APOSTILA

Cálculo Diferencial e Integral I: Integral

APOSTILA

Cálculo Diferencial e Integral I: Integral

Sumário

Lista de Figuras

1 Integral

1.1 Antidiferenciação

Você já está familiarizado com *operações inversas*. Adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação são operações inversas. Nesta seção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de **antidiferenciação**.

Definição 1. Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Ilustração 1. Se F for definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5,$$

então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x,$$

logo, afirmamos que f é a derivada de F e que F é uma antiderivada de f. Se G for a função definida por $G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$ então, G também será uma antiderivada de f, pois $G'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f.

◀

Em geral, se uma função F for antiderivada de uma função f num intervalo I e se a função G for definida por

$$G(x) = F(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária, então

$$G'(x) = F'(x) = f(x),$$

e G também será uma antiderivada de f no intervalo I.

Teorema 1. [a] Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I, então haverá uma constante K, tal que

$$f(x) = g(x) + K, \qquad \text{para todo } x \text{ em } I.$$

[a] ver prova na página 286, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Teorema 2. [a] Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por

$$F(x) + C, \tag{1}$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C.

[a] ver prova na página 287, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)\; dx = F(x) + C, \tag{2}$$

onde

$$F'(x) = f(x),$$

e

$$d(F(x)) = f(x)\; dx. \tag{3}$$

De (2) e (3) podemos escrever

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C.}$$

De acordo com essa fórmula, quando antidiferenciamos a diferencial de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária. Assim, podemos considerar que o símbolo de antidiferenciação $\int$ significa a operação inversa da operação denotada por d para o cálculo da diferencial.

Se "$F(x)+C$" for o conjunto de todas as funções cuja diferencial é $f(x)\; dx$, também será o conjunto de todas as funções cujas derivadas são $f(x)$. Assim sendo, a antidiferenciação é considerada como a operação de encontrar o conjunto de todas as funções, tendo uma dada derivada.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação. Assim sendo, os teoremas a seguir podem ser provados a partir dos teoremas correspondentes da diferenciação.

Teorema 3.

$$\int dx = x + C.$$

Teorema 4.

$$\int af(x)\ dx = a \int f(x)\ dx,$$

onde a é uma constante.

O Teorema 4 estabelece que para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante.

Teorema 5. Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\ dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx.$$

O Teorema 5 estabelece que para determinar uma antiderivada da soma de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos os resultados, ficando subentendido que ambas as funções estão definidas no mesmo intervalo. O Teorema 5 pode ser estendido a um número qualquer, finito, de funções.

Teorema 6. Se f_1, f_2, $\ldots$, f_n estão definidas no mesmo intervalo,

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\ dx =$$

$$= c_1 \int f_1(x)\ dx + c_2 \int f_2(x)\ dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\ dx,$$

onde c_1, c_2, $\ldots$, c_n são constantes.

Teorema 7. [a] Se n for um número racional,

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

[a] ver prova na página 289, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Exemplo 1. Aplicando o Teorema 7, calcule para valores específicos de n:

1. $\int x^2\, dx$;
2. $\int x^3\, dx$;
3. $\int \frac{1}{x^2}\, dx$;
4. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$.

Solução:

1. $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$;
2. $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$;
3. $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$;
4. $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

$\blacksquare$

Exemplo 2. Utilize os Teoremas 3 até 7 para antidiferenciar $\int (3x+5)\ dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int (3x+5)\ dx &= \int 3x\ dx + \int 5\ dx \qquad \text{(pelo Teorema 5)}\\
&= 3\int x\ dx + 5\int\ dx \qquad \text{(pelo Teorema 4)}\\
&= 3\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)+5(x+C_2) \qquad \text{(pelos Teoremas 7 e 3)}\\
&= \frac{3}{2}x^2+5x+(3C_1+5C_2).
\end{aligned}$$

Como $3C_1+5C_2$ é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada por C; assim, o resultado pode ser escrito como

$$\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada.

$$D_x\left(\frac{3}{2}x^2+5x+C\right)=3x+5.$$

■

Exemplo 3. Calcule

$$\int (5x^4-8x^3+9x^2-2x+7)\ dx.$$

Solução:

$$\int (5x^4-8x^3+9x^2-2x+7)\ dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 5\int x^4\ dx - 8\int x^3\ dx + 9\int x^2\ dx - 2\int x\ dx + 7\int\ dx\\
&= 5\ .\ \frac{x^5}{5} - 8\ .\ \frac{x^4}{4} + 9\ .\ \frac{x^3}{3} - 2\ .\ \frac{x^2}{2} + 7x + C\\
&= x^5-2x^4+3x^3-x^2+7x+C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4. Calcule
$$\int \sqrt{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\,dx &= \int x^{\frac{1}{2}}(x+x^{-1})\,dx\\
&= \int (x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx\\
&= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C\\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 5. Calcule
$$\int \frac{5t^2+7}{t^{\frac{4}{3}}}dt.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5t^2+7}{t^{\frac{4}{3}}}dt &= 5\int \frac{t^2}{t^{\frac{4}{3}}}dt+7\int \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}dt\\
&= 5\int t^{\frac{2}{3}}dt+7\int t^{-\frac{4}{3}}dt\\
&= 5\left(\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right)+7\left(\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right)+C\\
&= 5\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)+7(-3t^{-\frac{1}{3}})+C\\
&= 3t^{\frac{5}{3}}-\frac{21}{t^{\frac{1}{3}}}+C.
\end{aligned}$$

■

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e cosseno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

Teorema 8. [a]

$$\int \operatorname{sen} x \; dx = -\cos x + C.$$

[a]ver prova na página 291, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Teorema 9. [a]

$$\int \cos x \; dx = \operatorname{sen} x + C.$$

[a]ver prova na página 291, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Os teoremas a seguir são consequências dos teoremas para as derivadas das funções tangente, cotangente, secante e cossecante. As demonstrações também são imediatas, obtidas com o cálculo da derivada do segundo membro das fórmulas.

Teorema 10.

$$\int \sec^2 x \; dx = \tan x + C.$$

Teorema 11.

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \; dx = -\operatorname{cotan} x + C.$$

Teorema 12.

$$\int \sec x \tan x \; dx = \sec x + C.$$

Teorema 13.

