2^a Lista
DCC190 - Solução numérica de equações diferenciais
Entrega: 05 de Novembro de 2021
Aluno: Alexandre Vitor Silva Braga - 201965501B

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. A equação abaixo é conhecida como *Problema de Helmholtz*:

$$\frac{d^2p}{dx^2} + k^2 p = 0, \quad p \in \Omega = [a, b] \tag{1}$$

$$p(a) = \alpha \quad \text{e} \quad p(b) = \beta. \tag{2}$$

O problema de Helmholtz modela uma onda plana, onde p descreve a variação do campo de pressão em um meio acústico em um tempo fixo e o número de onda k contém informações da frequência, medida do domínio e velocidade do som.

O problema em questão é de natureza fortemente oscilatória. Por conta disso, a solução numérica sofre consequências de efeitos de poluição e ressonância numérica. Assim, para assegurar a estabilidade numérica deste problema deve-se respeitar a seguinte relação:

$$kh < 1 \tag{3}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$p(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx) \tag{4}$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Os valores de α e β (eq. (2)) são calculados a partir da solução (4).

Considerando apenas a parte real da solução (4) e utilizando uma discretização por diferenças finitas de segunda ordem, faça:

a) estudos numéricos apresentando gráficos para valores de $k = 10, 100, 1000$ variando o valor de h, de forma a validar a relação (4), em um domínio $\Omega = [0, 1]$;

b) apresente um gráfico que demonstre a ordem de convergência do método utilizado.

2. Seja o problema:

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} + \kappa\frac{du}{dx} = 0, \quad u \in \Omega = [0, 1] \tag{5}$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \tag{6}$$

cuja solução geral é dada por:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B \tag{7}$$

onde os coeficientes A e B são determinados pelas condições de contorno. Nas simulações computacionais adote $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\kappa = 1$.

a) a partir da solução geral (10), derive a solução exata que satisfaz o problema (8)-(9);

b) apresente gráficos e comente os resultados, para diferentes valores de h, comparando a solução exata com a aproximada aplicando as seguintes metodologias para discretizar o termo convectivo:

  * diferença central (aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann);

- ∗ diferença regressiva;
- ∗ diferença progressiva;

c) aplique o método de estabilização baseado em *difusão artificial* para resolver o problema (8)-(9) adotando a discretização por diferença central para a convecção e aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann e mostre graficamente, comparando a solução exata e a aproximada estabilizada e não estabilizada, que a metodologia de estabilização empregada é capaz de impedir as oscilações numéricas inerentes deste problema e comente os resultados.

Resolução:

Questão 1:

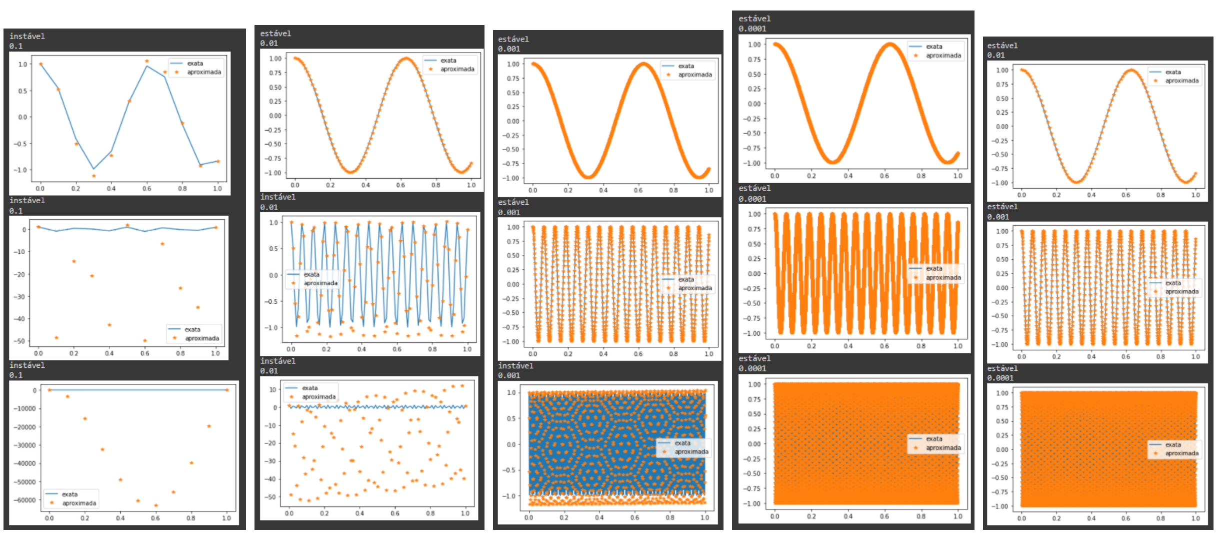
a)

