3^a Lista
DCC190 - Solução numérica de equações diferenciais
Entrega: 12 de Dezembro de 2021
Aluno: Alexandre Vitor Silva Braga - 201965501B

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. Seja o problema transiente-difusivo-reativo não linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1-u) = 0, \quad (x,t) \in [a,b] \times [0,T] \tag{1}$$

$$u(a,t) = 1 \quad \text{e} \quad u(b,t) = 0. \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{3}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{x - 2t/\delta}{\delta}\right)\right]. \tag{4}$$

Supondo o domínio $x \in [-10, 90]$, o tempo final $T = 4$ e velocidade da frente de onda $\delta = 2$, a condição inicial (3) é dada por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{5}$$

a) Proponha uma discretização implícita de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço $\mathcal{O}(\Delta t, h^2)$ para o problema acima.

b) Proponha uma discretização de segunda ordem no tempo e no espaço $\mathcal{O}(\Delta t^2, h^2)$ para o problema acima.

c) Apresente gráficos comparando a solução exata com a aproximada, utilizando os métodos desenvolvidos nos itens (a) e (b), para diferentes valores de h no tempo final $T = 4$.

d) Apresente um estudo de convergência na norma do máximo utilizando malhas de 500, 1000, 2000, 4000 e 8000 elementos no tempo final $T = 4$. Para o método proposto no item (a) utilize $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$ e para o método proposto no item (b) utilize $\Delta t = h$. Em um único gráfico compare os três resultados e comente.

2. Seja a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{6}$$

com $\kappa > 0$ suplementada por condições inicial e de contorno. Considere a seguinte discretização para este problema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad \text{FTCS Implícto} \tag{7}$$

a) Analise a estabilidade da metodologias (9) utilizando o critério de Von Neumann.

b) Escolha um dos problemas apresentados em aula ou da literatura e gere resultados comparando o método (9) adotando 400 elementos com a solução exata.

c) inclua na comparação do item (b) os métodos upwind explícito e Lax Friedrichs adotando 400 elementos e $\Delta t = 1.1h$ e $\Delta t = h/2$. Comente os resultados.

3. Seja o problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{8}$$

cuja solução exata é dada por:

$$u(x,t) = \exp(-\varepsilon t)\sin(x - \kappa t)$$

a) Proponha um método upwind implícito para o problema (8) e compare graficamente a solução exata com a aproximada para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, escolhendo diferentes valores de h.

b) Proponha um método implícito de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço para o problema (8) e compare graficamente a solução exata com a aproximada para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, escolhendo diferentes valores de h.

c) mostre graficamente que a ordem de convergência do método proposto está de acordo com o esperado $O(\Delta t, h^2, h)$ para o item (a) e $O(\Delta t, h^2, h^2)$ para o item (b). Faça esse estudo para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

Resolução:

Questão 1:

a)

Problema modelo: Difusão Transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{\delta^2} u^2 + \frac{8}{\delta^2} u^3 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{8}{\delta^2} u^2 - \frac{8}{\delta^2} u^3$$

Discretização $\mathcal{O}(\Delta t, h^2)$ (Implícita):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\varepsilon}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \frac{8}{\delta^2} u_j^{n2} - \frac{8}{\delta^2} u_j^{n3}$$

$$u_j^{n+1} - \sigma(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n + \Delta t(\frac{8}{\delta^2} u_j^{2n} - \frac{8}{\delta^2} u_j^{3n}), \qquad \sigma = \frac{\varepsilon \Delta t}{h^2}$$

b)

Discretização $\mathcal{O}(\Delta t^2, h^2)$ (Crank-Nicolson):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\varepsilon}{2h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2h^2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) + \frac{8}{\delta^2} u_j^{n2} - \frac{8}{\delta^2} u_j^{n3}$$

$$u_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n + \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) + \Delta t(\frac{8}{\delta^2} u_j^{2n} - \frac{8}{\delta^2} u_j^{3n}), \qquad \sigma = \frac{\varepsilon \Delta t}{h^2}$$

c)