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x \; dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

Exemplo 6. Calcule

$$\int (3\sec x \tan x - 5\,\mathrm{cosec}^2 x)\ dx.$$

Solução:

Aplicando os Teoremas 12 e 11,

$$\begin{aligned}\int (3\sec x \tan x - 5\,\mathrm{cosec}^2 x)\ dx &= 3\int \sec x \tan x\ dx - 5\int \mathrm{cosec}^2 x\ dx\\ &= 3\sec x - 5(-\,\mathrm{cotan}\, x) + C\\ &= 3\sec x + 5\,\mathrm{cotan}\, x + C.\end{aligned}$$

■

As **identidades trigonométricas** são frequentemente usadas quando calculamos antiderivadas envolvendo funções trigonométricas. As oito identidades fundamentais a seguir são cruciais:

$\mathrm{sen}\, x\, \mathrm{cosec}\, x = 1;$	$\mathrm{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x};$
$\tan x = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x};$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x;$
$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;$	$\tan x\, \mathrm{cotan}\, x = 1;$
$\cos x \sec x = 1;$	$\mathrm{cotan}^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x.$

Exemplo 7. Calcule

$$\int \frac{2\,\mathrm{cotan}\, x - 3\,\mathrm{sen}^2 x}{\mathrm{sen}\, x}\ dx.$$

Solução:

$$\int \frac{2\,\mathrm{cotan}\, x - 3\,\mathrm{sen}^2 x}{\mathrm{sen}\, x}\ dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \,.\, \operatorname{cotan} x \; dx - 3\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \; dx \\
&= 2\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x \; dx - 3\int \operatorname{sen} x \; dx \\
&= 2(-\operatorname{cosec} x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(dos Teoremas 13 e 8)} \\
&= -2\operatorname{cosec} x + 3\cos x + C.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 8. Calcule

$$\int (\tan^2 x + \operatorname{cotan}^2 x + 4) \; dx.$$

Solução:

$$\int (\tan^2 x + \operatorname{cotan}^2 x + 4) \; dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int [(\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 4] \; dx \\
&= \int \sec^2 x \; dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \; dx + 2\int \; dx \\
&= \tan x - \operatorname{cotan} x + 2x + C \qquad \text{(dos Teoremas 10 e 11).}
\end{aligned}
$$

■

Frequentemente, em aplicações envolvendo antidiferenciação, desejamos encontrar uma antiderivada específica que satisfaça determinadas condições chamadas **inicial**[1] ou **lateral**[2], conforme elas ocorrem no ponto inicial ou para os pontos extremos do intervalo de definição da variável. Por exemplo, se uma equação envolvendo $\frac{dy}{dx}$ for dada, bem como a condição inicial de que $y = y_1$ quando $x = x_1$, então depois que o conjunto de todas as antiderivadas for encontrado, se x e y forem substituídos por x_1 e y_1, iremos determinar um valor específico da constante arbitrária C. Com esse valor de C, uma determinada antiderivada é obtida.

[1] também conhecida como condição de Cauchy.
[2] também conhecida como condição de contorno, de fronteira ou de extremos.

Ilustração 2. Suponha que desejemos encontrar uma determinada função $y(x)$ satisfazendo a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

(ou seja, uma antiderivada da função $f(x) = 2x$) e a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$. Da fórmula

$$y = \int 2x\ dx, \qquad \text{temos} \qquad y = x^2 + C. \tag{4}$$

Em (4), substituímos x por 2 e y por 6, obtendo

$$6 = 4 + C \Rightarrow C = 2.$$

Quando esse valor de C é substituído em (4), obtemos

$$y = x^2 + 2,$$

que dá a antiderivada desejada. ◀

Exemplo 9. Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x-5$. Se a curva contém o ponto $(3, 7)$, ache sua equação.

Solução:

Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x, y) é o valor da derivada nesse ponto, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4x - 5 \\ y &= \int (4x-5)\ dx \\ y &= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C \\ y &= 2x^2 - 5x + C. \end{aligned} \tag{5}$$

A equação (5) representa uma *família* de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto $(3, 7)$, substituímos x por 3 e y por 7 em (5), obtendo

$$\begin{aligned} 7 &= 2(9) - 5(3) + C \\ 7 &= 18 - 15 + C \\ C &= 4. \end{aligned}$$

Substituindo C por 4 em (5), iremos obter a equação da curva pedida, que é

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$

■

Teorema 14.

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Exemplo 10. Calcule $\int e^x \, dx$.

Solução:

De acordo com o Teorema 14,

$$\int e^x \, dx = \frac{e^x}{\ln e} + C = e^x + C.$$

■

Exemplo 11. Calcule $\int \frac{1}{x} \, dx$, para $x > 0$.

Solução:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = (\ln x) + C, \qquad \text{para} \qquad x > 0,$$

pois $(\ln x + C)' = \dfrac{1}{x}$.

■

1.1.1 Exercícios

1. Faça a antidiferenciação e, calculando a derivada de sua resposta, verifique o resultado.

(a) $$\int 3x^4\ dx.$$

(b) $$\int 2x^7\ dx.$$

(c) $$\int \frac{1}{x^3}\ dx.$$

(d) $$\int \frac{3}{t^5}\ dt.$$

(e) $$\int 5u^{\frac{3}{2}}\ du.$$

(f) $$\int 10\sqrt[3]{x^2}\ dx.$$

(g) $$\int \frac{7}{\sqrt[3]{x}}\ dx.$$

(h) $$\int \frac{3}{\sqrt{y}}\ dy.$$

(i) $$\int (3 - 2t + t^2)\ dt.$$

(j) $$\int (4x^3 - 3x^2 + 6x - 1)\ dx.$$

(k) $$\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\ dx.$$

(l) $$\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\ dx.$$

(m) $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\ dx.$$

(n) $$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx.$$

(o) $$\int (4 \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x + 2\sec^2 x)\ dx.$$

