



**Video on Demand S.p.a.
Progetto Logistics 2020/21**

Alexandra Bradan (530887)¹ and Alice Graziani (544557)²

Contatti: ¹a.bradan@studenti.unipi.it, ²a.graziani5@studenti.unipi.it

30 gennaio 2021

Indice

1	Consegna	3
2	Prima implementazione	4
2.1	Modello PLI con un solo database ed un unico flusso	5
2.2	Risoluzione modello con un solo database ed un unico flusso, mediante AMPL e CPLEX	6
2.3	Modello PLI con due database ed un unico flusso	8
2.4	Risoluzione modello con due database ed un unico flusso, mediante AMPL e CPLEX	9
3	Seconda implementazione	12
3.1	Modello PLI con un solo database e doppio flusso	12
3.2	Risoluzione modello con un solo database e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX	14
3.3	Modello PLI con due database e doppio flusso	14
3.4	Risoluzione modello con due database e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX	16
3.5	Modello PLI con due database decentralizzati e doppio flusso	16
3.6	Risoluzione modello con due database decentralizzati e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX	16
4	Note finali	20

1 Consegna

Video on Demand S.p.a. vuole progettare una rete di comunicazione per inviare video e film "on demand". Ha a disposizione l'insieme di nodi A, B, C, D, E, F, G, che possono essere interconnessi tramite il seguente insieme di archi orientati: $\{(A,B), (A,C), (C,E), (B,D), (C,D), (D,E), (D,F), (E,G), (E,F), (F,G)\}$.

I costi fissi di attivazione degli archi della rete sono pari a $\{10.000, 15.000, 30.000, 18.000, 20.000, 12.000, 16.000, 16.000, 12.000, 10.000\}$ Euro. I costi variabili di instradamento dei dati lungo gli archi della rete sono stimati pari a $\{300, 150, 500, 300, 300, 500, 350, 200, 250, 300\}$ Euro/Mbit/s. Una volta attivati, gli archi della rete risultano equipaggiati con le seguenti capacità: $\{10, 20, 10, 10, 20, 7, 8, 20, 17, 15\}$ Mbit/s.

Il database contenente le informazioni è localizzato nel nodo A, mentre il cliente che si vuole servire è localizzato nel nodo G. La richiesta di connessione da A a G è stimata pari a 15 Mbit/s.

Video on Demand S.p.a. vuole valutare qual è il minimo costo necessario per connettere il cliente in G al database in A. Ovvero, vuole progettare la rete di comunicazione decidendo quali archi attivare, e come instradare i dati dal nodo A al nodo G lungo la rete, in modo da soddisfare la domanda del nodo G e rispettando i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale sostenuto (costi fissi + costi variabili).

1. Si formuli il problema di Video on Demand S.p.a. mediante un modello PLI;
2. Si implementi il modello proposto mediante il linguaggio di modellazione AMPL, e lo si risolva usando il software di ottimizzazione CPLEX;
3. Si consideri il caso in cui sia presente un secondo database nel nodo C e, oltre a soddisfare la richiesta pari a 15 Mbit/s del cliente in G mediante il database in A, si voglia anche servire una seconda richiesta del cliente in G, pari a 10 Mbit/s, utilizzando il database in C. Si formuli un modello PLI per il problema caratterizzato da queste due richieste di connessione, in modo da rispettare i vincoli di capacità e minimizzando il costo totale sostenuto (costi fissi + costi variabili);
4. Si implementi il modello proposto in 3 mediante AMPL e lo si risolva usando CPLEX, confrontando la soluzione ottima ottenuta con quella determinata in 2.

2 Prima implementazione

Il problema da noi risolto è un *Minimum Cost Flow Problem*. Dobbiamo, infatti, inviare un flusso di Mbits dall'origine del percorso (nodo A) alla destinazione (nodo G), minimizzando il costo di percorrenza e ricavando, conseguentemente, la latenza¹. Tutti gli altri nodi della rete, invece, vengono utilizzati come intermediari. Dobbiamo, inoltre, tener conto della capacità degli archi e complicare il problema, tenendo conto dei costi di design della rete medesima, ritrovandoci nella casistica di un *Fixed-charged network design Problem*. Notiamo, infine, che dato che il problema rientra nella categoria dei problemi di flusso di costo minimo, gode della *proprietà di integralità*: se le capacità degli archi e ed il bilancio dei nodi sono interi, allora esiste una soluzione ottima intera. Pertanto, la nostra formulazione del problema viene modellata come PLI, con l'ausilio di un grafo diretto $G=(V, A)$, avente:

- insieme dei nodi $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$;
- insieme degli archi $A = \{(A,B), (A,C), (C,E), (B,D), (C,D), (D,E), (D,F), (E,G), (E,F), (F,G)\}$;

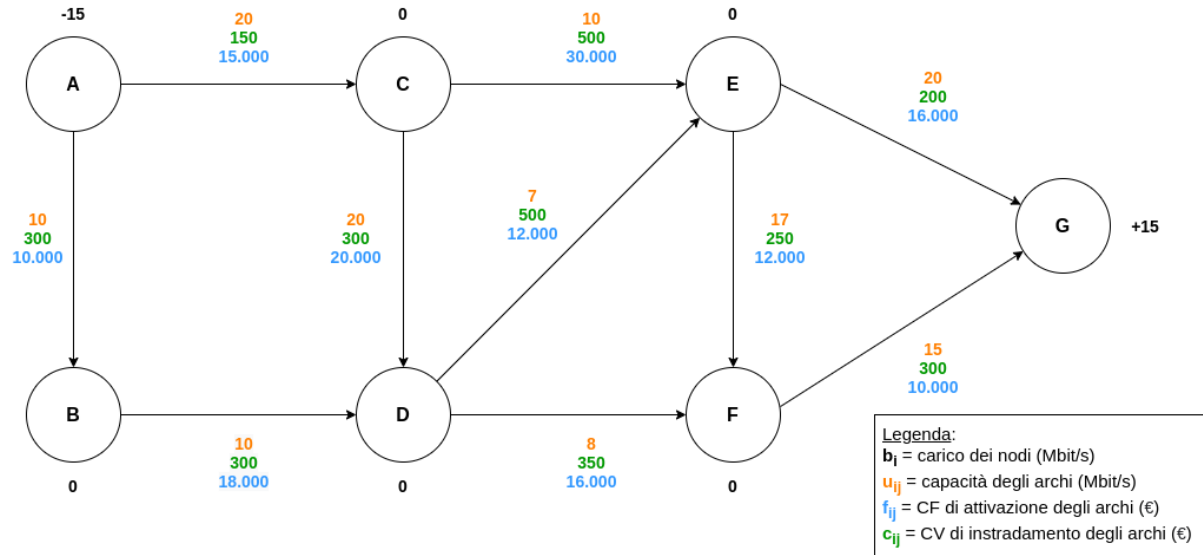


Figura 1: Grafo del problema nella prima formulazione.

