Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Introdução aos Métodos Discretos

Relatório Lista 2 - MAC026 - Introdução aos Métodos Discretos

Alunos:

Alexandre Vitor Silva Braga - 201965501B
Caio Cedrola Rocha - 201965503B
Marcelo Ian Rezende Menezes - 201965517B

Professores: Elson Magalhães Toledo e Thaianne Oliveira

Relatório de MAC026 - Introdução aos Métodos Discretos, parte integrante da avaliação da mesma.

Juiz de Fora

Julho de 2022

Sumário

Enunciado

Seja o seguinte problema de valor de contorno em um domínio unidimensional:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$T(x, t = 0) = 200°C$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

$$T(x = L, t) = 0°C$$

A solução analítica deste problema é dada por:

$$T(x,t) = \frac{200 \cdot 4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cdot \cos(\lambda_n x)$$

Onde:

- $\lambda_n = \frac{(2n-1)\cdot\pi}{2L}$ são os autovalores da solução exata.
- $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ é o coeficiente de difusividade térmica.

Consideramos as seguintes propriedades físicas:

- $\kappa = 10 \frac{W}{m \cdot K}$ é o coeficiente de condutividade térmica.
- $L = 2cm$ é o comprimento do domínio.
- $\rho c = 10 \cdot 10^6 \frac{J}{m^3 \cdot K}$ é a capacidade calorífica por unidade de volume do meio.

Resolver este problema utilizando uma discretização espacial centrada de segunda ordem com uma malha de 5 elementos do mesmo comprimento. Para a solução no tempo utilize os métodos de Euler explícito e Euler implícito e o método de Crank-Nicolson. Compare graficamente as soluções numéricas com a solução exata para os tempos $t = 80s$, $t = 100s$ e $t = 120s$.

Use como passo de tempo para o esquema implícito e o Crank-Nicolson o valor de $\Delta t = 1s$. Para o esquema explícito, faça $\Delta t = 0.1s$ e compare, para este esquema, o resultado quando se adota $\Delta t = 1s$.

Resolução

Primeiramente, o problema é dado por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Que pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Pelos dados do enunciado:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Formulação Numérica Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável, isso significa que não existem restrições a escolha do passo espacial Δx e do passo temporal Δt
O esquema de Crank-Nicolson para as derivadas parciais do problema é dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

Realizando manipulações matemáticas:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta x^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n + T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

$$2(T_i^{n+1} - T_i^n) = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n + T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

Fazendo $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$

$$2T_i^{n+1} - 2T_i^n = r(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n + T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

$$2T_i^{n+1} - 2T_i^n = rT_{i+1}^n - 2rT_i^n + rT_{i-1}^n + rT_{i+1}^{n+1} - 2rT_i^{n+1} + rT_{i-1}^{n+1}$$

Separando de acordo com os passos de tempo discretizado $n+1$ e n:

$$2T_i^{n+1} - r_{i+1}^{n+1} + 2rT_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = 2T_i^n + rT_{i+1}^n - 2rT_i^n + rT_{i-1}^n$$

Rearranjando:

$$-r_{i+1}^{n+1} + (2+2r)T_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = rT_{i+1}^n + (2-2r)T_i^n + rT_{i-1}^n$$

Em seguida precisamos adicionar as condições de contorno:
Pela Condição de Neumman:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0,t) = 0$$

$$\frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{h} = 0$$

$$T_i^n - T_{i-1}^n = 0$$

$$T_i^n = T_{i-1}^n$$

Para $i = 1$

$$T_1^n = T_0^n :$$

A partir dai, ainda considerando $i = 1$:

$$-r_2^{n+1} + (2+2r)T_1^{n+1} - rT_0^{n+1} = rT_2^n + (2-2r)T_1^n + rT_0^n$$

Como $T_1^n = T_0^n$:

$$-r_2^{n+1} + (2+2r)T_1^{n+1} - rT_1^{n+1} = rT_2^n + (2-2r)T_1^n + rT_1^n$$

$$-r_2^{n+1} + (2+r)T_1^{n+1} = rT_2^n + (2-r)T_1^n$$

Pela Condição de Dirichlet:

$$T(x=L,t) = 0°C$$

$$T_L^n = 0$$

Então Representando o sistema linear $AT_i^{n+1} = BT_i^n$ matricialmente, com A e B sendo matrizes tridiagonais vem:

$$A = \begin{bmatrix} 2+r & -r & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r & -r & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2+2r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2-r & r & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ r & 2-2r & r & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & r & 2-2r & r & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & r & 2-2r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 2-2r & r & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 2-2r \end{bmatrix}$$

Que poderão ser utilizadas no método de integração.