Discretizações

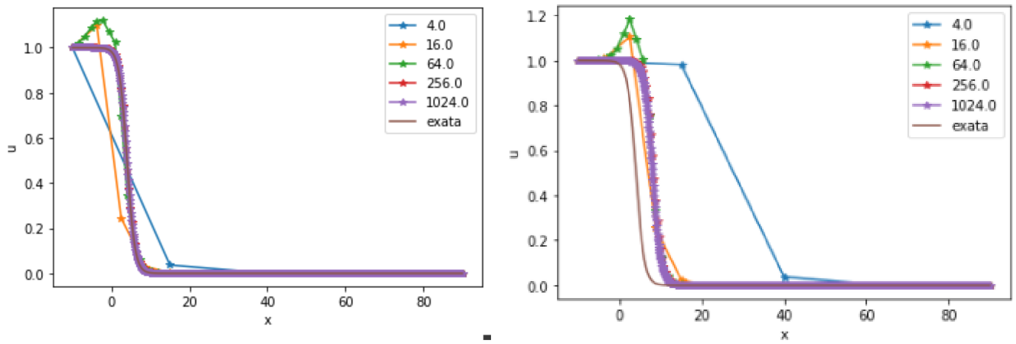

Figura 1: Discretização Implicita e Crank-Nicolson para 4,16,64,256 e 1024 elementos

d)

Podemos notar que o método implícito converge com taxa ótima, porém a discretização por Crank-Nicolson não converge para a solução esperada, mesmo permanecendo próxima

Convergência para os 3

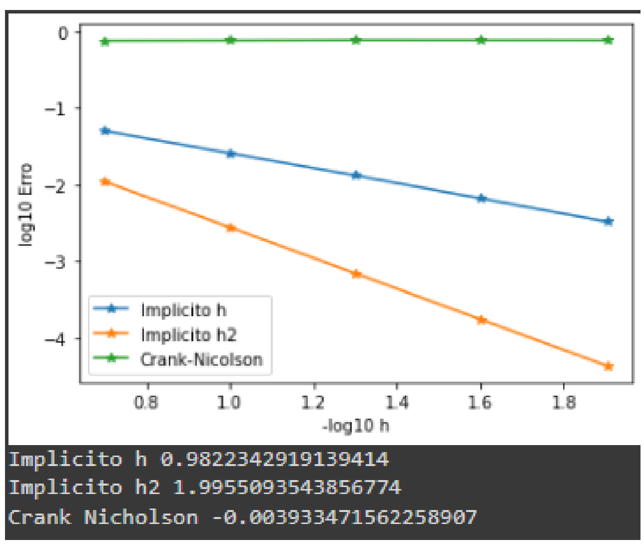

Figura 2: Taxas de convergência para 500,1000,2000,4000,8000 elementos

Convergência $\Delta t = h$ Implícito

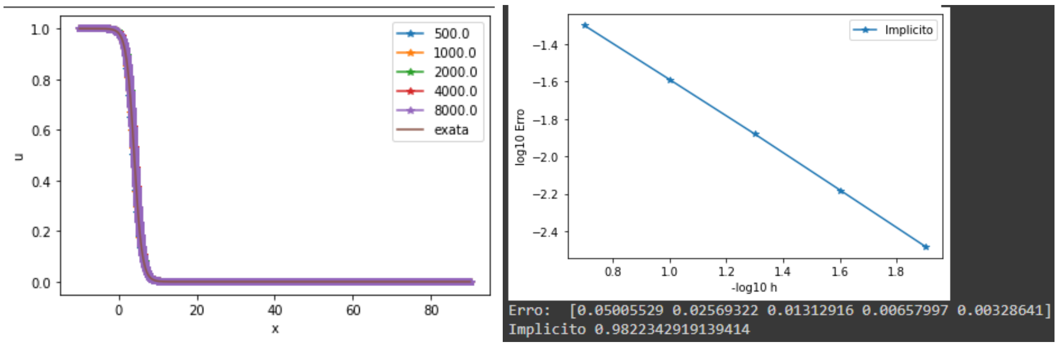

Figura 3: Discretização Implicita e sua taxa de convergência para 500,1000,2000,4000,8000 elementos