La Figura 1 riassume i dati vincolati del nostro problema $\forall i \in V, \forall (i, j) \in A$:

- $b_i \geq 0$: i nodi origine e destinazione hanno bilanciamento rispettivamente -15 e +15, nella prima formulazione² (Figura 1), -15 per A, -10 per C e +25 per G nella seconda formulazione (Figura 3). Tutti gli altri nodi hanno bilanciamento 0, essendo relativi ai nodi di trasbordo;
- $u_{ij} > 0$: ogni arco ha una capacità massima in Mbit/s associata;

¹Intervallo di tempo che intercorre tra l'invio del primo Mbit dal database e l'arrivo dell'ultimo Mbit al destinatario.

²Per formulazione intenderemmo da qui in poi la risoluzione del problema con un solo database e due database, rispettivamente. Con il termine implementazione, invece, indicheremmo la modellazione delle due formulazioni mediante un unico flusso di Mbits dall'origine alla destinazione [2], oppure mediante due flussi sequenziali, dall'origine alla destinazione [3]. **Si prega di notare, che per un'interpretazione ambigua della consegna, abbiamo scomposto il problema in sotto-problemi di flusso di costo minimo per merce singola, indipendenti. Post correzione, la professoressa referente del corso ci ha comunicato che la reale interpretazione era da attribuirsi ad un problema di flusso di merci multiple, non indipendenti.**

- $f_{ij} > 0$: ogni arco ha un costo fisso di attivazione associato;
- $c_{ij} > 0$: ogni arco ha un costo variabile di attraversamento per Mbit/s associato.

2.1 Modello PLI con un solo database ed un unico flusso

Per quanto riguarda la prima formulazione del problema, avendo un unico nodo di fornitura ed un unico nodo di domanda, come mostrato in Figura 1, abbiamo fatto ausilio di un modello PLI di *Minimum Cost Flow*. Abbiamo, innanzitutto, utilizzato le seguenti variabili, $\forall (i, j) \in A$:

$$x_{ij} = \begin{cases} \geq 0, \text{ intero} & \text{flusso di Mbit/s su } (i, j) \in A \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in A \text{ è attivo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e sostituendo i dati a nostra disposizione, ricavato il seguente modello PLI:

$$\begin{aligned} \min \quad & 300x_{AB} + 150x_{AC} + 300x_{BD} + 300x_{CD} + 500x_{CE} + \\ & 500x_{DE} + 350x_{DF} + 250x_{EF} + 200x_{EG} + 300x_{FG} + \\ & 10000y_{AB} + 15000y_{AC} + 18000y_{BD} + 20000y_{CD} + \\ & 30000y_{CE} + 12000y_{DE} + 16000y_{DF} + \\ & 12000y_{EF} + 16000y_{EG} + 10000y_{FG} \end{aligned} \tag{1}$$

$$-x_{AB} - x_{AC} \geq -15 \tag{2}$$

$$x_{AB} - x_{BD} = 0 \tag{3}$$

$$x_{AC} - x_{CD} - x_{CE} = 0 \tag{4}$$

$$x_{BD} + x_{CD} - x_{DE} - x_{DF} = 0 \tag{5}$$

$$x_{CE} + x_{DE} - x_{EF} - x_{EG} = 0 \tag{6}$$

$$x_{DF} + x_{EF} - x_{FG} = 0 \tag{7}$$

$$x_{EG} + x_{FG} = 15 \tag{8}$$

$$x_{AB} \leq 10y_{AB} \tag{9}$$

$$x_{AC} \leq 20y_{AC} \tag{10}$$

$$\vdots$$

$$x_{FG} \leq 15y_{FG} \tag{11}$$

$$x_{AB}, x_{AC}, \dots, x_{FG} \geq 0 \tag{12}$$

$$x_{AB}, x_{AC}, \dots, x_{FG} \in \mathbb{N} \tag{13}$$

$$y_{AB}, y_{AC}, \dots, y_{FG} \in \{0, 1\} \tag{14}$$

dove:

- (1) è la nostra funzione obiettivo, la quale punta a minimizzare:

– i costi variabili di instradamento:

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij}$$

– i costi fissi di attivazione degli archi:

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}y_{ij}$$

- (2) - (8) sono i vincoli di conservazione del carico dei nodi, aventi formula:

– per il nodo di fornitura:

$$- \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} \geq b_i \quad \forall i \in V \setminus \{B, C, D, E, F, G\}$$

– per i nodi di trasbordo:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \forall i \in V \setminus \{A, G\}$$

con BS(i) insieme degli archi entranti in i e FS(i) insieme degli archi uscenti da i;

– per il nodo di domanda:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \setminus \{A, B, C, D, E, F\}$$

e carico di ciascun nodo $i \in V$:

$$b_i = \begin{cases} < 0 & \text{nodo di fornitura} \\ > 0 & \text{nodo di domanda} \\ = 0 & \text{nodo di trasbordo} \end{cases}$$

- (9) - (11) sono i vincoli di capacità di ogni arco ed allo stesso tempo anche i vincoli di legame tra le nostre due variabili x_{ij} e y_{ij} , $\forall (i,j) \in A$;
- (12) sono i vincoli di non negatività associati alla variabile x_{ij} , $\forall (i,j) \in A$;
- (13) sono i vincoli di integralità associati alla variabile x_{ij} , $\forall (i,j) \in A$;
- (14) sono i vincoli di binarietà associati alla variabile y_{ij} , $\forall (i,j) \in A$.

2.2 Risoluzione modello con un solo database ed un unico flusso, mediante AMPL e CPLEX

La Figura 2 riassume la soluzione ottima della nostra prima formulazione. Vediamo come il modello preferisca l'arco (A,C) per far fluire i Mbits dal nodo di fornitura. Questa è anche una scelta vincolata, in quanto attivando l'arco (A,B) che possiede una capacità di 10 Mbits/s, è necessario attivare in ogni caso anche l'arco (A,C) per far defluire i rimanenti 5 Mbits. L'attivazione di entrambi contro l'attivazione del solo arco più capiente è ovviamente più svantaggiosa in termini di costi e pertanto viene attivato solo (A,C). Questo è giustificato anche dalla topologia della rete, che instradando i dati su (A, B) non consente di giungere direttamente a G, ma mima il percorso ottimale che i dati fanno su (A,C), ossia passare per il nodo D. Proseguendo, infatti, in C il modello deve sottostare alla medesima decisione, appena descritta: attivare sia l'arco (C,E) per far fluire 10 Mbits ed i rimanenti instradarli su (C,D), od attivare il solo e più capiente (C,D). Anche questa volta la seconda opzione viene vagliata, tenendo in considerazione, inoltre, che l'attivazione dell'arco (C,E) è la più costosa della rete (30.000€). Una volta giunto in D, il flusso deve obbligatoriamente dividersi, in quando né l'arco (D,E) né l'arco (D,F) consentono il suo defluire per intero. Di conseguenza il flusso parziale che intraprende l'arco (D,F), giungerà al nodo destinazione G, per l'unico arco diretto (F,G). Il flusso parziale, invece, che intraprende l'arco (D,E) ha a disposizione il raggiungimento di G tramite l'immediato arco (E,G) oppure tramite gli archi (E,F) e (F,G). Considerando che attivare l'arco (E,G) e far defluire i 7 Mbits rimanenti ha un costo di 17.400€, contro l'attivazione ed il deflusso di 15.850€³ su (E,F) e poi su (F,G), il modello sceglie la seconda opzione, risultando in:

³L'arco (F,G) è già stato attivato in precedenza e pertanto non necessita di nuovi costi di attivazione.

