Задача 2

$$U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = U(r), \quad \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Стацион. ур-ие Шред.: $\hat{H}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\hat{\vec{p}}_2^{\,2}}{2m_2} + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_{\vec{r}_2} + U(r)$$

Коорд. центра масс:

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \hookrightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{\mu\vec{r}}{m_1} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{\mu\vec{r}}{m_2} \end{cases}, \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$\hat{\vec{P}} \equiv -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\vec{R}}$ — операт. импульса центра масс

$\hat{\vec{p}} \equiv -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}$ — операт. импульса относит. движ.

Перейдём к переменным $\vec{R}, \vec{r}$:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \longrightarrow \psi(\vec{R}, \vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{\partial\psi(\vec{R}, \vec{r})}{\partial\vec{R}^T}\frac{\partial\vec{R}^T}{\partial\vec{r}_1} + \frac{\partial\psi(\vec{R}, \vec{r})}{\partial\vec{r}^T}\frac{\partial\vec{r}^T}{\partial\vec{r}_1} =$$

$$= \frac{\mu}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \psi(\vec{R},\vec{r}) = \frac{\mu}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \left(\frac{\mu}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \left(\frac{\mu}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) \right) = \frac{\mu^2}{m_2^2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + 2 \frac{\mu}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r})$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \psi(\vec{R},\vec{r}) = \frac{\mu^2}{m_1^2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) -$$

$$- 2 \frac{\mu}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r})$$

$$\hat{H} \psi(\vec{R},\vec{r}) = - \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$+ U(r) \psi(\vec{R},\vec{r}) = - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{m_1}{(m_1+m_2)^2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \right.$$

$$\frac{2}{m_1+m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R},\vec{r}) +$$

$$\left. + \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{2}{m_1+m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{R},\vec{r}) \right) + U(r) \psi(\vec{R},\vec{r})$$

$$= - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1+m_2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{R}^T} \frac{\partial}{\partial \vec{R}}}_{\Delta_{\vec{R}}} \psi(\vec{R},\vec{r}) + \frac{m_2+m_1}{m_1 m_2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{r}^{\,T}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}}_{\Delta_{\vec{r}}} \psi(\vec{R},\vec{r}) \right) +$$

$$+ U(r) \psi_2(\vec{R},\vec{r})$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2\mu} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + U(r)$$

Разделим переменные.

$$\Psi(\vec{R},\vec{r}) = \Phi(\vec{R})\cdot \chi(\vec{r})$$

$$E = E_{ц.м.} + E_{отн.}$$, где $E_{ц.м.} = \frac{\vec{P}^2}{2m}$ (энер. движ. ц.м.)

В этом случае стац. ур-ие Шредингера станов-ся:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{R}}\Phi(\vec{R}) = \frac{\vec{P}^2}{2\mu}\Phi(\vec{R}) & (1) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + U(r)\right)\chi(\vec{r}) = E_{отн}\,\chi(\vec{r}) & (2) \end{cases}$$

$$\Phi(\vec{R}) = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{R}}$$

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \Psi(\vec{R},\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{R}}\chi(\vec{r})$$

где $\vec{P}$ - импульс центра масс, $\chi(\vec{r})$ - реш. ур-ия (2)

Задача 4.

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases}$$

В двумерном случае: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{\hbar^2\hat{l}_z^2}{2m\rho^2} + U(\rho)$

В полярных координатах: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$

Ур-ие Шредингера: $\hat{H}\Psi(\rho,\varphi) = E\Psi(\rho,\varphi)$

Введём оператор $\hat{M}_z \equiv \hbar\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$$\hat{M}_z e^{iM\varphi} = M e^{iM\varphi}$$

Решение ищем в виде

$$\Psi(\rho,\varphi) = R(\rho)\,e^{iM\varphi}$$

Обозначим: $\varkappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' + \frac{1}{\rho}R'\right) + \frac{\hbar^2 M^2}{2m\rho^2}R + U(\rho) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varkappa^2 R$$

1) При $\rho < a$:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{M^2}{\rho^2}R + k^2 R = 0 \quad \text{где } k^2 = \frac{2m(U_0+E)}{\hbar^2}$$

Имеем ур-ие Бесселя $\Rightarrow$ $R_{|M|} = A\,J_{|M|}(k\rho) + B N_{|M|}(k\rho)$

При $\rho \to 0$ $N_{|M|}(k\rho) \sim \frac{1}{|k\rho|^{|M|+1}}$ Поэтому в силу граничных условий $B=0$

$$R_{|M|} = A\,J_{|M|}(k\rho)$$

2) При $\rho > a$:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{M^2}{\rho^2}R - \varkappa^2 R = 0$$

