Modelagens de Problemas de Pesquisa Operacional Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (CVRP)

Alexandre Vitor Silva Braga[1], **Guilherme Martins Couto**[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) – Minas Gerais – MG – Brazil

{alexandre.braga,guilherme.couto}@estudante.ufjf.br

Abstract. *This paper describes the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) and proposes a mathematical model for it. After that it describes the instances utilized for experimentantions with the software implementation. Present some results obtained by changing some restrictions and them show conclusions about the theme*

Resumo. *Este artigo descreve o Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (CVRP) e propõe a formulação de um modelo matemático para o mesmo. Após isso, descreve as instâncias utilizadas para experimentação da implementação em software. Apresenta alguns resultados obtidos mudando algumas restrições do problema, e por fim apresenta conclusões a respeito do tema.*

1. Introdução

O presente Relatório Técnico tem como objetivo central descrever a modelagem e resolução para problemas de Pesquisa Operacional escolhidos. Considera-se neste trabalho as características do problema modelado, em seguida utilizando-se de artificios digitais, resolveu-se os mesmos a fim de encontrar uma solução ótima.

Este trabalho visa aplicar os conhecimentos adquiridos durante a disciplina para resolver problemas de pesquisa operacional. Neste contexto em específico, objetiva-se analisar dados, modelar problemas e por fim encontrar soluções viáveis ou ótimas para o mesmo. Neste artigo, optou-se por modelar matematicamente o Problema do Roteamento de Veículos Capacitados (CVRP) e em seguida, implementar o modelo em software utilizando a biblioteca Gurobi Optimizer.

O restante do trabalho está assim estruturado: na Seção 2 o problema é descrito formalmente através de um modelo em grafos; a Seção 3 descreve a modelagem matemática proposta para o problema, enquanto a Seção 4 apresenta os experimentos computacionais, onde se descreve, o conjunto de instâncias, bem como se apresenta a análise comparativa dos resultados das restrições utilizadas e a literatura; por fim, a Seção 5 traz as conclusões do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

2. Definição do Problema

O problema de roteamento de veículos - VRP (*Vehicle Routing Problem*) é um problema de otimização combinatória amplamente estudado. Tendo em vista o fato de que o setor de transporte está presente em toda a cadeia produtiva, diferentes variações do VRP são propostas e estudadas constantemente. Em [Dantzig and Ramser 1959], os autores consideraram restrições para a qual os veículos possuem capacidade limitada para transportar itens de vários locais. Os itens possuem uma quantidade, como peso, volume, ou demanda, e cada veículo tem uma capacidade máxima capaz de transportar.

O Problema de Roteamento de Veículos Capacitados - CVRP (*Capacitated Vehicle Routing Problem*) tem como objetivo transportar os itens com o menor custo possível, sem ultrapassar a capacidade dos veículos. Trata-se de um problema de otimização combinatória NP-difícil, o que significa que não existe uma solução ótima garantida para encontrar a solução ótima em um tempo razoável. E como pode ser aplicado na resolução de, por exemplo, problemas de logística, como no caso de uma transportadora necessitar levar produtos para diferentes localidades utilizando diversos veículos. Diversos estudos em otimização combinatória e pesquisa operacional são feitos em cima do mesmo.

Descrição do Grafo: Seja $G = (V, E)$ um grafo completo não-direcionado, tal que $V = \{0, 1, ..., n\}$ são os nós desse grafo, E o conjunto de arestas conectando cada nó de maneira $e_{ij} = (i, j)$, e sendo o nó 0 o nó do deposito, e os nós $V_+ = \{1, ..., n\}$ os nós dos clientes. Existe um custo não negativo c_{ij} definido para cada aresta $(i, j) \in E$ e uma demanda d_i para cada cliente $i \in V_+ = \{1, ..., n\}$. A capacidade máxima do veículo é denotada por C_{max} e uma rota é definida como um caminho que começa e termina no nó depósito.

Caracterização da Solução: Uma solução S consiste em um conjunto de rotas que respeite as seguintes restrições: 1º) Cada cliente deve ser visitado somente uma única vez e por uma única rota; 2º) A soma das demandas dos clientes em uma rota não pode exceder a capacidade do veículo.

Objetivo: O objetivo do problema de Roteamento de Veículos Capacitados é encontrar a solução cujo conjunto de rotas S transporta os itens com o menor custo possível, sem ultrapassar a capacidade dos veículos.

