

# Optimisation de circuits logiques

Alexandre JANNIAUX

Circuits logiques et fonctions combinatoires

Méthode de Quine-McCluskey

Généralisation à tout circuit

# Circuits logiques et fonctions combinatoires

- ▶ Des intérêts industriels et scientifiques.
- ▶ **Circuit = Fonction logique**

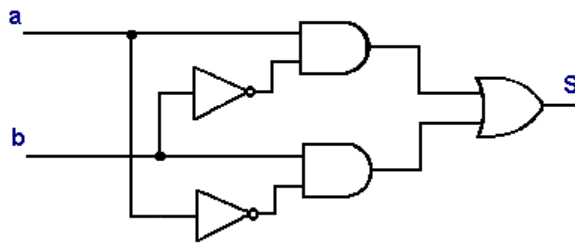


FIGURE : Exemple de circuit logique

- ▶ Fonction canonique associée au circuit :

$$f(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b$$

- ▶ **Problème de minimisation** : trouver la forme de la fonction avec le moins de terme possible.
- ▶ Les tests sont effectués sur un circuit de reconnaissance de nombre premier

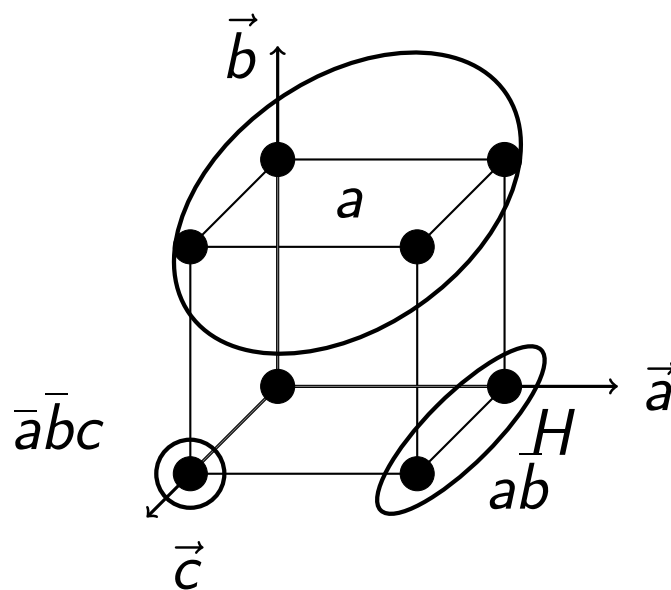
# Représentation de la fonction

## Théorèmes :

L'ensemble des fonctions booléennes  $f(x_1, \dots, x_n)$  est une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algèbre de fonctions générée par les fonctions « littéraux »  $X_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

$\{ \prod X_i^{\alpha_i} \mid \alpha_i \in \{-1, 1\} \}$ , où  $X_i^{-1} = \bar{X}_i$ , est aussi cette algèbre

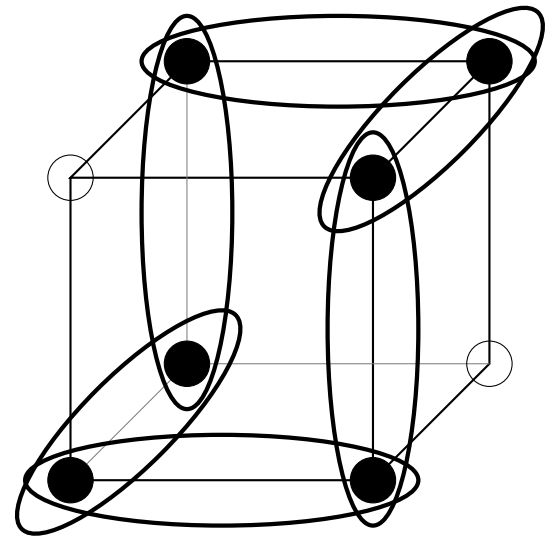
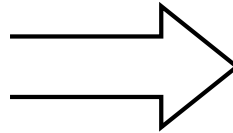
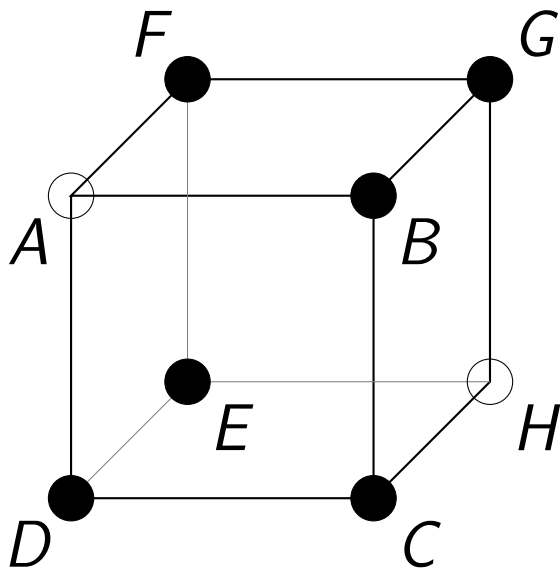
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}$$



