Trabalho – Parte A
DCC190 - Solução numérica de equações diferenciais
Entrega: 16 de Janeiro de 2022
Aluno: Alexandre Vitor Silva Braga - 201965501B

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

•

- Seja o problema: *Encontrar* $u(x, y, t) \in \Omega \times \Theta$ *satisfazendo a seguinte equação:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f(x, y, t) \quad \text{em} \quad \Omega \times \Theta \\ u(x, y, t) = \overline{u} \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \Theta \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \qquad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

1. Supondo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, discretize o problema (1) pelo método de direções alternadas (ADI) e implemente um código computacional para simular este problema.

a) Considerando o domínio espacial $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ e temporal $\Theta = [0, 0.5]$ e adotando $\varepsilon = 1$, valide sua implementação utilizando a seguinte solução exata:

$$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Plote a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação.

b) Determine a ordem de convergência do método ADI na norma do máximo utilizando as seguintes malhas $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64$, $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, calculada no tempo final $T = 0.5$.

2. Inclua no código do item anterior o termo convectivo, ou seja, suponha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ em (1). Discretize o termo convectivo utilizando um esquema upwind generalizado (que seja capaz de identificar o sinal de $\mathbf{b}$ e escolher corretamente a discretização) utilizando a metodologia ADI.

a) Valide seu código através da solução exata:

$$u(x, y, t) = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + 4\varepsilon t} \exp\left(-\frac{(\overline{x} - x_c)^2 + (\overline{y} - y_c)^2}{2\gamma^2 + 4\varepsilon t}\right)$$

∗ $\overline{x} = x\cos(4t) + y\sin(4t)$ e $\overline{y} = -x\sin(4t) + y\cos(4t)$
∗ $x_c = 0.2$, $y_c = 0$, $\gamma = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
∗ $\mathbf{b} = (-4y, 4x)$ e $f(x, y, t) = 0$
∗ $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ e $\Theta = [0, 3]$

Plote a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação.

b) Determine a ordem de convergência do método na norma do máximo utilizando as seguintes malhas $8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128$ e $\Delta t = h$, calculada no tempo final $T = 3$.

Resolução:

Questão 1:

a)

Comparação Aproximada e Exata

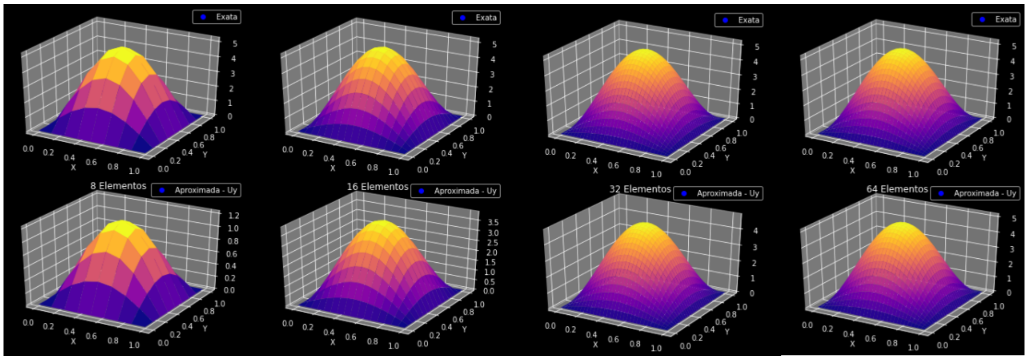

Figura 1: Comparação para 8,16,32,64 elementos

Comparação Aproximada e Exata

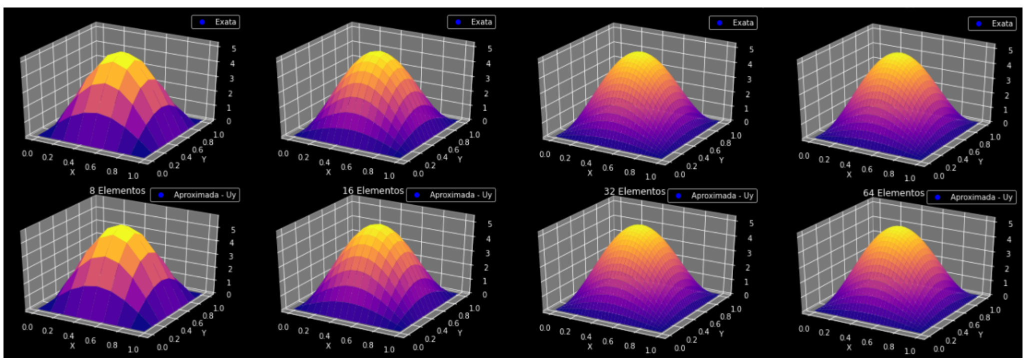

Figura 2: Comparação para 8,16,32,64 elementos

b)