Convergência $\Delta t = h^2$ Implícito

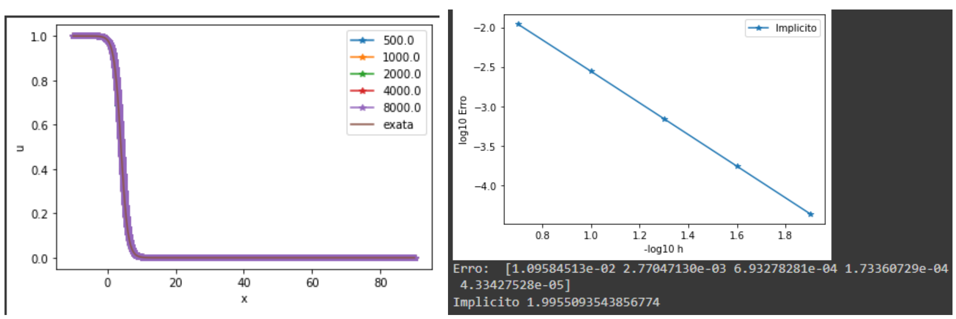

Figura 4: Discretização Implicita e sua taxa de convergência para 500,1000,2000,4000,8000 elementos

Convergência $\Delta t = h$ Crank-Nicolson

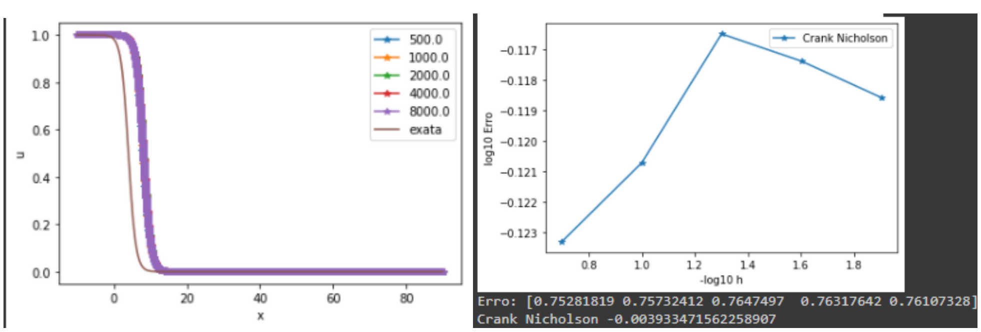

Figura 5: Discretização Crank-Nicolson e sua taxa de convergência para 500,1000,2000,4000,8000 elementos

Questão 2:

a)

Estabilidade de Von Neumann; Por se tratar de uma metodologia implícita, o esperado é que seja incondicionalmente estável, ou com condições de restrição menores de que a versão explícita do método, para isso verificamos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad \text{FTCS Implícto} \tag{9}$$

$$u_j^{n+1} + \frac{\rho}{2}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}$$

Substituindo:

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\omega h}$$

Temos:

$$\lambda^{n+1} e^{ij\omega h} + \frac{\rho}{2}(\lambda^{n+1} e^{i(j+1)\omega h} - \lambda^{n+1} e^{i(j-1)\omega h}) = \lambda^n e^{ij\omega h}, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}$$

Dividindo por:

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\omega h}$$

Temos:

$$\lambda + \frac{\rho}{2}(\lambda e^{i\omega h} - \lambda e^{-i\omega h}) = 1, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}$$

$$\lambda + \frac{\rho}{2}\lambda(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) = 1, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}$$