$$a\bar{b} = X_1X_2X_3 + X_1X_2\bar{X}_3$$

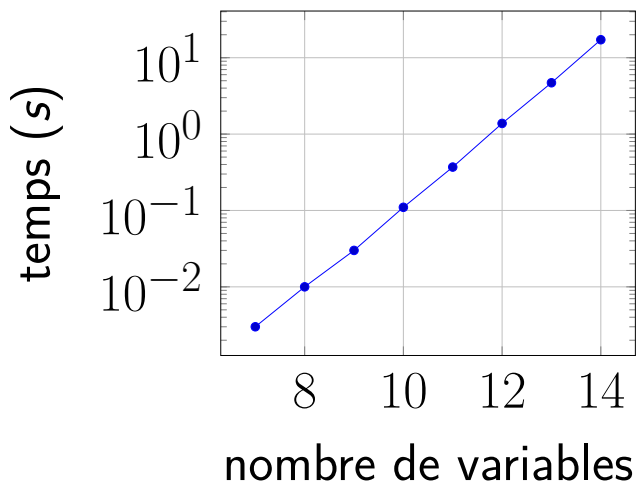
# Méthode de Quine-McCluskey

**Expansion des cubes :**

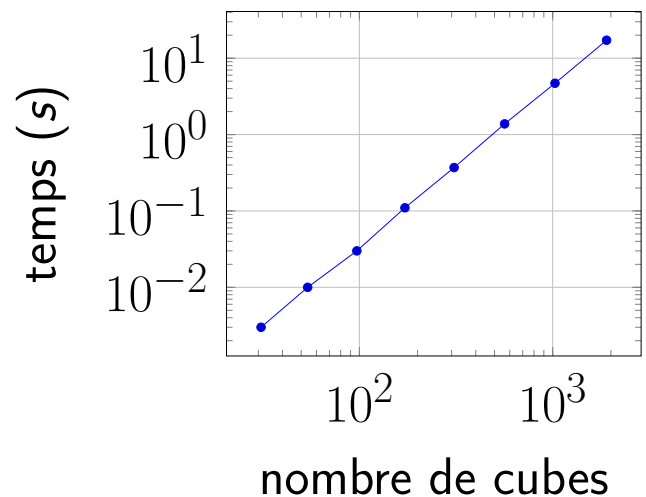


**Performances :**

Circuit premier



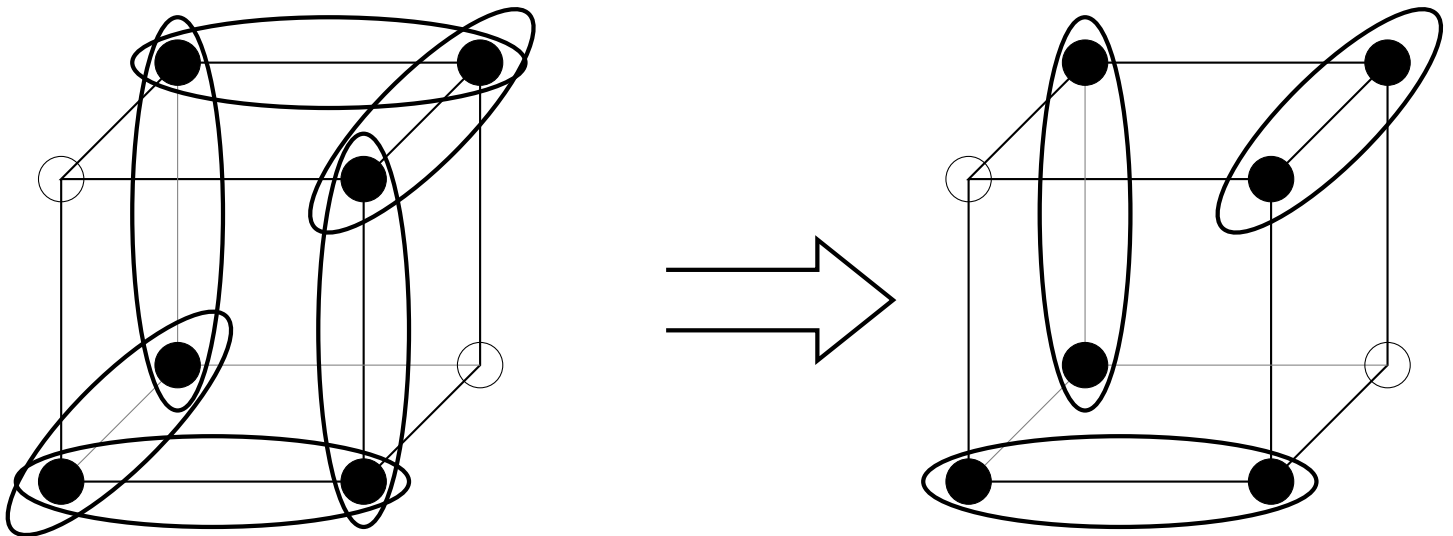
