

Ricerca operativa  
**Relazione Progetto 4**

I problemi di programmazione lineare sfocano inevitabilmente anche nell'ambito della logistica. Stiamo affrontando un problema di minimizzazione: nello specifico la richiesta si sostanzia nella riduzione della distanza totale da ricoprire per rifornire i clienti, dunque il trasporto di attrezzatura militare da basi di collaudo a basi richiedenti. Da quale base converrà rifornire le basi "clienti" al fine del raggiungimento del nostro obiettivo di minimizzazione?

Di seguito proponiamo il modello matematico di ottimizzazione, raggiunto mediante l'utilizzo del software AMPL.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^3 x_{ij} * D_{ij} \\
 \text{s.t. } & \sum_{j=1}^5 x_{ij} * Ur_j \leq Ud_i \quad \forall i \\
 & \sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1 \quad \forall j \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1, 2, 3) \\
 & \quad \quad \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)
 \end{aligned}$$

#### Indici impiegati

i = basi di collaudo	(i = 1, 2, 3)	1 = Oklahoma City
		2 = Macon
		3 = Columbus

j = basi richiedenti	(j = 1, 2, 3, 4, 5)	1 = Tampa
		2 = Riverside
		3 = Tucson
		4 = Wichita
		5 = Orlando

#### Dati

**Matrice  $D_{ij}$ :** è la matrice delle distanze da percorrere per rifornire la base cliente.

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando
Oklahoma City	950	1050	800	150	1000
Macon	350	1800	1400	800	300
Columbus	900	1800	1600	700	850

**Vettore  $Ud_i$ :** è il vettore delle unità disponibili per ogni base di collaudo.

	Unità Disponibili
Oklahoma City	19
Macom	17
Columbus	13

**Vettore  $Ur_j$  :** è il vettore delle quantità di attrezzature richieste da ogni base cliente.

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando
Unità richieste	5	4	4	11	8

### Variabile decisionale

Con l'intento di ovviare al problema della minimizzazione è necessario identificare la variabile decisionale. Calandoci nel problema, si tratta di individuare da quale base far rifornire ogni cliente, ovvero "faccio rifornire il cliente j dalla base i?".

La risposta a questa domanda può essere solo di due tipi: "sì" o "no". Non si tratta dunque di caratteri quantitativi ma di caratteri qualitativi che si sostanziano in una "scelta binaria"; scelta che va dunque codificata al fine di essere inserita nel nostro modello matematico.

Nel problema ci riferiremo alla seguente variabile binaria:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il fornitore } i \text{ serve la base cliente } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### Funzione obiettivo

Le basi fornitrice (nel nostro caso Oklahoma City, Macon e Columbus) devono ovviare al problema delle distanze per rifornire le basi clienti (Tampa, Riverside, Tucson, Wichita e Orlando). Nella logistica la distanza rappresenta un vero e proprio elemento di difficoltà: da essa dipendono costi fissi e variabili legati inevitabilmente al trasporto del prodotto verso terzi. La distanza è uno degli elementi che maggiormente influisce (negativamente) sui costi totali, senza trascurare la sua influenza circa l'efficienza di distribuzione al cliente (maggiore è la distanza, maggiori sono i tempi di spedizione).

$$\begin{aligned} \text{Min } & 950x_{11} + 1050x_{12} + 800x_{13} + 150x_{14} + 1000x_{15} + 350x_{21} + 1800x_{22} + 1400x_{23} + \\ & + 800x_{24} + 300x_{25} + 900x_{31} + 1800x_{32} + 1600x_{33} + 700x_{34} + 850x_{35} \end{aligned}$$

Riferendoci a quanto sopracitato sulla variabile binaria, nel caso in cui essa abbia valore pari a 0, la distanza non verrà considerata nel computo delle distanze totali, nel caso invece abbia valore pari a 1, essa verrà presa in considerazione e moltiplicata per il coefficiente corrispondente.

$$\text{Esempio: } 350 * x_{11} \quad x_{11} = \begin{cases} 1 & 350 * 1 = 350 \\ 0 & 350 * 0 = 0 \end{cases}$$

## Vincoli

Per perseguire l'obiettivo di minimizzazione è necessario sottostare ai seguenti vincoli:

- Vincolo di assegnazione
- Vincolo di capacità

Ogni base fornitrice  $j$  possiede in magazzino una certa e determinata quantità di attrezzature militari (unità disponibili), oltre la quale non può essere garantito il soddisfacimento delle necessità della base cliente.

