Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. Seja o problema:

$$\frac{du}{dt} = -au, \quad t \in [0, T]$$
$$u(0) = b.$$

Estude o comportamento da aproximação por diferenças finitas a seguir

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a\left[(1-\theta)u^{n+1} + \theta u^n\right] = 0,$$

para valores de $\theta \in [0, 1]$ com $a > 0$.

Sabendo que a solução exata para este problema é $u(t) = b\exp(-at)$, apresente:

(a) uma tabela com as condições de estabilidade com θ variando de 0 à 1 de 0.1 em 0.1;

- Estudo de Estabilidade:
- De $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a[(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}] = 0$ vem: $u^{n+1} = u^n \left(\dfrac{1 - a\Delta t\theta}{1 + a\Delta t(1-\theta)}\right)$
- Como temos

$$r = \left(\frac{1 - a\Delta t\theta}{1 + a\Delta t(1-\theta)}\right)$$

e para estabilidade $r > 0 \vee r < 1$

- Para $r > 0$:
  r deve ter um $\Delta t >$ o valor que satisfaça:

$$r = \left(\frac{1 - a\Delta t\theta}{1 + a\Delta t(1-\theta)}\right) > 0$$
$$1 - a\Delta t\theta > 0$$
$$\frac{1}{a\theta} > \Delta t$$

- Para $r < 1$:
  r deve ter um $\Delta t <$ o valor que satisfaça:

$$r = \left(\frac{1 - a\Delta t\theta}{1 + a\Delta t(1-\theta)}\right) < 1$$
$$1 - a\Delta t\theta < 1 + a\Delta t(1-\theta)$$

Fazendo:

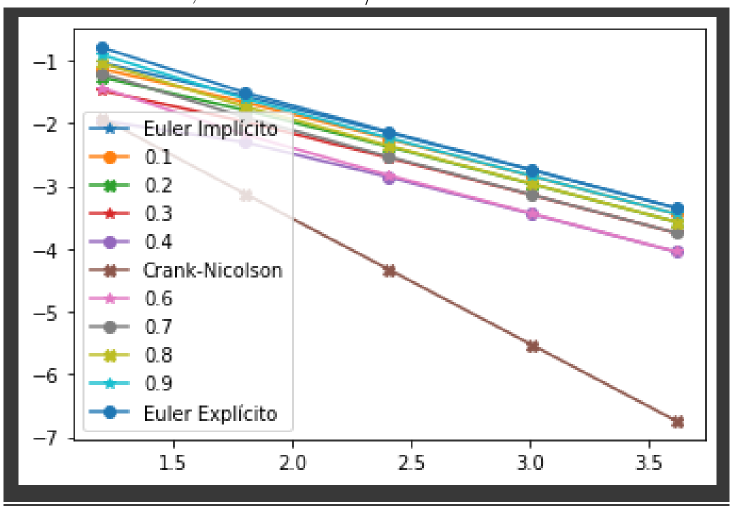
$$(1 - a\Delta t\theta) + C < (1 + a\Delta t - a\Delta t\theta) + C$$
$$(1 - a\Delta t\theta) + C < (1 - a\Delta t\theta) + (a\Delta t) + C$$
$$C < (a\Delta t) + C$$

O lado esquerdo sempre será < lado direito, portanto sempre teremos $r < 1$ Daí vem:

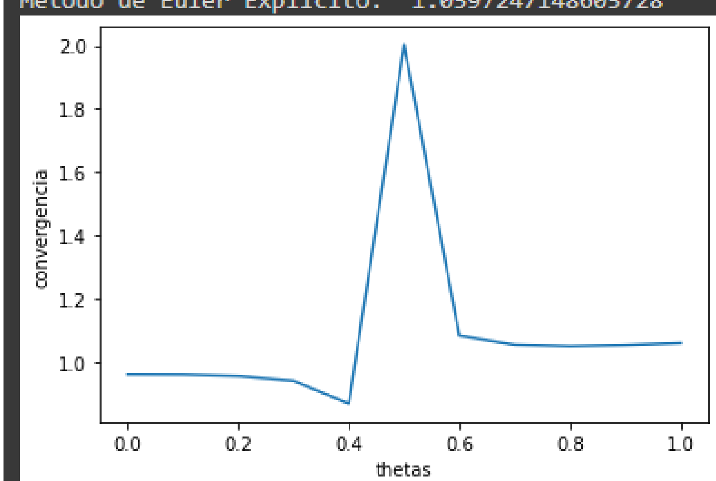
Valores de θ	**Condição de Estabilidade**
0.0 (Euler Implícito)	Incondicionalmente estável
0.1	$\Delta t < 10.00/a$
0.2	$\Delta t < 5.00/a$
0.3	$\Delta t < 3.33/a$
0.4	$\Delta t < 2.50/a$
0.5 (Crank-Nicolson)	$\Delta t < 2.00/a$
0.6	$\Delta t < 1.67/a$
0.7	$\Delta t < 1.43/a$
0.8	$\Delta t < 1.25/a$
0.9	$\Delta t < 1.11/a$
1.0 (Euler Explícito)	$\Delta t < 1.00/a$