Formulação Numérica Euler Implícito

O método de Euler Implícito é incondicionalmente estável, isso significa que não existem restrições a escolha do passo espacial Δx e do passo temporal Δt

O esquema de Euler Implícito para as derivadas parciais do problema é dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha (\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2})$$

Realizando manipulações matemáticas:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \alpha \Delta t (\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2})$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

Fazendo $r = \dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = r(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = rT_{i+1}^{n+1} - 2rT_i^{n+1} + rT_{i-1}^{n+1}$$

Separando de acordo com os passos de tempo discretizado $n+1$ e n:

$$T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} + 2rT_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = T_i^n$$

Rearranjando:

$$-r_{i+1}^{n+1} + (1+2r)T_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = T_i^n$$

Em seguida precisamos adicionar as condições de contorno:

Pela Condição de Neumman:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

$$\frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{h} = 0$$

$$T_i^n - T_{i-1}^n = 0$$

$$T_i^n = T_{i-1}^n$$

Para $i = 1$

$$T_1^n = T_0^n :$$

A partir dai, ainda considerando $i = 1$:

$$-r_2^{n+1} + (1 + 2r)T_1^{n+1} - rT_0^{n+1} = T_1^n$$

Como $T_1^n = T_0^n$:

$$-r_2^{n+1} + (1 + 2r)T_1^{n+1} - rT_1^{n+1} = T_1^n$$

$$-r_2^{n+1} + (1 + r)T_1^{n+1} =)T_1^n$$

Pela Condição de Dirichlet:

$$T(x = L, t) = 0°C$$

$$T_L^n = 0$$

Então Representando o sistema linear $AT_i^{n+1} = T_i^n$ matricialmente, com A sendo matriz tridiagonal vem:

$$A = \begin{bmatrix} 1+r & -r & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

Que poderão ser utilizadas no método de integração.

Formulação Numérica Euler Explícito

O método de Euler Explícito é condicionalmente estável, isso significa que existem restrições a escolha do passo espacial Δx e do passo temporal Δt que deverão ser tratadas

mais a frente.
O esquema de Euler Explícito para as derivadas parciais do problema é dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2})$$

Realizando manipulações matemáticas:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \alpha \Delta t(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2})$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

Fazendo $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = r(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = rT_{i+1}^n - 2rT_i^n + rT_{i-1}^n$$

Separando de acordo com os passos de tempo discretizado $n + 1$ e n:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + rT_{i+1}^n - 2rT_i^n + rT_{i-1}^n$$

Rearranjando:

$$T_i^{n+1} = rT_{i+1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i-1}^n$$

Em seguida precisamos adicionar as condições de contorno:
Pela Condição de Neumman:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

$$\frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{h} = 0$$

$$T_i^n - T_{i-1}^n = 0$$

$$T_i^n = T_{i-1}^n$$

Para $i = 1$

$$T_1^n = T_0^n :$$

A partir dai, ainda considerando $i = 1$:

$$T_1^{n+1} = rT_2^n + (1-2r)T_1^n + rT_0^n$$

Como $T_1^n = T_0^n$:

$$T_1^{n+1} = rT_2^n + (1-2r)T_1^n + rT_1^n$$

$$T_1^{n+1} = rT_2^n + (1-r)T_1^n$$

Pela Condição de Dirichlet:

$$T(x = L, t) = 0°C$$

$$T_L^n = 0$$

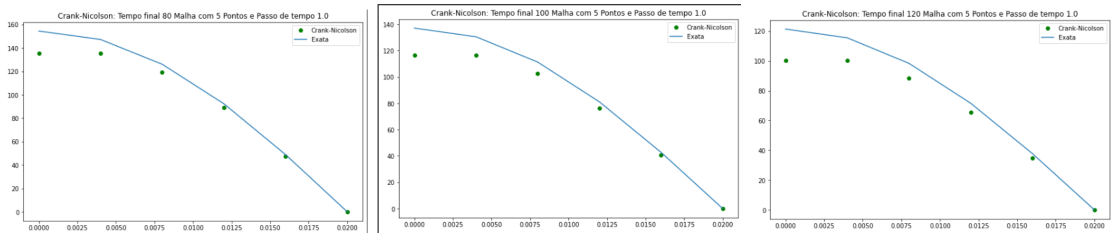
Então Representando o sistema linear $T_i^{n+1} = BT_i^n$ matricialmente, com B sendo matriz tridiagonal vem:

$$B = \begin{bmatrix} 1-r & r & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & r & 1-2r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1-2r & r & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix}$$

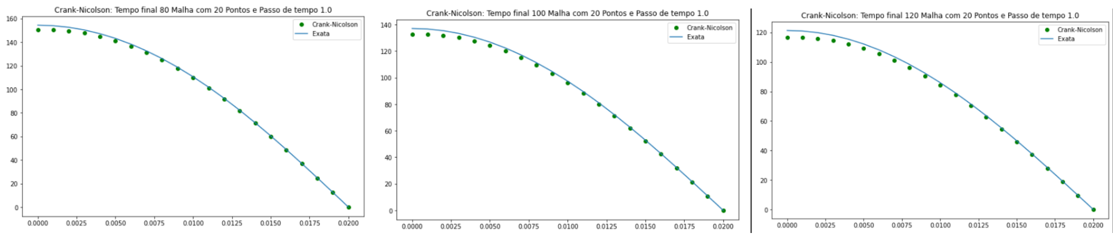
Que poderão ser utilizadas no método de integração.

Resultados

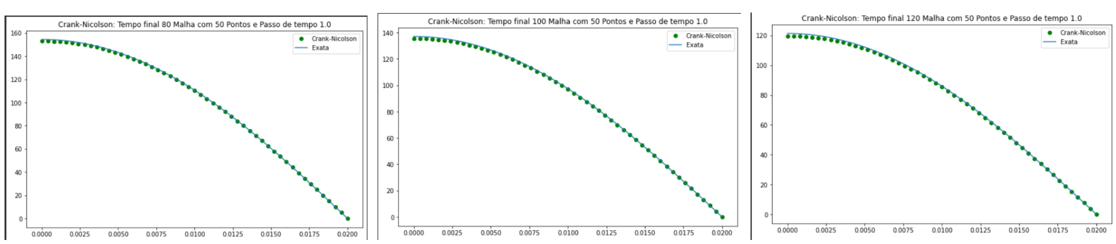
Crank-Nicolson



Resultados Crank-Nicolson com malhas de 5 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

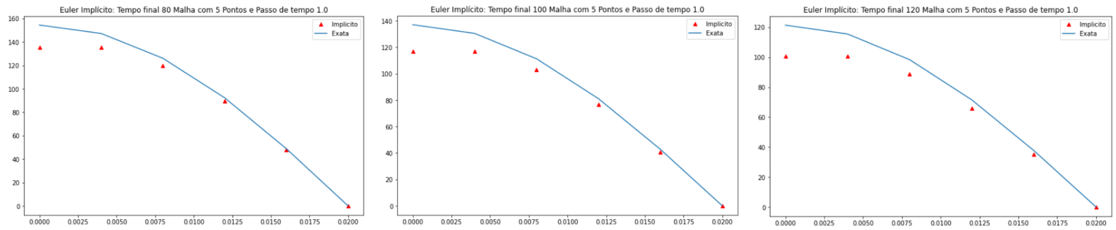


Resultados Crank-Nicolson com malhas de 20 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

