Optimisation de circuits logiques

Alexandre JANNIAUX

Circuits logiques et fonctions combinatoires

Méthode de Quine-McCluskey

Généralisation à tout circuit

Circuits logiques et fonctions combinatoires

- Des intérêts industriels et scientifiques.

- **Circuit = Fonction logique**

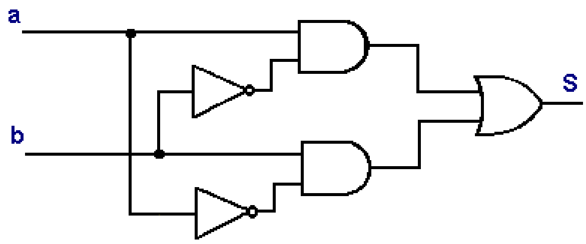


FIGURE : Exemple de circuit logique

- Fonction canonique associée au circuit :

$$f(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b$$

- **Problème de minimisation :** trouver la forme de la fonction avec le moins de terme possible.

- Les tests sont effectués sur un circuit de reconnaissance de nombre premier

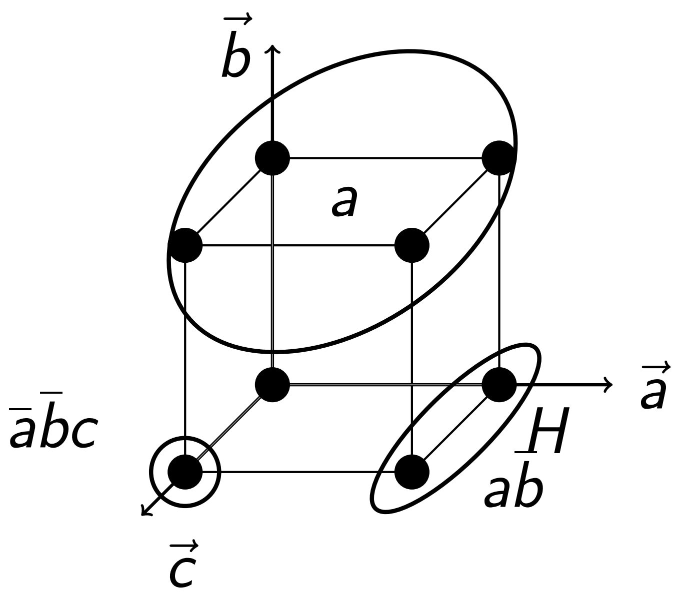
Représentation de la fonction

Théorèmes :

L'ensemble des fonctions booléennes $f(x_1, \cdots, x_n)$ est une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre de fonctions générée par les fonctions « littéraux » $X_i(x_1, \cdots, x_n) = x_1$

$\left\{ \prod X_i^{\alpha_i} \mid \alpha_i \in \{-1, 1\} \right\}$, où $X_i^{-1} = \bar{X}_i$, est aussi cette algèbre