(b) um gráfico com as taxas de convergência comparando os métodos listados na tabela do item (a). Utilize um refinamento do tipo 2^{j+1} para Δt. Deixe claro a sua escolha para os parâmetros a, b, T e Δt;

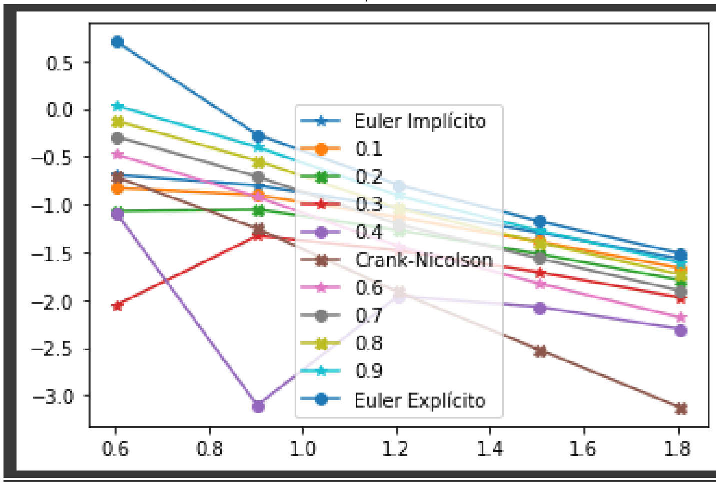
- $*$ Parâmetros: $a = 10$, $b = 1$, $T = 1$ e
- $*$ Para $nel = 4^{j+2}$, temos $\Delta t = 1/nel$:



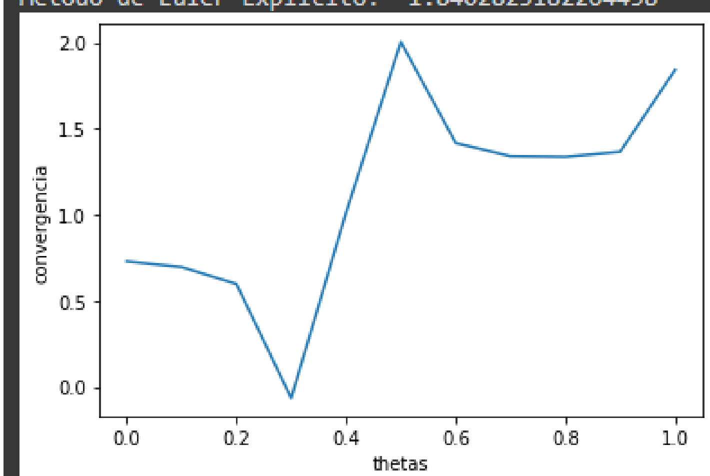

```
Taxas de Convergência
Método de Euler Implícito:  0.9603801297752552
Theta 0.1:   0.9597407790237847
Theta 0.2:   0.955282989858849
Theta 0.3:   0.9402041550486743
Theta 0.4:   0.8676919064311164
Método de Crank-Nicolson:   2.002291462396464
Theta 0.6:   1.0829770481445409
Theta 0.7:   1.0540331085466446
Theta 0.8:   1.0494164693856591
Theta 0.9:   1.0529751297397134
Método de Euler Explícito:  1.0597247148605728
```



$*$ Para $nel = 2^{j+1}$, temos $\Delta t = 1/nel$:

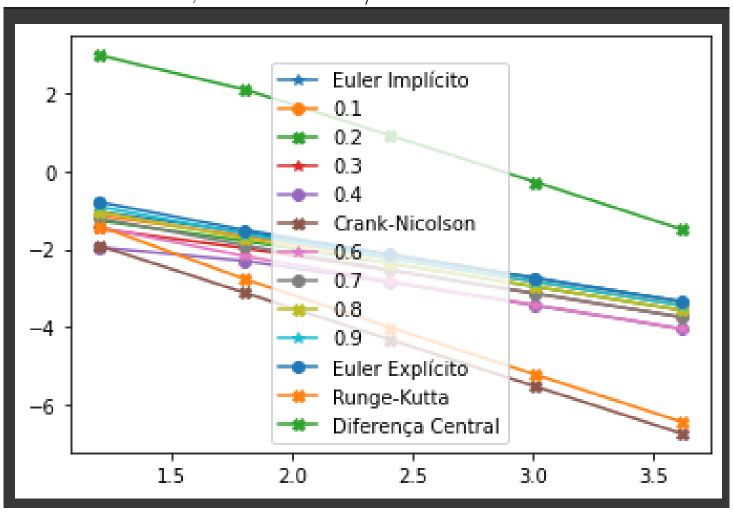



```
Taxas de Convergência
Método de Euler Implícito:  0.7289562006745679
Theta 0.1:   0.6958750226541892
Theta 0.2:   0.597680146682784
Theta 0.3:   -0.06557794129666036
Theta 0.4:   1.0118982490875432
Método de Crank-Nicolson:   2.0027410628621647
Theta 0.6:   1.4155398813848938
Theta 0.7:   1.3390993984107606
Theta 0.8:   1.335271506698523
Theta 0.9:   1.3650414175248784
Método de Euler Explícito:  1.8402823182264458
```

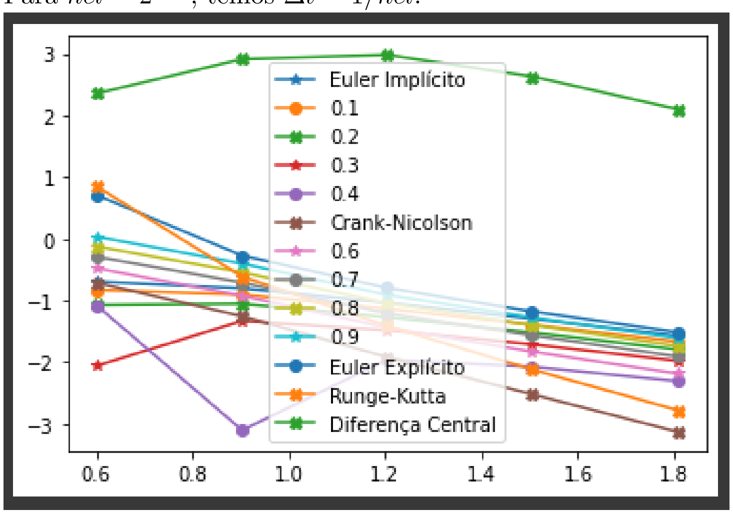


(c) outro gráfico comparando os resultados obtidos no item (b) com as taxas de convergência dos métodos de diferença central e Runge-Kutta de segunda ordem;

* Parâmetros: $a = 10$, $b = 1$, $T = 1$ e
* Para $nel = 4^{j+2}$, temos $\Delta t = 1/nel$:



* Para $nel = 2^{j+1}$, temos $\Delta t = 1/nel$:



2. Seja o problema de segunda ordem que descreve o movimento de um pêndulo:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\sin(u), \quad t \in [0, T]$$
$$u(0) = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt}(0) = \beta.$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$$

Adotando $\alpha = 0$ e $\beta = 0.1$ em um domínio $[0, 2\pi]$, resolva o problema acima empregando as seguintes metodologias:

(a) aproximação de segunda ordem para a derivada no tempo

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = -\sin(u^n)$$

. Descreva os passos de discretização do problema e apresente resultados comparando solução exata e aproximada. Discretizando:

$$\frac{du}{dt}(0) \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \beta$$

Daí:

$$\frac{du}{dt}(0) \approx u^{n+1} = u^n + \Delta t \beta$$

De:

$$u(0) = \alpha$$

Vem (I):

$$u(1) = \alpha + \Delta t \beta$$

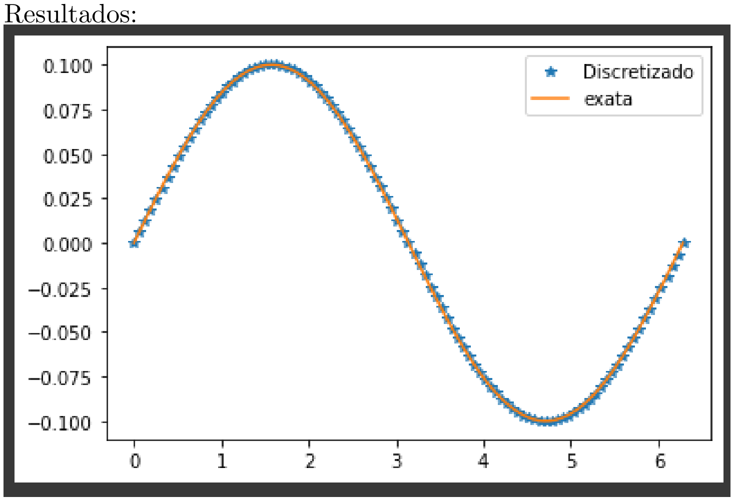
De:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = -\sin(u^n)$$