Como:

$$2isen(\omega h) = e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}$$

Vem:

$$\lambda + \frac{\rho}{2}\lambda(2isen(\omega h)) = 1, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}$$

Daí:

$$\lambda^2 + \rho\lambda^2(sen^2(\omega h)) = 1$$

$$\lambda^2(1 + \rho sen^2(\omega h)) = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + \rho sen^2(\omega h)}$$

Para estabilidade:

$$|\lambda| < 1$$

Como:

$$1 + \rho sen^2(\omega h) >= 1$$

$$\frac{1}{1 + \rho sen^2(\omega h)} <= 1$$

Logo:

$$\lambda^2 <= 1$$

$$\lambda <= 1$$

b)

$$\Delta t = \frac{h}{2}$$

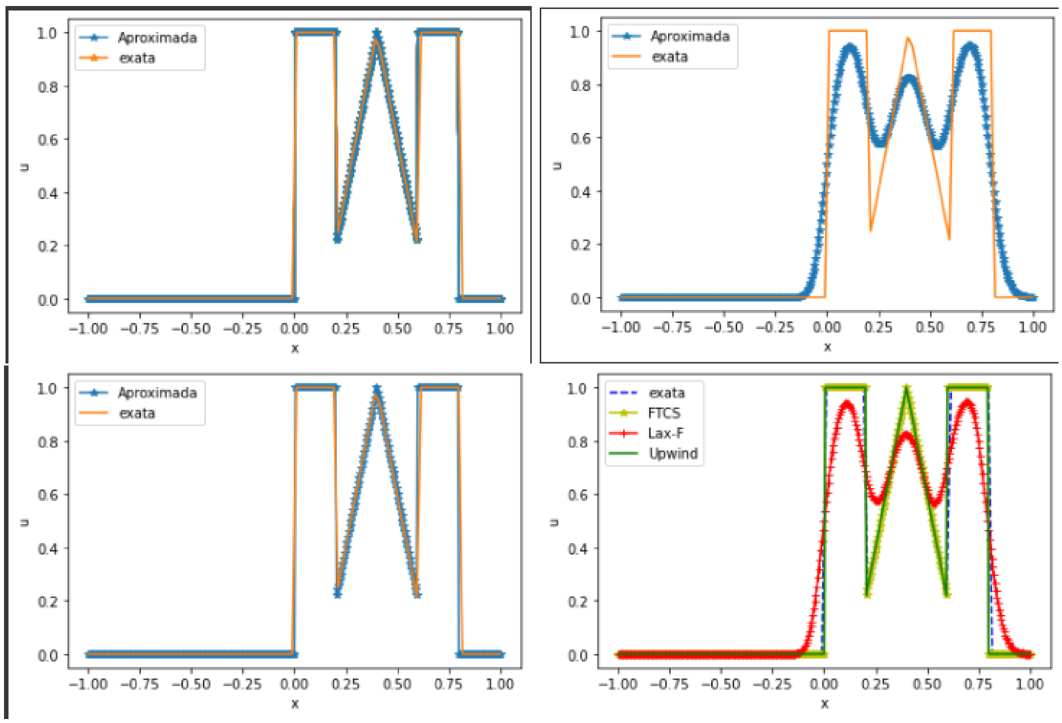

Figura 6: Métodos FTCS Implícito, Lax Friedrichs e Upwind Explícito para 400 elementos e $\Delta t = \dfrac{h}{2}$

c)