1. un costo complessivo di **104.300€**;
2. una latenza complessiva di **51s**.

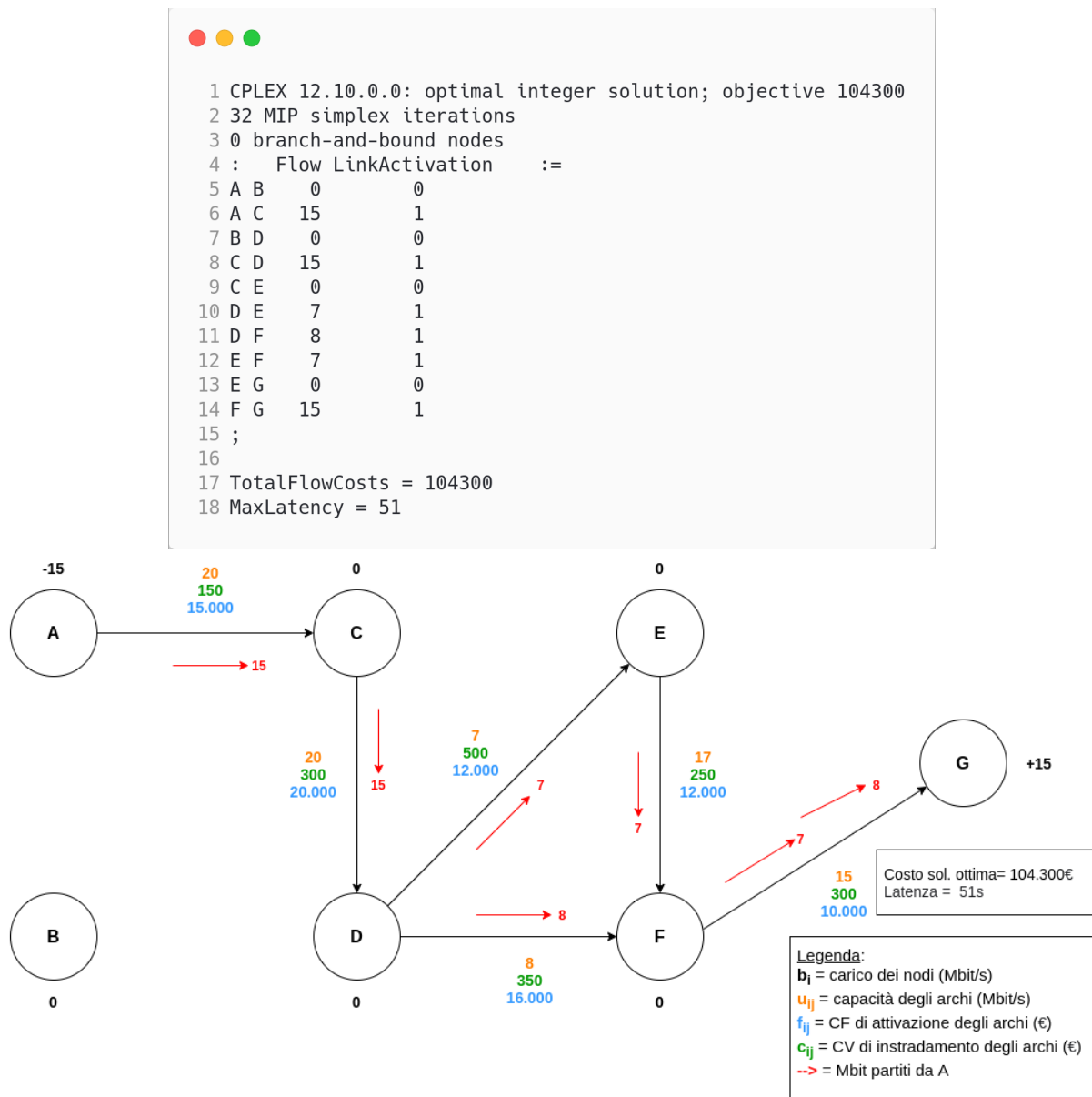


Figura 2: Soluzione ottimale della prima formulazione e sua visualizzazione grafica

2.3 Modello PLI con due database ed un unico flusso

Per quanto riguarda la seconda formulazione del problema, come notiamo dalla Figura 3, dobbiamo occuparci di due nodi di fornitura ed un unico nodo di domanda. Pertanto, abbiamo provveduto a modificare il modello descritto nella sezione 2.1. In particolare, per tenere traccia del flusso di Mbits che partano da A e C e giungono a G, abbiamo utilizzato una triplice indicizzazione della variabile:

$$x_{ijk} = \left\{ \geq 0, \text{intero} \quad \text{flusso di Mbit/s su } (i,j) \in A, \text{ partiti da } k \in \{A, C\} \right.$$

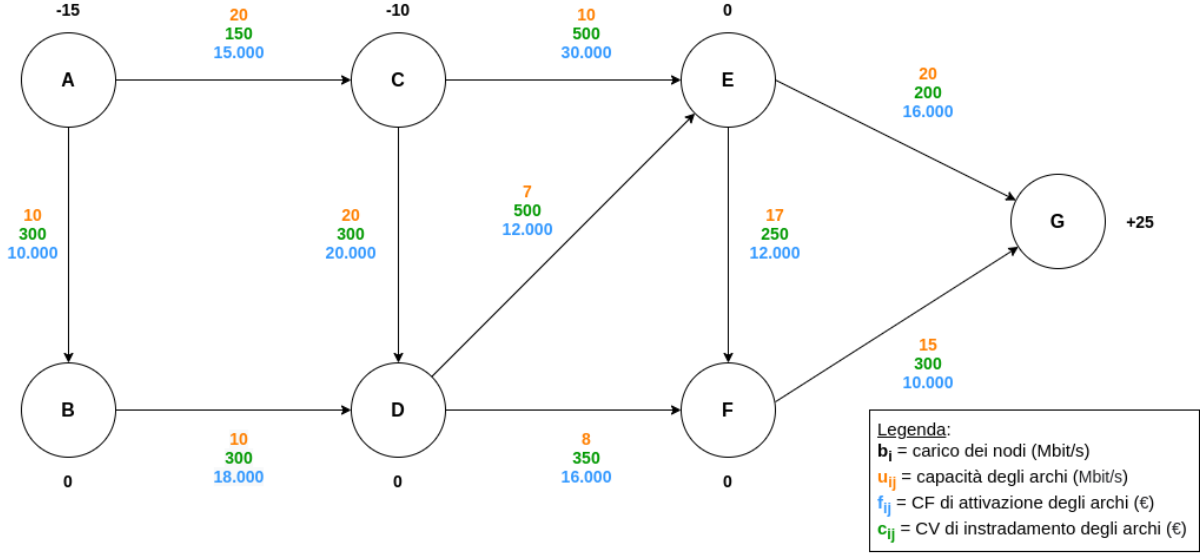


Figura 3: Grafo del problema nella seconda formulazione.