As imagens representam respectivamente na ordem de cima para baixo a função para os valores de

$$k = 10, 100, 1000$$

Além de uma condição que indica a estabilidade no sistema caso

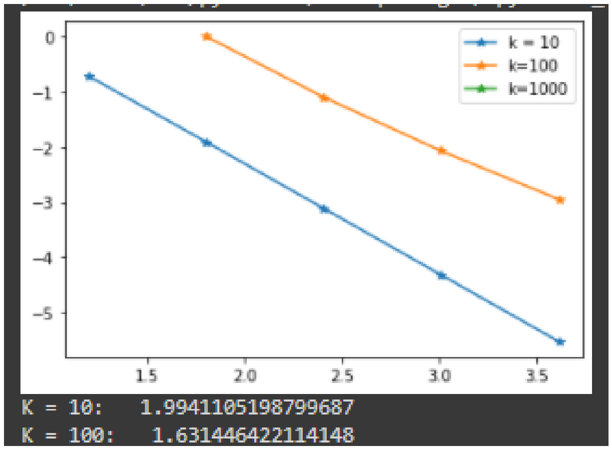
$$kh < 1$$



(a) $h = 0.1$ (b) $h = 0.01$ (c) $h = 0.001$ (d) $h = 0.0001$ (e) h estabilizado

Figura 1: h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 e estabilizado

b)



Questão 2:

a)

Seja o problema:

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad u \in \Omega = [0,1] \tag{8}$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \tag{9}$$

cuja solução geral é dada por:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B \tag{10}$$

Deduzir A e B e obter a solução geral:

De:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B$$

Como $\kappa = 1$ e $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$u(x) = Ae^{-100x} + B$$

Vem:

$$\frac{du(x)}{dx} = -100Ae^{-100x}$$

Da condição de contorno $\dfrac{du}{dx}(0) = 1$ temos:

$$\frac{du}{dx}(0) = -100Ae^{-100*0} = 1$$

$$\frac{du}{dx}(0) = -100A * 1 = 1$$

$$A = -0.01$$

Da condição de contorno $u(1) = 1$ temos:

$$u(1) = -100Ae^{-100*1} + B = 1$$

Substituindo $A = -0.01$:

$$u(1) = -100 * (-0.01)e^{-100} + B = 1$$

$$u(1) = -100 * (-0.01)e^{-100} + B = 1$$

$$u(1) = e^{-100} + B = 1$$

Como $e^{-100} = 3.720076e - 44$ podemos assumir:

$$B = 1$$

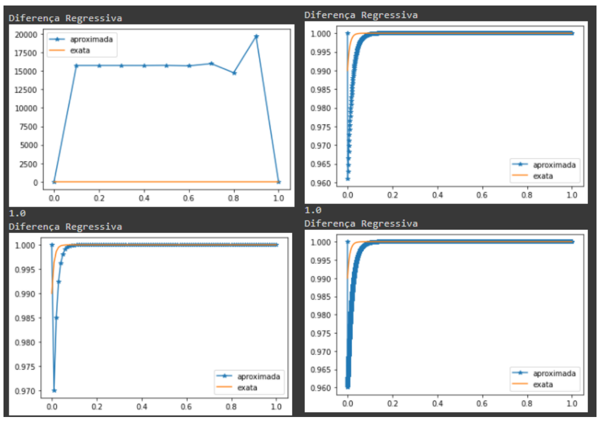
Portanto temos como a solução exata para essas condições de contorno:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B$$

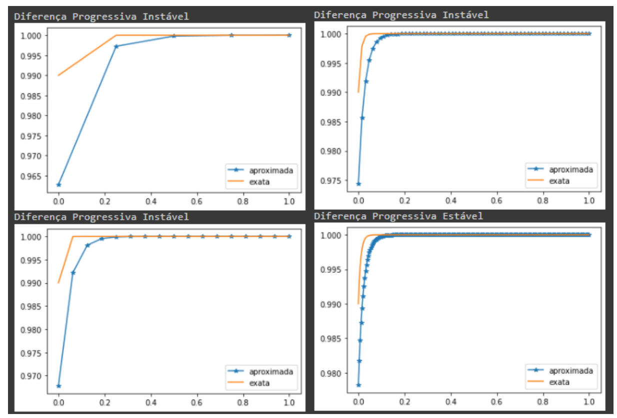
$$u(x) = -0.01e^{-100x} + 1$$

b)