Имеем модифиц. ур-ие Бесселя $\Rightarrow$ решение имеет вид

$$R_{|M|} = C\,I_{|M|}(\varkappa\rho) + D K_{|M|}(\varkappa\rho),$$

где I - ф-ция Инфельда

K - ф-ция Макдональда

При $\rho \to \infty$ $I_{|M|} \sim e^{\varkappa\rho}$ Поэтому в силу гран. усл-ий имеем $C=0$. $R_{|M|} = D K_{|M|}(\varkappa\rho)$

Сшивка (приравниваем лог. произв.):

$$k\,\frac{J'_{|m|}(ka)}{J_{|m|}(ka)} = \frac{K'_{|m|}(\varkappa a)}{K_{|m|}(\varkappa a)}\,\varkappa$$

Рассмотрим S-состояние: $|M| = 0$

$$k\,\frac{J'_0(ka)}{J(ka)} = \varkappa\,\frac{K'_0(\varkappa a)}{K(\varkappa a)} \qquad (*)$$

При малом U_0: $E \to 0 \hookrightarrow k^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2} \hookrightarrow$ рассм. случай $ka \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\Gamma(n+1))^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Оставим члены 1 порядка: $J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4}$

$$K_0(z) \approx I_0(z)\ln\frac{z}{2} \sim \ln z \,, \quad z \to 0$$

$\uparrow$ огранич. при $z \to 0$

Из $(*)$ имеем:

$$-\frac{k^2 a}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa a \ln(\varkappa a)}$$

$$\frac{mU_0 a}{\hbar^2} = \frac{1}{a\ln\left(\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2}a\right)} \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar^2}a\right) = -\frac{\hbar^2}{mU_0 a^2}$$

$\hookrightarrow E \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2}e^{-\frac{\hbar^2}{ma^2U_0}} \hookrightarrow \exists$ хотя бы одно связ. состояние ~~(это)~~

Рассмотрим трехмерную яму при $M = 0$:

ищем решение в виде:

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\,\varkappa(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

1) при $r<a$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi''(r) + \underbrace{U(r)}_{=-U_0}\chi(r) = E\chi, \quad \chi(0)=0$$

$$\chi''(r) + k^2\chi(r) = 0, \quad \chi(0)=0$$

2) при $r>a$:

$$\chi''(r) - \varkappa^2\chi(r) = 0$$

Таким образом, имеем задачу 2 из первого задания, где уровни энергии нечётных волнов. ф-ций $\exists$ при $U_0 \geq \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{ma^2}$

Ответ: $E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} e^{-\frac{\hbar^2}{ma^2U_0}}$

В трехмерной яме для появления связанн. состояния необходимо $U_0 \geq \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{ma^2}$.

Задача 5.

Ур-не Шредингера в имп. представлении:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{p}) + \int w(\vec{p}'-\vec{p})\psi(\vec{p}')d^3p' = E\psi(\vec{p}), \text{ где}$$

$w(\vec{p}'-\vec{p}) = \langle\vec{p}|\hat{U}|\vec{p}'\rangle$ – Фурье образ потенц. энергии

$$w(\vec{p}'-\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int U(\vec{r})e^{i\frac{(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}}{\hbar}}d^3r \quad (*)$$

В данной задаче $U(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r}$

Ур-не Пуассона: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$

Ур-ие Пуассона для ! заряда в нач коорд.:

$$\Delta\left(\frac{e}{r}\right) = -4\pi e\,\delta(\vec r) \hookrightarrow \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec r)$$

Введём $V(\vec r) = \frac{1}{r}$

$$\Delta V(\vec r) = -4\pi\,\delta(\vec r) \qquad (**)$$

$$V(\vec r) = \int V(\bar p)\, e^{\frac{i\bar p\cdot\vec r}{\hbar}}\, d^3p$$

$$\Delta V(\vec r) = \Delta \int V(\bar p)\, e^{\frac{i\bar p\cdot\vec r}{\hbar}}\, d^3p = \int V(\bar p)\left(-\frac{\bar p^2}{\hbar^2}\right)\cdot e^{\frac{i\bar p\vec r}{\hbar}}\, d^3p \overset{(**)}{=}$$

$$= -4\pi\,\delta(\vec r) = \int \frac{-4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{\frac{i\bar p\vec r}{\hbar}}\, d^3p \hookrightarrow V(\bar p) = \frac{-4\pi}{(2\pi\hbar)^3} : \frac{-\bar p^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2\pi^2\hbar\,\bar p^2}$$

$$U(\vec r) = -\frac{e^2}{r} = -e^2 V(\vec r) \hookrightarrow U(\bar p) = -e^2 V(\bar p)$$

$$\hookrightarrow U(\bar p) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar\,\bar p^2} \hookrightarrow W(\bar p' - \bar p) = U(\bar p' - \bar p) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar\,|\bar p - \bar p'|^2}$$

