

## LABORATOR#4

### I. ECUAȚII NELINIARE: METODE ITERATIVE PENTRU RĂDĂCINI MULTIPLE

**ALGORITHM** (Metoda Newton-Raphson modificată – ordinul de multiplicitate,  $m$ , cunoscut)

**Date:**  $f, a, b$ ;  
 $n = 0 : x_n \in [a, b]$ ;  
 $n \geq 1 : x_n = x_{n-1} - m \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ ;  
 $n = n + 1$ ;    **repeat step for**  $n \geq 1$ ;

**ALGORITHM** (Metoda Newton-Raphson modificată – ordinul de multiplicitate,  $m$ , necunoscut)

**Date:**  $f, a, b$ ;  
 $n = 0 : x_n \in [a, b]$ ;  
 $n \geq 1 : x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})}{[f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})]'} ;$   
 $n = n + 1$ ;    **repeat step for**  $n \geq 1$ ;

**OBS:** Metodele Newton-Raphson modificate au **viteza/ordinul de convergență cel puțin pătratică/pătratic**.

**EX#1** Fie ecuația:

$$f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2) = 0, \quad x \in [0; 1, 75]. \quad (1)$$

- (a) Reprezentați grafic funcțiile  $f$  și  $f'$  pe intervalul  $[0; 1, 75]$  și salvați imaginile cu numele **GraficFuncție.eps**, respectiv **GraficDerivata.eps**.
- (b) Să se construiască în Python funcția **NewtonRaphsonModificata1** care determină rădăcina cu ordinul de multiplicitate,  $m > 1$ , cunoscut pentru ecuația neliniară  $f(x) = 0$ , folosind metoda Newton-Raphson modificată corespunzătoare.

Folosiți ca **date de intrare** ale funcției **NewtonRaphsonModificata1**:

- $m$  – ordinul de multiplicitate a soluției;
- $f$  – funcția ce definește ecuația neliniară;

- $df$  – derivata funcției  $f$ ;
- $x_0$  – aproximarea inițială a soluției ecuației neliniare;
- ITMAX – numărul maxim de iterații;
- TOL – toleranța admisă a soluției numerice;

iar ca **date de ieșire**:

- $sol$  – soluția numerică obținută;
- $iter$  – numărul de iterații necesare.

**Criteriul de oprire** folosit este cel uzual, i.e.  $ErrRel(n_{\text{final}}) < TOL$  sau  $|f(n_{\text{final}})| < TOL$  sau  $n > ITMAX$ , unde  $ErrAbs(n)$  și  $ErrRel(n)$  sunt erorile absolută și relativă la iterația  $n$  în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară.

- (c) Să se construiască în **Python** funcția **NewtonRaphsonModificata2** care determină rădăcina cu ordinul de multiplicitate,  $m > 1$ , necunoscut pentru ecuația neliniară  $f(x) = 0$ , folosind metoda Newton-Raphson modificată corespunzătoare.

Folosiți ca **date de intrare** și **date de ieșire** ale funcției **NewtonRaphsonModificata2**, precum și **criteriul de oprire**, cele utilizate pentru **NewtonRaphsonModificata1**, fără ordinul de multiplicitate a soluției,  $m$ , dar cu derivata de ordinul doi a lui  $f$ ,  $d^2f$ .

- (d) Afișați, sub forma unui tabel, următorii parametri obținuți cu funcțiile **NewtonRaphsonModificata1**, **NewtonRaphsonModificata2** și **NewtonRaphsonf**, vezi Laboratorul #2, pentru ecuația (1),  $x_0 = 0$ , ITMAX = 20 și TOL =  $10^{-10}$ :

- numărul iterației,  $n$ ;
- soluția numerică corespunzătoare iterației  $n$ ,  $x_n$ ;
- eroarea absolută în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară,  $ErrAbs(n) = |x_{n-1} - x_n|$ ;
- eroarea relativă în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară,  $ErrRel(n) = ErrAbs(n) / |x_{n-1}|$ ;
- eroarea reziduală corespunzătoare iterației  $n$ ,  $|f(x_n)|$ ;
- toleranța admisă a soluției numerice, TOL.