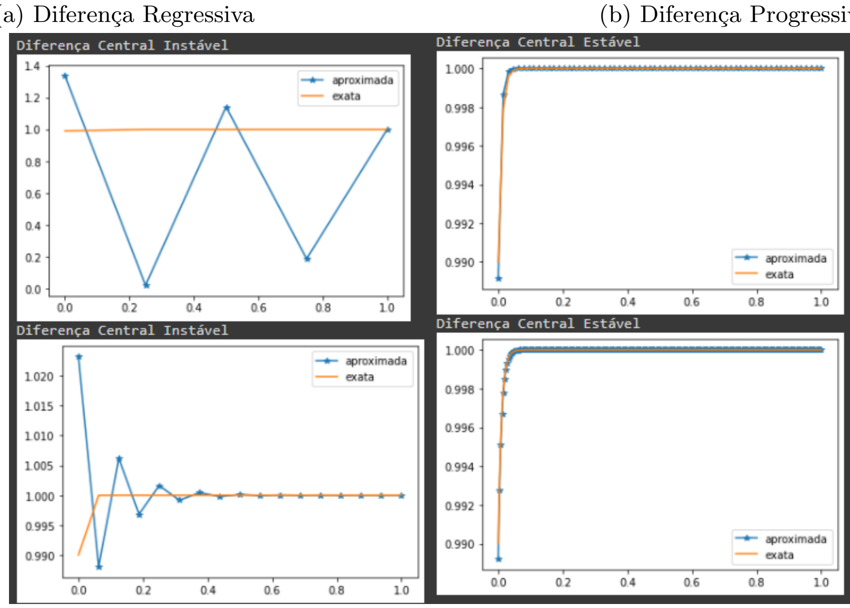
A seguir temos diferentes discretizações para a convecção, com diferentes valores de h, em todas temos: para $h = 0.1$ no topo esquerdo, $h = 0.01$ embaixo à esquerda, $h = 0.001$ topo à direita e $h = 0.0001$ embaixo à direita:



(a) Diferença Regressiva



(b) Diferença Progressiva

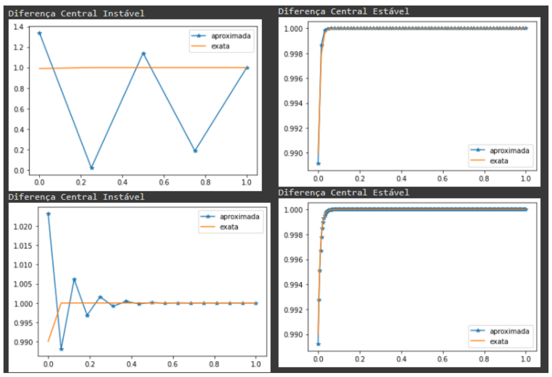


(c) Diferença Central

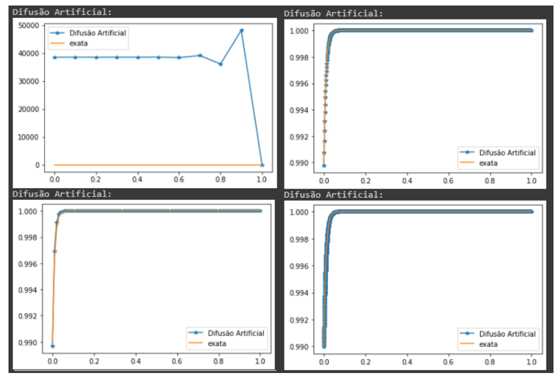
Figura 2: Comparação para termo convectivo por Diferença Regressiva, Diferença Central e Diferença Progressiva

c)

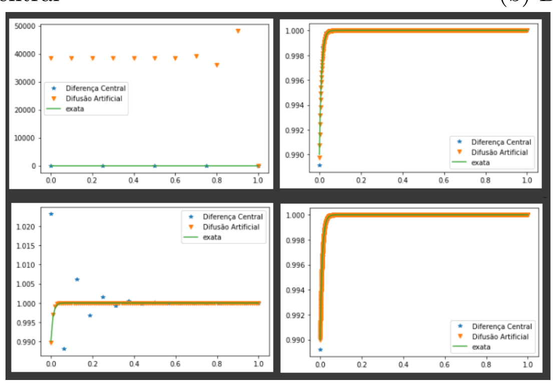
Comparando a difusão artificial com o problema discretizado por diferença central com diferentes valores de h. Em todas temos: para $h = 0.1$ no topo esquerdo, $h = 0.01$ embaixo à esquerda, $h = 0.001$ topo à direita e $h = 0.0001$ embaixo à direita:



(a) Diferença Central



(b) Difusão Artificial



(c) Comparando ambas

Figura 3: Comparação Diferença Central para teermo convectivo e Difusão Artificial

É notável a diminuição de oscilações ao utilizar a difusão artificial, principalmente para valores de h menores, o que garante que a difusão não seja excessiva e mude muito a física do problema.