Tale necessità è espressa dal **vincolo di capacità**:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 11x_{14} + 8x_{15} \leq 19 \quad \text{base fornitrice 1}$$

$$5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 11x_{24} + 8x_{25} \leq 17 \quad \text{base fornitrice 2}$$

$$5x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33} + 11x_{34} + 8x_{35} \leq 13 \quad \text{base fornitrice 3}$$

Il **vincolo di assegnazione** ci impone di rifornire ogni base cliente da una sola base fornitrice; non vale però il reciproco, una base fornitrice può rifornire due o più basi clienti.

Quindi, ricordando che la variabile  $x_{ij}$  assume esclusivamente valori binari:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \quad \text{base cliente 1}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \quad \text{base cliente 2}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \quad \text{base cliente 3}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 \quad \text{base cliente 4}$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 1 \quad \text{base cliente 5}$$

Intrinsecamente a questo vincolo esiste il vincolo di soddisfacimento della totalità della richiesta dal cliente. Si tratta però di un vincolo omittibile in quanto ridondante, ossia le informazioni contenute in esso sono già presenti all'interno del vincolo di assegnazione. In particolare, per la natura stessa della variabile, la sua omissibilità è legata all'interezza della stessa: una base cliente non può rifornire solo una frazione della domanda della base richiedente.

## Risultati

Il valore ottimo della funzione obiettivo è 2650; le singole variabili sono definite nella tabella sottostante.

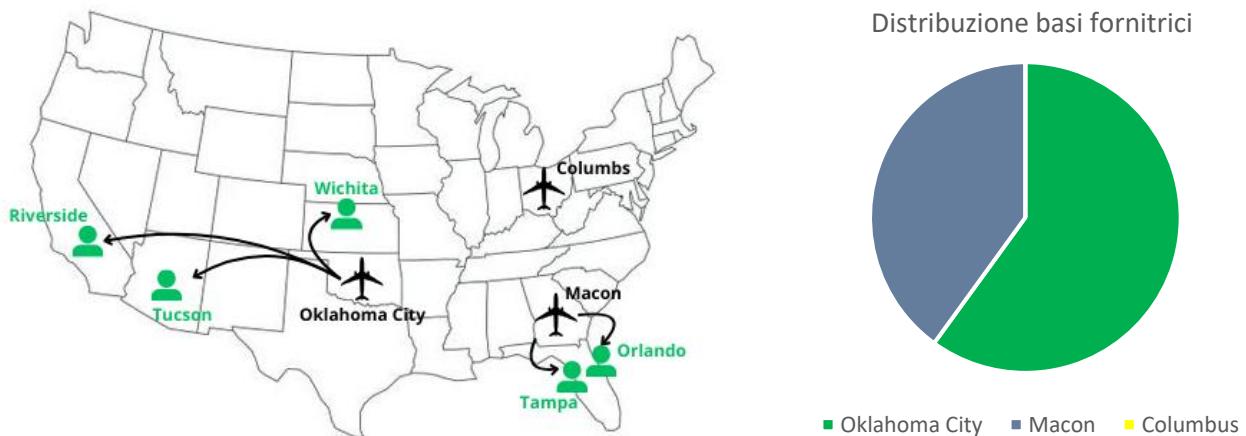
	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando
Oklahoma City	0	1	1	1	0
Macon	1	0	0	0	1
Columbus	0	0	0	0	0

Esplicitando il significato degli elementi della matrice finale, otteniamo le seguenti relazioni:

- La base di Tampa è rifornita dalla base di Macon;
- La base di Riverside è rifornita dalla base di Oklahoma City;
- La base di Tucson è rifornita dalla base di Oklahoma City;
- La base di Wichita è rifornita dalla base Oklahoma City;

- La base di Orlando è rifornita dalla base di Macon.

L'unica base a non rifornire alcuna base cliente è la base di Columbus, mentre la base reputata maggiormente conveniente è la base di Oklahoma City.