$$\Delta t = 1.1h$$

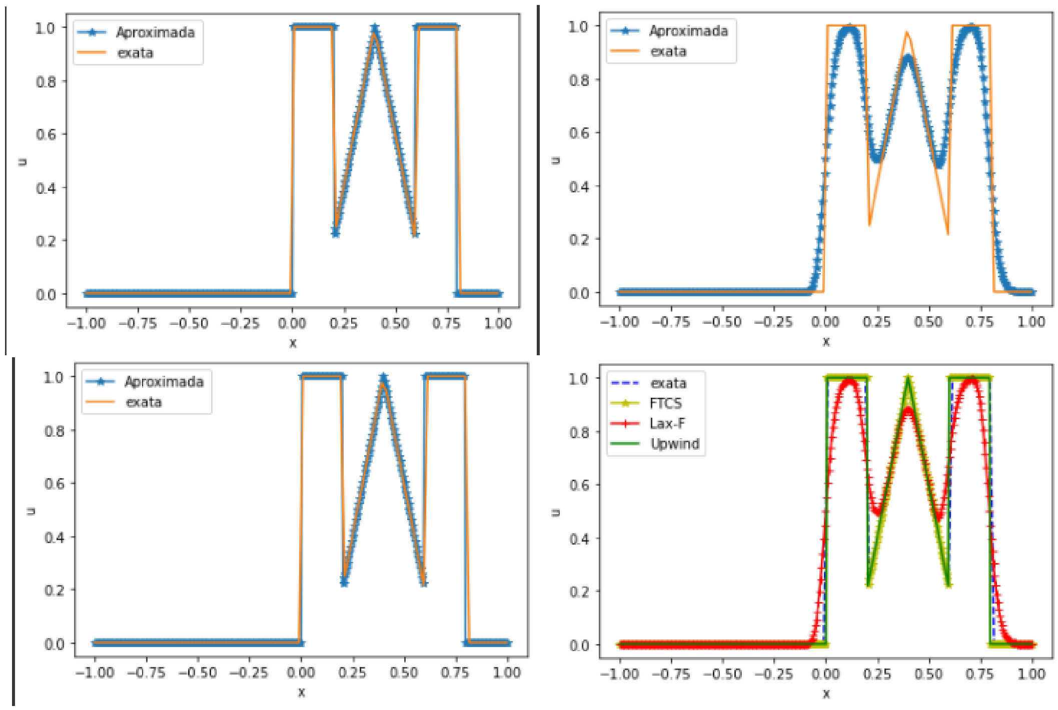

Figura 7: Métodos FTCS Implícito, Lax Friedrichs e Upwind Explícito para 400 elementos e $\Delta t = 1.1h$

Questão 3:

a)

Problema modelo: Difusão-Convecção Transiente

$$\frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0$$

Discretização $\mathcal{O}(\Delta t, h^2, h)$ (Upwind Implícita):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \varepsilon \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

$$u_j^{n+1} - \sigma(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \rho(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n, \quad \sigma = \frac{\varepsilon \Delta t}{h^2} \quad \rho = \frac{\Delta t}{h}$$

$$-\sigma(u_{j+1}^{n+1}) + (1 + 2\sigma + \rho)u_j^{n+1} - (\sigma + \rho)u_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad \sigma = \frac{\varepsilon \Delta t}{h^2} \quad \rho = \frac{\Delta t}{h}$$

Comparação $\Delta t = h$ Upwind Implícito

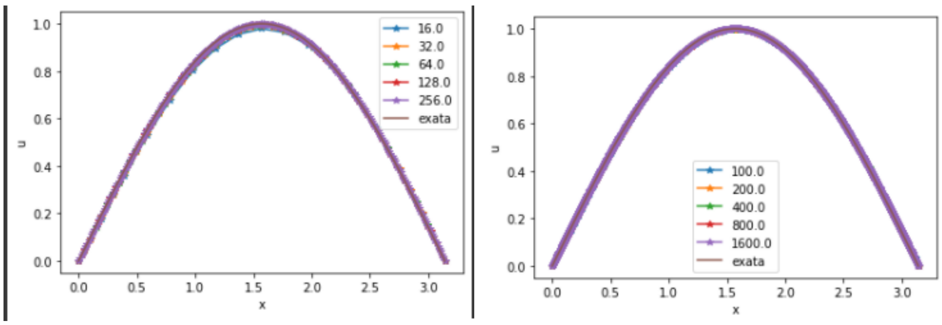

Figura 8: Discretização Upwind Implicita para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