(p) $$\int (3\operatorname{cosec}^2 t - 5\sec t \tan t)\ dt.$$

2. Encontre a antiderivada.

(a)
$$\int 6t^2 \sqrt[3]{t}\ dt.$$

(b)
$$\int 7x^3 \sqrt{x}\ dx.$$

(c)
$$\int (4x^3 + x^2)\ dx.$$

(d)
$$\int (3u^5 - 2u^3)\ du.$$

(e)
$$\int y^3(2y^2 - 3)\ dy.$$

(f)
$$\int x^4(5 - x^2)\ dx.$$

(g)
$$\int \sqrt{x}(x+1)\ dx.$$

(h)
$$\int (ax^2 + bx + c)\ dx.$$

(i)
$$\int (x^{\frac{3}{2}} - x)\ dx.$$

(j)
$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ dx.$$

(k)
$$\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)\ dx.$$

(l)
$$\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)\ dx.$$

(m)
$$\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\ dx.$$

(n)
$$\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\ dy.$$

(o)
$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ dx.$$

(p)
$$\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\ dt.$$

(q)
$$\int (3\,\mathrm{sen}\, t - 2\cos t)\ dt.$$

(r)
$$\int (5\cos x - 4\,\mathrm{sen}\, x)\ dx.$$

(s)
$$\int (2\,\mathrm{cotan}^2\,\theta - 3\tan^2\theta)\ d\theta.$$

(t)
$$\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\ d\theta.$$

1.2 Algumas Técnicas de Antidiferenciação

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas vistos na Seção 1.1. Então, faz-se necessário aprender certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Nesta seção serão apresentadas técnicas que requerem a **regra da cadeia para a antidiferenciação** e aquelas que envolvem uma **mudança de variável**.

Ilustração 3. Para diferenciar $\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}$ aplicamos a regra da cadeia para a diferenciação e obtemos

$$D_x\left[\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}\right] = (1+x^2)^9(2x).$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9(2x)$. Então, precisamos calcular

$$\int (1+x^2)^9(2x\ dx). \tag{6}$$

Para chegarmos a um procedimento que possa ser usado em tal situação, seja

$$g(x) = 1+x^2 \qquad \text{e} \qquad g'(x)\ dx = 2x\ dx. \tag{7}$$

Então, (6) pode ser escrita como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\ dx]. \tag{8}$$

Do Teorema 7,

$$\int u^9 du = \frac{1}{10}u^{10} + C. \tag{9}$$

Observe que (8) é da mesma forma que o primeiro membro de (9). Assim,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\ dx] = \frac{1}{10}[g(x)]^{10} + C,$$

e com $g(x)$ e $g'(x)\ dx$ dados em (7), temos

$$\int (1+x^2)^9(2x\ dx) = \frac{1}{10}(1+x^2)^{10} + C.$$

◀

Teorema 15. *A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação* [a]*:* Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,

$$\int f(g(x))[g'(x)\ dx] = F(g(x)) + C.$$

[a] ver prova na página 296, Livro :"O Cálculo com Geometria Analítica", 3ª edição, Louis Leithold.

Como caso particular do Teorema 15, a partir do Teorema 7, temos a fórmula da potência generalizada para antiderivadas que será enunciada a seguir.

Teorema 16. Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional,

$$\int [g(x)]^n [g'(x)\ dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

Exemplo 12. Calcule

$$\int \sqrt{3x+4}\ dx.$$

Solução:

Para aplicar o Teorema 16, escrevemos primeiro

$$\int \sqrt{3x+4}\ dx = \int (3x+4)^{\frac{1}{2}}\ dx.$$

Observamos que, se

$$g(x) = 3x+4, \quad \text{então} \quad g'(x)\ dx = 3\ dx. \tag{10}$$

Logo, precisamos de um fator de 3 que acompanhe dx para dar $g'(x)\ dx$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \int (3x+4)^{\frac{1}{2}}\ dx &= \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}(3\ dx) \\ &= \frac{1}{3} \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} (3\ dx). \end{aligned}$$

Do Teorema 16, com $g(x)$ e $g'(x)\ dx$ dados por (10), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int (3x+4)^{\frac{1}{2}}(3\ dx) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 13. Ache

$$\int x^2(5+2x^3)^8\ dx.$$

Solução:

Observe que, se

$$g(x)=5+2x^3, \qquad \text{então} \qquad g'(x)\ dx = 6x^2\ dx. \tag{11}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\ dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\ dx),$$

precisamos de um fator 6 que acompanhe $x^2\ dx$ para obter $g'(x)\ dx$. Assim, escrevemos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\ dx = \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\ dx).$$

Aplicando o Teorema 16 com $g(x)$ e $g'(x)\ dx$ dado em (11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\ dx) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9}+C\\ &= \frac{1}{54}(5+2x^3)^9+C.\end{aligned}$$

■

A regra da cadeia para antidiferenciação (Teorema 15) é

$$\int f(g(x))[g'(x)\ dx] = F(g(x))+C,$$

onde F é uma antiderivada de f. Se nessa fórmula f for a função *cosseno*, então F será a função *seno* e teremos

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\ dx] = \operatorname{sen}(g(x))+C. \tag{12}$$

Exemplo 14. Calcule
$$\int x \cos x^2 \; dx.$$

Solução:

Se
$$g(x) = x^2, \qquad \text{então} \qquad g'(x)\; dx = 2x \; dx. \tag{13}$$

Como
$$\int x \cos x^2 \; dx = \int (\cos x^2)(x \; dx),$$
precisamos de um fator de 2 acompanhando $x\; dx$ para obter $g'(x)\; dx$. Assim,
$$\int x \cos x^2 \; dx = \frac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x \; dx).$$

Aplicando (12) com $g(x)$ e $g'(x)\; dx$ dados por (13), iremos obter
$$\frac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x \; dx) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.$$

■

Exemplo 15. Calcule
$$\int \frac{4x^2 \; dx}{(1-8x^3)^4}.$$

Solução:

Como $D_x(1-8x^3) = -24x^2 \; dx$, escreveremos
$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 \; dx}{(1-8x^3)^4} &= 4 \int (1-8x^3)^{-4}(x^2 \; dx) \\
&= 4\left(-\frac{1}{24}\right) \int (1-8x^3)^{-4}(-24x^2 \; dx) \\
&= -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C.
\end{aligned}$$

■

Observação: Os resultados de cada um dos exemplos resolvidos anteriormente podem ser verificados através do cálculo da derivada da resposta.

Em um exemplo resolvido anteriormente tínhamos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \frac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C.$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$D_x\left[\frac{1}{54}(5+2x^3)^9\right] = \frac{1}{54}\,.\,9(5+2x^3)^8(6x^2) = x^2(5+2x^3)^8.$$

Algumas vezes é possível calcular uma antiderivada após efetuarmos a **mudança de uma variável**, conforme mostra o Exemplo 16.

Exemplo 16. Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx.$$

Solução:

Seja $u = 1 + x$; $\qquad du = dx$; $\qquad x = u - 1$.