Circuit premier



**Conclusion :** Croissance exponentielle en le nombre de variables

# Méthode de Quine-McCluskey

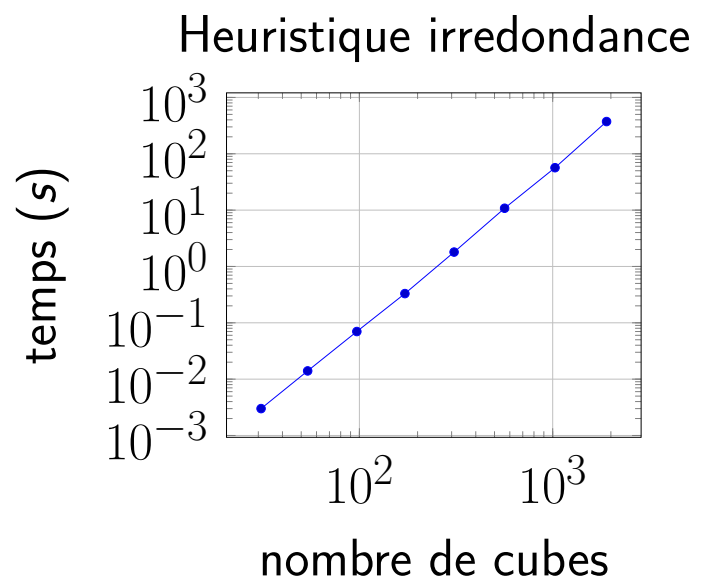
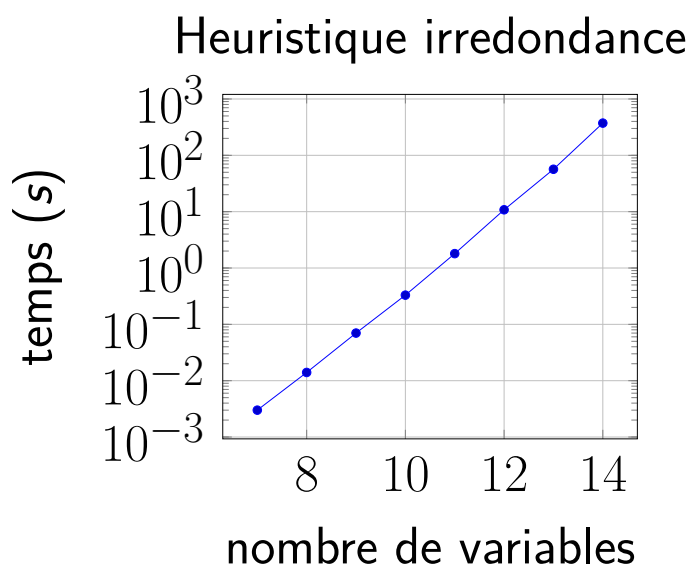
## Suppression des redondances inutiles :