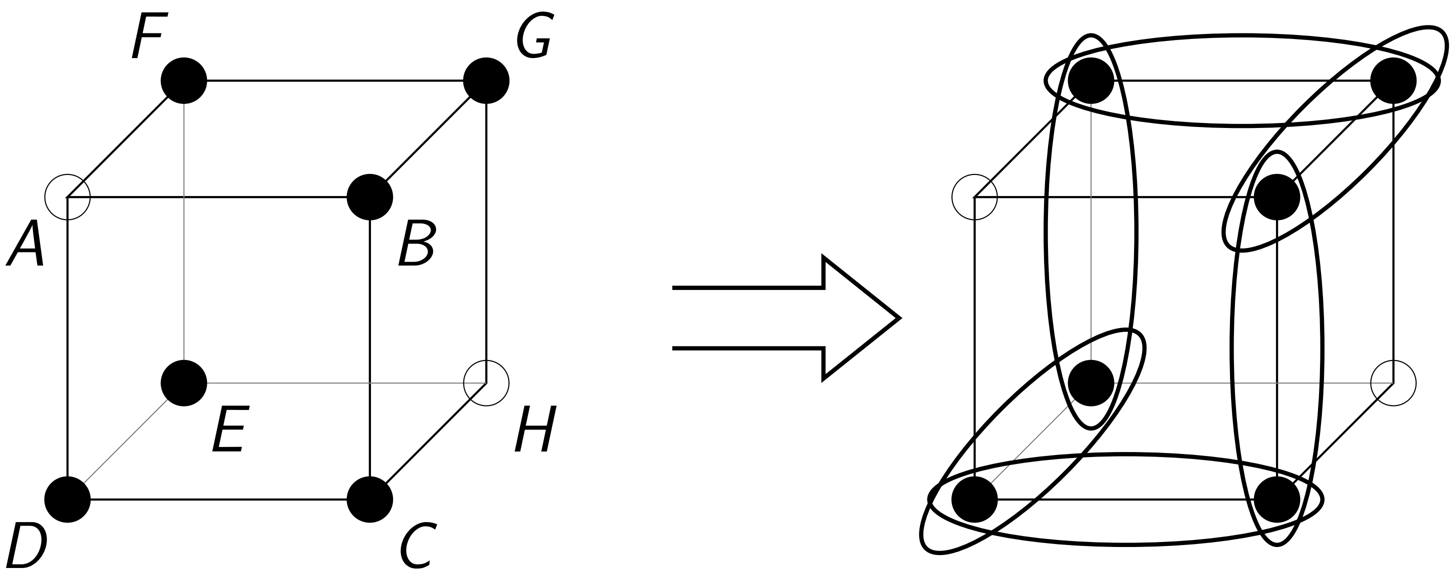
$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}$$



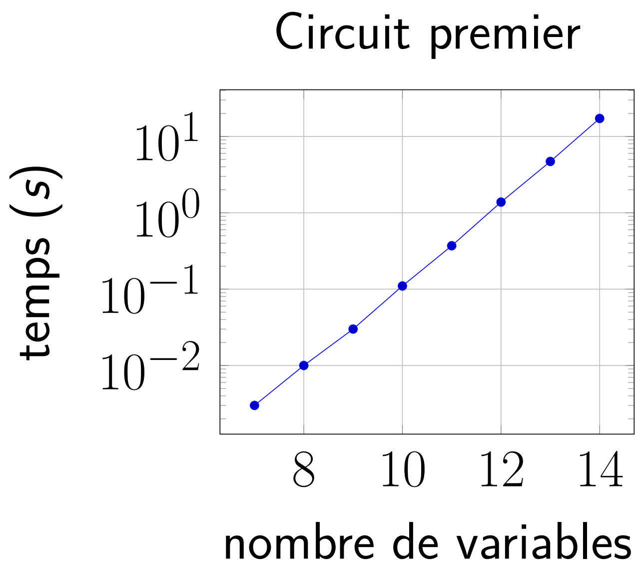
$$a\bar{b} = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 \bar{X}_3$$

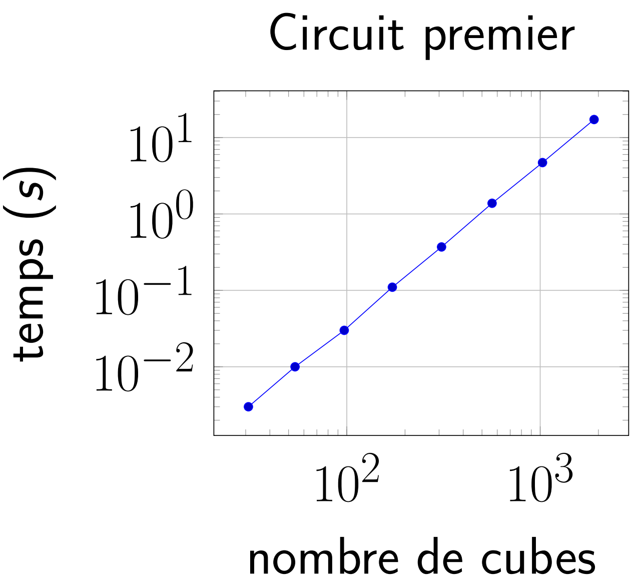
Méthode de Quine-McCluskey

Expansion des cubes :



