Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Resistência dos Materiais

Relatório Lista 1 - MAC026 - Introdução aos Método Discretos

Aluno: Alexandre Vitor Silva Braga - 201965501B

Professores: Thaianne Oliveira e Elson Magalhães Toledo

Relatório de MAC026 - Introdução aos Método Discretos, parte integrante da avaliação da mesma.

Juiz de Fora

Julho de 2022

Sumário

Exercício 1

Resolver o problema $y = 8$, com $y_0 = 1$ e solução exata $y(t) = 8t + 1$, empregando o método de Euler Explícito, o método de Euler Implícito e o Método dos Trapézios. Para tal, considerar:

- Tempo Final: $T = 1$
- Intervalos de discretização $h = 0.5$ e $h = 0.25$

Apresentar o gráfico dos resultados e comentar o desempenho dos diferentes métodos empregados.

O Problema:

Seja

$$y' = 8, \quad y_0 = 1$$

Solução Exata

$$y(t) = 8t + 1$$

Métodos:

Função $f = y'$	$\begin{cases} f_j = 8 \\ f_{j+1} = 8 \end{cases}$
Euler Explícito	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf_j \\ y_{j+1} = y_j + 8h \end{cases}$
Euler Implícito	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf_{j+1} \\ y_{j+1} = y_j + 8h \end{cases}$
Trapézios	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f_{j+1} + f_j) \\ y_{j+1} - \frac{h}{2}(f_{j+1}) = y_j + \frac{h}{2}f_j \\ y_{j+1} - 4h = y_j + 4h \\ y_{j+1} = y_j + 8h \end{cases}$

Resultados:

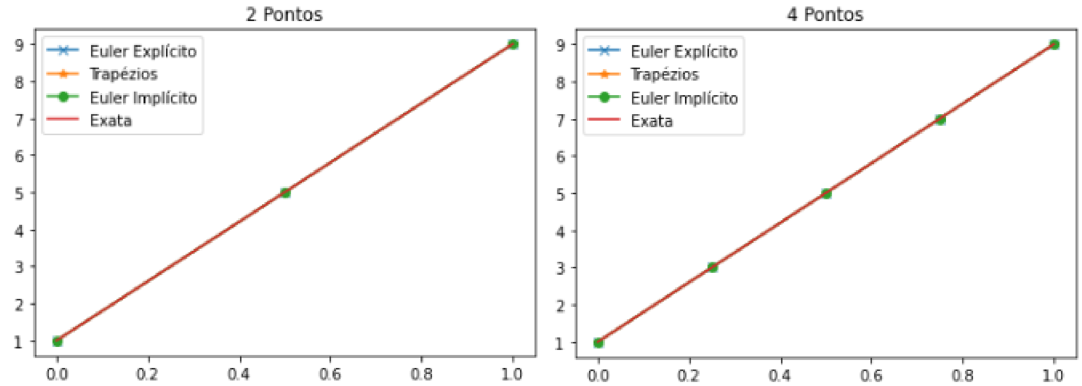

Grafico Exec 1

A partir dos gráficos acima podemos concluir que todos os métodos foram nodalmente precisos. Isso ocorreu pelos seguintes motivos, primeiramente a aproximação utilizada para todos tornou-se a mesma ao final, dada por $y_{j+1} = y_j + 8h$. Em seguida o porquê dessa aproximação ter sido a mesma, ambas f_j e f_{j+1} são iguais em decorrência da derivada da função ser constante, $y' = 8$. Por fim, A derivada da função é constante por se tratar de uma função linear na forma $ax + b$, na qual $a = 8$, $x = t$, e $b = 1$.

É relevante ressaltar que, como temos uma função linear torna-se fácil aproximar nodalmente exata, pois o método faz tornar-se uma mímica da função real, **b** representa o valor pela qual a reta passa por **0**, **a** representa a inclinação da reta, ou seja, a derivada de uma função linear, e em nosso equivalente nos métodos de 1ª Ordem utilizados, **h** representa o x da reta. Logo aproximações nodalmente exatas

Exercício 2

Resolver o problema $y' = \lambda y(1-y)$, com $y_0 = 10$, $\lambda = 0.05$ e solução Exata $y(t) = \dfrac{y_0 e^{\lambda t}}{1 + y_0(e^{\lambda t} - 1)}$ empregando os métodos:

- Euler Explícito;
- Euler modificado (Heun);
- Leapfrog;
- Runge-Kutta clássico (RK4);
- Adams-Bashforth de 3ª Ordem;
- Método preditor-corretor de 4ª Ordem construído a partir dos métodos de Adams.