Comparação $\Delta t = h^2$ Upwind Implícito

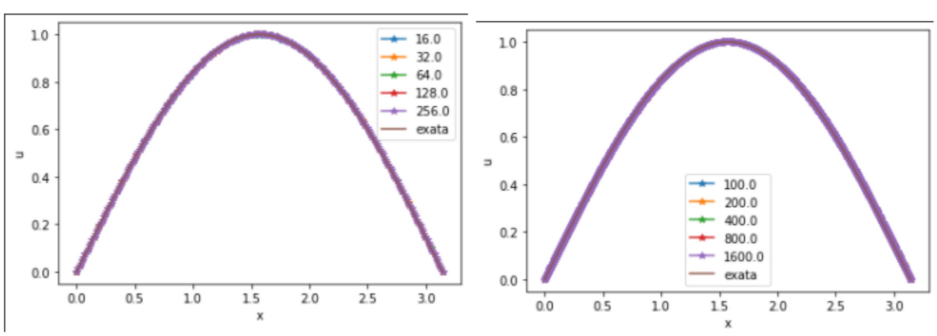

Figura 9: Discretização Upwind Implicita para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

b)

Discretização $\mathcal{O}(\Delta t, h^2, h^2)$ (Crank-Nicholson):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(-\varepsilon\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \varepsilon\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2h}) = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{1}{2}(-\varepsilon\Delta t\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \varepsilon\Delta t\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2} + \Delta t\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \Delta t\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2h}) = 0$$

$$u_j^{n+1} + (-\frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) + \frac{\rho}{4}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \frac{\rho}{4}(u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n})) = u_j^n, \quad \sigma = \frac{\varepsilon\Delta t}{h^2}, \quad \rho = \frac{\Delta t}{h}$$

$$u_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \frac{\rho}{4}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n + \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) - \frac{\rho}{4}(u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n})), \quad \sigma = \frac{\varepsilon\Delta t}{h^2} \quad \rho = \frac{\Delta t}{h}$$

$$(-\frac{\sigma}{2} + \frac{\rho}{4})u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\frac{\sigma}{2})u_j^{n+1} + (-\frac{\sigma}{2} - \frac{\rho}{4})u_{j-1}^{n+1} = (\frac{\sigma}{2} - \frac{\rho}{4})u_{j+1}^{n} + (1 - 2\frac{\sigma}{2})u_j^{n} + (\frac{\sigma}{2} + \frac{\rho}{4})u_{j-1}^{n}, \quad \sigma = \frac{\varepsilon\Delta t}{h^2} \quad \rho = \frac{\Delta t}{h}$$

Comparação $\Delta t = h$ Crank-Nicolson

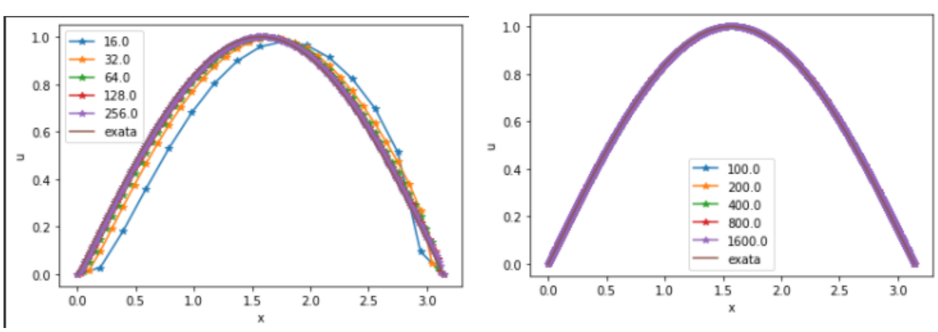

Figura 10: Discretização Crank-Nicolson para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