Vem (II):

$$u^{n+1} = -\Delta t^2 \sin(u^n) + 2u^n - u^{n-1}$$

Resultados:



(b) fazendo a seguinte troca de variável $v = \frac{du}{dt}$, podemos reescrever o problema do pêndulo como o seguinte sistema:

$$v = \frac{du}{dt} \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\sin(u) \tag{2}$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0.1. \tag{3}$$

Aplique o método de Crank-Nicolson para aproximar a equação (2). Descreva a metodologia empregada e apresente um gráfico comparando a solução exata e aproximada.

Discretizando:

$$v = \frac{du}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = -\sin(u)$$

Tomando $F(u,t) = v)$, a aproximação pelo método de Euler é: $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - v = 0$. A partir de Euler derivamos o método de Crank-Nicolson: $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2}$

Daí:

$$u^{n+1} = \Delta t \frac{v^{n+1} + v^n}{2} + u^n$$

Como:

$$\frac{v^{n+1} + v^n}{\Delta t} = -sin(u^n)$$

Vem:

$$v^{n+1} = -\Delta t sin(u^n) + v^n$$

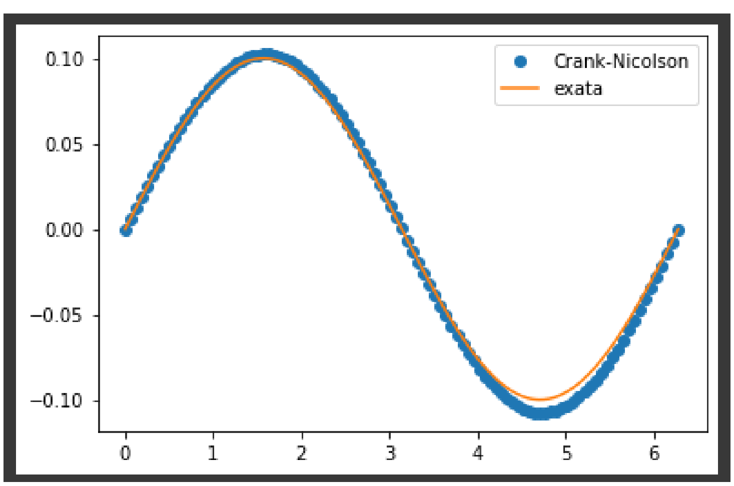
Possuímos:

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0.1$$

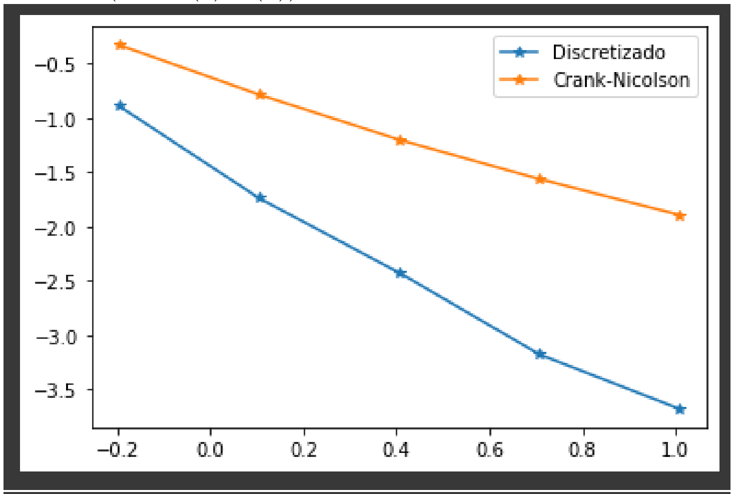
Daí:

$$u(1) = 0.1\Delta t \quad \text{e} \quad v(1) = 0.1$$

Calculando-se u^{n+1} a cada passo antes de calcular-se v^{n+1} no método de Crank-Nicolson, teremos todas variáveis necessárias para calcular v^{n+1}
Resultados:



(c) apresente um gráfico comparando as taxas de convergência dos métodos desenvolvidos anteriormente (letras (a) e (b)) utilizando a norma do máximo.




```
Discretizado:   2.3149839457759427
Método de Crank-Nicolson:   1.298884808024642
```