Para tal, considerar:

- Tempo Final: $T = 50$
- Número de Pontos: $M = 100$, $M = 200$ e $M = 300$

Apresentar o gráfico dos resultados e comentar o desempenho dos diferentes métodos empregados comparando com a solução exata. Apresentar também um gráfico de erro, considerando o valor absoluto do máximo erro encontrado para cada um dos métodos em estudo e comentar Para o método Leapfrog, considere como valor inicial:
Solução Exata
Para os métodos Preditor-Corretor 4ª Ordem e Adams-Bashforth considere como valores iniciais:

- Solução Exata
- Valores Obtidos através de Euler Modificado
- Valores Obtidos através de Runge-Kutta 4ª Ordem

Avaliar a influência da escolha das estimativas iniciais para Preditor-Corretor e comentar os resultados obtidos.

O Problema:

Seja

$$y' = \lambda y(1-y), \quad y_0 = 10, \quad \lambda = 0.05$$

Solução Exata

$$y(t) = \frac{y_0 e^{\lambda t}}{1 + y_0(e^{\lambda t} - 1)}$$

$$y(t) = \frac{10 e^{0.05t}}{1 + 10(e^{0.05t} - 1)}$$

Métodos:

Função $f = y'$	$\begin{cases} f_j = \lambda y_j(1-y_j) \\ f_{j+1} = \lambda y_{j+1}(1-y_{j+1}) \end{cases}$
Euler Explícito	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf_j \\ y_{j+1} = y_j + h(\lambda y_j(1-y_j)) \\ y_{j+1} = y_j(1 + h\lambda(1-y_j)) \\ y_{j+1} = y_j(1 + h\lambda - h\lambda y_j) \end{cases}$
Euler Modificado (Heun)	$\begin{cases} Heun : f_{j+1} = f(t_j + h, y_j + hf_j) \\ De\ Euler\ Explicito : y_{j+1} = y_j + hf_j \\ Entao\ de : f_{j+1} = \lambda y_{j+1}(1 - y_{j+1}) \\ Vem : f_{j+1} = \lambda(y_j + hf_j)(1 - (y_j + hf_j)) \\ f_{j+1} = \lambda(y_j + hf_j)(1 - y_j - hf_j) \\ De\ Trapezios : y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f_{j+1} + f_j) \\ Dai : y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(\lambda(y_j + hf_j)(1 - y_j - hf_j) + f_j) \end{cases}$
Leapfrog	$\begin{cases} y_{j+1} = y_{j-1} + 2hf_j \end{cases}$

Runge-Kutta 4ª Ordem	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f_1 = f_j \\ K_2 = f_2 = f(y_j + \frac{h}{2}f_1) \\ K_3 = f_3 = f(y_j + \frac{h}{2}f_2) \\ K_4 = f_4 = f(y_j + hf_3) \end{cases}$
Adams-Bashforth de 3ª Ordem	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12}(K_1 - K_2 + K_3) \\ K_1 = 23f_j \\ K_2 = -16f_{j-1} \\ K_3 = 5f_{j-2} \end{cases}$
Preditor-Corretor de 4ª Ordem	$\begin{cases} Heun : y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}((y_j + hf_j)(1 - y_j - hf_j) + f_j) \\ Adams - Bashforth\ de\ 4\ Ordem : \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(K_1 - K_2 + K_3 - K_4) \\ K_1 = 55f_j \\ K_2 = 59f_{j-1} \\ K_3 = 37f_{j-2} \\ K_4 = 9f_{j-3} \\ Adams - Mouton\ de\ 4\ Ordem : \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(K_0 + K_1 - K_2 + K_3) \\ K_0 = 9f_{j+1} \\ K_1 = 19f_j \\ K_2 = 5f_{j-1} \\ K_3 = f_{j-2} \\ Prediz\ um\ y_{j+1}\ \text{através de Adams-Bashforth} \\ para\ utilizar\ em\ Adams - Mouton \end{cases}$

Resultados:

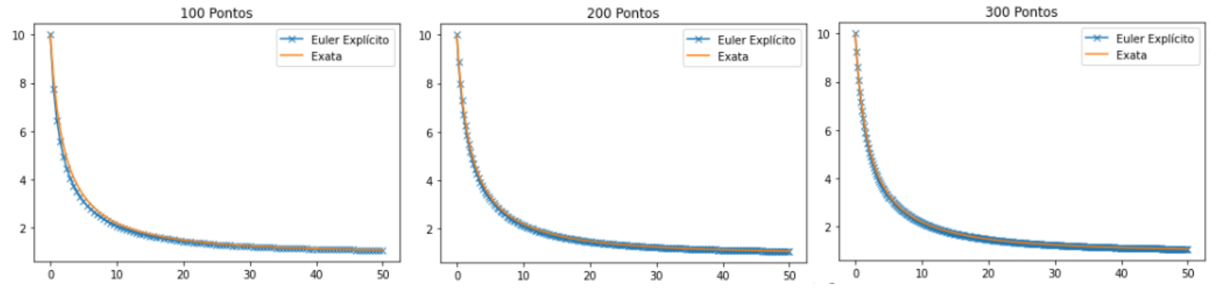

Gráfico Euler Explicito Exec2

Converge

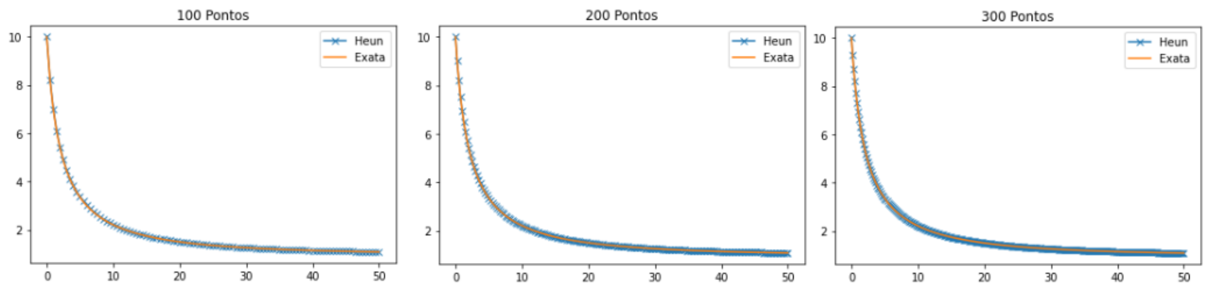

Gráfico Euler Modificado (Heun) Exec2

Converge

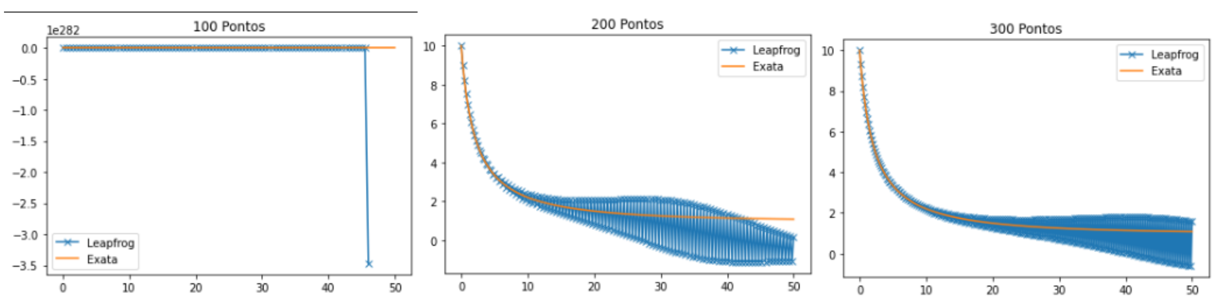

Gráfico Leapfrog Exec2

Podemos notar que o método claramente diverge da solução, por se tratar de um método instável.

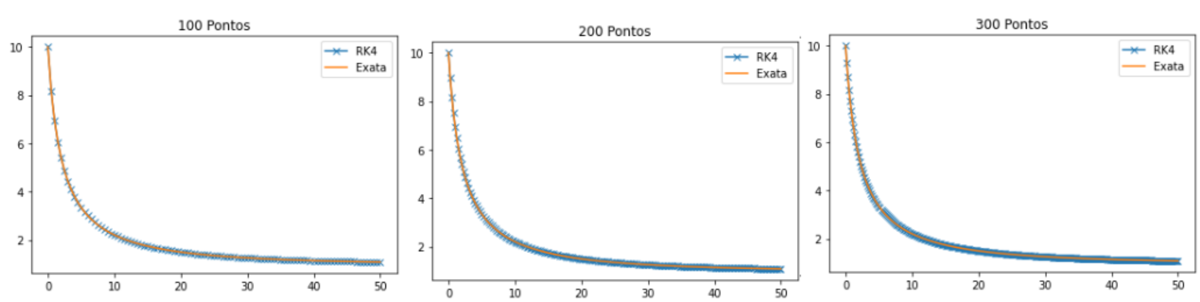

Gráfico Runge-Kutta 4ª Ordem (Clássico) Exec2

Converge como esperado.