Comparação $\Delta t = h^2$ Crank-Nicolson

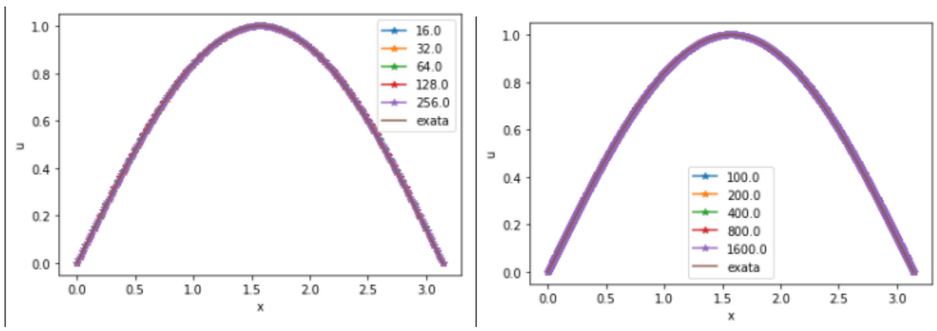

Figura 11: Discretização Crank-Nicolson para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

c)

Convergência $\Delta t = h$ Upwind Implícito

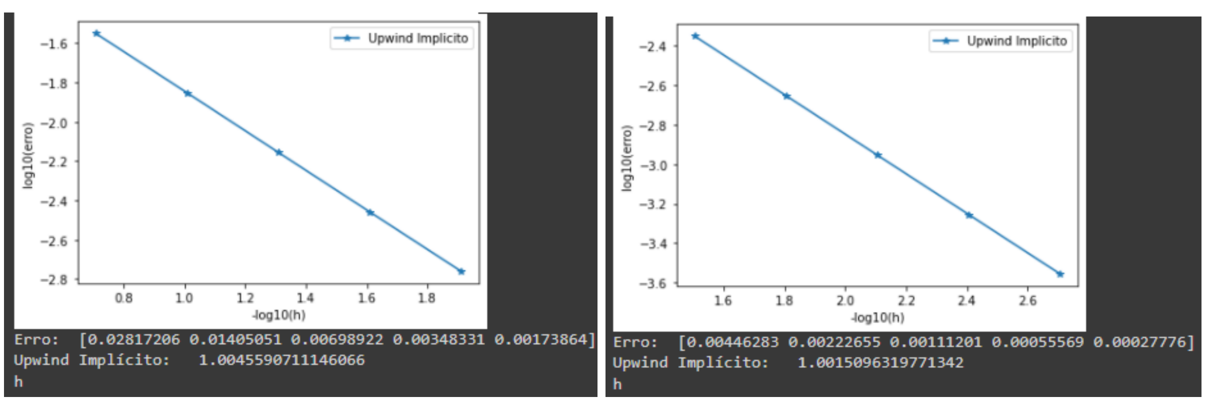

Figura 12: Discretização Upwind Implícita para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