Temos

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u-1)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \int (u^2-2u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \int u^{\frac{5}{2}}\,du - 2\int u^{\frac{3}{2}}\,du + \int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2\,.\,\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

■

Observação: Um método alternativo para a solução do Exemplo 16 é tomar

$$v = \sqrt{1+x}; \qquad v^2 = 1 + x;$$
$$x = v^2 - 1; \qquad dx = 2v\,dv.$$

O cálculo, então, é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (v^2-1)^2\,.\,v\,.\,(2v\,dv)\\
&= 2\int v^6\,dv - 4\int v^4\,dv + 2\int v^2\,dv\\
&= \frac{2}{7}v^7 - \frac{4}{5}v^5 + \frac{2}{3}v^3 + C\\
&= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$D_x\left[\frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= (1+x)^{\frac{5}{2}} - 2(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}\\
&= (1+x)^{\frac{1}{2}}[(1+x)^2 - 2(1+x) + 1]\\
&= (1+x)^{\frac{1}{2}}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1]\\
&= x^2\sqrt{1+x}.
\end{aligned}$$

Exemplo 17. Calcule

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Solução:

Seja $u = \sqrt{x}$ e $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\\
&= 2\int \operatorname{sen} u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 18. Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\ dx.$$

Solução:

Seja $u = 1-\cos x$ e $du = \operatorname{sen} x\ dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\ dx &= \int u^{\frac{1}{2}}\ du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(1-\cos x)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 19. Calcule

$$\int \tan x \sec^2 x\ dx$$

por dois métodos: **(a)** Faça $u = \tan x$; **(b)** Faça $v = \sec x$; **(c)** Explique a diferença nas respostas de **(a)** e de **(b)**.

Solução:

(a) Se $u = \tan x$, então $du = \sec^2 x\ dx$. Temos

$$\begin{aligned}
\int \tan x \sec^2 x\ dx &= \int u\ du \\
&= \frac{u^2}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x + C.
\end{aligned}$$

(b) Se $v = \sec x$, então $dv = \sec x \tan x \; dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x \; dx &= \int \sec x (\sec x \tan x \; dx) \\ &= \int v \; dv \\ &= \frac{v^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\sec^2 x + C.\end{aligned}$$

(c) Como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, as funções definidas por $\frac{1}{2}\tan^2 x$ e $\frac{1}{2}\sec^2 x$ diferem por uma constante e, assim sendo, cada uma serve como antiderivada de $\tan x \sec^2 x$. Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sec^2 x + C &= \frac{1}{2}(\tan^2 x + 1) + C \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + K, \qquad \text{onde } K = \frac{1}{2} + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 20. Seja $\alpha \neq 0$ uma constante. Verifique que

$$\int e^{\alpha x} \; dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C.$$

Solução:

$$\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]' = \frac{1}{\alpha}[e^{\alpha x}]' = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\alpha = e^{\alpha x}.$$

Assim,

$$\int e^{\alpha x} \; dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C.$$

■

Exemplo 21. Calcule $\int e^{2x}\,dx$.

Solução:

De acordo com o Exemplo 20,

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C,$$

logo,

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

■

Observação: Uma outra forma de resolver o Exemplo 21 é fazendo uma mudança de variável. Sendo $u = 2x$, $du = 2\,dx$. Fazendo a substituição em $\int e^{2x}\,dx$, temos que

$$\int e^{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Exemplo 22. Seja $\alpha \neq 0$ uma constante. Verifique que

$$\int \cos \alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha x + C.$$

Solução:

$$\left[\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha x\right]' = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}'\,\alpha x\ .\ (\alpha x)' = \cos \alpha x.$$

Assim,

$$\int \cos \alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha x + C.$$

■

Exemplo 23. Calcule
$$\int \cos 3x \; dx.$$

Solução:

De acordo com o Exemplo 22,

$$\int \cos \alpha x \; dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C.$$

■

Observação: Uma outra forma de resolver o Exemplo 23 é fazendo uma mudança de variável. Sendo $u = 3x$, $du = 3 \; dx$. Fazendo a substituição em $\int \cos 3x \; dx$, temos que

$$\int \cos u \; \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos u \; du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C.$$

Exemplo 24. Calcule
$$\int \operatorname{sen} 5x \; dx.$$

Solução:

Seja $u = 5x$, $du = 5 \; dx$. Fazendo a substituição em $\int \operatorname{sen} 5x \; dx$, temos que

$$\int \operatorname{sen} u \; \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \operatorname{sen} u \; du = -\frac{1}{5} \cos u + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$$

■

Exemplo 25. Encontre

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\ dx.$$

Solução:

Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\ dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\ dx = \frac{du}{4}$, fazendo uma mudança de variável, temos

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^4 + 2)\ dx &= \int \cos u\ .\ \frac{1}{4}\ du = \frac{1}{4} \int \cos u\ du \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} u\ + C \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 26. Calcule

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\ dx.$$

Solução:

Seja $u = 1 - 4x^2$. Então $du = -8x\ dx$, portanto $x\ dx = \frac{1}{8}\ du$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\ dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du \\ &= -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}}\ du \\ &= -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 27. Calcule

$$\int \tan x \; dx.$$

Solução:

Vamos escrever primeiro a tangente em termos de seno e cosseno:

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \; dx.$$

Isso sugere que devemos substituir $u = \cos x$, visto que $du = -\operatorname{sen} x \; dx$ e, portanto, $\operatorname{sen} x \; dx = -du$:

$$\begin{aligned} \int \tan x \; dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \; dx = -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