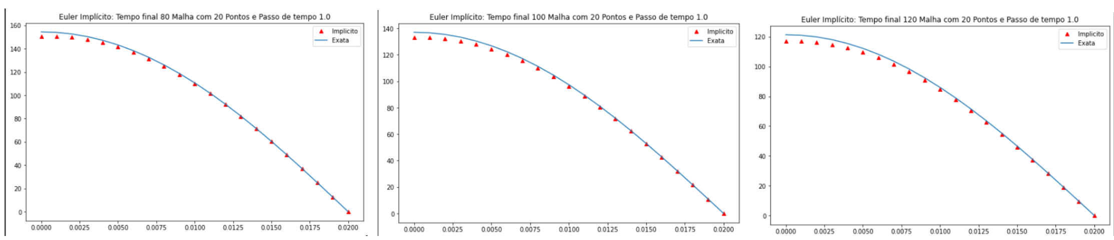


Resultados Crank-Nicolson com malhas de 50 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

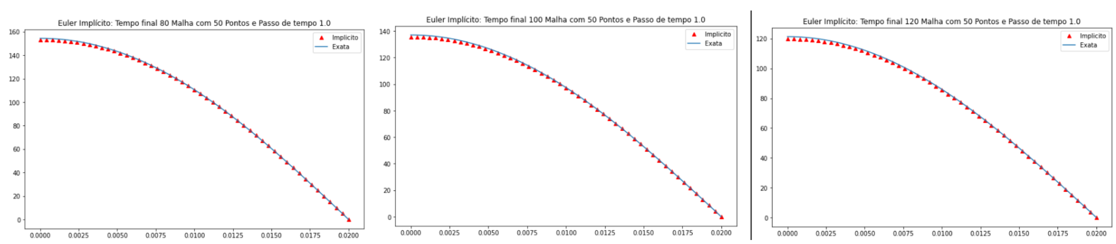
Euler Implícito



Resultados Euler Implícito com malhas de 5 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

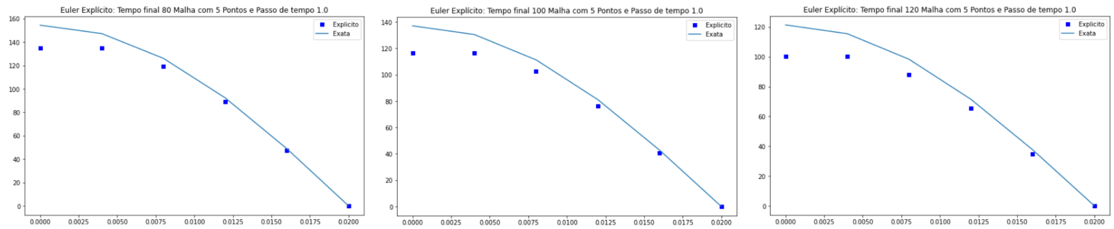


Resultados Euler Implícito com malhas de 20 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

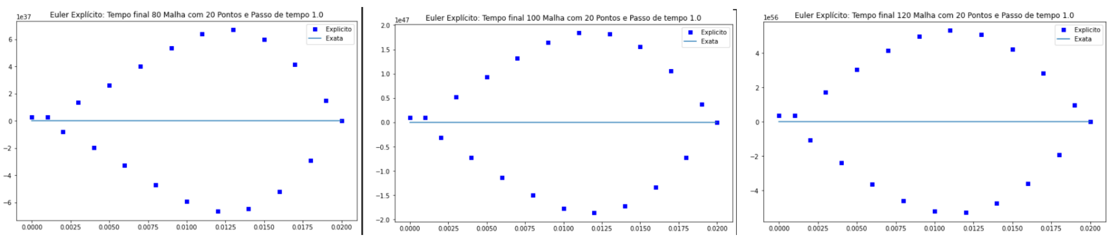


Resultados Euler Implícito com malhas de 50 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