Taxa de Convergência para $\Delta t = h$

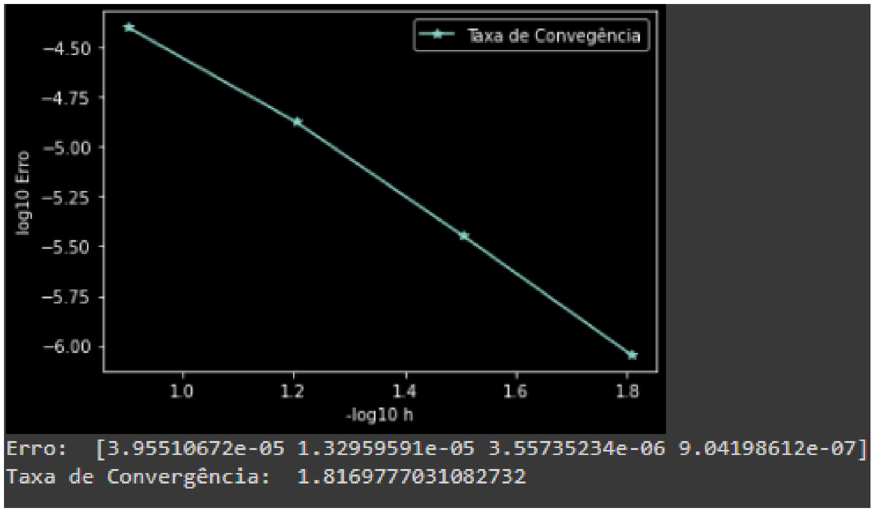

Figura 3: Taxa de Convergência para 8,16,32,64 elementos

Taxa de Convergência para $\Delta t = h^2$

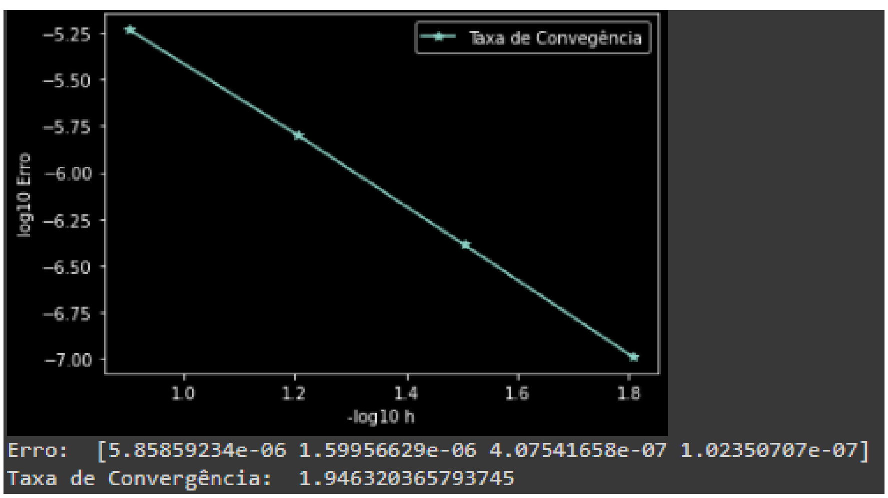

Figura 4: Taxa de Convergência para 8,16,32,64 elementos

Questão 2:

a)

Comparação Aproximada e Exata

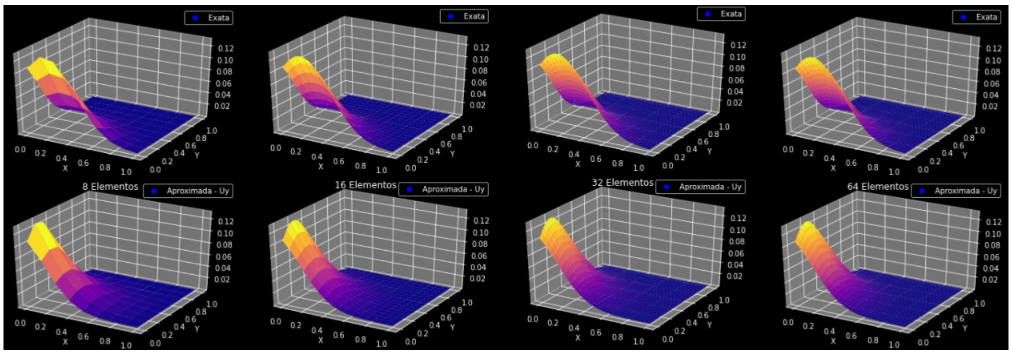

Figura 5: Comparação para 8,16,32,64 elementos

b)

Taxa de Convergência para $\Delta t = h$

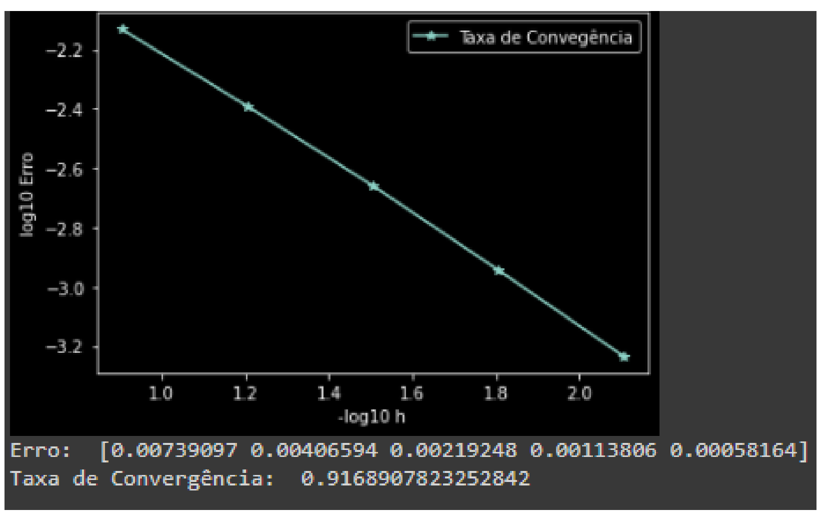

Figura 6: Taxa de Convergência para 8,16,32,64,128 elementos