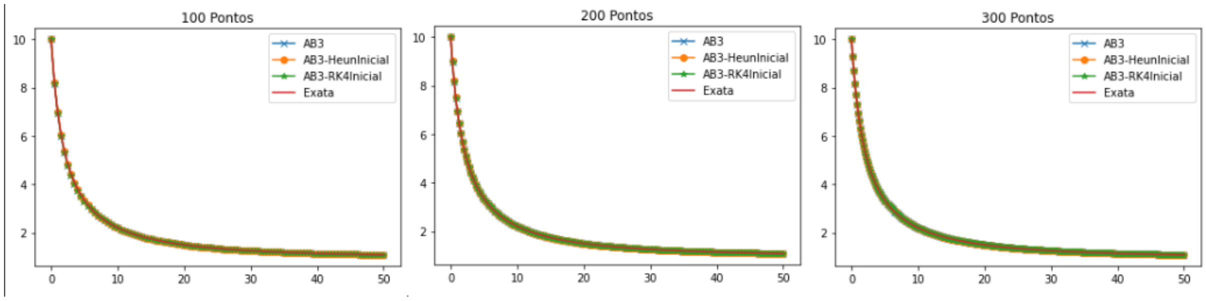

Gráfico Adams-Bashforth 3ª Ordem Exec2

A partir dos resultados obtidos acima, podemos notar que, independentemente de não ter a solução exata para os valores iniciais do método, é possível faze-lo tender a solução desejada de outro modo. Nesse caso utilizando-se dos valores iniciais calculados a partir dos métodos de Heun e Runge-Kutta 4ª Ordem a solução visualmente parece tender ao resultado esperado em ambos os casos.

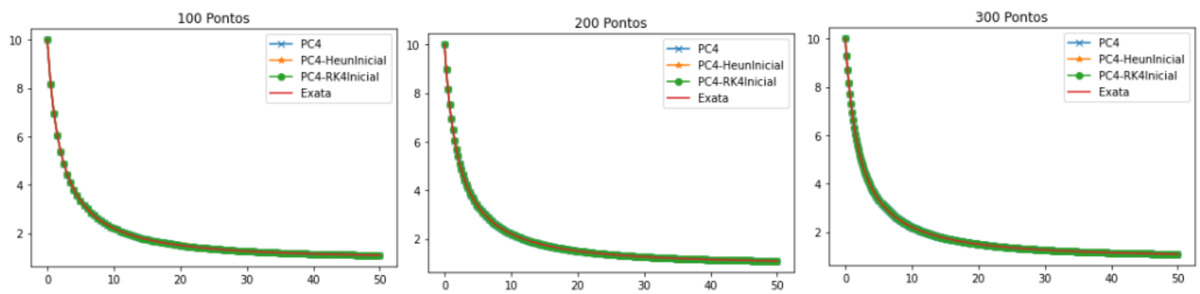

Gráfico Preditor-Corretor 4ª Ordem Exec2

Assim como no método anterior, mesmo sem a solução exata, utilizando-se dos valores iniciais calculados a partir dos métodos de Heun e Runge-Kutta 4ª Ordem a solução visualmente converge ao resultado esperado em ambos os casos.

