

# Barem Examen AA

2 Februarie 2021

## Contents

<b>1 Algoritmi Nedeterminiști</b>	<b>1</b>
1.1 Rezolvare . . . . .	2
1.2 Barem . . . . .	3
<b>2 Teorema Master</b>	<b>3</b>
2.1 Barem . . . . .	3
<b>3 Inducție Structurală</b>	<b>3</b>
3.1 Barem . . . . .	4
3.2 Rezolvare . . . . .	4

## 1 Algoritmi Nedeterminiști

Scrieți un algoritm nedeterminist polinomial pentru următoarea problemă și calculați complexitatea sa angelică?

Se dă o matrice de dimensiune  $n \times m$  cu elemente numere întregi. Se poate obține o submatrice de sumă  $S$  interschimbând maxim  $k$  coloane și/sau linii?

## 1.1 Rezolvare

---

```
function SOLVE( $A[1..n][1..m], S, k$ )
  for  $i = 0; i < k; i++$  do
    onLines = choice({false, true})
    if onLines then
      l1 = choice({1..n})
      l2 = choice({1..n})
      for  $j = 1; j \leq m; j++$  do
        swap( $A[l1][j], A[l2][j]$ )
      end for
    else
      c1 = choice({1..m})
      c2 = choice({1..m})
      for  $j = 1; j \leq n; j++$  do
        swap( $A[j][c1], A[j][c2]$ )
      end for
    end if
    for  $l1 = 1; l1 < n; l1++$  do
      for  $c1 = 1; c1 < m; c1++$  do
        for  $l2 = l1 + 1; l2 \leq n; l2++$  do
          for  $c2 = c1 + 1; c2 \leq m; c2++$  do
            sum = 0
            for  $l = l1; l \leq l2; l++$  do
              for  $c = c1; c \leq c2; c++$  do
                sum +=  $A[l][c]$ 
              end for
            end for
            if sum == S then
              Success
            end if
          end for
        end for
      end for
    end for
  end for
  Fail
end function
```

---

Algoritmul face  $k$  interschimbări, încercând pe ramuri diferite toate combinațiile de linii și coloane. Indecșii aleși pot fi și egali, astfel încât pot fi făcute și mai puțin de  $k$  interschimbări.

Verificarea nu este cea mai eficientă posibil, însă este polinomială, for-urile interioare având complexitatea  $\Theta(n^3 * m^3)$ . Tot algoritmul va avea o complexitate angelică de  $\Theta(k * n^3 * m^3)$ .

## 1.2 Barem

- (3p) Generarea soluției.
- (2p) Verificarea constrângerilor.
- (1p) Identificarea complexității.

## 2 Teorema Master

$$T(n) = 3 * T(\frac{3*n}{10}) + n * \sqrt{n} - O(n)$$

### 2.1 Barem

- (0.5p) identificare corectă:  $a = 3, b = \frac{10}{3}$
- (1p) identificare corectă:  $f(n) = n * \sqrt{n} - O(n) = O(n^{1.5})$
- (1p) stabilit că:  $n^{\log_b(a)} = O(n^{1.5-\epsilon})$  cu  $\epsilon > 0$  (depinde cum este făcută discuția, cel mai simplu ar fi să arate că  $3 < \frac{10}{3}^{\frac{3}{2}}$ )
- (0.25p+0.25p) discutat + demonstrat condiția de regularizare pentru  $f(n)$
- (1p) concluzionat că putem aplica cazul 3 din Teorema Master și trasa concluzia ca  $T(n) = \theta(n * \sqrt{n}) = \theta(n^{1.5})$