### Variazione sulla distanza di Macon-Tampa

I costi di distribuzione hanno un peso specifico rilevante sulla composizione del costo complessivo, il quale si sostanzia nella sommatoria dei costi di logistica come pedaggi autostradali, prezzo del carburante, tempo di percorrenza delle strade e dipende banalmente anche dal numero di mezzi pesanti che l'impresa è in grado di utilizzare nella propria rete di distribuzione. L'insieme di queste componenti determina se una base cliente verrà rifornita dall'una o dall'altra base fornitrice.

#### Esempio 1: Macon non rifornisce più Tampa

La modifica di accordi preesistenti con la ditta di leasing che hanno coinvolto la base fornitrice di Macon, ha comportato una riduzione dei mezzi pesanti utilizzabili dalla base stessa per rifornire i clienti. L'impresa, tramite un'indagine statistica, ha deciso che fosse più conveniente non rifornire la base di Tampa, meno redditizia, in modo da impegnare i propri trasportatori in modo più efficiente. Dunque, *da quale cliente verrà rifornita la base di Tampa a seguito di questa variazione?*

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando	Unità disponibili
Oklahoma City	950	1050	800	150	1000	19
Macon	99999	1800	1400	800	300	17
Columbus	900	1800	1600	700	850	13
Unità richieste	5	4	4	11	8	

Per inserire in modo opportuno la sopracitata variazione all'interno del modello matematico non è possibile né porre la distanza a "0" tra Tampa e Macon (perché così Macon rifornirebbe per forza la base di Tampa a fronte della scelta del valore minimo tra le distanze), né porre il segno "- " (non avrebbe alcun significato in termini matematici). Per sopravvenire a questo inconveniente in modo da far valere la nostra ipotesi, abbiamo posto la distanza tra le due basi pari a "999999". Essendo appunto questa una distanza molto elevata, sicuramente non verrà presa in considerazione per ricavare il valore ottimo del problema.

Il valore ottimo della funzione obiettivo diviene dunque pari a 3200. Rispetto al problema originale la base di Macon non rifornirà più la base di Tampa, la quale verrà presa in carico dalla base di Columbus.

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando
Oklahoma City	0	1	1	0	0
Macon	0	0	0	0	1
Columbus	0	0	0	1	0



### Esempio 2: diminuzione della distanza

Con l'insediamento di una nuova giunta amministrativa in Georgia, sono stati stanziati maggiori fondi da destinare alle reti di comunicazione autostradali. In particolare, è stata costruita una superstrada che collega la Georgia alla Florida che riduce i tempi di percorrenza tra i due stati adiacenti. La base fornitrice di Macon (Georgia) rifornisce la base cliente di Tampa (Florida). *Questa variazione in che modo modificherà il problema di ottimizzazione?*

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando	Unità disponibili
Oklahoma City	950	1050	800		1000	19
Macon	300	1800	1400	800	300	17
Columbus	900	1800	1600	700	850	13
Unità richieste	5	4	4	11	8	

Data la modifica della distanza specifica dalla base di Macon a quella di Tampa (riduzione di 50 miglia), ne consegue una diretta riduzione della distanza totale e dunque del valore della funzione obiettivo, pari allo stesso valore della fluttuazione in miglia. Notiamo che la variazione non produce effetti in termini di assegnazioni: le basi fornitrice riforniscono le stesse base clienti. Si tratta dunque di una variazione interna alla funzione obiettivo il cui valore passa da 2650 a 2600.

## Variazione sulle unità disponibili di Oklahoma City

Uno dei vincoli impostoci dal problema di partenza è il vincolo di capacità. Nello specifico, è necessario garantire la completa soddisfazione della richiesta del cliente senza sforare le unità disponibili della base fornitrice. Il vincolo di capacità dipende direttamente dall'investimento fisso in impianti e infrastrutture a opera dell'azienda al fine di garantire una capacità di magazzino coerente con i dati, le ambizioni dell'azienda stessa e le aspettative sulla produzione nel medio-lungo termine.