Performances :

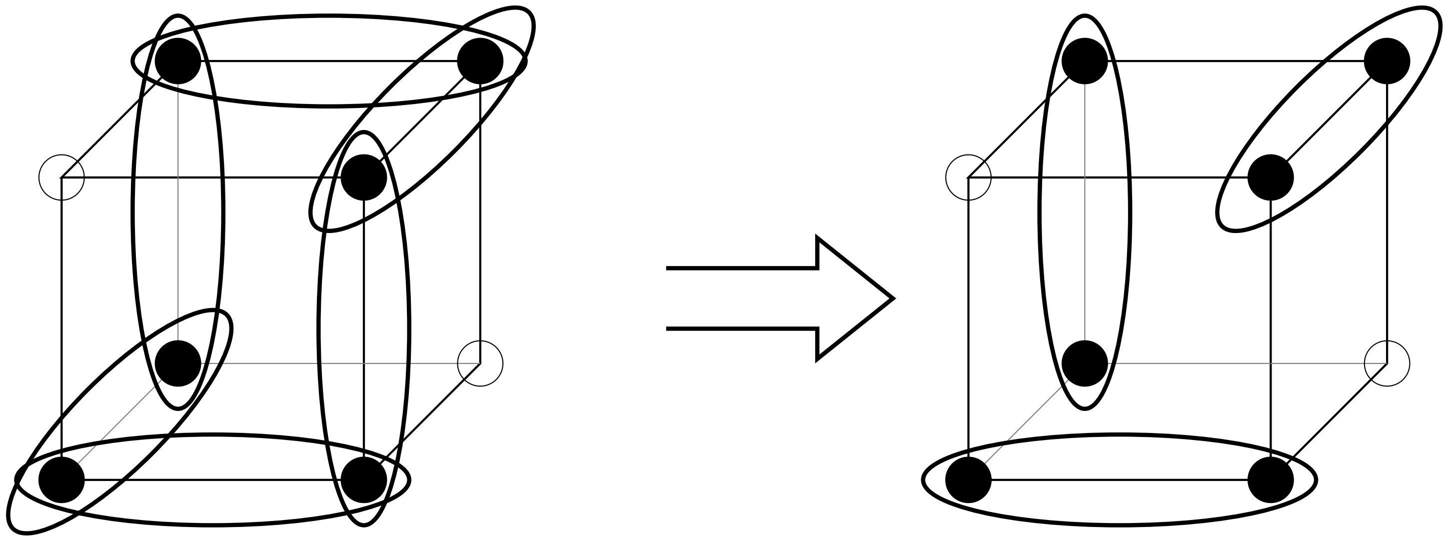




Conclusion : Croissance exponentielle en le nombre de variables

Méthode de Quine-McCluskey

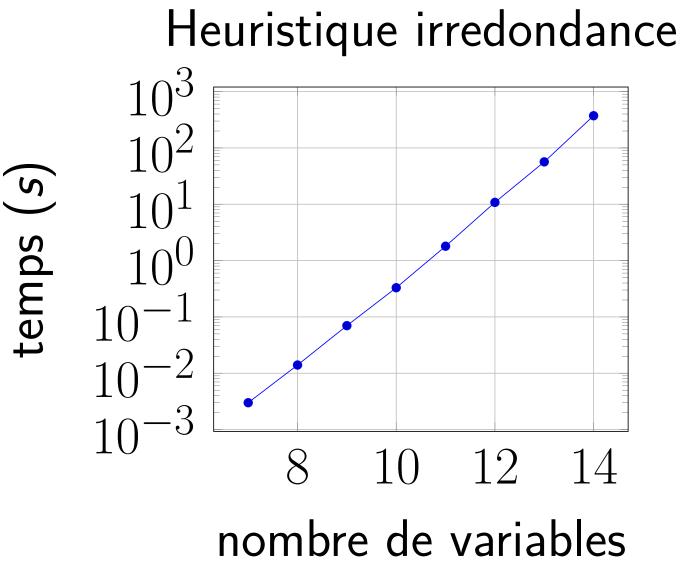
Suppression des redondances inutiles :