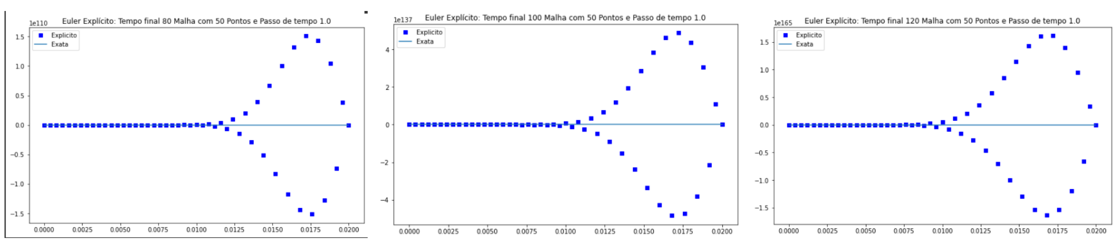
Euler Explícito Com $\Delta t = 1$



Resultados Euler Explícito com malhas de 5 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

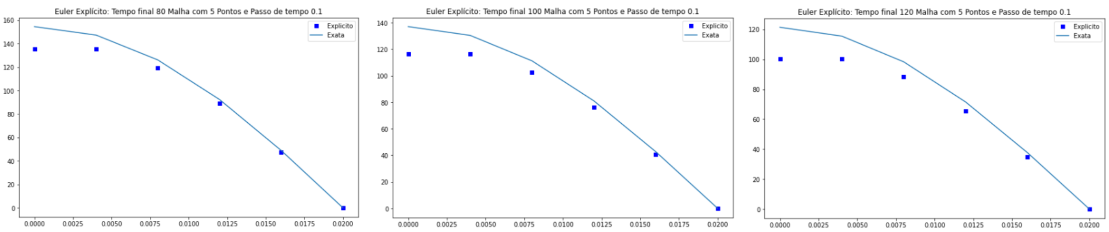


Resultados Euler Explícito com malhas de 20 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

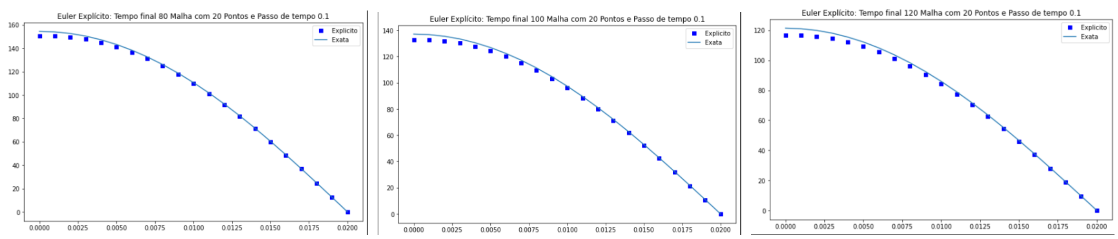


Resultados Euler Explícito com malhas de 50 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ para os tempos t = 80, 100 e 120

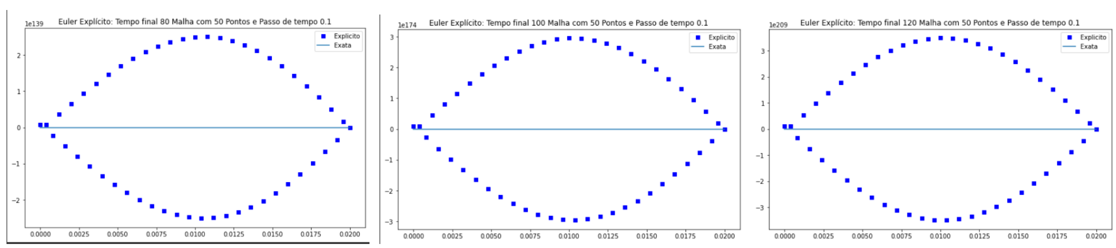
Euler Explícito Com $\Delta t = 0.1$



Resultados Euler Explícito com malhas de 5 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 0.1$ para os tempos t = 80, 100 e 120



Resultados Euler Explícito com malhas de 20 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 0.1$ para os tempos t = 80, 100 e 120



Resultados Euler Explícito com malhas de 50 pontos e intervalo de tempo $\Delta t = 0.1$ para os tempos t = 80, 100 e 120