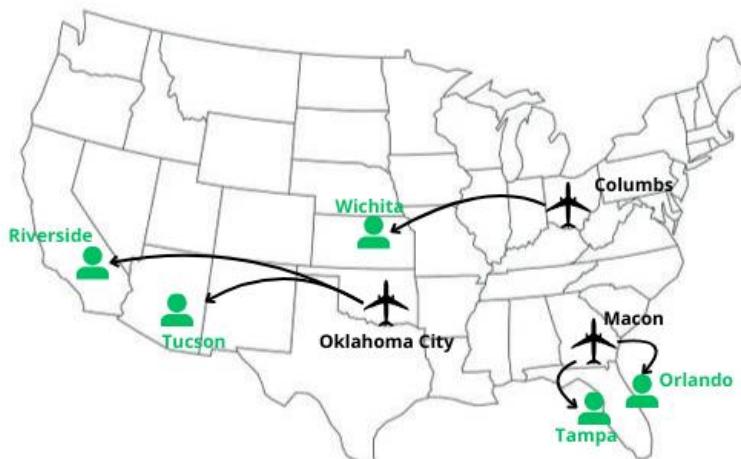
### Esempio 1: riduzione delle unità disponibili

A seguito di un incendio divampato nell'area carico/scarico del magazzino di Oklahoma City, la suddetta base fornitrice ha subito una riduzione inattesa delle unità disponibili da destinare alla clientela: da 19 unità disponibili la capacità si è ridotta a 15. *Oklahoma rifornirà gli stessi clienti o questa variazione comporterà delle modiche nell'assetto logistico del nostro problema di ottimizzazione?*

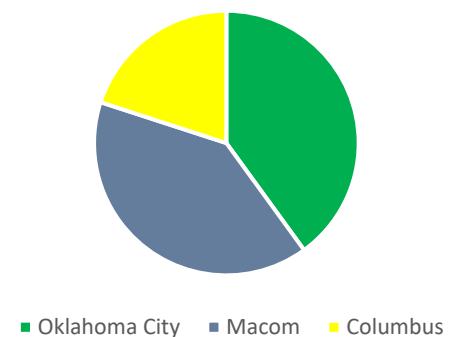
	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando	Unità disponibili
Oklahoma City	950	1050	800	150	1000	<b>15</b>
Macon	350	1800	1400	800	300	17
Columbus	900	1800	1600	700	850	13
Unità richieste	5	4	4	11	8	

Data la riduzione delle unità disponibili del magazzino di Oklahoma, abbiamo una modifica del problema di ottimizzazione sia in termini di valore della funzione obiettivo, sia in termini di assegnazione: in particolare la base di Wichita verrà rifornita dalla base di Columbus e non più dalla base di Oklahoma. In un problema di minimizzazione ciò si traduce in un peggioramento del valore della funzione obiettivo, a causa della maggiore la distanza che intercorre tra Columbus e Oklahoma rispetto a Wichita: il suo valore passa infatti da 2650 a 3200.

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando
Oklahoma City	0	1	1	<b>0</b>	0
Macon	1	0	0	0	1
Columbus	0	0	0	<b>1</b>	0



Distribuzione basi fornitrice



## Esempio 2: aumento della capacità

La base fornitrice di Oklahoma City, tramite opportune ricerche di mercato, ha valutato l'ampiamento della capacità del proprio magazzino. La sua posizione, infatti, essendo nelle prossimità di molte basi clienti da rifornire, rappresenta una posizione strategica. *Questa variazione rappresenterà un vantaggio in termini di logistica, oppure non apporterà delle modifiche al valore della funzione obiettivo? È quindi conveniente ampliare la capacità del magazzino di Oklahoma?*

	Tampa	Riverside	Tucson	Wichita	Orlando	Unità disponibili
Oklahoma City	950	1050	800	150	1000	<b>25</b>
Macon	350	1800	1400	800	300	17
Columbus	900	1800	1600	700	850	13
Unità richieste	5	4	4	11	8	

L'ampiamento della capacità di magazzino valutato dalla base di Oklahoma non comporta alcun tipo di variazione in termini di valore della funzione obiettivo e di assegnazioni: le stesse basi fornitrice serviranno le stesse basi clienti con un valore della funzione obiettivo corrispondente al valore originario. La variazione è esogena, riguarda uno dei vincoli, ma non direttamente la funzione obiettivo.

## Riepilogo delle variazioni

Sintetizziamo e rendiamo maggiormente immediati i risultati delle precedenti variazioni con il grafico sottostante:

