Capítulo 3: Limite de uma Função e Continuidade

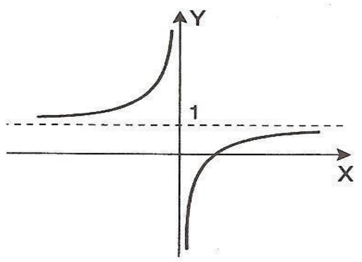
3.1- Noção de Limite de uma Função (Noção Intuitiva)

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ definida para todo x real e $x \neq 0$.

Observe os valores da função f quando x cresce ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente. Observe também o seu gráfico.

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1.000	...

x	−1	−2	−3	−4	−5	...	−100	...	−500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...



Esta função se aproxima de 1 quando x cresce ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente. Dizemos que esta função tende a 1 quando x tende a +∞ e quando x tende a – ∞ e denotamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Além disso, observando o gráfico da função, podemos dizer que f(x) cresce ilimitadamente quando x se aproxima de 0 por valores menores que 0 e que f(x) decresce ilimitadamente quando x se aproxima de 0 por valores maiores que 0. Neste caso nos referimos aos limites laterais e denotamos, respectivamente, por $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

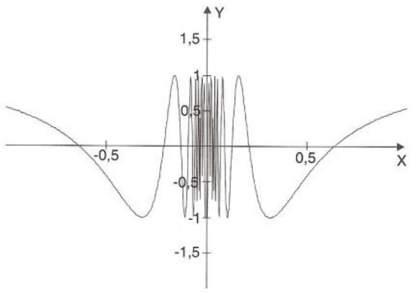
Exemplo 2: Considere a função $f(x) = x^2 + 3x - 2$ definida para todo x real.

Intuitivamente, analisando as sucessões nas tabelas seguintes, podemos dizer que f(x) tende para +∞ quando x tende para +∞ ou para –∞ e denotamos por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10.298	...

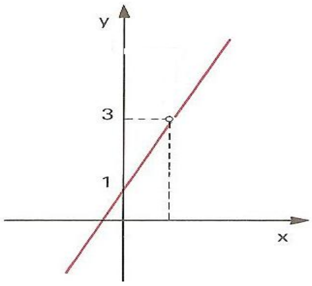
x	−1	−2	−3	−4	−5	−6	...	−100	...	−500
y	−4	−4	−2	2	8	16	...	9.698	...	248.498

Exemplo 3: Observando o gráfico da função $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ e a tabela a seguir podemos afirmar que o gráfico oscila numa vizinhança de zero sem tender para um limite.



x	$\frac{1}{\pi} \cong 0{,}318309$	$\frac{1}{2\pi} \cong 0{,}159154$	$\frac{1}{3\pi} \cong 0{,}106103$	$\frac{1}{4\pi} \cong 0{,}0795774$	...
y	-1	1	-1	1	...

Exemplo 4: Observando o gráfico da função $f(x) = \frac{(2x+1).(x-1)}{(x-1)}$ definida para todo x real e x ≠ 1 e as tabelas abaixo podemos escrever $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, ou ainda, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.



x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

À medida que tomamos valores de x cada vez mais próximos de 1 (x → 1), os valores de f(x) tornam-se cada vez mais próximos de 3 (f(x) → 3), independentemente da sucessão de valores de x usados.

Pode-se observar que é possível tomar o valor de f(x) tão próximo de 3 quanto desejamos, desde que tomamos x suficientemente próximo de 1 (x ≠ 1).

A idéia "tomar o valor de f(x) tão próximo de 3 quanto desejamos" é traduzido matematicamente pela desigualdade $|f(x)-3| < \varepsilon$, sendo ε um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar.

A idéia "desde que tomamos x suficientemente próximo de 1 (x ≠ 1)" significa que deve existir um intervalo aberto de raio $\delta > 0$ e centro a = 1 tal que se x ≠ 1 variar nesse intervalo, isto é, se $0 < |x-1| < \delta$ então $|f(x)-3| < \varepsilon$.

3.2- Definição de Limite de uma Função

Intuitivamente dizemos que uma função f(x) tem limite L quando x tende para *a*, se é possível tomar f(x) arbitrariamente próximo de L, desde que tomamos valores de x, x ≠ *a*, suficientemente próximos de *a*.

Formalmente, temos:

Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real *a*. Seja f uma função definida em I, exceto, possivelmente, no próprio *a*.