3. Modelagem do Problema

3.1. Variáveis

Levando em conta a descrição do grafo dada anteriormente definimos como variáveis:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$
$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$
$$\forall (i, j) \in E$$

Uma variável binária, que representa a decisão de um veículo k viajar de um nó i para um nó j

$$y_{ik} \in \{0, 1\}$$
$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$
$$\forall i \in V$$

Uma variável binária, que representa se o veículo k está em uso no nó i

$$u_i \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall i \in V$$

Uma variável contínua positiva, auxiliar para a eliminação de subciclos

3.2. Função Objetivo

De forma a encontrar o menor número de rotas possível, devemos assumir que existe um custo c_{ij} representando o custo de ir de um cliente i a um cliente j. E buscar otimizar a seguinte função objetivo para cada rota:

$$min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Como teremos um número p de veículos, e cada veículo deve percorer uma única rota pela caracterização da solução, termos um número p de rotas, e podemos formular o objetivo como:

$$min \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ijk}$$

3.3. Restrições

A seguir, definiremos cada restrição utilizada para o problema:

- **1º Restrição - Fluxo de Saída e Entrada**: A restrição garante que exista somente uma rota saindo de um nó i para qualquer outro nó j e por apenas um caminhão k. E garante somente 1 rota entrando em um nó j de qualquer outro nó i e por apenas um caminhão k. Essa restrição pode ser formulada como:

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} x_{ijk} = 1$$

$$\forall j \in \{1, ..., n\}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{n} x_{ijk} = 1$$

$$\forall i \in \{1, ..., n\}$$

- **2º Restrição - Fluxo de Veículos no Depósito**: A restrição garante que para todos os veículos p, cada um deles deve sair do depósito no nó 0 e ir para um nó j. E garante que cada um deles deva retornar de um nó i para o depósito 0. Essa restrição pode ser formulada como:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0jk} = 1$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0k} = 1$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$

- **3º Restrição - Capacidade Máxima de Cada Veículo**: A restrição garante que a demanda total da rota de um veículo não ultrapasse a capacidade máxima estipulada. Essa restrição pode ser formulada como:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_j x_{ijk} \leq C_{max}$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$

- **4º Restrição - Formulação MTZ**: A restrição visa garantir que não restem subciclos na solução final. Essa restrição pode ser formulada como:

$$u_i - u_j + n x_{ijk} < n - 1$$

$$\forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$\forall j \in \{1, ..., n\}$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$

- **4º Restrição Alternativa - Formulação MTZ Modificada**: A restrição visa garantir que não restem subciclos na solução final. Essa restrição pode ser formulada como:

$$u_i - u_j \geq d_j - C_{max}(1 - x_{ijk})$$

$$\forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$\forall j \in \{1, ..., n\}$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\}$$

$$d_j \leq u_j \leq C_{max}$$

$$\forall j \in \{1, ..., n\}$$

Pelas modificações feitas, se um veículo k vai de um nó i para um nó j, temos $x_{ijk} = 1$ e a restrição pode ser reescrita como: $u_j \geq u_i + d_j$. Dessa maneira, garantimos que o valor de u_j e maior que u_i, e além disso, pelo menos q_j maior que o valor de u_i

Já se um veículo k não vai de um nó i para um nó j, temos $x_{ijk} = 0$ e a restrição pode ser reescrita como: $u_j - d_j \geq u_i - C_{max}$. Desse modo, somado à restrição de que $d_j \leq u_j \leq C_{max}, \forall j = \{1, ..., n\}$. O menor valor possível para u_j sera d_j, e o maior será C_{max}. Consequentemente, $u_j - d_j$ Será pelo menos 0 e $u_i - C_{max}$ será no máximo 0, o que garantirá a desigualdade

Para conseguir encontrar uma solução viável, relaxou-se a restrição $d_j \leq u_j \leq C_{max}$, o que permitiu se aproximar da função ótima.

