Maria Chang
Moisés Londoño
Luis Amias

5. Investigar, definir y mostrar ejemplos para los siguientes términos: (2 ptos) a. Puntos estacionarios: máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Punto estacionario: Un punto en donde la primera derivada de la función es igual a cero:

- Para funciones univariables: $f'(x*) = 0$.
- Para funciones multivariables: $\nabla f(x*) = 0$ (el gradiente es el vector de derivadas parciales).

Máximo local: Un punto estacionario $f(x*)$ es un máximo local si en su vecindad inmediata, es mayor que $f(x)$ para todo x cercano.
Mínimo local: Un punto estacionario $f(x*)$ es un mínimo local si en su vecindad inmediata, $f(x*)$ es menor que $f(x)$ para todo x cercano.
Punto de inflexión: Un punto estacionario que no es ni máximo ni mínimo. En este punto, la concavidad de la función cambia, lo que puede determinarse mediante la segunda derivada o el criterio de la matriz Hessiana. El criterio de la matriz hessiana se basa en los valores propios de la matriz y se utiliza para determinar si una función multivariable tiene un mínimo relativo, un máximo relativo o un punto de ensilladura en un punto dado:

- Si todos los valores propios son positivos, la matriz es definida positiva y la función tiene un mínimo relativo en ese punto.
- Si todos los valores propios son negativos, la matriz es definida negativa y la función tiene un máximo relativo en ese punto.
- Si la matriz tiene valores propios positivos y negativos, la función tiene un punto de inflexión en ese punto.

Ejemplos:

1. Función univariable:

$f(x) = x3 - 3x2 + 1$

1. Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2. Encontrar puntos estacionarios: $f'(x) = 0$ $3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0\, y\, x = 2$
3. Segunda derivada para clasificar:
   - $f''(x) = 6x - 6$
   - En $x = 0$: $f''(0) =- 6f''(0) = - 6f''(0) =- 6$ (negativo, entonces máximo local).
   - En $x = 2$: $f''(2) = 6f''(2) = 6f''(2) = 6$ (positivo, entonces mínimo local).

Resultado:

- x=0: Máximo local.
- x=2: Mínimo local.

2. Función multivariable:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$

1. Gradiente: $\nabla f(x, y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2x - 4, 2y - 6)$
2. Encontrar puntos estacionarios: $2x - 4 = 0$ $2y - 6 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 3$
3. Matriz Hessiana para clasificar:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

H es positiva definida ($det(H) > 0$ y todos los valores propios > 0), entonces (2,3) es un mínimo local.

3. Encontrar punto de inflexión:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$

1. **Primera derivada**:
   $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$
2. **Segunda derivada**:
   $f''(x) = 6x - 6$
3. **Encontrar los puntos candidatos**:
   Resolviendo $''(x) = 0$:

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

4. **Verificar el cambio de concavidad**:
   - Para x<1 (por ejemplo, x=0):
     $f''(0) = 6(0) - 6 =- 6$ (negativa, la concavidad es cóncava hacia abajo).
   - Para x>1 (por ejemplo, x=2):
     $f''(2) = 6(2) - 6 = 6$ (positiva, la concavidad es cóncava hacia arriba).

Conclusión:
La concavidad cambia en x=1, por lo que x=1 es un punto de inflexión.