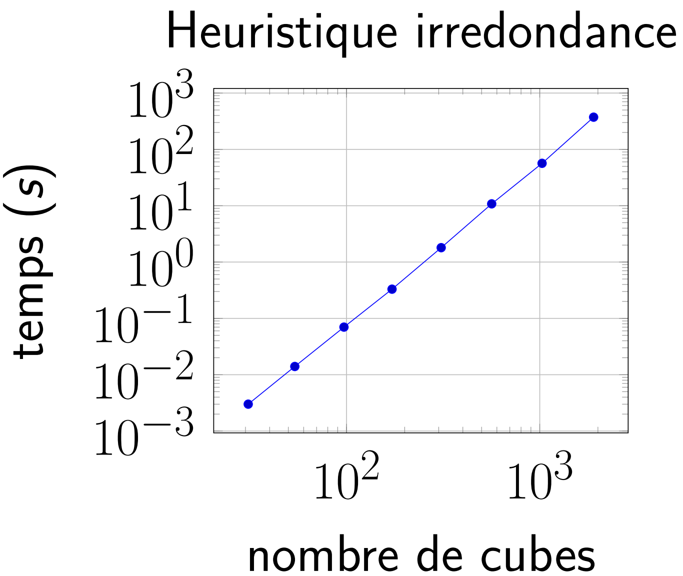


Méthodes :

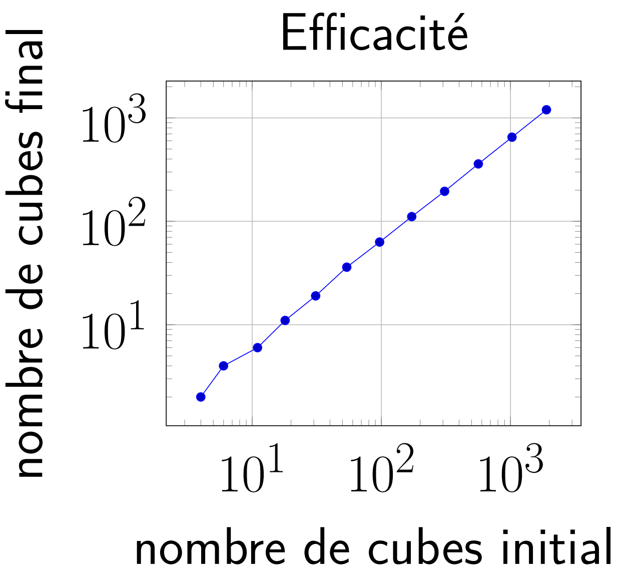
- Développement naïf : débordement pour $n \geq 5$
- Backtracking : $t > 20600s$ pour $n \geq 7$
- Algorithme de couverture minimale glouton