■

Uma vez que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{|\cos x|}\right) = \ln|\sec x|$, o resultado do Exemplo 27 pode também ser escrito como

$$\int \tan x \; dx = \ln|\sec x| + C.$$

1.2.1 Exercícios

1. Efetue a antidiferenciação.

(a) $$\int \sqrt{1-4y}\; dy.$$

(b) $$\int \sqrt[3]{3x-4}\; dx.$$

(c) $$\int \sqrt[3]{6-2x}\; dx.$$

(d) $$\int \sqrt{5r+1}\; dr.$$

(e) $$\int x\sqrt{x^2-9}\; dx.$$

(f) $$\int 3x\sqrt{4-x^2}\; dx.$$

(g) $$\int x^2(x^3-1)^{10}\; dx.$$

(h) $$\int x(2x^2+1)^6\; dx.$$

(i) $$\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\; dx.$$

(j) $$\int \frac{x\; dx}{(x^2+1)^3}.$$

(k) $$\int \frac{y^3\; dy}{(1-2y^4)^5}.$$

(l) $$\int \frac{s\; ds}{\sqrt{3s^2+1}}.$$

(m) $$\int (x^2-4x+4)^{\frac{4}{3}}\; dx.$$

(n) $$\int x^4\sqrt{3x^5-5}\; dx.$$

(o) $$\int x\sqrt{x+2}\; dx.$$

(p) $$\int \frac{t\; dt}{\sqrt{t+3}}.$$

(q) $$\int \frac{2r\; dr}{(1-r)^7}.$$

(r) $$\int x^3(2-x^2)^{12}\; dx.$$

(s) $$\int x^2\sqrt{3-2x}\; dx.$$

(t) $$\int (x^3+3)^{\frac{1}{4}}x^5\; dx.$$

(u) $$\int \cos 4\theta \; d\theta.$$

(v) $$\int \operatorname{sen} \frac{1}{3}x \; dx.$$

(w) $$\int 6x^2 \operatorname{sen} x^3 \; dx.$$

(x) $$\int \frac{1}{2}t \cos 4t^2 \; dt.$$

(y) $$\int \sec^2 5x \; dx.$$

(z) $$\int \operatorname{cosec}^2 2\theta \; d\theta.$$

2. Encontre a antiderivada.

(a) $$\int y \operatorname{cosec} 3y^2 \operatorname{cotan} 3y^2 \; dy.$$

(b) $$\int r^2 \sec^2 r^3 \; dr.$$

(c) $$\int \cos x (2 \operatorname{sen} x)^5 \; dx.$$

(d) $$\int \frac{4 \operatorname{sen} x \; dx}{(1+\cos x)^2}.$$

(e) $$\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}} \, \frac{dx}{x^2}.$$

(f) $$\int \sqrt{\frac{1}{t} - 1} \, \frac{dt}{t^2}.$$

(g) $$\int 2 \operatorname{sen} x \sqrt[3]{1+\cos x} \; dx.$$

(h) $$\int \operatorname{sen} 2x \sqrt{2 - \cos 2x} \; dx.$$

(i) $$\int \cos^2 t \operatorname{sen} t \; dt.$$

(j) $$\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \; d\theta.$$

(k) $$\int (\tan 2x + \operatorname{cotan} 2x)^2 \; dx.$$

(l) $$\int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{4}x}{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{4}x}} \; dx.$$

(m) $$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen} 3x}} \; dx.$$

(n) $$\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \; dt.$$

(o) $$\int \frac{(x^2+2x) \; dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}.$$

(p)
$$\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\ dx.$$

(q)
$$\int \frac{x(3x^2+1)\ dx}{(3x^4+2x^2+1)^2}.$$

(r)
$$\int \sqrt{3+s}(s+1)^2\ ds.$$

(s)
$$\int \frac{(y+3)\ dy}{(3-y)^{\frac{2}{3}}}.$$

(t)
$$\int (2t^2+1)^{\frac{1}{3}} t^3\ dt.$$

(u)
$$\int \frac{(r^{\frac{1}{3}}+2)^4\ dr}{\sqrt[3]{r^2}}.$$

(v)
$$\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)\ dt.$$

(w)
$$\int \frac{x^3\ dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

(x)
$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

(y)
$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\ dx.$$

(z)
$$\int \sec x \tan x \cos(\sec x)\ dx.$$

3. Calcule a antiderivada das funções e verifique sua resposta por derivação.

(a)
$$\int e^{-x}\ dx.$$

(b)
$$\int e^{5x}\ dx.$$

(c)
$$\int (e^{-2x}+e^{4x})\ dx.$$

(d)
$$\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}\right)\ dx.$$

(e)
$$\int \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)\ dx.$$

(f)
$$\int e^{\sqrt{2x}}\ dx.$$

(g)
$$\int \operatorname{sen} 2x\ dx.$$

(h)
$$\int \cos 5x\ dx.$$

(i)
$$\int \operatorname{sen} 4t\ dt.$$

(j)
$$\int \cos 7t\ dt.$$

(k)
$$\int \cos \sqrt{3}t \; dt.$$

(l)
$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) \; dx.$$

(m)
$$\int \left(x + \frac{1}{5}\cos 3x\right) \; dx.$$

(n)
$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} \; dx.$$

(o)
$$\int \left(\frac{1}{3}\cos 8x - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x\right) \; dx.$$

(p)
$$\int \left(\frac{1}{3}e^{3x} + \operatorname{sen} 3x\right) \; dx.$$

1.3 Integração por Partes

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil chamado **integração por partes**. Se f e g forem funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x).$$

Integrando ambos os membros, iremos obter

$$\int f(x)g'(x)\ dx = \int D_x[f(x)g(x)]\ dx - \int g(x)f'(x)\ dx$$

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\ dx. \tag{14}$$

Chamaremos (14) de **fórmula de integração por partes**. Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \qquad \text{e} \qquad v = g(x).$$

Então

$$du = f'(x)\ dx \qquad \text{e} \qquad dv = g'(x)\ dx.$$

Assim sendo, (14) torna-se

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du. \tag{15}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int u\ dv$ em termos de uma outra integral, $\int v\ du$. Escolhendo adequadamente u e dv, pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira.

Quando escolhemos as substituições para u e dv, em geral pretendemos que dv **seja o fator do integrando mais complicado do que se possa integrar diretamente**, e que u **seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples**.

Exemplo 28. Calcule
$$\int x\ln x\ dx.$$

Solução:

Para determinar quais as substituições para u e dv, deve-se ter em mente que para encontrar v é preciso saber integrar dv. Isso sugere que $dv = x\ dx$ e $u = \ln x$. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{e} \qquad du = \frac{dx}{x}.$$

Da fórmula (15),

$$\begin{aligned}
\int x\ln x\ dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1\ln x - \frac{1}{2}\int x\ dx - C_1\int\frac{dx}{x}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1\ln x - \frac{x^2}{4} - C_1\ln x + C_2\\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2.
\end{aligned}$$

■

No Exemplo 28, observe que a primeira constante de integração C_1 não aparece na resposta final. C_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x\ln x\ dx$. Essa situação é válida em geral e provamos isso da seguinte forma: escrevendo $v + C_1$ na fórmula (15), teremos

$$\begin{aligned}
\int u\ dv &= u(v + C_1) - \int(v + C_1)\ du\\
&= uv + C_1 v - \int v\ du - C_1\int du\\
&= uv + C_1 u - \int v\ du - C_1 u\\
&= uv - \int v\ du.
\end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrever C_1 quando calcularmos v a partir de dv.