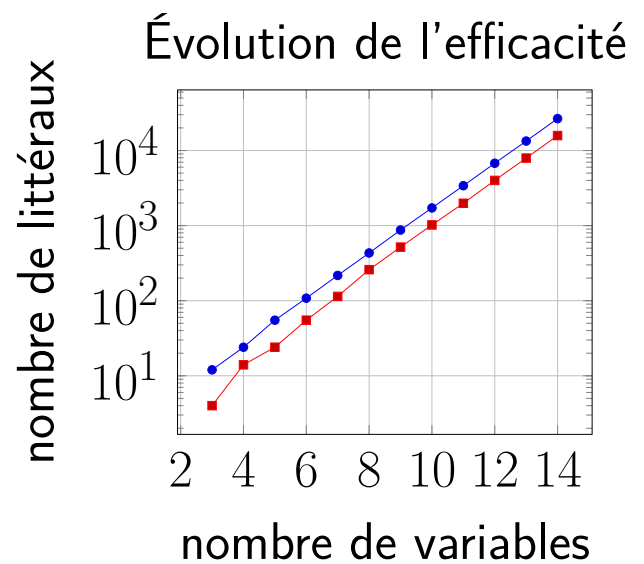
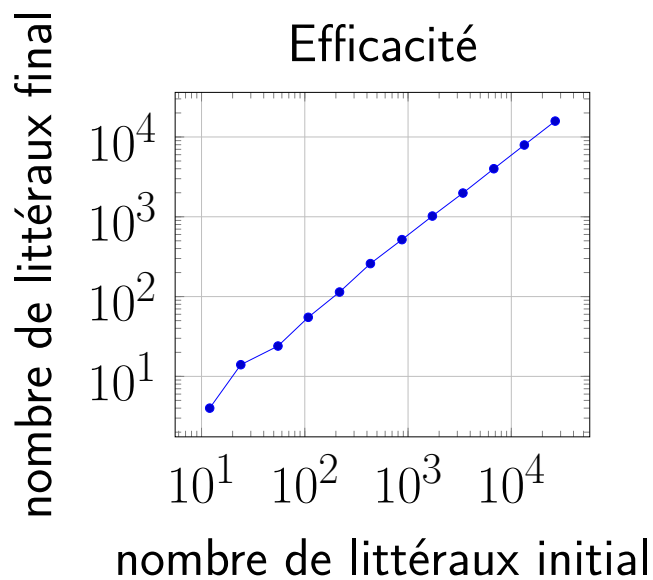
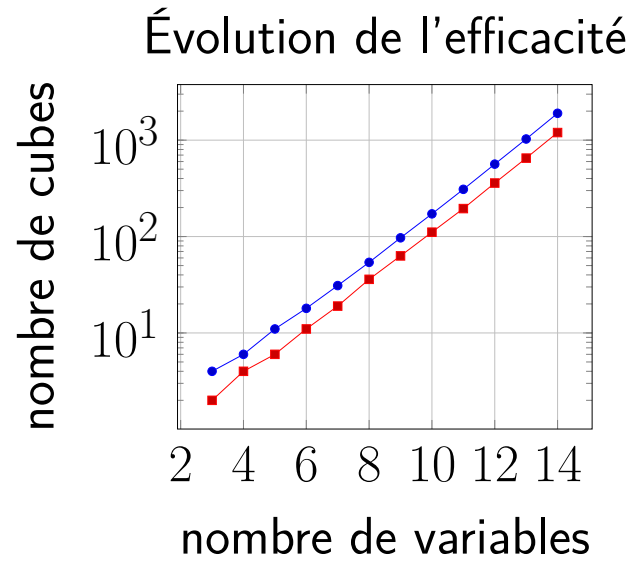
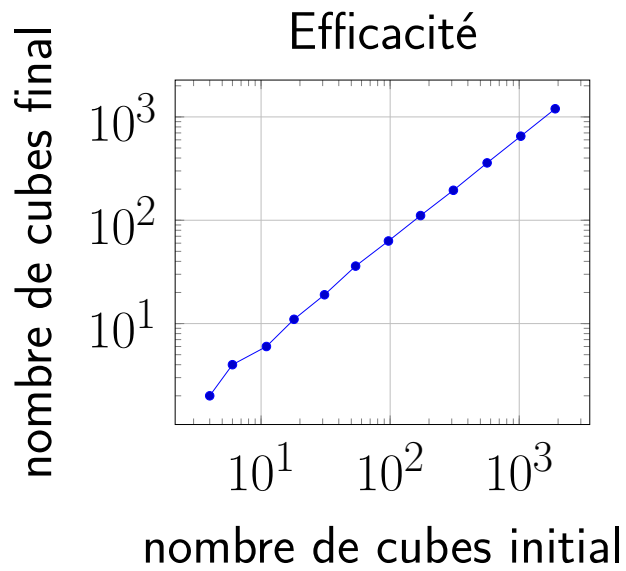
## Méthodes :

- ▶ Développement naïf : débordement pour  $n \geq 5$
- ▶ Backtracking :  $t > 20600s$  pour  $n \geq 7$
- ▶ Algorithme de couverture minimale glouton