Ур-ие Шред. принимает вид:

$$\left(\frac{\bar p^2}{2m} - E\right)\psi(\bar p) = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\int \frac{\psi(\bar p')\, d^3\bar p}{|\bar p - \bar p'|^2}$$

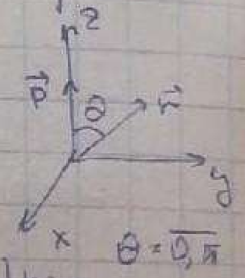
Волновая ф-ция осн. состояния атома водорода в коорд. представлении: $\psi_{100}(\bar r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_Б^3}}\, e^{-\frac{r}{a_Б}}$

Перейдём к имп. представлению:

$$\psi_{100}(\bar p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int e^{-\frac{i\bar p\bar r}{\hbar}}\, \psi_{100}(\bar r)\, d^3\bar r = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int e^{-\frac{r}{a} - \frac{i\bar p\bar r}{\hbar}}\, d^3r}_{=I}$$

Скаляр I не может зависеть от компонент вектора $\bar{p}$, только от модуля $\Rightarrow$ можем выбрать $\bar{p} \parallel Oz$.



$$I = 2\pi \int e^{-\frac{r}{a} - \frac{i p r \cos\theta}{\hbar}} r^2 dr \sin\theta \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} r \, dr \, \frac{e^{-\frac{ipr}{\hbar}} - e^{\frac{ipr}{\hbar}}}{-\frac{ipr}{\hbar}} = \frac{2\pi\hbar}{p} \int_0^\infty 2 e^{-\frac{r}{a}} \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right) r \, dr =$$

$$= \frac{4\pi\hbar}{p} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right) r \, dr$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x \sin bx \, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} \quad (***)$$

$$I \overset{(***)}{=} \frac{4\pi\hbar}{p} \frac{2 \, 1/a \, \, p/\hbar}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

$$\psi_{100}(\bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{8\pi}{a} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

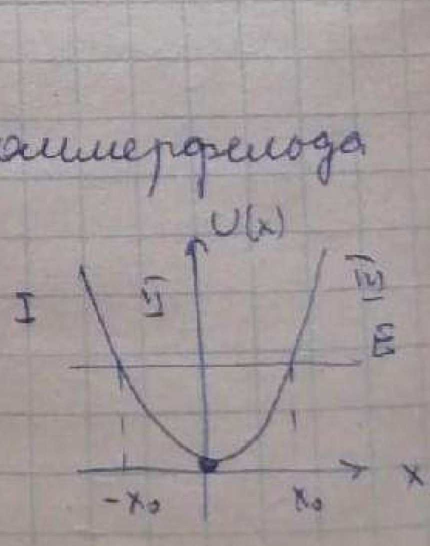
$$\psi_{100}(\bar{p}) = \frac{4\pi\hbar^4}{a_Б \sqrt{\pi a_Б}} \frac{1}{\left(p^2 + \hbar^2/a^2\right)^2}$$

Задача 7.

а) $U(x) = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$

Правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_a^b p(x) \, dx = \pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$



$$p_{x_{00}}(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$$

$$I = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2m(E - U(x))} \, dx = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{2mE} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1-\frac{m\omega^2 x^2}{2E}}\,dx = 2\sqrt{2mE}\,x_0\int_0^{x_0}\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}\,d\frac{x}{x_0} =$$

$$= 2\sqrt{2mE}\,x_0\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$I = 2\sqrt{2mE}\cdot\frac{\pi}{4}\,x_0 = \pi\hbar\left(n+\frac12\right)$$

$$\frac12\sqrt{2m\frac{2E^2}{m\omega^2}} = \hbar\left(n+\frac12\right) \hookleftarrow E_n = \hbar\omega\left(n+\frac12\right),\ n=\overline{0,\infty}$$

Результат совпадает с точным решением.