Observação: A resposta do Exemplo 28 pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C.$$

Esse resultado pode ser verificado calculando a derivada de um produto.

$$\begin{aligned} D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] &= \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x + x\ln x - \frac{1}{2}x \\ &= x\ln x. \end{aligned}$$

Exemplo 29. Calcule

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx.$$

Solução:

Usamos integração por partes com $dv = xe^{x^2}\,dx$ e $u = x^2$. Então,

$$v = \frac{1}{2}e^{x^2} \qquad \text{e} \qquad du = 2x\,dx.$$

Da fórmula (15)

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2}\,dx &= x^2\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 30. Calcule
$$\int x\cos x\ dx.$$

Solução:

Seja $u = x$ e $dv = \cos x\ dx$. Então,
$$du = dx \qquad \text{e} \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

Assim,
$$\begin{aligned}\int x\cos x\ dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ dx\\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + C.\end{aligned}$$

■

Observação: No Exemplo 30, se para u e dv tivéssemos escolhido
$$u = \cos x \qquad \text{e} \qquad dv = x\ dx,$$
então,
$$du = -\operatorname{sen} x\ dx \qquad \text{e} \qquad v = \frac{1}{2}x^2.$$

Assim,
$$\int x\cos x\ dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\operatorname{sen} x\ dx.$$

A integral do segundo membro é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente, indicando assim que as escolhas feitas para u e dv não são boas.

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes.

Exemplo 31. Calcule
$$\int x^2e^x\ dx.$$

Solução:

Seja $u = x^2$ e $dv = e^x\ dx$. Então,
$$du = 2x\ dx \qquad \text{e} \qquad v = e^x.$$

Temos assim,

$$\int x^2e^x\ dx = x^2e^x - 2\int xe^x\ dx.$$

Vamos aplicar a integração por partes ao segundo membro. Seja $\overline{u} = x$ e $d\overline{v} = e^x\ dx$. Então,

$$d\overline{u} = dx \qquad \text{e} \qquad \overline{v} = e^x.$$

Obtemos assim,

$$\begin{aligned} \int xe^x\ dx &= xe^x - \int e^x\ dx \\ &= xe^x - e^x + \overline{C}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int x^2e^x\ dx &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x + \overline{C}) \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C, \qquad \text{onde} \qquad C = -2\overline{C}. \end{aligned}$$

■

A **integração por partes** é frequentemente usada quando o integrando envolve **logaritmos**, **funções trigonométricas inversas** e **produtos de funções**.

Exemplo 32. Calcule

$$\int \tan^{-1} x\ dx.$$

Solução:

Seja $u = \tan^{-1} x$ e $dv = dx$. Então,

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{e} \qquad v = x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x\ dx &= x\tan^{-1} x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2} \\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 33. Calcule
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solução:

Seja $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Então,
$$du = e^x \, dx \qquad \text{e} \qquad v = -\cos x.$$

Logo,
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de $\operatorname{sen} x$ temos $\cos x$. Aplicamos a integração por partes novamente, sendo $\overline{u} = e^x$ e $d\overline{v} = \cos x \, dx$. Então,
$$d\overline{u} = e^x \, dx \qquad \text{e} \qquad \overline{v} = \operatorname{sen} x.$$

Assim,
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right).$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Assim, se somarmos
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$
a ambos os membros da igualdade, teremos
$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C.$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima tem uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escrita como $2C$; assim, quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será C. Assim temos
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

■

Ao aplicarmos a integração por partes em uma dada integral, um determinado par de escolhas para u e dv pode funcionar, enquanto que outro par pode falhar.

Observação: No Exemplo 33, na etapa em que tínhamos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx,$$

se calcularmos a integral à direita tomando $\overline{u} = \cos x$ e $d\overline{v} = e^x \cos x \, dx$, temos

$$d\overline{u} = -\operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{e} \qquad \overline{v} = e^x.$$

Assim, iremos obter

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right) \\ &= \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

1.3.1 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a)
$$\int xe^{3x}\ dx.$$

(b)
$$\int x\cos 2x\ dx.$$

(c)
$$\int x\sec x\tan x\ dx.$$

(d)
$$\int x3^x\ dx.$$

(e)
$$\int \ln x\ dx.$$

(f)
$$\int \operatorname{sen}^{-1} w\ dw.$$

(g)
$$\int (\ln x)^2\ dx.$$

(h)
$$\int x\sec^2 x\ dx.$$

(i)
$$\int x\tan^{-1} x\ dx.$$

(j)
$$\int x^2\ln x\ dx.$$

(k)
$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\ dx.$$

(l)
$$\int x^2\operatorname{sen} 3x\ dx.$$

(m)
$$\int \operatorname{sen} x\ln(\cos x)\ dx.$$

(n)
$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx.$$

(o)
$$\int e^x\cos x\ dx.$$

(p)
$$\int x^5 e^{x^2}\ dx.$$

(q)
$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(r)
$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\ dx.$$

(s)
$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\, dx.$$

(t)
$$\int \frac{\cot\text{an}^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz.$$

(u)
$$\int \cos^{-1} 2x\ dx.$$

(v)
$$\int \cos\sqrt{x}\ dx.$$

(w)
$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\ dx.$$

1.4 Integração de Potências de Seno e Cosseno

Vamos considerar quatro casos de integrais indefinidas envolvendo potências de seno e cosseno, conforme as potências sejam pares ou ímpares.

1.4.1 Caso 1

$$\int \operatorname{sen}^n u \; du \qquad \text{ou} \qquad \int \cos^n u \; du,$$

onde n é um inteiro ímpar.