## 3 Inducție Structurală

### List 1: Constructori

- $[] : \rightarrow ListT$
- $(x : xs) : T \rightarrow ListT \rightarrow ListT$

### List 2: $member : T \rightarrow ListT \rightarrow Bool$

**M1:**  $member(e, []) = False$

**M2:**  $member(e, x : xs) = (x == e) \vee member(e, xs)$

### List 3: $unique : ListT \rightarrow Bool$

**U1:**  $unique([]) = True$

**U2:**  $unique(x : xs) = !member(x, xs) \wedge unique(xs)$

**List 4:**  $intersection : ListT \rightarrow ListT \rightarrow ListT$

**INT1:**  $intersection([], y) = []$

**INT2:**  $intersection(x : xs, y)$   
 $= x : intersection(xs, y), \text{ if } member(x, y)$

**INT3:**  $intersection(x : xs, y)$   
 $= intersection(xs, y), \text{ if } !member(x, y)$

**De demonstrat P 1**

$unique(l1) \wedge unique(l2) \implies unique(intersection(l1, l2)).$

### 3.1 Barem

- (2p) Demonstrația pentru cazul de bază.
- (2p) Specificarea ipotezei inductive și a pasului de inducție.
- (3p) Demonstrația pasului de inducție.
- (1p) Identificarea proprietății adiționale.
- (2p) Demonstrația proprietății adiționale.

### 3.2 Rezolvare

- **Cazul de bază:**  $l1 == []$

Ne propunem să demonstrăm:

$unique([]) \wedge unique(l2) \implies unique(intersection([], l2)).$

$unique(intersection([], l2)) =^{INT1} unique([]) =^{M1} True.$

- **Ipoteza inductivă:**  $P(xs)$

$unique(xs) \wedge unique(l2) \implies unique(intersection(xs, l2)) .$

- **Pasul de inducție:**  $P(xs) \implies P(x : xs).$

Ne propunem să demonstrăm:

$unique(x : xs) \wedge unique(l2) \implies unique(intersection(x : xs, l2)).$

Presupunem  $unique(x : xs)$ , respectiv  $unique(l2)$  adevărate, în caz contrar, implicația este trivial adevărată. Cum  $unique(x : xs)$  este adevărat,

putem folosi din ipoteza inductivă faptul că  $unique(intersection(xs, l2))$  este adevărat.

$$(O1) \quad unique(x : xs) \implies U2 \quad !member(x, xs) \wedge unique(xs)$$

Fie  $E = unique(intersection(x : xs, l2))$ .

**Avem de analizat două cazuri:**

1.  $member(x, l2)$

$$E =^{INT2} unique(x : intersection(xs, l2)).$$

$$E =^{U2} !member(x, intersection(xs, l2)) \wedge unique(intersection(xs, l2)).$$

Pentru a demonstra că expresia E este adevărată avem nevoie de o proprietate adițională PA(xs):

$$!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT$$

$$E =^{O1, PA, II} True$$

2.  $!member(x, l2)$

$$E =^{INT3} unique(intersection(xs, l2)) =^{II} True.$$

**Mai avem de demonstrat proprietatea adițională PA(xs):**

$$!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT.$$

- **Cazul de bază**  $xs == []$ .

Ne propunem să demonstrăm:

$$!member(e, []) \implies !member(e, intersection([], L)), \forall L : ListT.$$

$$E = !member(x, intersection([], L)) =^{(INT1)} !member(x, []) =^{(M1)} True.$$

- **Ipoteza inductivă**  $P(xs)$ .

$$!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT$$

- **Pasul de inducție**  $P(xs) \implies P(x : xs)$ .

Ne propunem să demonstrăm că:

$$!member(e, x : xs) \implies !member(e, intersection(x : xs, L)), \forall L : ListT.$$

Presupunem  $!member(e, x : xs) = True$ .

$$(O1) \quad !member(e, x : xs) = (e \neq x) \wedge !member(e, xs).$$

Fie  $E = !member(e, intersection(x : xs, L))$

**Avem de analizat două cazuri:**

1.  $member(x, L)$

$$\begin{aligned} E &=^{INT2} !member(e, x : intersection(xs, L)) \\ E &=^{M2} (e \neq x) \wedge !member(e, intersection(xs, L)) =^{O1, II} True. \end{aligned}$$

2.  $!member(x, L)$

$$E =^{INT3} !member(e, intersection(xs, L)) =^{II} True.$$