La variabile y_{ij} rimane la medesima descritta in 2.1, in quanto una volta attivato un arco per far fluire il flusso da un nodo di fornitura, anche il secondo nodo di fornitura potrà utilizzare il medesimo arco, omettendo, ovviamente, il costo di attivazione (già sostenuto con il primo attraversamento). Notiamo, inoltre, che l'arco (A,C) tra i due database viene utilizzato come arco di instradamento, contemplando in questa implementazione un flusso unico che parte dal nodo di fornitura A e che di conseguenza implica l'attivazione di (A,C), sia che tutto il flusso passi per (A,C), che parzialmente per (A,B) e (A,C).

Il modello adattato alla seconda formulazione è descritto di seguito. I commenti alla funzione obiettivo e ai vincoli sono i medesimi descritti nella sezione 2.1, rivisitati per tenere traccia di un duplice flusso. In particolare, sottolineammo il vincolo (8), con il quale si stabilisce che la somma dei flussi proveniente da entrambi i nodi di fornitura deve soddisfare la richiesta complessiva del nodo destinazione, espressa sotto forma di $b_G = 25$.

$$\begin{aligned}
\min \quad & 300x_{ABA} + 150x_{ACA} + 300x_{BDA} + 300x_{CDA} + 500x_{CEA} + \\
& 500x_{DEA} + 350x_{DFA} + 250x_{EFA} + 200x_{EGA} + 300x_{FGA} + \\
& 300x_{ABC} + 150x_{ACC} + 300x_{BDC} + 300x_{CDC} + 500x_{CEC} + \\
& 500x_{DEC} + 350x_{DFC} + 250x_{EFC} + 200x_{EGC} + 300x_{FGC} + \\
& 10000y_{AB} + 15000y_{AC} + 18000y_{BD} + 20000y_{CD} + \\
& 30000y_{CE} + 12000y_{DE} + 16000y_{DF} + \\
& 12000y_{EF} + 16000y_{EG} + 10000y_{FG} \tag{1} \\
& -x_{ABA} - x_{ACA} \geq -15 \tag{2} \\
& x_{ABA} - x_{BDA} = 0 \tag{3} \\
& x_{ACA} - x_{CDA} - x_{CEA} = 0 \tag{4} \\
& x_{BDA} + x_{CDA} - x_{DEA} - x_{DFA} = 0 \tag{5} \\
& x_{CEA} + x_{DEA} - x_{EFA} - x_{EGA} = 0 \tag{6} \\
& x_{DFA} + x_{EFA} - x_{FGA} = 0 \tag{7} \\
& x_{EGA} + x_{FGA} + x_{EGC} + x_{FGC} = 25 \tag{8} \\
& -x_{CDC} - x_{CEC} \geq -10 \tag{9} \\
& x_{CDC} - x_{DEC} - x_{DFC} = 0 \tag{10} \\
& x_{CEC} + x_{DEC} - x_{EFC} - x_{EGC} = 0 \tag{11} \\
& x_{DFC} + x_{EFC} - x_{FGC} = 0 \tag{12} \\
& x_{ABA} \leq 10y_{AB} \tag{13} \\
& x_{ACA} \leq 20y_{AC} \tag{14} \\
& \vdots \\
& x_{FGA} \leq 15y_{FG} \tag{15} \\
& x_{ABC} \leq 10y_{AB} \tag{16} \\
& x_{ACC} \leq 20y_{AC} \tag{17} \\
& \vdots \\
& x_{FGC} \leq 15y_{FG} \tag{18} \\
& x_{ABA}, x_{ACA}, \dots, x_{FGA} \geq 0 \tag{19} \\
& x_{ABA}, x_{ACA}, \dots, x_{FGA} \in \mathbb{N} \tag{20} \\
& x_{ABC}, x_{ACC}, \dots, x_{FGC} \geq 0 \tag{21} \\
& x_{ABC}, x_{ACC}, \dots, x_{FGC} \in \mathbb{N} \tag{22} \\
& y_{AB}, y_{AC}, \dots, y_{FG} \in \{0, 1\} \tag{23}
\end{aligned}$$

2.4 Risoluzione modello con due database ed un unico flusso, mediante AMPL e CPLEX

La Figura 4 riassume la soluzione ottima della seconda formulazione. Analizziamo prima il flusso che parte dal database situato in C. Il modello valuta i possibili cammini che da C portano al nodo destinazione G, ossia:

- $\{(C,E), (E,G)\}$ avente costo 53.000€;
- $\{(C,D), (D,E), (D,F), (E,F), (F,G)\}$ avente costo 85.550€.

```

CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 114250
47 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
Flow :=
A B A    0
A B C    0
A C A   15
A C C    0
B D A    0
B D C    0
C D A    5
C D C    0
C E A   10
C E C   10
D E A    5
D E C    0
D F A    0
D F C    0
E F A    0
E F C    0
E G A   15
E G C   10
F G A    0
F G C    0
;

LinkActivation :=
A B    0
A C    1
B D    0
C D    1
C E    1
D E    1
D F    0
E F    0
E G    1
F G    0
;

TotalFlowCosts = 114250
MaxLatency = 45

```

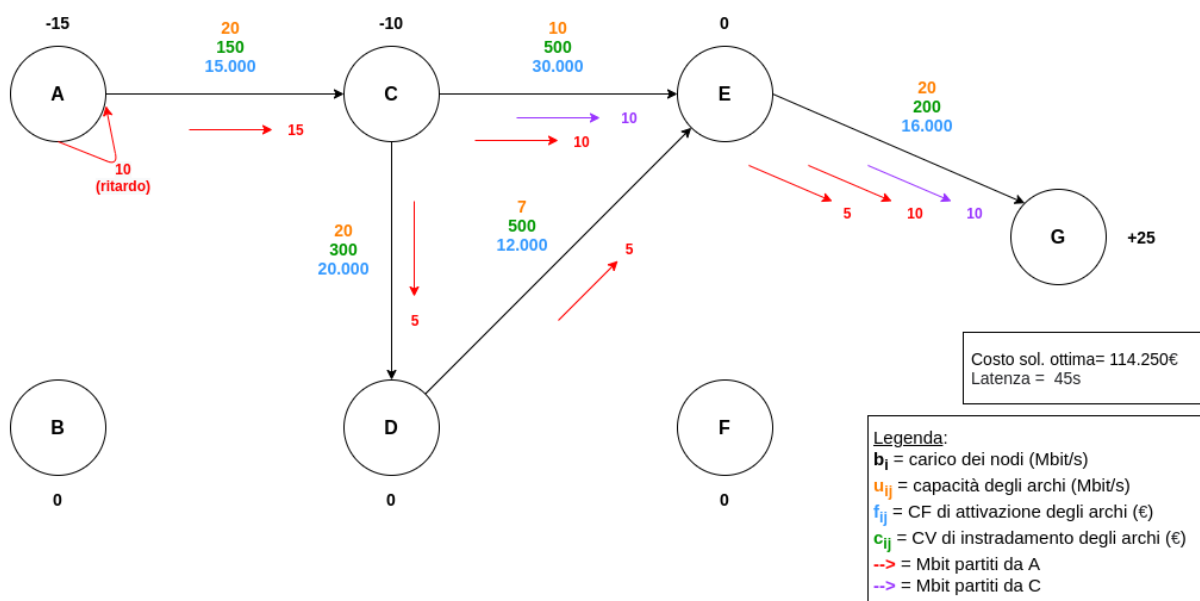


Figura 4: Soluzione ottimale della seconda formulazione e relativa visualizzazione grafica