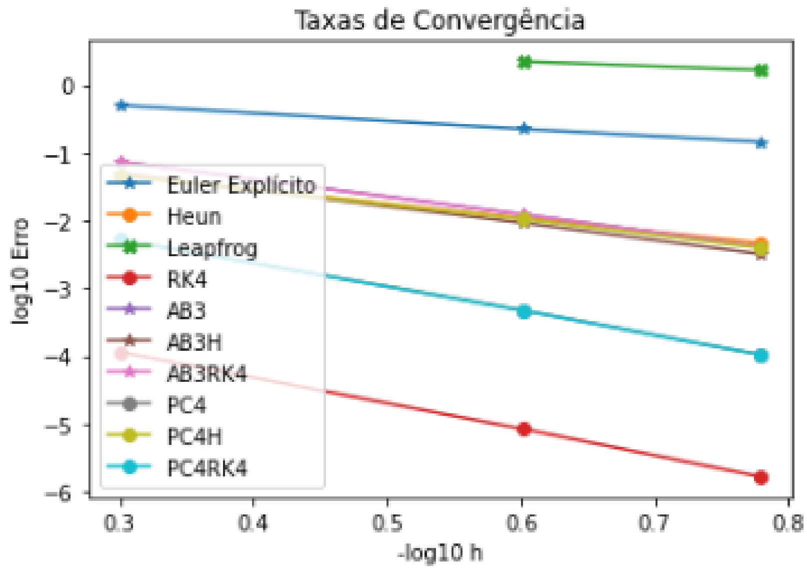

Gráfico log10 Erro x log10 Refinamento h

Tabela 1: Tabela Taxas de Convergência dos Métodos

Método	**Taxa de Convergência**
Euler Explícito	1.132383597861282
Euler Modificado (Heun)	2.0846055691075986
Leapfrog	0.7183996391825612
Runge-Kutta 4ª Ordem (Clássico)	3.84112522229465
Adams-Bashforth 3ª Ordem	2.630816285511977
Adams-Bashforth 3ª Ordem + Heun	2.480126368604959
Adams-Bashforth 3ª Ordem + Runge-Kutta 4ª Ordem	2.6301963662418713
Predito-Corretor 4ª Ordem	3.5561737974316947
Predito-Corretor 4ª Ordem + Heun	2.2330547356789014
Predito-Corretor 4ª Ordem + Runge-Kutta 4ª Ordem	3.553239142765866

Analisando o Gráfico acima nota-se que todos os métodos estão convergindo, e claramente que os métodos com melhor taxa de convergência tratam-se daqueles de mais alta ordem. Sendo eles Runge-Kutta de 4ª Ordem, e Preditor-Corretor de 4ª Ordem, algo esperado considerando a natureza dos mesmos.
A partir da Tabela Taxas de Convergência dos Métodos, é possível visualizar a ordem de convergência dos métodos, nota-se que estão de acordo com o esperado:

- Os métodos de primeira ordem Euler Explícito e Leapfrog com taxa aproximada 1;
- O de segunda ordem sendo ele Heun com taxa aproximada 2;

- Os métodos de terceira ordem sendo somente Adams-Bashforth com taxa aproximada de 3;
- E os métodos de quarta ordem sendo Runge-Kutta Clássico e Preditor-Corretor com taxa aproximada 4.

A influência da escolha inicial para os métodos de Adams e Preditor-Corretor é evidente através das taxas de Convergência. Embora ter a solução exata permita o método convergir como o esperado, nem sempre é possível tê-la. Por isso testou-se outras opções de escolha inicial, sendo elas através do método de Heun e Runge-Kutta Clássico. Nos gráficos apresentados anteriormente, ambos métodos Adams e Preditor-Corretor convergiam independente da escolha, mas agora é possível analisar quão bem convergiam.

Primeiramente com o método de Heun é notável a queda na taxa de convergência em ambos. Por ser um método de 2ª ordem, influenciou nas ordens maiores, sendo maior a influência no Preditor-Corretor por ser de 4ª Ordem. Em seguida com o método de Runge-Kutta a taxa de convergência de mantém, como o mesmo também é um método de 4ª Ordem. Logo, a combinação com métodos de ordens menores podem influenciar na taxa de convergência de métodos de ordens maiores, diminuindo-a. E combinar métodos de ordem igual ou maior mantém a taxa de convergência, sendo boas opções para aproximações iniciais.

Exercício 3

Seja o seguinte problema de valor inicial (Heath, Michael T. Scientific Computing - An Introductory Survey. Revised edition. SIAM): $y' = 100y + 100t + 101$), com $y_0 = 1.1$ e solução Exata $y(t) = 1 + t + ce^{-100t}$, onde **c** é uma constante, empregando os métodos:

- Euler Explícito
- Euler Implícito
- Método do Trápezio

Para tal, considerar:

- Tempo Final: $T = 1$
- Número de Pontos: $M = 10$, $M = 50$ e $M = 100$

Apresentar o gráfico dos resultados e comentar o desempenho dos diferentes métodos empregados comparando com a solução exata. Comentar sobre quais métodos são mais adequados para esse problema.

O Problema:

Seja

$$y' = -100y + 100t + 101, \qquad y_0 = 1.1$$

Solução Exata

$$y(t) = 1 + t + ce^{-100t}$$

Métodos:

Função $f = y'$	$\begin{cases} f_j = -100y_j + 100t + 101 \end{cases}$
Euler Explícito	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j - hf_j \\ y_{j+1} = y_j - h(-100y_j + 100t + 101) \end{cases}$
Euler Implícito	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf_{j+1} \\ y_{j+1} = y_j + h(-100y_{j+1} + 100t + 101) \\ y_{j+1} + 100hy_{j+1} = y_j + 100ht + 101h \\ (1 + 100h)y_{j+1} = y_j + 100ht + 101h \\ y_{j+1} = \dfrac{y_j + 100ht + 101h}{1 + 100h} \end{cases}$
Trapézios	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(f_{j+1} + f_j) \\ y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(-100y_{j+1} + 100t + 101 + f_j) \\ y_{j+1} + \dfrac{h}{2}100y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(100t + 101 + f_j) \\ (1 + 50h)y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(100t + 101 + f_j) \\ y_{j+1} = \dfrac{y_j + \dfrac{h}{2}(100t + 101 + f_j)}{(1 + 50h)} \end{cases}$