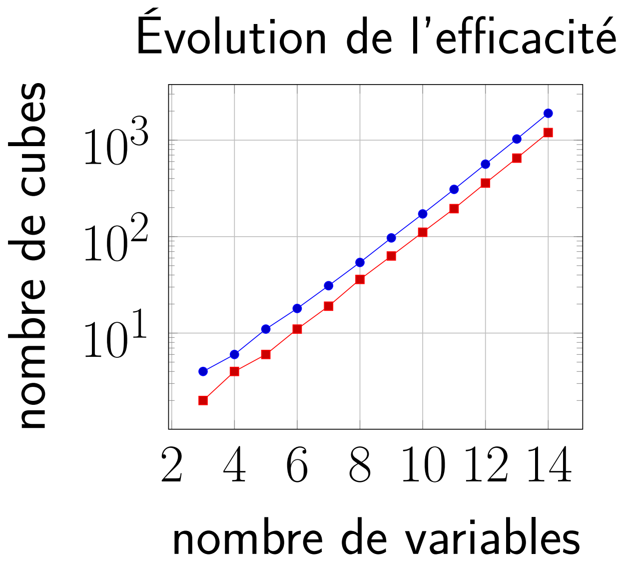
Performances

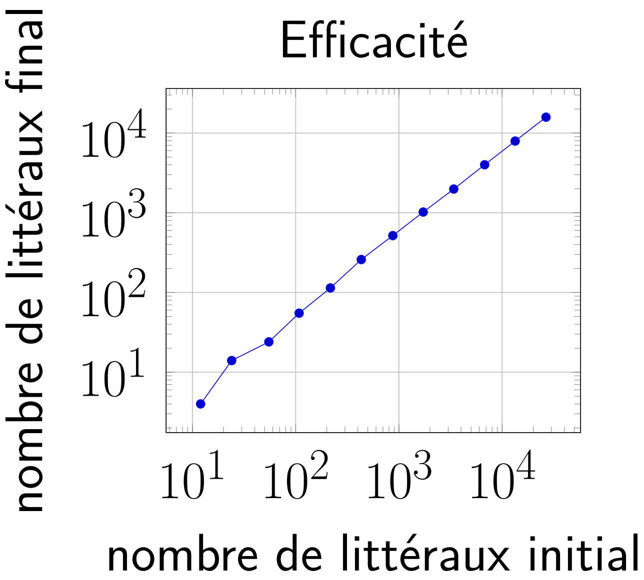


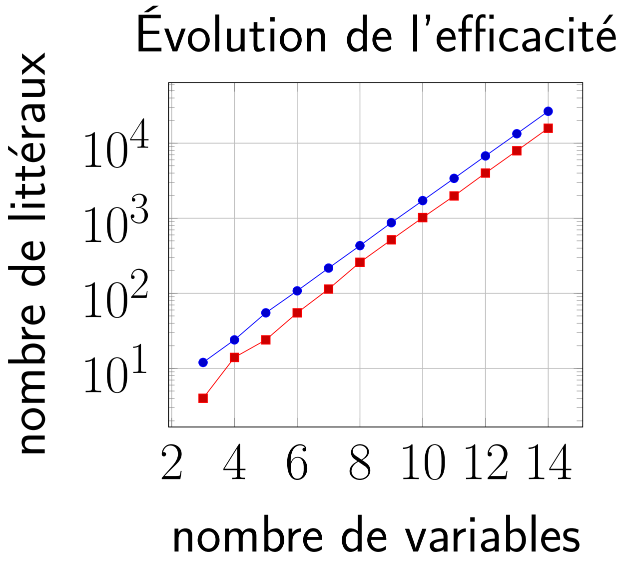


Résultats


Efficacité
nombre de cubes final
nombre de cubes initial
10^1
10^2
10^3


Évolution de l'efficacité
nombre de cubes
nombre de variables
10^1
10^2
10^3
2 4 6 8 10 12 14


Efficacité
nombre de littéraux final
nombre de littéraux initial
10^1
10^2
10^3
10^4


Évolution de l'efficacité
nombre de littéraux
nombre de variables
10^1
10^2
10^3
10^4
2 4 6 8 10 12 14

Fonctions multivaluées

Définition :

$$f : \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{B}^m$$

Littéraux :

$$X_i^{S_i} = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i \in S_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{où } X_i \in \mathcal{P}_i \text{ et } \mathcal{S}_i \subset \mathcal{P}_i$$