- **5º Restrição - Restrição do y_{ik}:** A restrição visa garantir que não seja permitido mais do que um veículo k por nó i, além de forçar a indicação de que um veículo k foi usado nos nós i e j caso x_{ijk} faça parte da solução.

$$\sum_{k=1}^{p} y_{ik} \leq 1$$

$$\forall i = \{1, ..., n\}$$

$$x_{ijk} \leq M y_{ik}$$

$$x_{ijk} \leq M y_{jk}$$

$$\forall i = \{1, ..., n\}$$

$$\forall j = \{1, ..., n\}$$

$$\forall k = \{1, ..., p\}$$

Por todas essas restrições acima temos garantido que:

- A 1º restrição garante que há 1 e somente 1 veículo por nó
- A 1º restrição também garante que há 1 e somente 1 rota por nó
- A 2º restrição garante que todos os p veículos saem e retornam ao depósito por p rotas no total
- A 3º restrição garante que nenhum veículo ao percorrer uma rota irá pegar um carregamento além de sua carga máxima C_{max}
- A 4º restrição garante que existam poucos ou nenhum subciclo na solução
- A 5º restrição garante que nenhum veículo k é capaz de estar em uso em mais de um nó i por vez, e garante que $\forall y_{ik}$ o veículo correspondente é ativado por sua rota x_{ijk}

4. Experimentação

As instâncias utilizadas foram retiradas de [Christofides and Eilon 1969], disponíveis atualmente na CVRPLibrary, como parte do *Set E*. Elas sofreram o seguinte tratamento: foram convertidas de seu formato original para um formato .csv padronizado, onde os dados apenas foram reorganizados para facilitar a leitura pelas bibliotecas utilizadas na implementação.

4.1. Descrição das Instâncias

A posição original de todos os clientes e depósitos são mantidas, bem como as demandas. Em relação à capacidade de carga, os valores são mantidos em relação à instância original e a métrica utilizada para medir as distâncias dos clientes é a Euclideana, realizando entregas em linha reta.

Os atributos possuídos pelo .csv após o tratamento são:

- K: Número mínimo de veículos para solucionar o problema
- Dimension: Número de nós total (clientes + depósito)
- Capacity: Capacidade máxima dos veículos

- ID: ID de cada nó. Para facilitar na modelagem do problema, adotou-se o nó depósito de $ID = 1$ como nó de $ID = 0$ e os nós clientes seguintes com valor $original - 1$
- x_coord: Posição espacial em X do nó atrelado à seu ID
- y_coord: Posição espacial em Y do nó atrelado à seu ID
- Demand: Demanda de um nó atrelado à seu ID

Um resumo dos dados podem ser vistos na tabela 1.

Dados dos clientes e depósito	
Dimension	n
Demanda	d_i
Posição em X	$coordX_i$
Posição em Y	$coordY_i$
Dados dos caminhões	
Capacidade	C_{max}
Métrica	Euclideana
Número de caminhões Mínimo	p

Tabela 1. Dados das instâncias

Todas as instâncias foram executadas com um tempo limite de 5 minutos.

4.2. Resultados e Análise

Após execuções no ambiente virtual *Google Colab*, utilizando a biblioteca Gurobi Optimizer, pode-se concluir que as restrições escolhidas foram suficientes para encontrar uma solução viável para o problema.

A seguir pode-se visualizar os grafos com suas soluções geradas para 2 instâncias, E-n22-k4 e E-n23-k3:

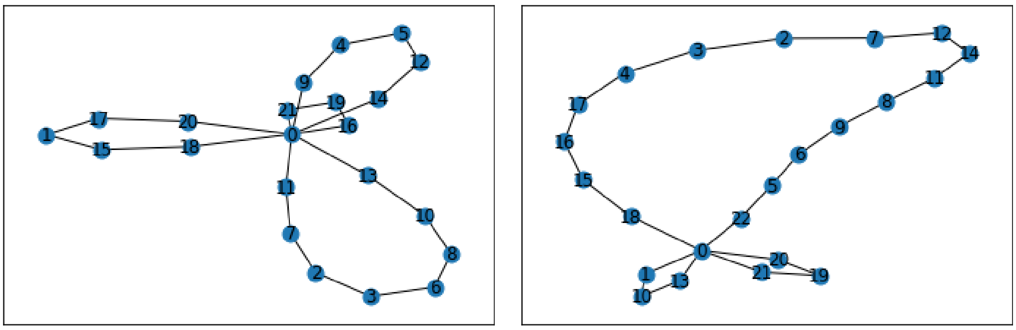

Figura 1. Grafo resultado para instâncias E-n22-k4 e E-n23-k3 respectivamente

A seguir pode-se visualizar os grafos com suas soluções geradas para a instância E-n23-k3, utilizando respectivamente como 4º Restrição a formulação MTZ convencional e a formulação MTZ modificada:

Pode-se notar que a formulação individualmente possui um melhor desempenho, pois além de eliminar subciclos, conecta as rotas de uma maneira que relaciona a conexão às demandas.