Resultados:

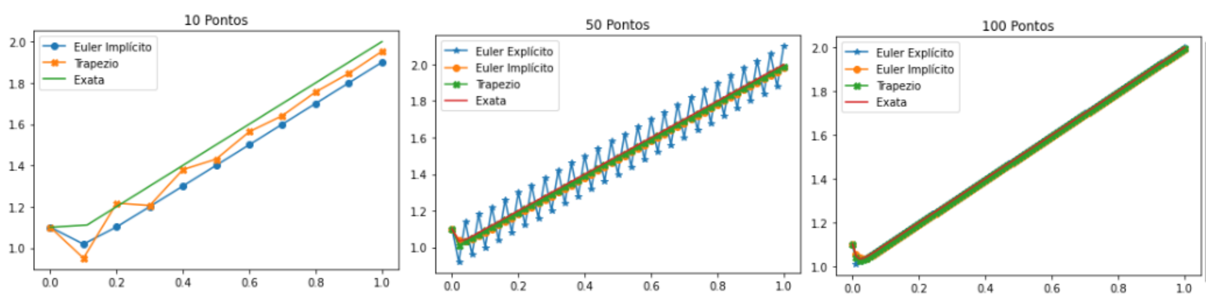

Gráfico Exec3

A partir do gráfico acima podemos notar que o método do trapézio em 10 pontos oscila em torno da função exata, e a medida que o número de pontos aumenta converge à solução desejada. Já o método de Euler explicíto apresenta resultados que começam a convergir somente a partir de 50 pontos para os valores testados. Não tendo resultaveis desejaveis com 10 pontos por ser muito instável, e alcançando uma estabilidade somente aos 100 pontos. Por fim o método de Euler Implícito desde 10 pontos tende a convergir para o resultado com a forma correta, tornando-se bem preciso.

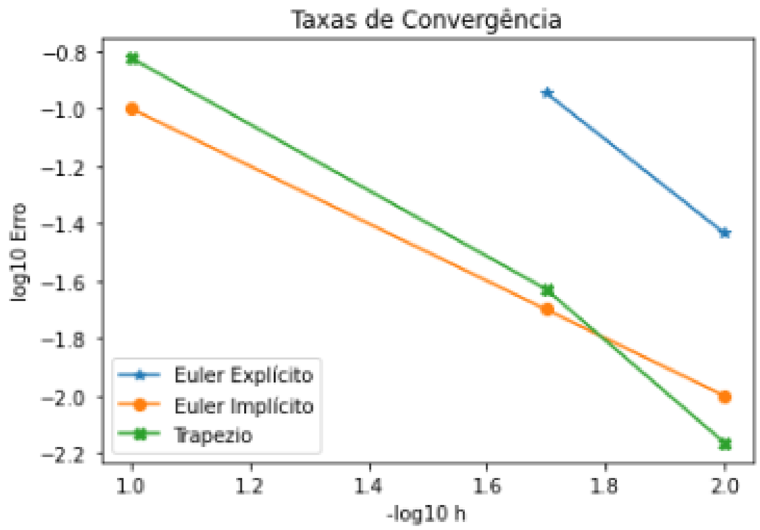

Gráfico log10 Erro x log10 Refinamento h

Expandidndo a análise com as taxas de convergência, apresenta-se que Euler explícito e Trapézio tem as maiores. Porém, esse fato deriva de suas instabilidades anteriores, pois como é possível notar na Tabela abaixo, Euler Implícito converge com taxa quase exatamente 1, por ser incondicionalmente estável. Além disso, Euler explícito e Trapézio são condicionalmente estáveis para esse caso, sendo necessário um número mínimo de pontos para executá-los com sucesos. Logo o método mais ideal para esse tipo de problema seria Euler Implícito.