Dizemos que o limite de f(x), quando x tende a *a*, é L e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon\right).$$

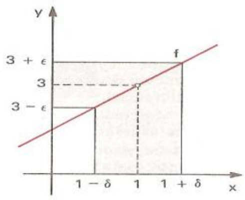
Observação: Para a definição do limite, quando x tende a *a*, não é necessário que a função esteja definida em *a* e pode ocorrer que a função esteja definida em *a* e $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. O que interessa é o comportamento de f(x) quando x se aproxima de *a* e não o que ocorre com f quando x = *a*.

3.3- Exemplos

1. Considere a função $f(x) = \dfrac{(2x+1).(x-1)}{(x-1)}$ definida para todo x real e x ≠ 1. Assim, se x ≠ 1 então f(x) = 2x + 1. Vamos mostrar, usando a definição, que $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-1| < \delta$ então $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Logo, obtemos:

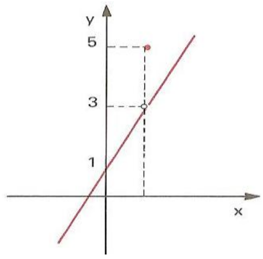


$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-3| = |2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1| < 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

2. Seja $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

Temos $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x+1) = 3 \neq f(1)$



3. Demonstre, usando a definição, que $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$.

Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-4| < \delta$ então $|x^2 - 16| < \varepsilon$.

Notemos que $|x^2 - 16| = |(x-4).(x+4)| = |x-4|.|x+4|$.

Se $|x-4| < 1$, obtemos:

$$|x-4| < 1 \Rightarrow -1 < x-4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5 \Rightarrow 7 < x+4 < 9 \Rightarrow -9 < x+4 < 9 \Rightarrow |x+4| < 9.$$

Seja $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$. Assim, $\delta \leq 1$, $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{9}$ e se $0 < |x-4| < \delta$ obtemos:

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |x-4| < 1 \text{ e } |x-4| < \frac{\varepsilon}{9} \Rightarrow |x+4| < 9 \text{ e } |x-4| < \frac{\varepsilon}{9} \Rightarrow |x^2-16| = |x-4|.|x+4| < \frac{\varepsilon}{9}.9 = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$.

3.4- Unicidade do Limite

Teorema 1
Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração:
Vamos supor $L_1 \neq L_2$.
Seja $\varepsilon = |L_1 - L_2| > 0$. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se

$$0 < |x-a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e se } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{ então } |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim $\delta \le \delta_1$, $\delta \le \delta_2$ e se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Mas $\varepsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \le |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que é um absurdo.

Portanto $L_1 = L_2$.

3.5- Propriedades do limite de uma função

Seja a elemento do intervalo aberto I e em I – $\{a\}$ estão definidas as funções envolvidas na propriedade.

L1 – Se f é uma função definida por f(x) = c, para todo x real, onde c $\in$ R, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$.

L2 – Se c $\in$ R e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} [c.f(x)] = c.\lim\limits_{x \to a} f(x) = c.L$.

L3 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$.

Obs.: Esta propriedade pode ser estendida para uma soma de um número finito de funções, isto é, se $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = L_i$, $i \in N$ e $1 \le i \le n$, então $\lim\limits_{x \to a} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} L_i$.

L4 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim\limits_{x \to a} (f-g)(x) = L - M$.

L5 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = L.M$.

Obs.: Esta propriedade pode ser estendida para um produto de um número finito de funções, isto é, se $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = L_i$, $i \in N$ e $1 \le i \le n$, então $\lim\limits_{x \to a} \left(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \right) = \prod\limits_{i=1}^{n} L_i$.

L6 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$, para $n \in \{1,2,3,...\}$.

L7 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \ne 0$ então $\lim\limits_{x \to a} (\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{L}{M}$.

L8 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, com $L > 0$ e $n \in N$ ou $L \le 0$ e $n \in N, n$ ímpar.

L9 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} sen[f(x)] = sen[\lim\limits_{x \to a} f(x)] = senL$.

L10 – Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} \cos[f(x)] = \cos[\lim\limits_{x \to a} f(x)] = \cos L$.

Teorema 2

O limite de uma função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$, $a_i \in R$, para x tendendo para a, é igual ao valor numérico de f(x) para x = a, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demonstração:
É claro que $\lim_{x\to a} x = a$, pois, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon$ e se $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon$ então $|x-a| < \varepsilon$. Assim $\lim_{x\to a} x^i = \left[\lim_{x\to a} x\right]^i = a^i$, para $i = 1,2,3,\dots,n$.
Temos, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n}\left[\lim_{x\to a} a_i x^i\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x\to a} x^i = \sum_{i=o}^{n} a_i a^i = f(a).$$

3.6- Exercícios

1.Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x+5\right)$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x^3-7}$

c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^4-4x+1}$

d) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{3x-2}\right)^2$

e) $\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}$

f) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^2-x}{3x}$

g) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

h) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

i) $\lim_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{6x^2+11x+3}{2x^2-5x-12}$

j) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

k) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-4x+1}{x^3-3x^2+5x-3}$

l) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$

m) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

n) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}$

Respostas: a) 15; b) -1/10; c) 5; d) 4; e) -2; f) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; g) 2; h) 2; i) 7/11; j) 3/2; k) 2; l) 5/3; m) ¼; n) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Seja a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$. (Resp.: -1)

3. Seja a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$. (Resp.: 5)

4. Calcular $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$. (Resp.: 1)

5. Calcular $\lim_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. (Resp.: 3)

Livro texto: Páginas 72 a 75, exceto números 16, 35 e 37.

3.7- Limites Laterais

Ao considerarmos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de *a*, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo *a*, mas diferentes de *a*, e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que *a*.

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de *a*, mas assume valores menores que a, é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de *a*, mas assume valores maiores que *a*.

Por exemplo, na função $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ x - 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1 (à esquerda de 1), temos que os valores da função ficam próximos de 3; e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1(à direita de 1), temos que os valores da função ficam próximos de – 1.

Definições:

1) Limite lateral à direita

Seja f uma função definida em um intervalo aberto (*a*, *b*).

O limite de f(x), quando x se aproxima de *a* pela direita, será L e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $a < x < a + \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right).$$

2) Limite lateral à esquerda

Seja f uma função definida em um intervalo aberto (*b*, *a*).

O limite de f(x), quando x se aproxima de *a* pela esquerda, será L e escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right).$$

Observação: As propriedades de limites e o teorema do limite de função polinomial são válidos se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.

Teorema 3

Seja I um intervalo aberto contendo *a* e seja f uma função definida para x $\in$ I – {*a*}. Temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem os limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L.

Demonstração:

(⇒) Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ temos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Logo, se $a < x < a + \delta$ então $0 < |x - a| < \delta$ e, segue que, $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$. Também, se $a - \delta < x < a$ então $0 < |x - a| < \delta$ e, assim, $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

(⇐) Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $a < x < a+\delta_1$ temos $|f(x)-L| < \varepsilon$ e se $a-\delta_2 < x < a$ temos $|f(x)-L| < \varepsilon$. Assim, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e se $0 < |x-a| < \delta$ temos $a < x < a+\delta_1$ ou $a-\delta_2 < x < a$, o que implica $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Logo, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Exemplos:

1. Dada a função $f(x) = 1+\sqrt{x-3}$, determinar, se possível, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

2. Seja a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{se } x < 1 \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ 3-x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Determinar, se possível, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3. Seja a função f definida por $f(x) = |x|$. Determinar, se possível, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4. Seja a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x < 2 \\ 2, & \text{se } x = 2 \\ 9-x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Determinar, se possível, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

3.8- Exercícios

1. Calcular os limites indicados, se existirem; se o(s) limite(s) não existir(em), especificar a razão.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{se } x>1\\ 2, & \text{se } x=1\\ 4x+1, & \text{se } x<1\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-|x|}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $f(x)=\dfrac{|3x^2-5x-2|}{x-2},\ x\neq 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \quad \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Respostas: a) 1; 5; não existe; b) – 1; 1; não existe; c) 7; – 7; não existe.

2. Dada a função f definida por $f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{se } x>-1\\ 3, & \text{se } x=-1\\ 5-ax, & \text{se } x<-1\end{cases}$. Determinar $a\in$ R para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Resp.: a = – 10.

3. Seja $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{se } x\leq 3\\ 3x-7, & \text{se } x>3\end{cases}$.

Calcular: a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

Esboçar o gráfico de f.

Resp.: a) 2; b) 2; c) 2; d) 8; e) 8; f) 8.

Livro texto: Páginas 79 e 80.

3.9- Cálculo de Limites – Formas Indeterminadas

Dizemos que as expressões $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0.\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$ são formas indeterminadas.

Isso significa que nada podemos afirmar, por exemplo, sobre o limite do quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a a, se f e g são funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Para comprovar isto, vejamos:

1. Sejam f(x) = x^3 e g(x) = x^2. Temos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0} x=0$.

2. Sejam f(x) = x^2 e g(x) = x^4. Temos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ (explicação deste último resultado no próximo item).

Sobre as outras formas indeterminadas, veremos exemplos mais adiante.

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

3.10- Exercícios

Páginas 83 e 84 do livro texto.

3.11- Limites Infinitos

Definições:

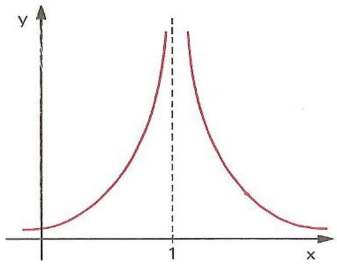
1) Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo *a*, exceto, possivelmente, em *a*.

Dizemos que, quando x se aproxima de *a*, f(x) cresce ilimitadamente e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, para qualquer número M > 0, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $f(x) > M$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M\right).$$

Exemplo: Analisando o comportamento da função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ vemos que os valores da função são cada vez maiores à medida que x se aproxima de 1. Em outras palavras, podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando valores para x bastante próximos de 1 e escrevemos $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.



Formalmente, dado M > 0, seja $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} > 0$. Se $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

então $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{|x-1|^2} > \left(\sqrt{M}\right)^2 = M$. Logo $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

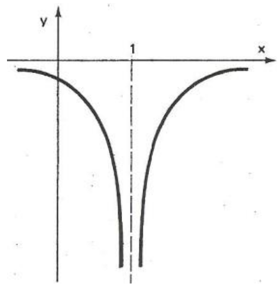
2) Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo *a*, exceto, possivelmente, em *a*.

Dizemos que, quando x se aproxima de *a*, f(x) decresce ilimitadamente e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ se, para qualquer número M < 0, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $f(x) < M$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall M < 0,\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M\right).$$

Exemplo: Analisando o comportamento da função f definida por $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ vemos que os valores da função são cada vez menores à medida que x se aproxima de 1. Em outras palavras, podemos tornar os valores de f(x) tanto menores quanto desejarmos, isto é, menores que qualquer número negativo, tomando valores para x bastante próximos de 1 e escrevemos $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$.



Formalmente, dado M < 0, seja $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{-M}} > 0$. Se $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{-M}}$

obtemos: $|x-1|^2 < \dfrac{1}{-M} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-1|^2} > -M \Rightarrow f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{|x-1|^2} < M$.

Logo, $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$.

Observação: Os símbolos "+∞" e "–∞" não representam números reais, nos indicam apenas o que ocorre com a função quando x se aproxima de *a*.

3) Limites laterais infinitos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists\delta > 0;\ a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) > M\right)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists\delta > 0;\ a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > M\right)$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall M < 0,\ \exists\delta > 0;\ a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) < M\right)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall M < 0,\ \exists\delta > 0;\ a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) < M\right)$$

Exemplo: Observando o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ podemos afirmar que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

Teorema 4
Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Então:

1) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando *x* está próximo de *a*;

2) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ quando *x* está próximo de *a*.

Observação: Este teorema continua válido se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{5x+2}{|x+1|}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$

e) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x+1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

f) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$

3.12- Limites no Infinito

Definições:

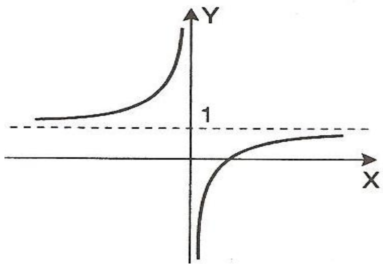
1) Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$.

Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, f(x) se aproxima de L e escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número ε > 0, existir N > 0 tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0;\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right).$$

Exemplo: Observando o comportamento da função f definida por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ vemos que quando x cresce ilimitadamente, os valores da função f se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar f(x) tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos para x valores cada vez maiores e escrevemos $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.



Formalmente, dado ε > 0, tome $N = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Se x > N obtemos:

$$x > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| = \left|1 - \frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

2) Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$.

Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, f(x) se aproxima de L e escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número ε > 0, existir N < 0 tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists N < 0;\ x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right).$$

Exemplo: Observando novamente o comportamento da função f definida por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ vemos que quando x decresce ilimitadamente, os valores da função f se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar f(x) tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos para x valores cada vez menores e escrevemos $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

Formalmente, dado ε > 0, tome $N = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$. Se x < N obtemos:

$$x < -\frac{1}{\varepsilon} < 0 \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow |f(x) - 1| = \left|1 - \frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x} < \varepsilon.$$ Logo, $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

3) Limites infinitos no infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists N > 0;\ x > N \Rightarrow f(x) > M\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall M < 0,\ \exists N > 0;\ x > N \Rightarrow f(x) < M\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists N < 0;\ x < N \Rightarrow f(x) > M\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall M < 0,\ \exists N < 0;\ x < N \Rightarrow f(x) < M\right)$$

Exemplo: Observando o gráfico da função $f(x) = x^2$ podemos afirmar que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Observação: As propriedades de limites são válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to +\infty$ ou por $x \to -\infty$.

Teoremas

1) Se c $\in$ R então $\lim_{x \to +\infty} c = c = \lim_{x \to -\infty} c$.

2) Se n é um inteiro positivo então:

a) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$;

b) $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se n é par} \\ -\infty, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.

3) Se n é um inteiro positivo então:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$;

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

4) Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, é uma função polinomial, então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$.

5) Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, e $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$, $b_m \neq 0$, são funções polinomiais então $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$.

Propriedades dos limites no infinito e limites infinitos

A tabela a seguir nos dá um resumo dos fatos principais válidos para os limites envolvendo infinitos, onde podemos ter $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Na tabela, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores positivos e 0^- indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores negativos.

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm \infty$	$\pm \infty \pm \infty = \pm \infty$
02	$+ \infty$	$+ \infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+ \infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+ \infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$- \infty$	k	$f(x) + g(x)$	$- \infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+ \infty$	$+ \infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+ \infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+ \infty$	$- \infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$- \infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty,\ k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty,\ k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty,\ k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty,\ k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+3\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-4x}{2x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-7x^3+2x^2-5x-4\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{3x^2+5x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

3.13- Exercícios

Páginas 93, 94 e 95 do livro texto (exceto nº 14).

3.14- Assíntotas

Definições:

1) A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico da função f se f(x) tende para +∞ ou –∞ quando x tende para a pela esquerda ou pela direita, ou seja, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

2) A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função f se f(x) tende para b quando x tende para +∞ ou –∞, ou seja, se pelos menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3) A reta $y = ax + b$ é uma **assíntota inclinada** do gráfico da função f se pelos menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Exemplos:

1. A reta $x = 2$ é um assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, ou também, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

2. As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$.

3. A reta $y = 2x$ é assíntota do gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$, pois $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{2x^3}{x^2+4} - 2x \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{-8x}{x^2+4} \right] = 0$.

3.15- Teoremas adicionais sobre limites

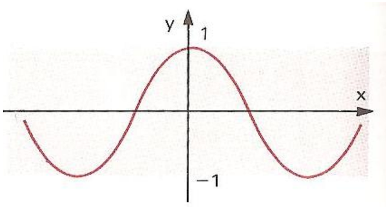
Definição: (Função limitada)

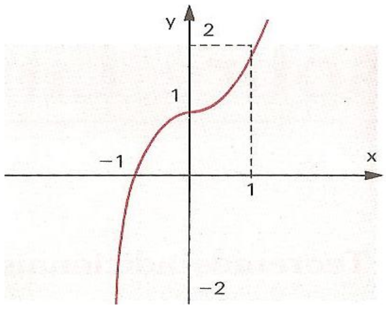
Dizemos que uma função, definida no conjunto A, é limitada em B ⊂ A se existir um número M > 0 tal que, para todo x pertencente a B temos $|f(x)| < M$, isto é, $-M < f(x) < M$.

Em símbolos, temos:

f é limitada em B $\Leftrightarrow (\exists M > 0;\ x \in B \Rightarrow |f(x)| < M)$.

Por exemplo, a função f(x) = cosx é limitada em R, pois $-1 \le \cos x \le 1$, para todo x real; a função $f(x) = x^3 + 1$ não é limitada em R, mas é limitada no intervalo [-1, 1], pois $-2 \le x^3 + 1 \le 2$, para todo $x \in [-1, 1]$.





Teoremas:

1) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então existe um intervalo aberto I contendo a tal que f é limitada em I – $\{a\}$.

2) Conservação de Sinal

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ então existe um intervalo aberto I contendo a tal que f conserva o mesmo sinal de L em I – $\{a\}$.

3) Confronto (ou Sanduíche)

Se $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$ e se f é uma função tal que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo $x \in$ I – $\{a\}$, onde I é um intervalo aberto contendo a, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

4) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, com L < M, então existe um intervalo aberto I contendo a tal que $f(x) < g(x)$ em I – $\{a\}$.

5) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada em I – $\{a\}$ então $\lim_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big) = 0$.

Exemplos:

1. Calcule $\lim_{x\to 0} x^2.g(x)$, onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Q \\ -1, & \text{se } x \notin Q \end{cases}$.

2. Seja f uma função definida em R tal que, para todo $x \neq 1$, $-x^2 + 3x \le f(x) < \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

3. Calcule $\lim_{x \to 0}\left(x^2.\left|sen\frac{1}{x}\right|\right)$.

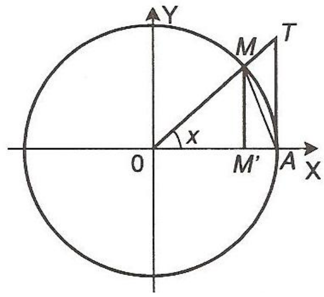
3.16- Limites Trigonométricos

Teoremas

1) $\lim_{x \to a} senx = sena, \quad \forall a \in R$

2) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a, \quad \forall a \in R$

3) $\lim_{x \to a} tgx = tga, \quad \forall a \in R,\ a \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z$



Limite Trigonométrico Fundamental: $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Demonstração:

Consideremos a circunferência de raio 1 ao lado.

Seja x a medida em radianos do arco AOM. Limitamos a variação de x ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Podemos escrever:

$$\text{área } \Delta MOA < \text{área setor } MOA < \text{área } \Delta \text{AOT} \Leftrightarrow \frac{\overline{\text{OA}}.\overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA}.AM}{2} < \frac{\overline{OA}.\overline{AT}}{2} \Leftrightarrow \overline{MM'} < AM < \overline{AT} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow senx < x < tgx \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \frac{senx}{x} > \cos x.$$

Para x no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, a desigualdade $1 > \frac{senx}{x} > \cos x$ é válida, pois $\frac{sen(-x)}{-x} = \frac{-senx}{-x} = \frac{senx}{x}$ e $\cos(-x) = \cos x$.

Portanto, a desigualdade $1 > \frac{senx}{x} > \cos x$ é válida para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $x \neq 0$.

Como $\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ e $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ então, pelo teorema do confronto, obtemos $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$.

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen3x}{sen4x}$

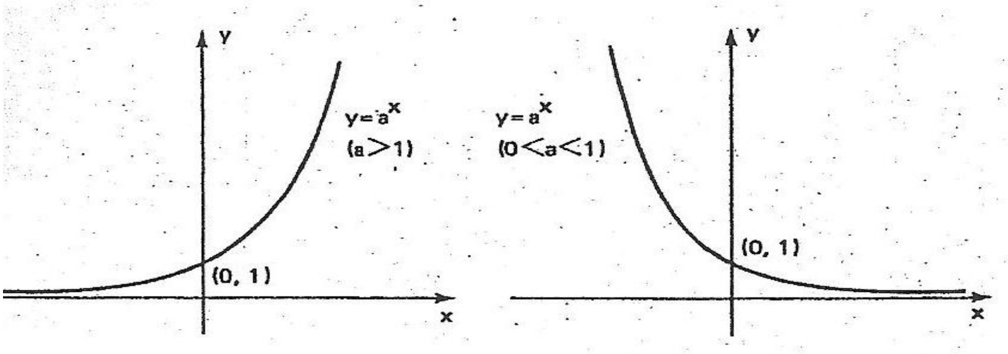
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x.sen\dfrac{1}{x} \right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x.sen\dfrac{1}{x} \right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

3.17- Limites da Função Exponencial



Teoremas

1) Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$ então $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

2) Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$ então $\lim\limits_{x \to b} a^x = a^b$.

3) Se $a \in R$ e $a > 1$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

4) Se $a \in R$ e $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

5) Se $a \in R,\ 0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ então $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to b} f(x)} = a^c$.

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

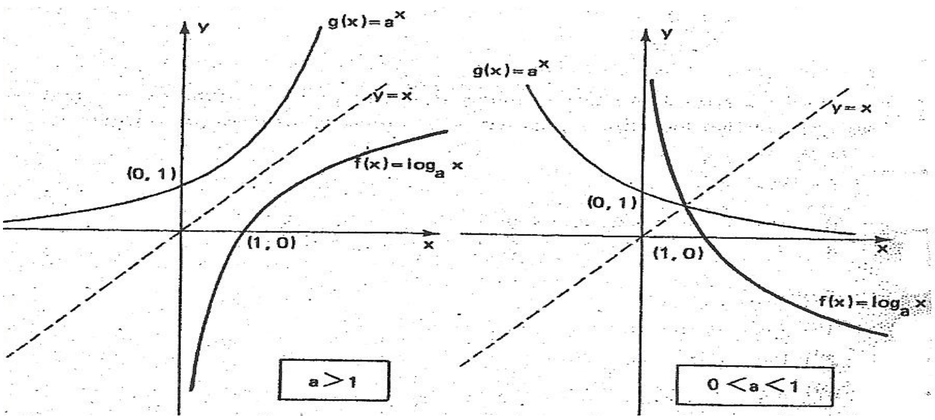
a) $\lim\limits_{x \to 2} 3^x$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{e}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ h) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ i) $\lim\limits_{x \to -2} 3^{x^2+6x+2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{3x+2}{x-1}}$ k) $\lim\limits_{x \to 2} 3^{\frac{x^2-4}{x-2}}$ l) $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}$

3.18- Limites da Função Logarítmica



Teoremas

1) Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$ então $\lim\limits_{x \to 1} (\log_a x) = 0$.

2) Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$ então $\lim\limits_{x \to b} (\log_a x) = \log_a b,$ onde $b > 0$.

3) Se $a \in R$ e $a > 1$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$.

4) Se $a \in R$ e $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$.

5) Se $a \in R,$ $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c > 0$ então $\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a \left[\lim\limits_{x \to b} f(x)\right] = \log_a c$.

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(\log_3 x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to e^2}(\ln x)$

d) $\lim\limits_{x\to 1000}(\log x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\log_2 x)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)$ h) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$ i) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\log_2\left(4x^2-7x+5\right)\right]$

j) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x+2}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\log\dfrac{6x+2}{4x+3}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\log_3\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log\dfrac{x-x^3}{x^2+x}\right)$ n) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\log\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\log\dfrac{3-\sqrt{1-4x}}{\sqrt{6+x}-2}\right)$

3.19- Limites Exponenciais Fundamentais

Teoremas

1) Seja a função $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ definida em $\{x\in R;\ x<-1 \text{ ou } x>0\}$.

Então $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ e $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, sendo e o número irracional neperiano (Constante de Euler), cujo valor aproximado é 2,718281828459... .

2) Seja a função $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ definida em $\{x\in R;\ -1<x\neq 0\}$. Então $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Demonstração:

Fazendo $y=\dfrac{1}{x}$ temos que $x\to 0^+$ se, e somente se, $y\to +\infty$ e $x\to 0^-$ se, e somente se, $y\to -\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y=e$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y=e$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

3) Seja $a > 0$, $a \neq 1$ então $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

Demonstração:

Fazendo $a^x - 1 = y$ temos que:

a) $a^x = 1+y \Leftrightarrow \ln a^x = \ln(1+y) \Leftrightarrow x.\ln a = \ln(1+y) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$;

b) $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$.

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \lim_{y\to 0}\frac{y.\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a.\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \ln a.\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \ln a.\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} =$$

$$= \frac{\ln a}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Exemplo: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

c) $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

d) $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

f) $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

g) $\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$

h) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

i) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

k) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$

l) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

m) $\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{x}$

n) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

o) $\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1}$

p) $\lim_{x\to2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2}$

q) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

r) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}$

s) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$

t) $\lim_{x\to0}\frac{2^{x}-3^{x}}{x}$

u) $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-2^{x-1}}{x^2-1}$

3.20- Exercícios

Livro texto:

Páginas 74 e 75 (números 16, 35 e 37);

Página 94 (número 14);

Páginas 103, 104 e 105.

3.21- Continuidade

Definições

1) Sejam *f* uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I.

Dizemos que *f* é contínua em *a* se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que se *f* é contínua em $a \in$ I então as três condições deverão estar satisfeitas:

- Existe $f(a)$;
- Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) Sejam *f* uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I.

Dizemos que *f* é descontínua em *a* se *f* não for contínua em *a*.

Observemos também que para falarmos em descontinuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que se *f* é descontínua em $a \in$ I então as duas condições deverão estar satisfeitas:

- Existe $f(a)$;
- Não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

3) Dizemos que uma função *f* é contínua em um intervalo aberto I se *f* for contínua em todos os pontos desse intervalo.

4) Sejam *f* uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I.

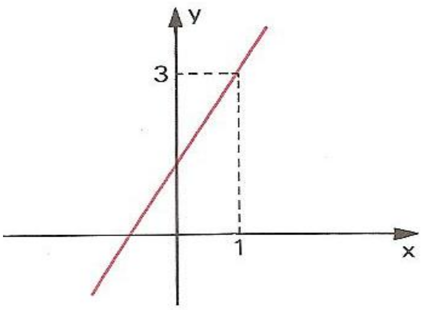
Dizemos que *f* é contínua à direita de *a* se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e dizemos que *f* é contínua à esquerda de *a* se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

5) Dizemos que uma função *f* é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ se *f* for contínua no intervalo aberto (a,b) e se também for contínua em *a* à direita, e em *b*, à esquerda.

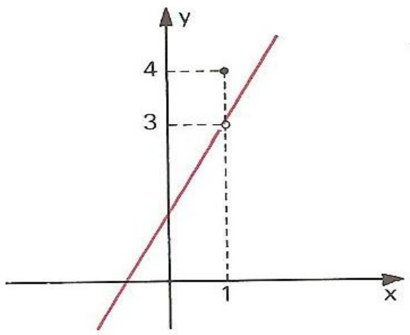
Exemplos:

a) A função $f(x) = 2x+1$ definida em R é contínua em 1, pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3 = f(1)$.

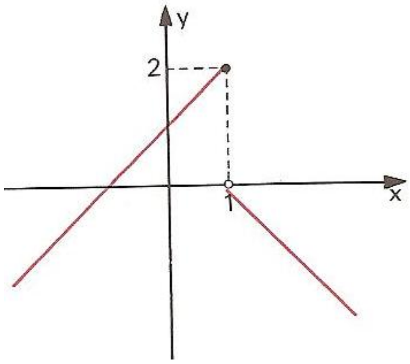
Note que *f* é contínua em R, pois para todo $a \in$ R, temos: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(2x+1) = 2a+1 = f(a)$.



b) A função $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{se } x\neq 1\\ 4, & \text{se } x=1\end{cases}$ definida em R é descontínua em 1, pois $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3\neq 4=f(1)$. Note que f é contínua em R – {1} pois, para todo $a\in$ R – {1}, temos: $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(2x+1)=2a+1=f(a)$.



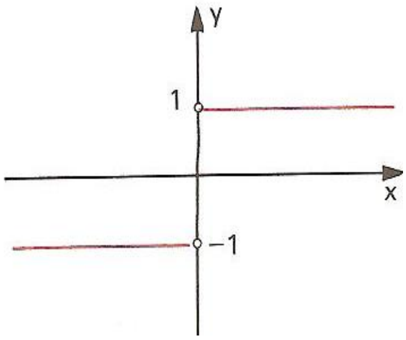
c) A função $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x\leq 1\\ 1-x, & \text{se } x>1\end{cases}$ definida em R é descontínua em 1, pois $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1-x)=0$ e, portanto, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.



d) Na função $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ definida em R* não podemos afirmar que f é descontínua em x = 0, pois 0 não pertence ao domínio de f. Observe que f é contínua em R*, pois, para todo $a\in$ R*, temos:

se $a>0$, então $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} 1=1=f(a)$;

se $a<0$, então $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(-1)=-1=f(a)$.



Propriedades das Funções Contínuas

1) Se f e g são funções contínuas em *a*, então são contínuas em *a* as funções $f+g$, $f-g$, $f.g$ e $\frac{f}{g}$, sendo, neste último caso, $g(a)\neq 0$.

2) a) Uma função polinomial é contínua para todo número real.
b) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.
c) As funções f(x) = senx e g(x) = cosx são contínuas para todo número real x.
d) A função exponencial f(x) = a^x ($a > 0$, $a \neq 1$) é contínua para todo número real x.

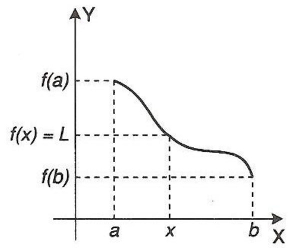
3) Teorema do limite da função composta
Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x)=b$ e g é contínua em *b*.
Então $\lim_{x\to a}(gof)(x)=g(b)$, ou seja, $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))$.

4) Se f é contínua em *a* e g é contínua em $f(a)$ então a função composta gof é contínua no ponto *a*.

5) Seja f uma função definida e contínua num intervalo I. Seja J = Im(f). Se f admite uma função inversa g = f^{-1}: J → I então g é contínua em todos os pontos de J.

Obs.: A função $g: R_+^* \to R$ definida por $g(x)=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ é contínua, pois é a inversa da função exponencial $f: R\to R_+^*$ definida por $f(x)=a^x$.

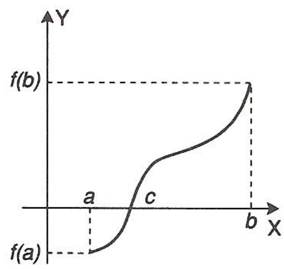
6) Teorema do Valor Intermediário
Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e L é um número real tal que $f(a)\le L\le f(b)$ ou $f(b)\le L\le f(a)$, então existe pelo menos um $x\in[a,b]$ tal que $f(x)=L$.



Observações:

a) Este teorema nos mostra por que as funções contínuas em um intervalo muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico.

b) Como conseqüência deste teorema temos que se *f* é contínua em $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe pelo menos um número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.



Exemplos:

1) Seja $f(x)=x^4-5x+3$. Determine um intervalo $[a,b]$ onde *f* tem pelo menos uma raiz real e justifique sua resposta.

2) Provar que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

3.22- Exercícios

Páginas 112, 113 e 114 do livro texto.