$$x>x_0:\quad \psi_{III}(x) = \frac{B}{2\sqrt{|p(x)|}}\exp\Big(-\underbrace{\frac1\hbar\int_{x_0}^{x}|p|\,dx}_{I_3}\Big) \qquad (1)$$

$$-x_0<x<x_0:\quad \psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}}\sin\Big(\underbrace{\frac1\hbar\int_{x}^{x_0}p\,dx}_{I_2}+\frac\pi4\Big) \qquad (2)$$

$$\int_x^{x_0} = \int_{-x_0}^{x_0} - \int_{-x_0}^{x}$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt p}\sin\Big(\overbrace{\frac1\hbar\int_{-x_0}^{x_0}p\,dx}^{\pi(n+\frac12)} - \frac1\hbar\int_{-x_0}^{x}p\,dx+\frac\pi4\Big) =$$

$$= -\frac{B}{\sqrt p}\sin\Big(\frac1\hbar\int_{-x_0}^{x}p\,dx - \underbrace{\pi\left(n+\frac34\right)}_{\frac\pi4-\pi(n+1)}\Big) = \frac{B}{\sqrt p}\sin\Big(\frac1\hbar\int_{-x_0}^{x}p\,dx -$$

$$-\pi n+\frac\pi4\Big) = \frac{B}{\sqrt p}(-1)^n\sin\Big(\frac1\hbar\int_{-x_0}^{x}p\,dx+\frac\pi4\Big) \qquad (2')$$

С другой стороны

$$\psi_{II}(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\sin\Big(\frac1\hbar\int_{-x_0}^{x}p(x)\,dx+\frac\pi4\Big) \qquad (3)$$

Сравнивая (2') и (3), получаем, что $A=B(-1)^n$

$x<-x_0:$

$$\psi_I = \frac{A}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^{-x_0} |p|\,dx\right) = \frac{B(-1)^n}{2\sqrt{|p|}} \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^{-x_0} |p|\,dx}_{I_1}\Big)$$

С другой стороны:

Получаем реш. в виде чётн. и нечётн. волновых ф-ций. Это совпадает с точным решением

$$I_2 = \frac{1}{\hbar}\int\limits_x^{x_0} p(\xi)\,d\xi = \frac{E_n}{\hbar\omega}\left(\frac{x}{x_0}\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{\hbar}\int\limits_x^{-x_0} |p(\xi)|\,d\xi$$

$$I_3 = \frac{1}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x} |p(\xi)|\,d\xi$$

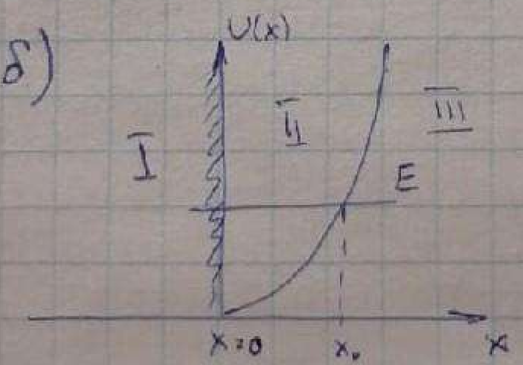
$$I_{1,3} = \frac{E_n}{\hbar\omega}\left(\mp\frac{x}{x_0}\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-1} - \ln\left(\mp\frac{x}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-1}\right)\right)$$

Пренебрегаем $\exp$, считаем $\overline{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow B \approx \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi}}$

Окончательно:

$$\psi_n(x) = B\cdot\begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{|p(x)|}}\, e^{-I_1}, & x < -x_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(I_2 + \dfrac{\pi}{4}\right), & -x_0 < x < x_0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|p(x)|}}\, e^{-I_3}, & x > x_0 \end{cases}$$

б)



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Заметим, что применимость метода ВКБ вып-ся до $x = +0$, а в точке $x = 0$ нужно поставить гр. усл-ие:

$\psi_{II}(0) = 0 = \frac{B}{\sqrt{p(+0)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_0} p\,dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Откуда $\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_0} p\,dx + \frac{\pi}{4} = \pi(n+1)$, $n = \overline{0,\infty}$

Получаем модифик. правила Бора - З.:

$$y = \int_0^{x_0} p\,dx = \pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2mE}\,\frac{\pi}{4}\,x_0 = \pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{E}{\omega} = \hbar\left(n + \frac{3}{4}\right)$$

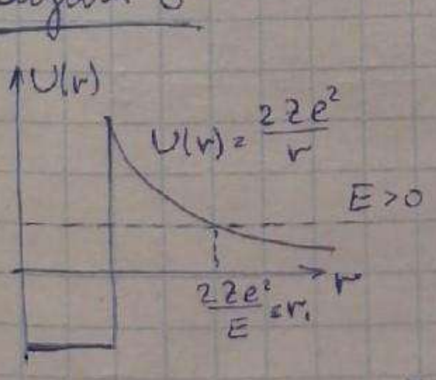
$$E_n = \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right), \quad n = \overline{0,\infty}$$

Уровни энерг. совп. с нечётн. для случая а.