Tabela 2: Tabela Taxas de Convergência dos Métodos

Método	**Taxa de Convergência**
Euler Explícito	1.625813452970565
Euler Implícito	0.9999999999665004
Método do Trapézio	1.3393461055000797

Exercício 4

Considere o problema do oscilador harmônico simples:

$y' = v$, $v' = \dfrac{F(y)}{m}$ com $y_0 = 0.4$m, $v_0 = 0$

No qual: $F(y) = -ky$, k = 8 N/m, m = 0.160kg
E solução exata $y(t) = y_0 cos(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
Aplicar os métodos

- Euler sympletic
- Velocity-Verlet
- Runge-Kutta 4ª Ordem

Para tal, considerar:

- Tempo Final: $T = 10$ (Apenas Euler Sympletic), $T = 400$
- Intervalos de discretização $h = 0.1$

Apresentar o gráfico dos resultados e comentar o desempenho dos diferentes métodos empregados em termos de conservação de energia do sistema.

O Problema:

Seja

$$y' = v, \qquad y_0 = 0.4$$
$$v' = \frac{F(y)}{m}, \qquad v_0 = 0, \quad m = 0.160$$
$$F(y) = -ky, \qquad k = 8$$

Solução Exata

$$y(t) = y_0 cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v(t) = -\omega y_0 sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Métodos:

Função $f = y'$	$\begin{cases} f_j = v_j \end{cases}$
Função $g = v'$	$\begin{cases} g_j = \dfrac{F(y_j)}{m} \end{cases}$
Função $F(y_j)$	$\begin{cases} F(y_j) = -ky_j \end{cases}$
Euler Sympletic*	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hv_j \\ v_{j+1} = v_j + \dfrac{h}{m}F(y_{j+1}) \\ v_{j+1} = v_j - \dfrac{h}{m}Ky_{j+1} \\ v_{j+1} = v_j - \dfrac{h}{m}K(y_j + hv_j) \\ v_{j+1} = v_j - \omega^2 h(y_j + hv_j) \end{cases}$
Velocity-Verlet	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(v_j + v_{j+1}) \\ y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(v_j + v_j + \dfrac{h}{m}F(y_{j+1})) \\ y_{j+1} = y_j + hv_j + \dfrac{h^2}{2m}F(y_j) \\ y_{j+1} = y_j + hv_j - \dfrac{h^2}{2m}Ky_j \\ y_{j+1} = y_j + hv_j - \omega^2\dfrac{h^2}{2}y_j \\ v_{j+1} = v_j + \dfrac{h}{2m}(F(y_{j+1}) + F(y_j)) \\ v_{j+1} = v_j - \dfrac{h}{2m}(K(y_{j+1}) + K(y_j)) \\ v_{j+1} = v_j - \omega^2\dfrac{h}{2}((y_{j+1}) + (y_j)) \\ v_{j+1} = v_j - \omega^2\dfrac{h}{2}((y_j + hv_j - \omega^2\dfrac{h^2}{2}y_j) + (y_j)) \\ v_{j+1} = v_j - \omega^2 hy_j - \omega^2\dfrac{h^2}{2}v_j + \omega^4\dfrac{h^3}{4}y_j \\ v_{j+1} = v_j - \omega^2 hy_j(1 - \omega^2\dfrac{h^2}{4}) - \omega^2\dfrac{h^2}{2}v_j \end{cases}$

Runge-Kutta 4ª Ordem	$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f_1 = f_j \\ K_2 = f_2 = f(y_j + \frac{h}{2}g_1) \\ K_3 = f_3 = f(y_j + \frac{h}{2}g_2) \\ K_4 = f_4 = f(y_j + hg_3) \\ v_{j+1} = v_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = g_1 = g_j \\ K_2 = g_2 = g(v_j + \frac{h}{2}f_1) \\ K_3 = g_3 = g(v_j + \frac{h}{2}f_2) \\ K_4 = g_4 = g(v_j + hf_3) \end{cases}$

*O método de Euler Sympletic pode ser realmente verificado como sympletic da seguinte maneira:

Se $\begin{cases} y_{j+1} = f(y_j, v_j) \\ v_{j+1} = g(y_j, v_j) \end{cases}$ Vem $\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix} = 1, \forall y, v$ Temos $f_y g_v - f_v g_y = 1 \forall y, v$

Verificando: $\begin{cases} f(y_j, v_j) = y_j + hv_j \\ g(y_j, v_j) = v_j - K\frac{h}{m}(y_j + hv_j) \\ \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \omega^2 = \frac{K}{m} \end{cases}$ $\begin{cases} f(y_j, v_j) = y_j + hv_j \\ g(y_j, v_j) = v_j - \omega^2 h y_j - \omega^2 h^2 v_j \end{cases}$

Na forma matricial: $\begin{bmatrix} y_{j+1} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\omega^2 h & 1 - \omega^2 h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ v_j \end{bmatrix}$