## Performances



# Résultats



# Fonctions multivaluées

## Définition :

$$f: \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{B}^m$$

## Littéraux :

$$X_i^{S_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \in S_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } X_i \in \mathcal{P}_i \text{ et } S_i \subset \mathcal{P}_i$$

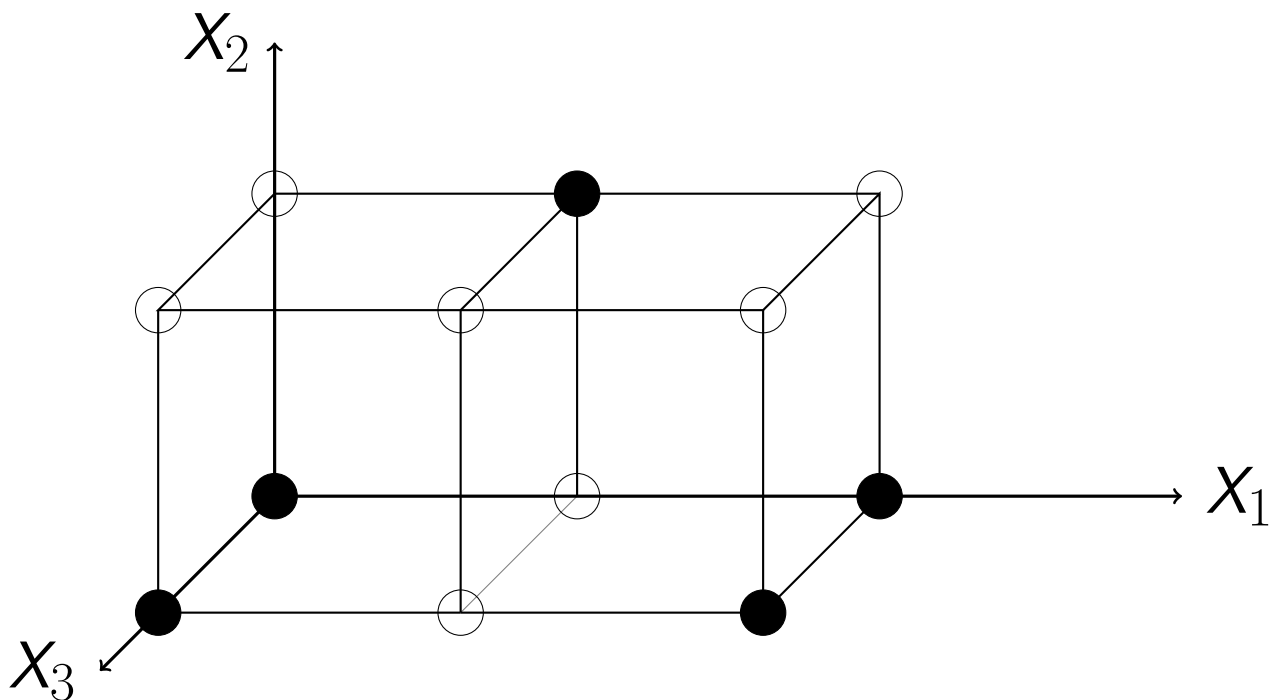


FIGURE : Représentation de  $f = X_1^{\{0,2\}} X_2^{\{0\}} + X_1^{\{1\}} X_2^{\{1\}} X_3^{\{0\}}$

## Décomposition de Shannon :

$$\bigcup_{i=1}^n c_i = 1 \implies f \equiv \bigcup_{i=1}^n c_i \cap f|_{c_i}$$

$$\bigcup_{i=1}^n c_i = 1 \implies f \equiv \bigcup_{i=1}^n c_i \cap f|_{c_i}$$

**Atout** : Paradigme diviser pour régner

Chaque étape est divisée en plus petites, chaque partie difficile est approximée.

## Opérations :

- ▶ Tautologie :

$$\text{tautologieTest}(f) = \text{tautologieTest}(f_c) * \text{tautologieTest}(f_d)$$

- ▶ Expansion améliorée : tautologie et couverture minimale
- ▶ Élimination des redondances : tautologie et couverture minimale
- ▶ Réduction des cubes : tautologie



# Conclusion

- ▶ Problème difficile à résoudre de façon naïve
- ▶ Seul l'utilisation des propriétés du problème permet de le résoudre
- ▶ Tourne autour de plusieurs grands problèmes
- ▶ Très bien maîtrisé aujourd'hui
- ▶ D'autres applications : Arbres de décision binaires et multivalués, conception de mémoires et circuits FGPA ...