Viene scelto il primo cammino $((C,E), (E,G))$ in quanto minimizzatore dei costi. Notiamo come, questa volta avvenga l'attivazione dell'arco più costoso della rete, ossia (C,E) . Tenendo conto dell'attivazione degli archi (C,E) ed (E,G) , il flusso che parte del database situato in A, cercherà di confluire con essi, per avere un risparmio dei costi di attivazione degli archi e di conseguenza una diminuzione dei costi totali complessivi. Pertanto, da A il flusso di 15 Mbits viene inviato su (A,C) , in quanto scegliendo (A,B) sarebbe comunque necessario anche (A,C) per sottostare al vincolo di capacità del primo arco. Una volta giunto in C, il flusso viene diviso in due:

- il primo flusso parziale di 10 Mbits segue il cammino fatto dal flusso partito da C, ossia $\{(C,E), (E,G)\}$, dato che i link sono già attivi e si paga solo il costo di instradamento su di essi;
- il secondo flusso parziale di 5 Mbits defluisce su (C,D) e poi tramite (D,E) si ricongiunge anch'esso al cammino ottimale di C, giungendo tramite (E,G) a destinazione.

L'output risultante corrisponde ad:

1. un costo complessivo di **114.250€**;
2. una latenza complessiva di **45s**, corrispondente al cammino $\{(A,C), (C,D), (D,E), (E,G)\}$ ed all'indotto ritardo di 10s per evitare conflitti con il flusso di C.

Si può notare quindi, come nella seconda formulazione, tramite il flusso che parte da C e che precede quello che parte da A, venga attivato il cammino $\{(C,E), (E,G)\}$ ed il flusso del database A venga dirottato su di esso. A discapito di un maggiore costo complessivo (**+9.950€**), la seconda formulazione presenta, infine, una latenza e di conseguenza un QoS⁴ minore della prima formulazione (**-6s**).

⁴Quality of Service.

3 Seconda implementazione

Nella seconda implementazione del problema non verrà più utilizzato un unico flusso che parte da un nodo di fornitura, ma verrà introdotto un flusso *spezzato*:

1. il primo flusso viene spedito immediatamente se si utilizza un solo database, appena i due flussi del database C sono fluiti, nel caso dell'utilizzo di due database⁵;
2. il secondo flusso viene spedito subito dopo il primo se si utilizza un solo database, a seguito del deflusso di entrambi i dati partiti da C e del primo flusso, nel caso dell'utilizzo di due database⁶.

Il ritardo nelle implementazioni trattate, è introdotto artificialmente per mezzo della computazione della latenza, ma si immagina che nella realtà sia possibile implementare un meccanismo di sincronizzazione tra i flussi interni di un database ed i flussi tra database diversi. Questa duplice scomposizione del flusso che parte da un database e che è opportunamente ritardato, ci permette di migliorare ulteriormente il costo di design della rete, come di seguito illustrato.

3.1 Modello PLI con un solo database e doppio flusso

Per quanto riguarda la prima formulazione del problema mediante doppio flusso, vale quanto detto nella Sezione 2.1, con la differenza che, nell'implementazione qui trattata, verranno utilizzate due variabili per descrivere il flusso:

$$x_{ij}^1 = \{ \geq 0, intero \quad \text{primo flusso di Mbit/s su } (i,j) \in A$$

$$x_{ij}^2 = \{ \geq 0, intero \quad \text{secondo flusso di Mbit/s su } (i,j) \in A$$

Per tenere conto dei vincoli di conservazione del carico dei nodi vengono sommati entrambi i flussi per il nodo di fornitura ed il nodo di domanda ((2) e (13)), mentre il primo flusso verrà separato dal secondo a causa dei nodi di trasbordo ((3) - (12)), per evitare che i due flussi possano cambiare cardinalità rispetto a quella che avevano in partenza⁷. Inoltre, si impone che il primo flusso abbia una cardinalità inferiore o uguale al secondo ((20) - (22)), per non ledere a potenziali cammini minimi. Per esempio, se dal database A il primo flusso ha cardinalità 8 Mbits ed il secondo 7 Mbits, dopo essere stato instradato su (A,B) e (B,D), il primo flusso si troverebbe vincolato a passare necessariamente per (D,F), precludendo l'esplorazione del potenziale cammino {(D,E), (E,G)}. Il modello risultante è il seguente:

⁵Questo evita che i rispettivi flussi dei due database entrino in conflitto.

⁶Anche in questa occasione, questa soluzione previene conflitti e perdita di dati sugli archi.

⁷Nelle varie prove è emerso che il primo flusso può cambiare contenuto, perdendo o aggiungendo Mbits dal secondo flusso.