Então: $\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & h \\ -\omega^2 h & 1 - \omega^2 h^2 \end{vmatrix} = 1, \forall y, v$

$$\begin{vmatrix} 1 & h \\ -\omega^2 h & 1 - \omega^2 h^2 \end{vmatrix} = 1(1 - \omega^2 h^2) - h(-\omega^2 h)$$

$$1 - \omega^2 h^2 + \omega^2 h^2 = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix} = 1, \forall y, v \quad c.q.d.$$

Resultados:

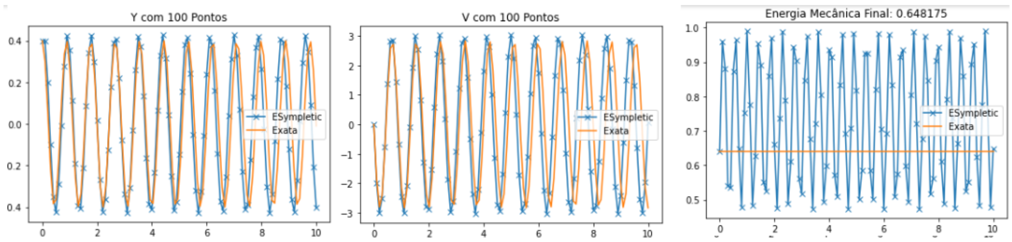

Gráfico Sympletic T = 10 Exec4

É possível notar que a solução converge tanto para a posição Y, quanto para a velocidade V desejadas, nota-se também que a Energia Mecânica do sistema se conserva.

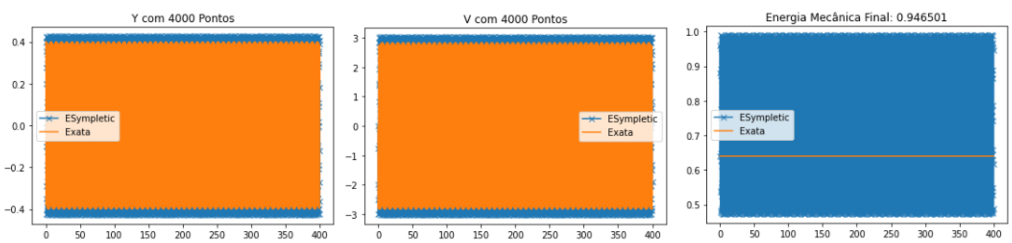

Gráfico Sympletic T = 400 Exec4

Assim como para T = 10, a solução conserva a Energia Mecânica.

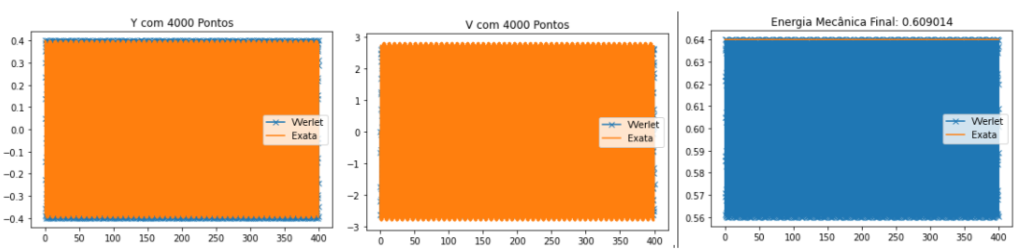

Gráfico Velocity Verlet T = 400 Exec4

Assim como o método Sympletic, a solução conserva a Energia Mecânica.

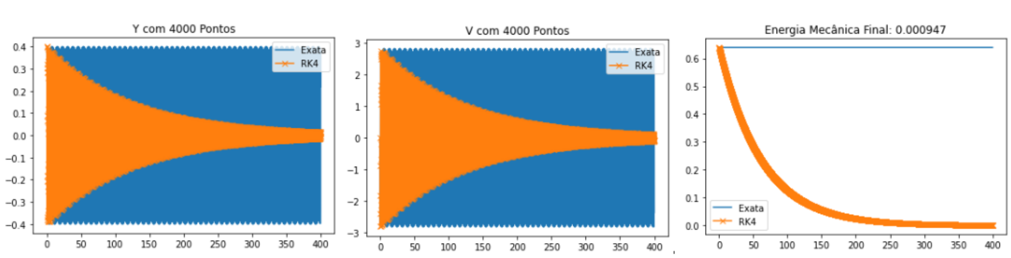

Gráfico Runge-Kutta $4^{\underline{o}}$ Ordem T = 400 Exec4

O método não é adequado à resolução, pois não conserva a Energia Mecânica, a mesma diminui com o passar do tempo e tende a zero.