Probleme cu repartiții de v.a.

Pb. 1: Durata necesară (în ore) pentru repartiția unei mașini este o variabilă aleatoare repartizată exponențial de parametru $\lambda = \frac{1}{3}$. Determinați:

a) Prob. ca reparația să dureze mai mult de 3 ore.

$\mathbb{P}(X>3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

Funcția de distribuție: $F(x) = 1 - e^{\lambda x}$ / $\lambda = \frac{1}{3}$, $x = 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X>3) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}}) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X>3) = 1 - (1 - e^{-1})$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X>3) = 1 - (1 - \frac{1}{e}) \Rightarrow \mathbb{P}(X>3) = \frac{1}{e} \approx 0.36787$.

b) Probab. ca repartiția să dureze 12 ore știind că repartiția durează mai mult de 9 ore.

Formula densității de probabilitate condiționată:

$$\mathbb{P}(X = 12 \mid X>9) = \frac{\mathbb{P}(X>9 \text{ și } X = 12)}{\mathbb{P}(X>9)}$$

$\mathbb{P}(X>9) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 9) = 1-(1 - e^{-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{9}^{3}}) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3}$

$\mathbb{P}(X>9 \text{ și } X = 12) = \mathbb{P}(X = 12)$

$\mathbb{P}(X=12) = \lambda * e^{-\lambda x} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{12}^{4}} = \frac{1}{3}\cdot e^{-4}$

$$\mathbb{P}(X = 12 \mid X > 9) = \frac{\frac{1}{3}\cdot e^{-4}}{e^{-3}} = \frac{1}{3}\cdot e^{-4+3} = \frac{1}{3}\cdot e^{-1} \approx 0,\ldots$$

Pb. 2

Pp. nr. de viroze respiratorii pe care le suferă o pers. într-un an este o variabilă aleatoare repartizată Poisson de parametru $\lambda = 5$.

Un vaccin minune apare pe piață care se dovește eficient în cazul a 75% pers, reducând parametrul repartiției Poisson la $\lambda = 3$. Cu ce prob. o persoană căreia i s-a administrat vaccinul și care s-a îmbolnăvit de 2 ori într-un an se află printre cei 75% pt. care vaccinul a fost eficient?

Th. lui Bayes

$P(A|B) = [P(B|A) * P(A)] / P(B)$

A: Persoana primește vaccinul și vaccinul e eficient (75%)

B: Persoana se îmbolnăvește de 2 ori într-un an

$P(A) = 0.75$

$P(B|A) =$ prob pers. cu vaccin s-a îmbolnăvit. ($\lambda = 3$, vaccin eficien)

$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$

$P(B|A^c)$ $(\lambda = 5)$

$P(A^c) = 0.25$ (fără vaccin)

$\cancel{P(B)} =$

$P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$, $k = 2$, $\lambda = 3$ (cu vaccin), $\lambda = 5$ (fără vaccin)

$P(B|A) = \dfrac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} = \dfrac{e^{-3} \cdot 9}{2}$

$P(B|A^c) = \dfrac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} = \dfrac{e^{-5} \cdot 25}{2}$

$P(B) = \dfrac{e^{-3} \cdot 9}{2} \cdot 0{,}75 + \dfrac{e^{-5} \cdot 25}{2} \cdot 0{,}25 = e^{-3} \cdot 3{,}375 + e^{-5} \cdot 3{,}125$

$\simeq 0{,}168 + 0{,}02 \simeq 0{,}189$

$\mathbb{P}(A|B) \approx (0,224 \cdot 0,75) / 0,189 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) \approx 0,889$

Pb. 3 Un lot format din 100 produse este supus controlului de calitate. Se extrag 5 produse din lot, fără revenire. Dacă se găsește o produs defect, lotul se respinge. Știind că 5% din produse sunt defecte determ. prob.:

a) Lotul este acceptat.

b) Lotul este respins

c) Lotul e respins după a treia verificare.

Sol:

Fie D = evenimentul că un produs este defect.

N = ——— // ——— nedefect.