## II. ECUAȚII NELINIARE: TEHNICI DE ACCELERARE A CONVERGENȚEI

### ALGORITM (Metoda lui Aitken)

**Date:**  $\phi$  (construită pornind de la  $f$ ),  $a, b$ ;

$x_0 \in [a, b]$  arbitrar;  $x_n = \phi(x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ ;

$n \geq 2$ :  $\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})} = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$ ;

$n = n + 1$ ; repeat step for  $n \geq 2$ ;

## ALGORITM (Metoda lui Steffensen)

**Date:**  $\phi$  (construită pornind de la  $f$ ),  $a, b$ ;

$n = 0$  :  $\hat{x}_{3n} = x_{3n} \in [a, b]$ ;  $\hat{x}_{3n+1} = \phi(\hat{x}_{3n})$ ;  $\hat{x}_{3n+2} = \phi(\hat{x}_{3n+1})$ ;

$n \geq 1$  :  $\hat{x}_{3n} = \hat{x}_{3n-1} - \frac{(\hat{x}_{3n-1} - \hat{x}_{3n-2})^2}{(\hat{x}_{3n-1} - \hat{x}_{3n-2}) - (\hat{x}_{3n-2} - \hat{x}_{3n-3})} = \frac{\hat{x}_{3n-1}\hat{x}_{3n-3} - \hat{x}_{3n-2}^2}{\hat{x}_{3n-1} - 2\hat{x}_{3n-2} + \hat{x}_{3n-3}}$ ;

$\hat{x}_{3n+1} = \phi(\hat{x}_{3n})$ ;  $\hat{x}_{3n+2} = \phi(\hat{x}_{3n+1})$ ;

$n = n + 1$ ; **repeat step for**  $n \geq 1$ ;

**EX#2** (a) Să se construiască în **Python** funcția **Aitken** care determină rădăcinile ecuației neliniare  $f(x) = 0$ , folosind metoda lui Aitken pentru funcția de punct fix asociată metodei Newton-Raphson.

Folosiți ca **date de intrare** ale funcției **Aitken**:

- $f$  – funcția ce definește ecuația neliniară;
- $\phi$  – funcția de punct fix asociată;
- $x_0$  – aproximarea inițială a soluției ecuației neliniare;
- ITMAX – numărul maxim de iterații;
- TOL – toleranța admisă a soluției numerice;

iar ca **date de ieșire**:

- $sol$  – soluția numerică obținută;
- $iter$  – numărul de iterații necesare.

**Criteriul de oprire** folosit este cel uzual, i.e.  $ErrRel(n_{\text{final}}) < TOL$  sau  $|f(n_{\text{final}})| < TOL$  sau  $n > ITMAX$ , unde  $ErrAbs(n)$  și  $ErrRel(n)$  sunt erorile absolută și relativă la iterația  $n$  în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară.

(b) Să se construiască în **Python** funcția **Steffensen** care determină rădăcinile ecuației neliniare  $f(x) = 0$ , folosind metoda lui Steffensen pentru funcția de punct fix asociată metodei Newton-Raphson.

Folosiți ca **date de intrare** și **date de ieșire** ale funcției **Steffensen**, precum și **criteriul de oprire**, cele utilizate pentru **Aitken**.

(c) Afișați, sub forma unui tabel, următorii parametri obținuți cu funcțiile **Aitken**, **Steffensen** și **NewtonRaphsonf** pentru ecuația  $f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2) = 0$ ,  $x_0 = 0$ , ITMAX = 20 și TOL =  $10^{-10}$ :

- numărul iterației,  $n$ ;
- soluția numerică corespunzătoare iterației  $n$ ,  $x_n$ ;
- eroarea absolută în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară,  $ErrAbs(n) = |x_{n-1} - x_n|$ ;
- eroarea relativă în raport cu soluția numerică de la iterația anterioară,  $ErrRel(n) = ErrAbs(n)/|x_{n-1}|$ ;
- eroarea reziduală corespunzătoare iterației  $n$ ,  $|f(x_n)|$ ;
- toleranța admisă a soluției numerice, TOL.