Аналогично зад. 2 из 1-го зад., можно получить

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\psi_{2n+1}(x), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Задача 8



α-распад ${}^4_2He$

$$E \ll \frac{2Ze^2}{r_0} \Leftrightarrow \frac{r_0}{r_1} \ll 1$$

$$D(E) \simeq e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1} |p(r)|\,dr} = e^{-\frac{2}{\hbar} I}$$

$$I = \int_{r_0}^{r} |p(r)|\,dr = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m(U(r)-E)} = \sqrt{2m}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E}\,dr =$$

$$= \sqrt{2m \cdot 2Ze^2}\int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)^{1/2} dr = \sqrt{2m\,2Ze^2}\int_{r_0/r_1}^{1}\left(\frac{1}{r_1 x^2} - \frac{1}{r_1}\right)^{1/2} 2 r_1 x\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2mZze^2}\sqrt{r_1}\int_{r_0/r_1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\sqrt{2mZze^2}\sqrt{r_1}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \pi\sqrt{mze^2}\sqrt{\frac{2ze^2}{E}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{E}}ze^2$$

$$\hookrightarrow D \simeq e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}} \quad (1)$$

где $C = \frac{2\pi}{\hbar}\sqrt{2m}\,ze^2$

Число ударов о стенку барьера за время t:

$$N \sim \frac{vt}{r_0} = \frac{pt}{mr_0} \sim \frac{\hbar t}{mr_0^2}$$

частота ударов: $n \sim \frac{\hbar}{mr_0^2}$

Вер-сть выхода в ед. времени

$$P_{вых} = nD = \frac{\hbar D}{mr_0^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \\ N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \end{cases} \hookrightarrow T_{1/2} = \ln 2/\lambda \quad (3)$$

$$\frac{dN}{dt} = -N\lambda$$

$$P_{вых} = \frac{|dN/dt|}{N} = \lambda \overset{(3)}{=} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \overset{(2)}{=} \frac{\hbar D}{mr_0^2} \overset{(1)}{=} \frac{\hbar}{mr_0^2}e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}}$$

$$\frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\hbar}{mr_0^2}e^{-\frac{C}{\sqrt{E}}}$$

$$\ln(\ln 2) - \ln T_{1/2} = \ln\frac{\hbar}{mr_0^2} + \left(-\frac{C}{\sqrt{E}}\right) \hookrightarrow \ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

где A и B - const.

Задача 11

$^3H \to {}^3He + e^- + \ldots$

Для водородопод. атома

$$\Psi_{100} = \left(\frac{z}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{zr}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$, где a - радиус Бора

$$\Psi_{200} = \left(\frac{z}{2a}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{zr}{a}\right) e^{-\frac{zr}{2a}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

а) част. переходит из сост. Ψ_{100} с $z=1$ в сост. Ψ_{100} с $z=2$.

$$W_{0\to 0'} = |\langle\Psi_{0'}|\Psi_0\rangle|^2$$

$$\langle\Psi_{0'}|\Psi_0\rangle = \int_0^\infty \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{2r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\pi =$$

$$= \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} 4 \int_0^\infty e^{-\frac{3r}{a}} r^2 dr \overset{t=\frac{3r}{a}}{=\!=} \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{3}\right)^3 4 \int_0^\infty e^{-t} t^2 dt =$$

$$= \left(\frac{2}{a^2}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{3}\right)^3 8$$

$$W_{0\to 0'} = \left(\frac{2}{a^2}\right)^3 \left(\frac{a}{3}\right)^6 8^2 = \frac{2^9}{3^6} = \frac{512}{729}$$

б) частица переходит из состояния Ψ_{100} с $z=1$ в сост. Ψ_{200} с $z=2$

$$W_{0\to 1'} = |\langle\Psi_{1'}|\Psi_0\rangle|^2$$

$$\langle\Psi_{1'}|\Psi_0\rangle = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{2r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{a^3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr \overset{t=\frac{2}{a}r}{=\!=} \frac{4}{a^3} \frac{a^3}{8} \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{2}\right) e^{-t} t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3!}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$W_{0\to 1'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{W_{0\to 1'}}{W_{0\to 0'}} = \frac{729}{2048} < 1$$