Atunci: $\mathbb{P}(D) = 0.05$

$\mathbb{P}(N) = 0.95.$

a) Pt. ca lotul să fie acceptat, trebuie să nu găsească niciun produs defect în cele 5 extrageri. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_{\text{acceptat}}) = \underbrace{\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N)}_{\text{în extrageri consecutive}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \approx 0,774$

b) $\mathbb{P}(R_{\text{respins}}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,774 \approx 0,226$

c) $\mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(D) \; (\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(N))$

$= 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 \, (0,05 + 0,95)$

$\approx 0,043$

Pb.4: Se știe că înălțimea (în cm.) bărbaților de 65 de ani este o variabilă aleatoare repartizată normal de medie $m = 173$ cm și dispersie 16. Det. ce procent din acești bărbați au înălțimea mai mare de 176 cm.

Sol:

$m = 173$ cm

$\sigma^2 = 16$ cm^2 , $\mathbb{P}(X > 176)$?

Fie $z = (x - m)/\sigma \Rightarrow z = \dfrac{176-173}{4} = \dfrac{3}{4} = 0.75$

$\mathbb{P}(z > 0.75)$, ~~z = valoare~~ v

~~$\mathbb{P}(z > 0.75) = 1 - \mathbb{P}(z \leq 0.75) = 1 - (1 - e^{-\lambda z})$~~

z este o variabilă aleatoare standardizată distribuită norm (cu media 0 și dispersia 1).

Căutăm valoare z de 0.75 într-o tabelă de distribuție și avem că procentul asociat este ~~77,~~ 5% $\Rightarrow$ aproximativ ~~27,~~5% din bărbații de 65 de ani au înălțimea mai mare de 176 cm.

Pb5. Dintr-o urnă ce conține 150 de bile roșii și 100 de bile negre se extrag, cu revenire, cinci bile. Fie X variabila aleatoare ce indică nr. bilelor roșii obținute, în total, în urma extragerii.

Det: a) Repartiția v.a. X.

Repartiția v.a. X este o distribuție hipergeometrică, deoarece extragerile se fac cu revenire

...

urnă T 150 bile roșii

100 bile albe

$n = 5$ bile (cu întoarcere)

k bile roșii extrase

$\Theta = [0,1]$, $H.\ \theta$ det

$$\mathbb{P}_\theta((x_1, x_2, \dots, x_5)) = \theta^s(1-\theta)^{5-s}$$, s e nr. de indici

Definim v.a $X_i = \begin{cases} 1, & x_i = r \\ 0, & x_i \neq r \end{cases}$, X_i e v.a. Bernoulli

$X_i \sim B(\theta)$

$S_5 = X_1 + \dots + X_5$,

↳ nr. de bile roșii din cele 5 extrase.

$S_5 = k$, $\mathbb{P}_\theta(S_n = k) = \binom{5}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$

↳ Combinări de 5 luate câte k.

$X \sim HyperGeom(N, n, m)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

~~N = 5, m = nr. bile roșii~~

$N = 250$ (nr. total de bile)

$n = 5$ (nr. de extrageri)

$m = 150$ (nr. de bile roșii)

k = nr. de bile roșii obținute.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_5^k \cdot \cancel{C_{N-m}} C_{250-150}^{5-k}}{C_{250}^5} = \frac{\binom{5}{k}\binom{100}{5-k}}{\binom{250}{5}}$$

$$k = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = \frac{\frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot \frac{100!}{(5-0)!(100-5-0)!}}{\frac{250!}{5!\cdot(250-5)!}} = \frac{1 \cdot 75287520}{7817031000}$$

$= 0{,}096$

$k = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = 0{,}07$

$k = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = 0{,}23$

$k = 3 \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = 0{,}34$

$k = 4 \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = 0{,}25$

$k = 5 \Rightarrow \mathbb{P}(X=5) = 0{,}07$

b) $\mathbb{P}(X=4) \simeq 0,26$

$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \geq 0.5) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$

$= 1.$

$\mathbb{P}(X < \frac{\pi}{3}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 0,3160367$

$\mathbb{P}(X \leq 2 \mid X > 0.2) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 0.3064055.$

c) $F(\frac{7}{2}) = \mathbb{P}(X \leq \frac{7}{2}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$

$= 0,6651379$

d) $\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{m}{N} = 5 \frac{150}{250} = 3$

$Var(X) = n \cdot \frac{m}{N} \left(1 - \frac{m}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} = 5 \cdot \frac{150}{250} (1 - 0{,}6) \cdot \frac{250}{}$

$= 1,180$

$\cancel{Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$

Pb. 6 O monedă nemăsluită (echilibrată) este aruncată până când apare de 10 ori. Fie X o va ce nr. de ori apare pajura în cadrul acestor aruncări. Det. fct. de masă a va.