Exemplo 34. Calcule

$$\int \cos^3 x \; dx.$$

Solução:

$$\int \cos^3 x \; dx = \int \cos^2 x(\cos x \; dx) = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x \; dx)$$

$$\int \cos^3 x \; dx = \int \cos x \; dx - \int \operatorname{sen}^2 x \;\; \cos x \; dx. \tag{16}$$

Para a segunda integral do lado direito de (16) observe que sendo $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x \; dx$, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x \; dx) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C_1.$$

Como a primeira integral do lado direito de (16) é $\operatorname{sen} x + C_2$,

$$\int \cos^3 x \; dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C.$$

■

Exemplo 35. Calcule
$$\int \operatorname{sen}^5 x \; dx.$$

Solução:
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \; dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \; dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \; dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \; dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \; dx \\
&= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x \; dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x \; dx) \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

■

1.4.2 Caso 2

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

A solução desse caso é semelhante à do Caso 1.

Exemplo 36. Calcule
$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \; dx.$$

Solução:
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \; dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x \; dx) \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x(\operatorname{sen} x \; dx).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

■

1.4.3 Caso 3

$$\int \operatorname{sen}^n u \, du \qquad \text{e} \qquad \int \cos^n u \, du,$$

onde n é um inteiro par.

O método usado no Caso 1 e no Caso 2 não funciona nesse caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Exemplo 37. Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.
\end{aligned}$$

■

1.4.4 Caso 4

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx,$$

ambos m e n são pares.

A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

Exemplo 38. Calcule
$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \ dx.$$

Solução:
$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \ dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \ dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \ dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \ dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x \ dx \\
&= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \ dx \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 39. Calcule
$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \ dx.$$

Solução:

Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \ dx &= \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x \ dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \; dx &= \frac{1}{16}\int \frac{(1-\cos 4x)^2}{4}\; dx \\
&= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x \; dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x \; dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8x}{2} dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C \\
&= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C.
\end{aligned}
$$

■

O Exemplo 40 envolve um outro tipo de integral contendo um produto de seno e cosseno.

Exemplo 40. Calcule

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \; dx.$$

Solução:

Vamos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)x.$$

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \; dx &= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x \; dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x \; dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.
\end{aligned}
$$

■

1.4.5 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a) $$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \; dx.$$

(b) $$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \; dx.$$

(c) $$\int \cos^3 4x \operatorname{sen} 4x \; dx.$$

(d) $$\int \cos^6 \frac{1}{2}x \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \; dx.$$

(e) $$\int \operatorname{sen}^3 x \; dx.$$

(f) $$\int \operatorname{sen}^2 3x \; dx.$$

(g) $$\int \operatorname{sen}^4 z \; dz.$$

(h) $$\int \cos^5 x \; dx.$$

(i) $$\int \cos^2 \frac{1}{2}x \; dx.$$

(j) $$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \; dx.$$

(k) $$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \; dx.$$

(l) $$\int \cos^6 x \; dx.$$

(m) $$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \; dx.$$

(n) $$\int \operatorname{sen}^2 2t \cos^4 2t \; dt.$$

(o) $$\int \operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t \; dt.$$

(p) $$\int \sqrt{\cos z} \operatorname{sen}^3 z \; dz.$$

(q) $$\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}} \; dx.$$

(r) $$\int \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2}y \cos^2 \frac{1}{2}y \; dy.$$

(s) $$\int \cos 4x \operatorname{sen} 3x \; dx.$$

(t) $$\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x \; dx.$$

(u)
$$\int \operatorname{sen} 3y \cos 5y \; dy.$$

(v)
$$\int \cos t \cos 3t \; dt.$$

(w)
$$\int (\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 2t)^2 \; dt.$$

(x)
$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x \; dx.$$

1.5 Integração de Potências da Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Vamos lembrar as seguintes fórmulas envolvendo tangente, cotangente, secante e cossecante:

$$\int \tan u \; du = \ln|\sec u| + C.$$

$$\int \sec u \; du = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

$$\int \sec^2 u \; du = \tan u + C.$$

$$\int \sec u \tan u \; du = \sec u + C.$$

$$\int \operatorname{cotan} u \; du = \ln|\operatorname{sen} u| + C.$$

$$\int \operatorname{cosec} u \; du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotan} u| + C.$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u \; du = -\operatorname{cotan} u + C.$$

$$\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotan} u \; du = -\operatorname{cosec} u + C.$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \qquad \text{e} \qquad 1 + \operatorname{cotan}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u,$$

é possível calcular integrais da forma

$$\int \tan^m u \sec^n u \; du \qquad \text{e} \qquad \int \operatorname{cotan}^m u \operatorname{cosec}^n u \; du, \tag{17}$$

onde m e n são inteiros não-negativos.

Exemplo 41. Calcule: **(a)** $\int \tan^2 x\ dx$; **(a)** $\int \cot\text{an}^2 x\ dx$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x\ dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \sec^2 x\ dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cotan}^2 x\ dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x\ dx - \int dx \\ &= -\operatorname{cotan} x - x + C. \end{aligned}$$

■

Vamos distinguir agora os vários casos das integrais da forma (17).

1.5.1 Caso 1

$$\int \tan^n u\ du \qquad \text{ou} \qquad \int \operatorname{cotan}^n u\ du,$$

onde n é um inteiro positivo.

Escrevemos,

$$\begin{aligned} \tan^n u &= \tan^{n-2} u \tan^2 u & \qquad \operatorname{cotan}^n u &= \operatorname{cotan}^{n-2} u \operatorname{cotan}^2 u \\ &= \tan^{n-2} u (\sec^2 - 1); & &= \operatorname{cotan}^{n-2} u (\operatorname{cosec}^2 - 1). \end{aligned}$$

Exemplo 42. Calcule
$$\int \tan^3 x\ dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\ dx &= \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x\ dx - \int \tan x\ dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 43. Calcule
$$\int \text{cotan}^4 3x\ dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \text{cotan}^4 3x\ dx &= \int \text{cotan}^2 3x(\text{cosec}^2 3x - 1)dx \\ &= \int \text{cotan}^2 3x\,\text{cosec}^2 3x\ dx - \int \text{cotan}^2 3x\ dx \\ &= \frac{1}{9}(-\text{cotan}^3 3x) - \int (\text{cosec}^2 3x - 1)dx \\ &= -\frac{1}{9}\text{cotan}^3 3x + \frac{1}{3}\text{cotan}\, 3x + x + C.\end{aligned}$$

■

1.5.2 Caso 2

$$\int \sec^n u \, du \qquad \text{ou} \qquad \int \operatorname{cosec}^n u \, du,$$

onde n é um inteiro par positivo.