$$\begin{aligned}
\min \quad & 300x_{AB}^1 + 150x_{AC}^1 + 300x_{BD}^1 + 300x_{CD}^1 + 500x_{CE}^1 + \\
& 500x_{DE}^1 + 350x_{DF}^1 + 250x_{EF}^1 + 200x_{EG}^1 + 300x_{FG}^1 + \\
& 300x_{AB}^2 + 150x_{AC}^2 + 300x_{BD}^2 + 300x_{CD}^2 + 500x_{CE}^2 + \\
& 500x_{DE}^2 + 350x_{DF}^2 + 250x_{EF}^2 + 200x_{EG}^2 + 300x_{FG}^2 + \\
& 10000y_{AB} + 15000y_{AC} + 18000y_{BD} + 20000y_{CD} + \\
& 30000y_{CE} + 12000y_{DE} + 16000y_{DF} + \\
& 12000y_{EF} + 16000y_{EG} + 10000y_{FG} \tag{1} \\
& -x_{AB}^1 - x_{AC}^1 - x_{AB}^2 - x_{AC}^2 \geq -15 \tag{2} \\
& x_{AB}^1 - x_{BD}^1 = 0 \tag{3} \\
& x_{AC}^1 - x_{CD}^1 - x_{CE}^1 = 0 \tag{4} \\
& x_{BD}^1 + x_{CD}^1 - x_{DE}^1 - x_{DF}^1 = 0 \tag{5} \\
& x_{CE}^1 + x_{DE}^1 - x_{EF}^1 - x_{EG}^1 = 0 \tag{6} \\
& x_{DF}^1 + x_{EF}^1 - x_{FG}^1 = 0 \tag{7} \\
& x_{AB}^2 - x_{BD}^2 = 0 \tag{8} \\
& x_{AC}^2 - x_{CD}^2 - x_{CE}^2 = 0 \tag{9} \\
& x_{BD}^2 + x_{CD}^2 - x_{DE}^2 - x_{DF}^1 = 0 \tag{10} \\
& x_{CE}^2 + x_{DE}^2 - x_{EF}^2 - x_{EG}^1 = 0 \tag{11} \\
& x_{DF}^2 + x_{EF}^2 - x_{FG}^2 = 0 \tag{12} \\
& x_{EG}^1 + x_{FG}^1 x_{EG}^2 + x_{FG}^2 = 15 \tag{13} \\
& x_{AB}^1 \leq 10y_{AB} \tag{14} \\
& x_{AC}^1 \leq 20y_{AC} \tag{15} \\
& \vdots \\
& x_{FG}^1 \leq 15y_{FG} \tag{16} \\
& x_{AB}^2 \leq 10y_{AB} \tag{17} \\
& x_{AC}^2 \leq 20y_{AC} \tag{18} \\
& \vdots \\
& x_{FG}^2 \leq 15y_{FG} \tag{19} \\
& x_{AB}^1 \leq x_{AB}^2 \tag{20} \\
& x_{AC}^1 \leq x_{AC}^2 \tag{21} \\
& \vdots \\
& x_{FG}^1 \leq x_{FG}^2 \tag{22} \\
& x_{AB}^1, x_{AC}^1, \dots, x_{FG}^1 \geq 0 \tag{23} \\
& x_{AB}^1, x_{AC}^1, \dots, x_{FG}^1 \in \mathbb{N} \tag{24} \\
& x_{AB}^2, x_{AC}^2, \dots, x_{FG}^2 \geq 0 \tag{25} \\
& x_{AB}^2, x_{AC}^2, \dots, x_{FG}^2 \in \mathbb{N} \tag{26} \\
& y_{AB}, y_{AC}, \dots, y_{FG} \in \{0, 1\} \tag{27}
\end{aligned}$$

3.2 Risoluzione modello con un solo database e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX

La Figura 5 riassume la soluzione ottima della prima formulazione mediante doppio flusso. Rispetto alla Figura 2 si può notare che questa volta il flusso viene instradato sull'arco (A,B) e tutta la restante parte prosegue nella parte bassa del grafo. In particolare, il doppio flusso viene diviso in:

1. un primo flusso di 7 Mbits, che dopo aver attraversato l'arco (B,D) è usato per valutare se il percorso migliore sia da instradare su (D,E) o su (D,F). Dal momento che i costi complessivi sono inferiori, viene scelta quest'ultima soluzione;
2. un secondo flusso di 8 Mbits, che segue il cammino ricavato dal primo flusso, in quanto gli unici costi da sostenere sono quelli relativi all'instradamento.

Questa soluzione consente di ricavare:

1. un costo complessivo di **72.750€**;
2. una latenza complessiva di **39s**, corrispondente al cammino $\{(A,B), (B,D), (D,F), (F,G)\}$ e tenente conto del ritardo di 7 secondi applicato al secondo flusso, per evitare conflitti con il defluire del primo.

Rispetto alla soluzione rinvenuta in Figura 2, pertanto, rinveniamo una diminuzione dei costi complessivi (**-31.550€**) ed anche della latenza (**-12s**).

3.3 Modello PLI con due database e doppio flusso

Per quanto riguarda la seconda formulazione del problema mediante doppio flusso, vale quanto detto nella Sezione 2.3, con la differenza che, in questa implementazione vengono utilizzate due variabili per descrivere il flusso, come esplicitato nella Sezione 3.1. Il modello risultante è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & 300x_{ABA}^1 + \dots + 300x_{FGA}^1 + 300x_{ABA}^2 + \dots + 300x_{FGA}^2 + \\ & 300x_{ABC}^1 + \dots + 300x_{FGC}^1 + 300x_{ABC}^2 + \dots + 300x_{FGC}^2 + \\ & 10000y_{AB} + \dots + 10000y_{FG} \end{aligned} \quad (1)$$

$$-x_{ABA}^1 - x_{ACA}^1 - x_{ABA}^2 - x_{ACA}^2 \geq -15 \quad (2)$$

$$x_{ABA}^1 - x_{BDA}^1 = 0 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$x_{DFA}^2 + x_{EFA}^2 - x_{FGA}^2 = 0 \quad (4)$$

$$x_{EGA}^1 + x_{FGA}^1 + x_{EGC}^1 + x_{FGC}^1 + x_{EGA}^2 + x_{FGA}^2 + x_{EGC}^2 + x_{FGC}^2 = 25 \quad (5)$$

$$-x_{CDC}^1 - x_{CEC}^1 - x_{CDC}^2 - x_{CEC}^2 \geq -10 \quad (6)$$

$$x_{CDC}^1 - x_{DEC}^1 - x_{DFC}^1 = 0 \quad (7)$$

$$\vdots$$

$$x_{DFC}^2 + x_{EFC}^2 - x_{FGC}^2 = 0 \quad (8)$$

$$x_{AB}^1 \leq 10y_{AB} \quad (9)$$

$$\vdots$$

$$x_{FG}^1 \leq 15y_{FG} \quad (10)$$

$$x_{AB}^2 \leq 10y_{AB} \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$x_{FG}^2 \leq 15y_{FG} \quad (12)$$

$$x_{AB}^1 \leq x_{AB}^2 \quad (13)$$

$$x_{AC}^1 \leq x_{AC}^2 \quad (14)$$

$$\vdots$$

$$x_{FG}^1 \leq x_{FG}^2 \quad (15)$$

$$x_{ABA}^1 \leq x_{ABA}^2 \quad (16)$$

$$\vdots$$

$$x_{FGA}^1 \leq x_{FGA}^2 \quad (17)$$

$$x_{ABC}^1 \leq x_{ABC}^2 \quad (18)$$

$$\vdots$$

$$x_{FGC}^1 \leq x_{FGC}^2 \quad (19)$$

$$x_{ABA}^1, x_{ACA}^1, \dots, x_{FGA}^1 \geq 0 \quad (20)$$

$$x_{ABA}^1, x_{ACA}^1, \dots, x_{FGA}^1 \in \mathbb{N} \quad (21)$$

$$x_{ABC}^2, x_{ACC}^2, \dots, x_{FGC}^2 \geq 0 \quad (22)$$

$$x_{ABC}^2, x_{ACC}^2, \dots, x_{FGC}^2 \in \mathbb{N} \quad (23)$$

$$y_{AB}, y_{AC}, \dots, y_{FG} \in \{0, 1\} \quad (24)$$

3.4 Risoluzione modello con due database e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX

La Figura 6 riassume la soluzione ottima della prima formulazione mediante doppio flusso. Come nella soluzione in Figura 4, il cammino ottimale privilegia la parte alta del grafo. Questa volta, però, il flusso di A non viene spezzato una volta giunto in C e di conseguenza questo permette di avere un notevole risparmio del design della rete medesima, dato che si ha:

1. un costo complessivo di **80.750€**;
2. una latenza complessiva di **41s**, corrispondente al cammino $\{(A,C), (C,E), (E,G)\}$ e tenente conto del ritardo di 10 secondi applicato al primo flusso di A ed al ritardo di 17 secondi applicato al secondo flusso di A, per evitare conflitti con i flussi di C, nel primo caso e conflitti con i flussi di C e del primo flusso di A, nel secondo.