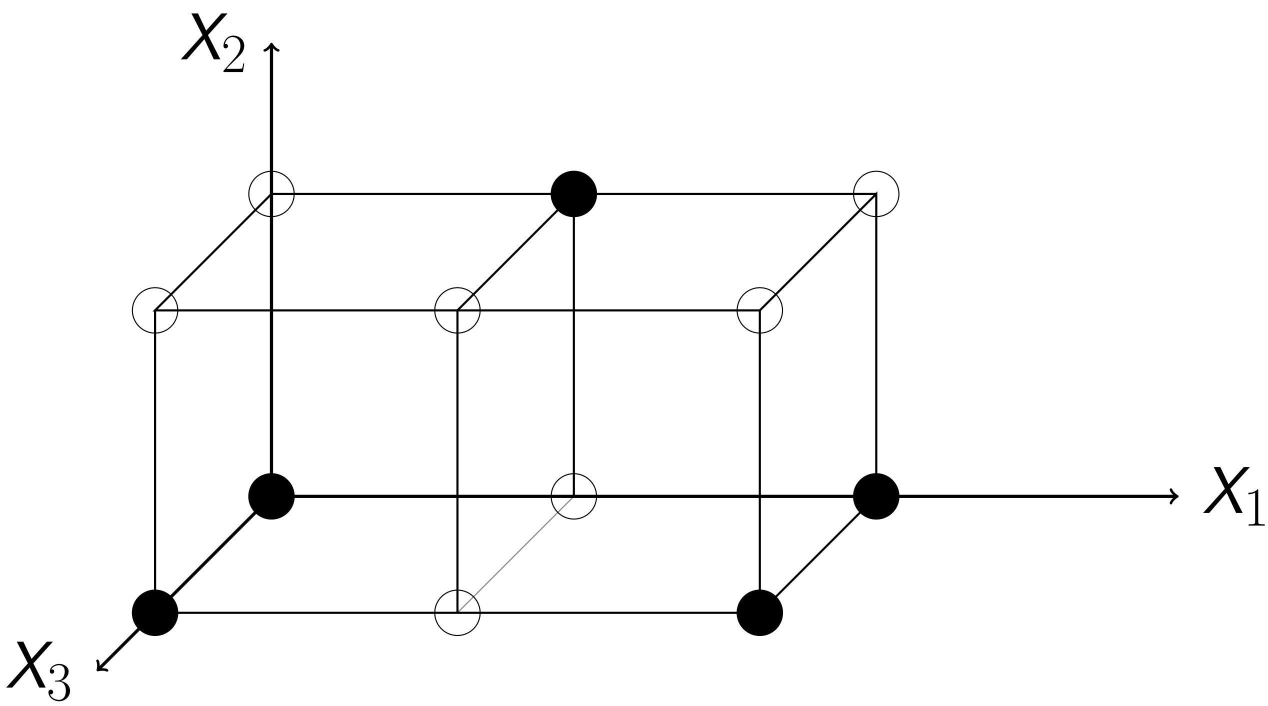


FIGURE : Représentation de $f = X_1^{\{0,2\}} X_2^{\{0\}} + X_1^{\{1\}} X_2^{\{1\}} X_3^{\{0\}}$

Décomposition de Shannon :

$$\bigcup_{i=1}^{n} c_i = 1 \implies f \equiv \bigcup_{i=1}^{n} c_i \cap f|_{c_i}$$

Espresso

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{n} c_i = 1 \implies f \equiv \bigcup_{i=1}^{n} c_i \cap f|_{c_i}}$$

Atout : Paradigme diviser pour régner
Chaque étape est divisée en plus petites, chaque partie difficile est approximée.

Opérations :

- Tautologie :

$$\text{taut}(f) = \text{taut}(f|_c) \cdot \text{taut}(f|_{\bar{c}})$$

- Expansion améliorée : tautologie et couverture minimale
- Élimination des redondances : tautologie et couverture minimale
- Réduction des cubes : tautologie

Conclusion

- Problème difficile à résoudre de façon naïve
- Seul l'utilisation des propriétés du problème permet de le résoudre
- Tourne autour de plusieurs grands problèmes
- Très bien maitrisé aujourd'hui
- D'autres applications : Arbres de décision binaires et multivalués, conception de mémoires et circuits FGPA ...