Sol: (Avem distribuție geometrică - căutăm prima reușită)

Funcția de masă a va X este dată de:

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

k= nr. de aruncări necesare (de câte ori apare pajura)

p = prob. de a obține cap într-o singură încercare,

= 1/2 ~~în co~~

$\cdot\ \mathbb{P}(X=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\vdots$

$\mathbb{P}(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2024}.$

Pb. 7. Fie X o v.a repartizată normal cu media 3 și dispersia 49. Det. valoarea parametrului c pt. care $\mathbb{P}(X > c) = 0.15$.

- folosim funcția de distribuție normală standardizată (cu medie 0 și dispersie 1)

$F(z) = \mathbb{P}(Z \leq x)$

$\mathbb{P}(X > c) = 0.15$

$\mathbb{P}(X \leq c) = 1 - \mathbb{P}(X > c)$

$z = \frac{X-3}{7} = \frac{c-3}{7}$

$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - 0.15 = 0.85 \Rightarrow z = 0.85.$

- folosim o tabelă a val. funcției de repartiție standardizat
sau ~~o dur~~ $z \sim 1,0364.$

$1,0364 = \frac{c-3}{7} \Rightarrow c \approx 10,2558.$

Pb. 8 Profitul anual al unui agent economic, exprimat în milioane de unități monetare este o v.a. continuă X având densitatea de probabilitate: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx^5(1-x)^7$, $x \in (0,1)$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Valoarea parametrului k.

$\int_0^1 kx^5(1-x)^7 dx = 1 \Leftrightarrow k\int_0^1 x^5(1-x)^7 dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{10296} = 1$

$\Rightarrow k = 10296$

b) Profitul mediu și dispersia v.a profit.

$E[X] = \int_0^1 x \cdot kx^5(1-x)^7 dx = \frac{1}{247351104} \approx \cancel{4,043}\ 0{,}42$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - [E[X]]^2$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot k \cdot x^5(1-x)^7 dx = \frac{1}{530038080} \approx \cancel{1,887}\ 0{,}2$

$Var(X) \approx \overset{0,42}{\cancel{1,887}} - \overset{(0,2)^2}{16{,}346} = \cancel{-14,459}\ 0{,}016$

Pb. 9 Într-un casino intră în medie o persoană la 10 min

a) Probabilitatea ca nicio pers. să nu intre în casino în intervalul 12:00 - 12:30

- media ratei de intrare : $\lambda = \frac{1}{10}$ pers. pe min.
- Intervalul de timp pt. fiecare e 30 min, deci λ pe interv de 30 min este $30 \cdot \frac{1}{10} = 3$ persoane.

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = e^{-3} \approx 0{,}04$$

b) Probabilitatea ca cel puțin 4 persoane să intre în casino în intervalul 12:00 - 12:30

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)]$$

$$= 1 - 0{,}64 \approx 0{,}352$$

~~Pb. 10 (la fel ca pb. 5).~~

Pb. 11 Un test folosit pt. diagnosticarea sindromului obsesivo-compulsiv are o acuratețe de 90%. Știind că sindromul apare în medie la 1% din pop., determ:

a) Care este prob. ca persoana să aibă acest sindrom dacă rezultatul testului e pozitiv în cazul unei pers. luate la întâmplare.

$\mathbb{P}(P \mid S) = 0.9$

$\mathbb{P}(N \mid NS) = 0.9$

$\mathbb{P}(S) = 0.1$

$\mathbb{P}(NS) = 1 - \mathbb{P}(S) = 0{,}99$

$$\mathbb{P}(S / P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid S) \cdot \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(P)}$$

$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid S) \cdot \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(P \mid NS) \cdot \mathbb{P}(NS)$

↳ Teorema Prob. Totale.

$\mathbb{P}(P) = 0.9 \cdot 0{,}1 + 0.9 \cdot 0{,}99 = 0{,}09 + 0{,}891 = 0{,}981$

b)

$$\mathbb{P}(NS \mid N) = \frac{\mathbb{P}(N \mid NS) \cdot \mathbb{P}(NS)}{\mathbb{P}(N)}$$

$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N \mid S) \cdot \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(N \mid NS) \cdot \mathbb{P}(NS)$

$= 0.9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}99 =$