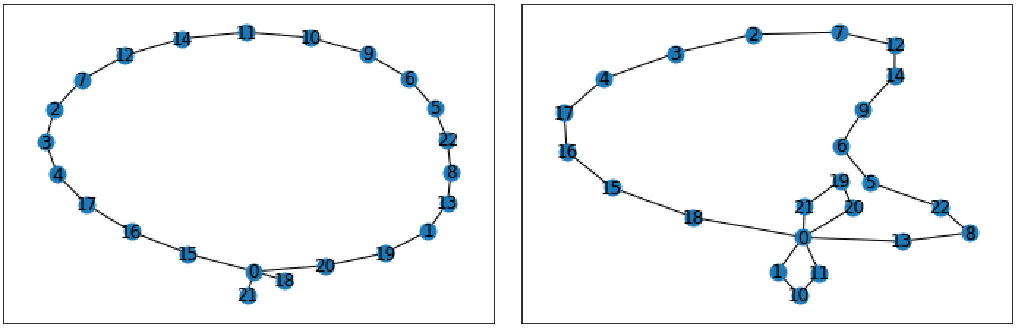

Figura 2. Grafo resultado para instância E-n23-k3, com formulação MTZ e MTZ Modificada respectivamente

A seguir pode-se visualizar os grafos com suas soluções geradas para a instância E-n23-k3, utilizando novamente como 4º Restrição a ordem mencionada anteriormente, e incluindo o uso da variável binária y_{ik} e suas restrições na formulação matemática:

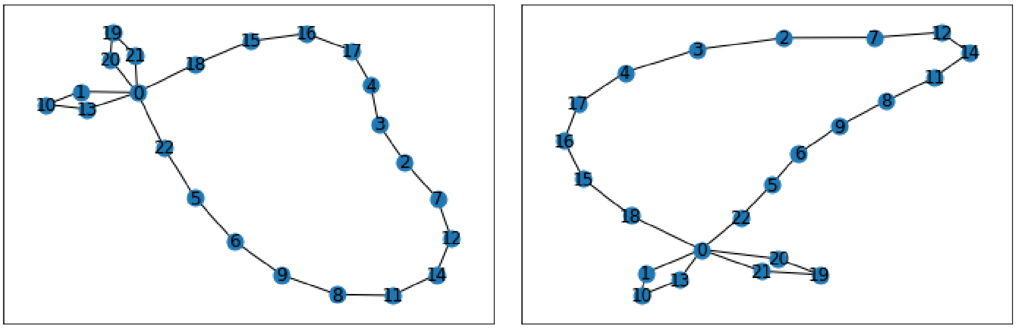

Figura 3. Grafo resultado para instância E-n23-k3, com formulação MTZ e MTZ Modificada respectivamente, após inserir a 5º Restrição

Pode-se notar que ambas formulações atingem uma solução viável esperada graças a 5º Restrição. Portanto, é possível concluir que o uso somente da formulação MTZ modificada, ou o uso da formulação MTZ convencional atrelada a variável binária y_{ik} geram soluções viáveis para o CVRP.

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

O artigo consistiu em modelar problemas matemáticos aplicáveis na realidade em pesquisa operacional, dentre eles, este grupo de pesquisa optou por modelar o Problema de Roteamento de Veículos Capacitados. Foram implementadas as variáveis, função objetivo e restrições definidas no modelo matemático através da biblioteca Gurobi Optimizer. Para cada instância a existência de uma solução viável foi confirmada, e encontrada, com limite de execução para cada uma de 5 minutos.

Uma primeira proposta de melhoria no modelo chegou a ser aplicada durante o desenvolvimento, esta foi a mudança da 4º restrição, na formulação MTZ. Como foi observado nos resultados, essa modificação na formulação trás melhoras significativas para a solução, porém ao inserir a 5º restrição, os problemas causados pela formulação MTZ convencional desaparecem.

Para trabalhos futuros, trabalhar com abordagens que envolvam janelas de tempo, veículos de diferentes capacidades, geolocalizações de cidades para os nós, são fatores interessantes a serem considerados.

Referências

Christofides, N. and Eilon, S. (1969). An algorithm for the vehicle routing dispatching problem. *Operations Research Quaterly*, 20:309–318.

Dantzig, G. B. and Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management science*, 6(1):80–91.