Rispetto alla soluzione rinvenuta in Figura 4, pertanto, rinveniamo una diminuzione dei costi complessivi (**-33.500€**) e della latenza (**-4s**).

3.5 Modello PLI con due database decentralizzati e doppio flusso

Aggiungendo il vincolo di flusso nullo sull'arco (A,C) al modello delineato nella Sezione 3.3, è possibile decentralizzare i database A e C, ossia rimuovere l'arco (A,C) dall'instradamento e rendere effettivamente il nodo C un arco privo di archi entranti, come dalla definizione di nodo di fornitura trattata a lezione. Il vincolo di flusso nullo viene così espresso:

$$x_{ACA}^1 + x_{ACA}^2 = 0$$

oppure equivalentemente:

$$y_{AC} = 0$$

3.6 Risoluzione modello con due database decentralizzati e doppio flusso, mediante AMPL e CPLEX

La Figura 7 riassume la soluzione ottima della prima formulazione mediante doppio flusso e database decentralizzati. Essendo il database A vincolato a far passare i sue due flussi mediante l'arco (A,B), l'instradamento di A è forzato a procedere nella parte bassa del grafo. Di conseguenza anche il cammino dei due flussi di C prediligerà la parte bassa della rete per giungere a destinazione. L'output finale consiste in:

1. un costo complessivo di **102.250€**;
2. una latenza complessiva di **49s**, corrispondente al cammino $\{(A,B), (B,D), (D,F), (F,G)\}$ e tenente conto del ritardo di 10 secondi applicato al primo flusso di A ed al ritardo di 18 secondi applicato al secondo flusso di A, per evitare conflitti con i flussi di C, nel primo caso e conflitti con i flussi di C e del primo flusso di A, nel secondo.


```

1 CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 72750
2 55 MIP simplex iterations
3 0 branch-and-bound nodes
4 :   Flow1 Flow2 LinkActivation   :=
5 A B    7    8        1
6 A C    0    0        0
7 B D    7    8        1
8 C D    0    0        0
9 C E    0    0        0
10 D E    0    0        0
11 D F    7    8        1
12 E F    0    0        0
13 E G    0    0        0
14 F G    7    8        1
15 ;
16
17 TotalFlowCosts = 72750
18 MaxLatency = 39

```

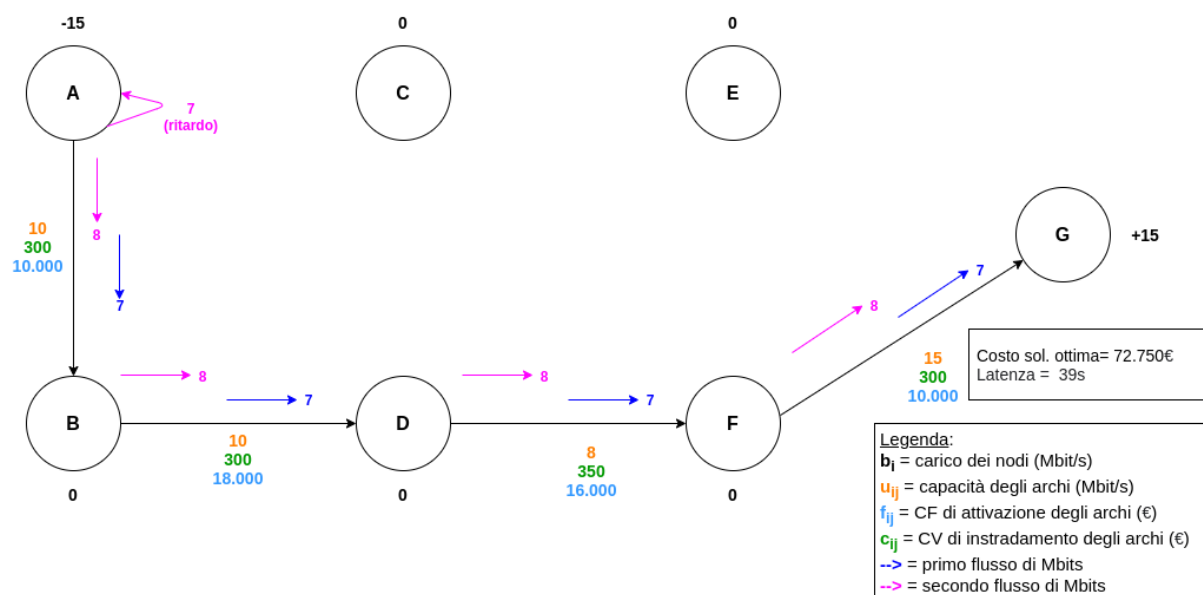


Figura 5: Soluzione ottimale della prima formulazione mediante doppio flusso e relativa visualizzazione grafica

```

1 CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 80750
2 74 MIP simplex iterations
3 0 branch-and-bound nodes
4 :      Flow1 Flow2      :=
5 A B A      0      0
6 A B C      0      0
7 A C A      7      8
8 A C C      0      0
9 B D A      0      0
10 B D C      0      0
11 C D A      0      0
12 C D C      0      0
13 C E A      7      8
14 C E C      5      5
15 D E A      0      0
16 D E C      0      0
17 D F A      0      0
18 D F C      0      0
19 E F A      0      0
20 E F C      0      0
21 E G A      7      8
22 E G C      5      5
23 F G A      0      0
24 F G C      0      0
25 ;
26
27 LinkActivation :=
28 A B      0
29 A C      1
30 B D      0
31 C D      0
32 C E      1
33 D E      0
34 D F      0
35 E F      0
36 E G      1
37 F G      0
38 ;
39
40 TotalFlowCosts = 80750
41 MaxLatency = 41