Convergência $\Delta t = h^2$ Upwind Implícito

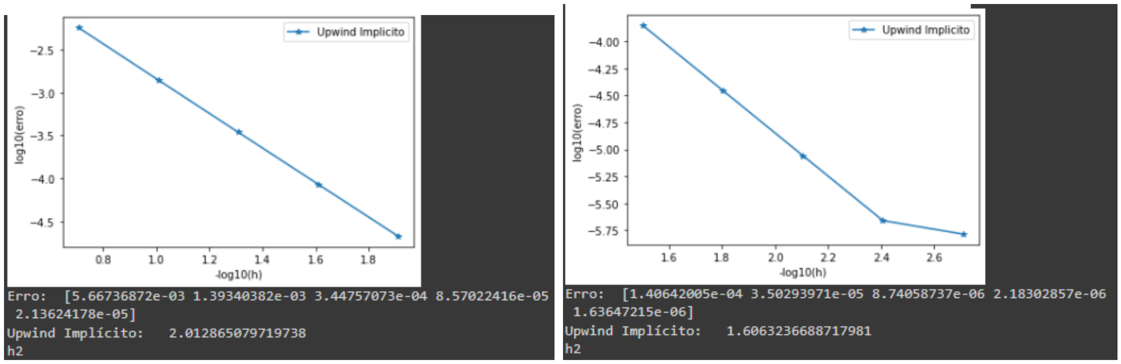

Figura 13: Discretização Upwind Implícita para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

Convergência $\Delta t = h$ Crank-Nicolson

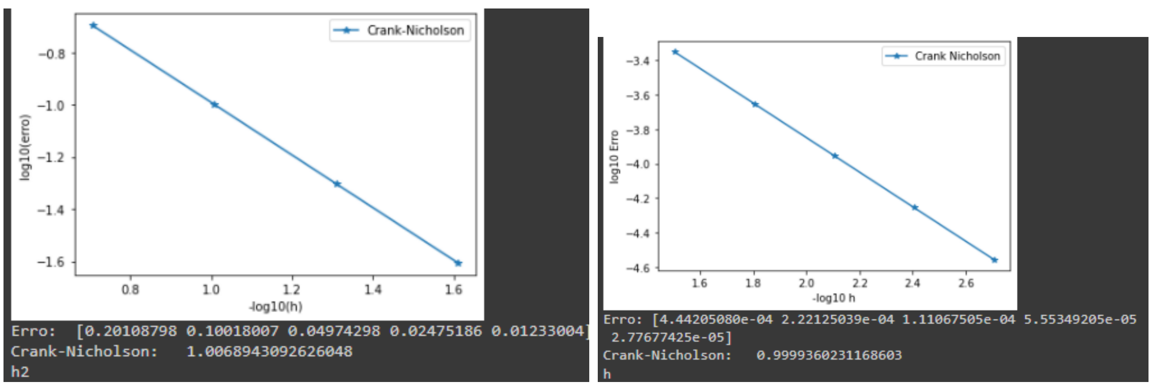

Figura 14: Discretização Crank-Nicolson para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos

Convergência $\Delta t = h^2$ Crank-Nicolson

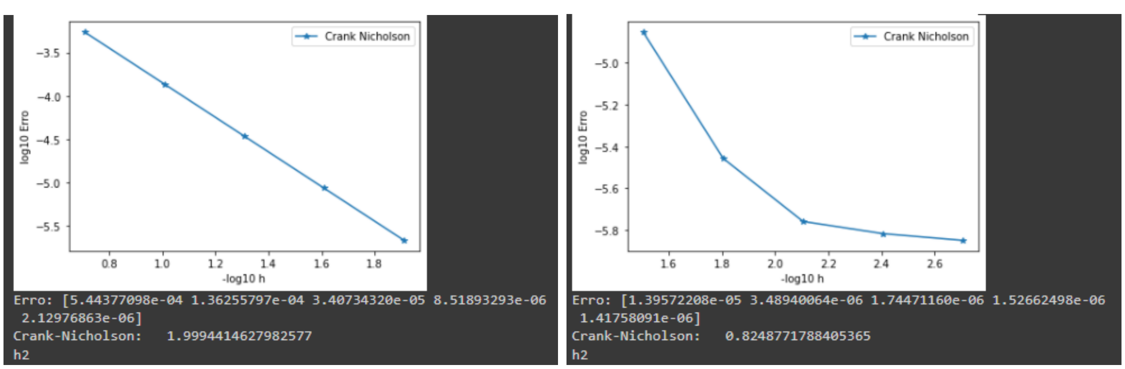

Figura 15: Discretização Crank-Nicolson para 16,32,64,128,256 e 100,200,400,800,1600 elementos