Tema nr. 6

Fie P un polinom de grad n cu coeficienţi reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \quad a_0 \neq 0$$

Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P. Să se implementeze metoda lui Halley de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii oricărui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Halley pornind de la puncte de start x_0 diferite. Rezultatele se vor afişa pe ecran şi se vor memora într-un fişier. În fişierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 şi v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

Bonus 20 pt.: eliminarea rădăcinilor de multiplicitate > 1 prin calculul celui mai mare divizor comun al polinoamelor P şi P', $Q = \text{c.m.m.d.c.}(P, P')$ şi simplificarea polinomului P, $P = P/Q$.

Metoda Halley de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ , \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R,\ R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|} \quad , \quad A = \max\{|a_i| \ ; \ i = \overline{1,n}\} \tag{2}$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul [-R, R]) a polinomului P definit de (1), se construieşte un şir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R,\ R]$ căutată ($x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$) .

Dându-se primul element x_0, şirul $\{x_k\}$ se construieşte astfel (x_{k+1} se calculează din x_k):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{a_k} \ , \\ a_k &= \frac{P'(x_k)}{P(x_k)} - \frac{P''(x_k)}{2P'(x_k)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Metoda descrisă mai sus se poate aplica nu numai pentru aproximarea rădăcinilor polinoamelor ci pentru rădăcinile oricărei funcţii neliniare continue de două ori derivabilă.

Observaţie importantă: Alegerea primului element ale şirului, x_0, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a iteraţiei iniţiale x_0 în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este nevoie de memorat tot şirul $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* cu metoda lui Halley este următoarea:

Metoda lui Halley

x se alege aleator ; $k = 1$;
(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este de preferat alegerea valorilor x_0 în vecinătatea soluţiei căutate)

do
{
$\star$ calculează $A = 2[P'(x)]^2 - P(x_k)P''(x)$;
$\star$ if ($|A| < \epsilon$) STOP;
//(se poate încerca schimbarea lui x_0)
$\star$ se calculează $\Delta = \dfrac{P(x)P'(x)}{A}$;
$\star$ $x = x - \Delta$;
$\star$ $k++$;
}
while ($|\Delta| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta| \leq 10^8$)
if ($|\Delta| < \epsilon$) $x \approx x^*$;
else *divergenţă* ; //(de încercat alte valori pentru x_0)

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i \in \mathbf{R}\, \forall i \ , \ \ a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \cdots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor, obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbf{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \ , \\ b_i &= a_i + b_{i-1}v \ , \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (5)$$

Folosind şirul de mai sus, valoarea polinomului P în punctul v este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalţi termeni b_i calculaţi, sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - v)Q(x) + r \ , \\ Q(x) &= b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \ , \\ r &= b_n = P(v). \end{aligned} \quad (6)$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbf{R}$ şi nu un vector $b \in \mathbf{R}^n$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \ , \\
& a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 11.0\,, \quad a_3 = -6. \\
P(x) &= (x - \frac{2}{3})(x - \frac{1}{7})(x+1)(x - \frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6) \\
& a_0 = 42.0\,, \quad a_1 = -55.0\,, \quad a_2 = -42.0\,, \quad a_3 = 49.0\,, \quad a_4 = -6.0. \\
P(x) &= (x-1)(x - \frac{1}{2})(x-3)(x - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3) \\
& a_0 = 8.0\,, \quad a_1 = -38.0\,, \quad a_2 = 49.0\,, \quad a_3 = -22.0\,, \quad a_4 = 3.0. \\
P(x) &= (x-1)^2(x-2)^2 \\
&= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\
& a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 13.0\,, \quad a_3 = -12.0\,, \quad a_4 = 4.0.
\end{aligned}$$