \frac{v(t,r)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

д) $u_{tt} = \Delta u, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = e^x(y^2+z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

е) Для задачи Коши $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
где $u_1(x, y, z) = \left(1 - 4\left((x-1)^2 + y^2 + z^2\right)\right)^3$ в области $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{4}$, и $u_1(x, y, z) = 0$ вне этой области, докажите, что функция $u_1(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, и для любого $t > 0$ найдите значение $u(0, 0, 0, t)$.

II. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

2. Решите задачи Коши:

а) 13.5(5,7); 13.6(3,4); 13.7(4);

б) $u_t = \Delta u + (\cos t - 2\sin t)e^{x+y+z}, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = \cos x \cos 2y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

в) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2)\cos t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = x\cos(x + y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

г) $u_t = \Delta u + 2e^t x\cos x + \sin t x^2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0$,
$u|_{t=0} = x\cos x - x^2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

д) $u_t = \Delta u + (zx^2 - zy^2)\cos 2t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}\sin z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

е) Найдите при каждом $t > 0$ значение $u(0, 0, t)$, решения задачи Коши
$4u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$u|_{t=0} = u_0(x, y)$, где $u_0(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ в области $\{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$, и $u_0(x, y) = 0$ вне этой области.

III. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке

3. Решите смешанные задачи:

а) 20.9(1); 20.10;

б) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$,
$u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad x \in [0; 1]$,
$u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad t \geq 0$;

в) $u_t = u_{xx} - u + \frac{t(x^2-2)}{2\pi}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$,
$u|_{t=0} = \cos x, \quad x \in [0; \pi]$,
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t \geq 0$;

г) $u_{tt} = u_{xx} + 80u - 80t + x\sin t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$,
$u|_{t=0} = \sin 9x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$,
$u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t > 0$;

д) $u_t = u_{xx} + u - 1, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$,
$u|_{t=0} = \cos\frac{x}{2} + 1, \quad x \in [0; \pi]$,
$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = 1, \quad t \geq 0$;

е) $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u|_{t=0} = x + \cos\frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad x \in [0;\pi],$
$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$

ж)* Найдите $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^1$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши $u_t = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) \in C(\mathbb{R}),$
$\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = A, \quad \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = B.$

IV. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями в прямоугольнике

4. а) 20.20;

б) Решить смешанную задачу:
$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad (x,y) \in \Pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = (x - 2x^3 + x^4)(y - 2y^3 + y^4), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in \Pi,$
$u|_{\partial\Pi} = 0, \quad (x,y) \in \partial\Pi, \quad t > 0,$
где квадрат $\Pi := \{(x,y) | 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}.$

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков
ст. преп. С. И. Колесникова