```

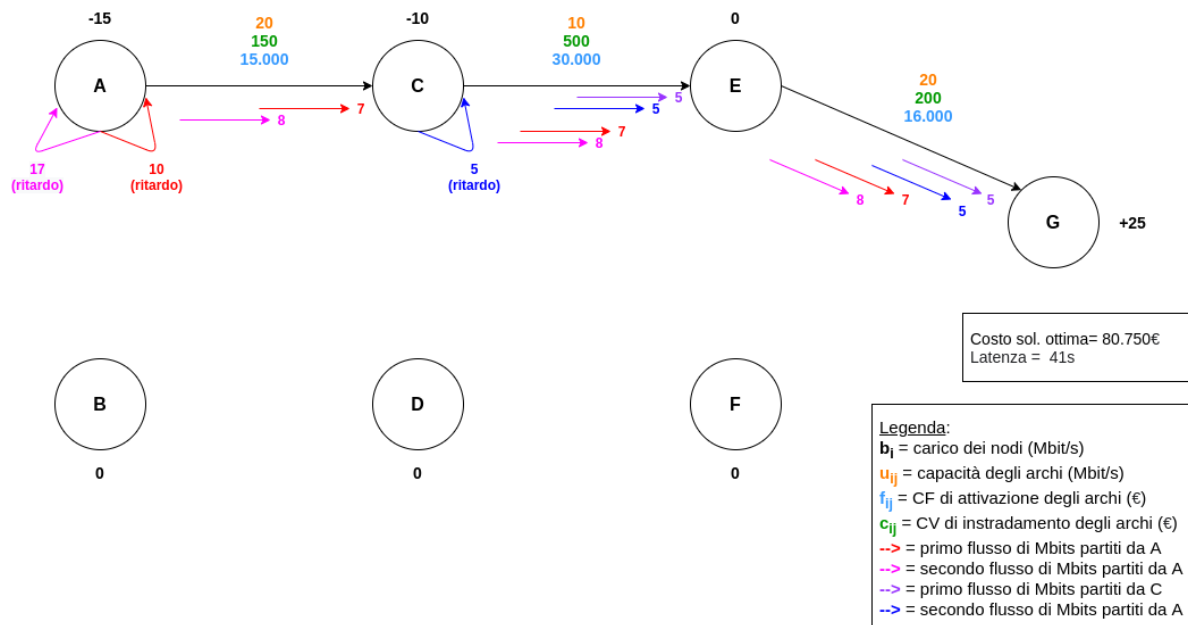


Figura 6: Soluzione ottimale della seconda formulazione mediante doppio flusso e relativa visualizzazione grafica

```

1 CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 102250
2 20 MIP simplex iterations
3 0 branch-and-bound nodes
4 :      Flow1 Flow2      :=
5 A B A      7      8
6 A B C      0      0
7 A C A      0      0
8 A C C      0      0
9 B D A      7      8
10 B D C      0      0
11 C D A      0      0
12 C D C      5      5
13 C E A      0      0
14 C E C      0      0
15 D E A      0      0
16 D E C      0      0
17 D F A      7      8
18 D F C      5      5
19 E F A      0      0
20 E F C      0      0
21 E G A      0      0
22 E G C      0      0
23 F G A      7      8
24 F G C      5      5
25 ;
26
27 LinkActivation :=
28 A B      1
29 A C      0
30 B D      1
31 C D      1
32 C E      0
33 D E      0
34 D F      1
35 E F      0
36 E G      0
37 F G      1
38 ;
39
40 TotalFlowCosts = 102250
41 MaxLatency = 49

```

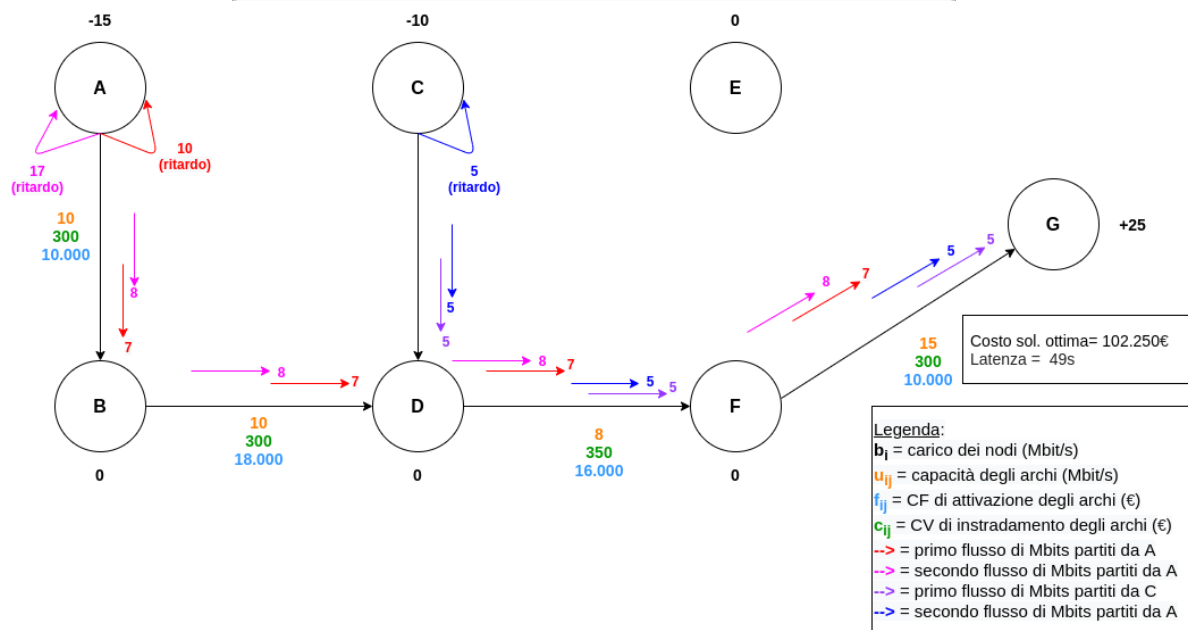


Figura 7: Soluzione ottimale della seconda formulazione mediante doppio flusso e database decentralizzati e relativa visualizzazione grafica

4 Note finali

L'archivio *Progetto_Bradan_Graziani.zip*, una volta estratto nella cartella *Progetto_Bradan_Graziani*, necessita del posizionamento di quest'ultima nella directory *amplide* di AMPL, per poter avviare l'esecuzione. In particolare, la cartella si compone dei seguenti files:

1. **prima implementazione, prima formulazione:** *VideoOnDemand_v1.1.mod*, *VideoOnDemand_v1.1.dat*, *VideoOnDemand_v1.1.run*, *VideoOnDemand_v1.1.txt*;
2. **prima implementazione, seconda formulazione:** *VideoOnDemand_v1.2.mod*, *VideoOnDemand_v1.2.dat*, *VideoOnDemand_v1.2.run*, *VideoOnDemand_v1.2.txt*;
3. **seconda implementazione, prima formulazione:** *VideoOnDemand_v2.1.mod*, *VideoOnDemand_v2.1.dat*, *VideoOnDemand_v2.1.run*, *VideoOnDemand_v2.1.txt*;
4. **seconda implementazione, seconda formulazione:** *VideoOnDemand_v2.2.mod*, *VideoOnDemand_v2.2.dat*, *VideoOnDemand_v2.2.run*, *VideoOnDemand_v2.2.txt*;
5. **seconda implementazione, seconda formulazione con database decentralizzati:** *VideoOnDemand_v2.3.mod*, *VideoOnDemand_v2.3.dat*, *VideoOnDemand_v2.3.run*, *VideoOnDemand_v2.3.txt*.

I files:

- **.mod** contengono la formulazione dei modelli;
- **.dat** contengono i dati dei modelli;
- **.run** contengono gli scripts⁸ degli eseguibili, da invocare con:

include Progetto_Bradan_Graziani\VideoOnDemand_vx.y.run;

dove x e y corrispondono alle formulazioni ed alle implementazioni precedentemente descritte.

- **.txt** contengono una copia delle soluzioni trovate.

⁸Gli scripts contengono già un reset dell'ambiente.