Escrevemos

$$\begin{aligned} \sec^n u &= \sec^{n-2} u \sec^2 u \\ &= (\tan^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^n u &= \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u \\ &= (\operatorname{cotan}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{cosec}^2 u. \end{aligned}$$

Exemplo 44. Calcule

$$\int \operatorname{cosec}^6 x \, dx.$$

Solução:

$$\int \operatorname{cosec}^6 x \, dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int (\operatorname{cotan}^2 x + 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{cotan}^4 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx + 2 \int \operatorname{cotan}^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \operatorname{cotan}^5 x - \frac{2}{3} \operatorname{cotan}^3 x - \operatorname{cotan} x + C. \end{aligned}$$

■

1.5.3 Caso 3

$$\int \sec^n u \, du \qquad \text{ou} \qquad \int \operatorname{cosec}^n u \, du,$$

onde n é um inteiro ímpar positivo.

Para integrar potências ímpares de secante e cossecante, usaremos integração por partes.

Exemplo 45. Calcule
$$\int \sec^3 x\ dx.$$

Solução:
Seja $u = \sec x$ e $dv = \sec^2 x\ dx$. Então,
$$du = \sec x \tan x\ dx \qquad \text{e} \qquad v = \tan x.$$

Logo,
$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\ dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\ dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \int \sec x\ dx.
\end{aligned}$$

Somando
$$\int \sec^3 x\ dx$$
a ambos os membros, obtemos
$$\begin{aligned}
2\int \sec^3 x\ dx &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + 2C \\
\int \sec^3 x\ dx &= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

■

1.5.4 Caso 4

$$\int \tan^m u \sec^n u\ du \qquad \text{ou} \qquad \int \text{cotan}^m u\, \text{cosec}^n u\ du,$$
onde n é um inteiro par positivo.

Exemplo 46. Calcule

$$\int \tan^5 x \sec^4 x \ dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^4 x \ dx &= \int \tan^5 x(\tan^2 x + 1)\sec^2 x \ dx \\ &= \int \tan^7 x \sec^2 x \ dx + \int \tan^5 x \sec^2 x \ dx \\ &= \frac{1}{8}\tan^8 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C.\end{aligned}$$

■

1.5.5 Caso 5

$$\int \tan^m u \sec^n u \ du \qquad \text{ou} \qquad \int \text{cotan}^m u \,\text{cosec}^n u \ du,$$

onde m é um inteiro ímpar positivo.

Exemplo 47. Calcule

$$\int \tan^5 x \sec^7 x \ dx.$$

Solução:

$$\int \tan^5 x \sec^7 x \ dx =$$

$$\begin{aligned}&= \int \tan^4 x \sec^6 x \sec x \tan x \ dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \tan x \ dx) \\ &= \int \sec^{10} x(\sec x \tan x \ dx) - 2\int \sec^8 x(\sec x \tan x \ dx) + \int \sec^6 x(\sec x \tan x \ dx) \\ &= \frac{1}{11}\sec^{11} x - \frac{2}{9}\sec^9 x + \frac{1}{7}\sec^7 x + C.\end{aligned}$$

■

1.5.6 Caso 6:

$$\int \tan^m u \sec^n u \, du \qquad \text{ou} \qquad \int \operatorname{cotan}^m u \operatorname{cosec}^n u \, du,$$

onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou cossecante. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx. \end{aligned}$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

1.5.7 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a) $$\int \tan^2 5x\ dx.$$

(b) $$\int \text{cotan}^2\, 4t\ dt.$$

(c) $$\int x\, \text{cotan}^2\, 2x^2\ dx.$$

(d) $$\int e^x \tan^2(e^x)\ dx.$$

(e) $$\int \text{cotan}^3\, t\ dt.$$

(f) $$\int \tan^4 x\ dx.$$

(g) $$\int \text{cotan}^5\, 2x\ dx.$$

(h) $$\int \sec^4 x\ dx.$$

(i) $$\int \text{cosec}^4\, x\ dx.$$

(j) $$\int \sec^5 x\ dx.$$

(k) $$\int e^x \tan^4(e^x)\ dx.$$

(l) $$\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x}\ dx.$$

(m) $$\int \tan^6 x \sec^4 x\ dx.$$

(n) $$\int \tan^5 x \sec^3 x\ dx.$$

(o) $$\int (\sec 5x + \text{cosec}\, 5x)^2\ dx.$$

(p) $$\int (\tan 2x + \text{cotan}\, 2x)^2\ dx.$$

(q) $$\int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

(r) $$\int \frac{2\,\text{sen}(w) - 1}{\cos^2 w}\ dw.$$

(s) $$\int \frac{\tan^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

(t) $$\int \tan^5 3x\ dx.$$

(u)
$$\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y}\, dy.$$

(v)
$$\int \frac{du}{1+\sec\frac{1}{2}u}.$$

(w)
$$\int \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{\operatorname{cotan}^2 x}\, dx.$$

(x)
$$\int \frac{\sec^3 x}{\tan^4 x}\, dx.$$

(y)
$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx.$$

(z)
$$\int \frac{\tan^3(\ln x)\sec^6(\ln x)}{x}\, dx.$$

1.6 Integração por Substituição Trigonométrica

Se o integrando contiver expressões do tipo

$$\sqrt{a^2-u^2}, \qquad \sqrt{a^2+u^2}, \qquad \text{ou} \quad \sqrt{u^2-a^2},$$

onde $a > 0$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas. Vamos considerar cada forma como um caso separado.

1.6.1 Caso 1

O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2-u^2}$, onde $a > 0$.

Vamos introduzir uma nova variável θ tomando

$$u = a \operatorname{sen}\theta,$$

onde $\quad 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi \quad$ se $\quad u \ge 0 \qquad$ e $\qquad -\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0 \quad$ se $\quad u < 0$.

Então $du = a\cos\theta \; d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-u^2} &= \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\\ &= a\sqrt{\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, $\cos\theta \ge 0$. Então $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$, e

$$\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta.$$

Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}$ e $-\frac{1}{2}\pi \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}.$$

Exemplo 48. Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx.$$

Solução:

Seja $x = 3\operatorname{sen}\theta$, onde $0 < \theta \le \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3\cos\theta \; d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= 3\sqrt{\cos^2\theta}\\ &= 3\cos\theta.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\,\mathrm{sen}^2\,\theta}(3\cos\theta\ d\theta) \\
&= \int \mathrm{cotan}^2\,\theta\ d\theta \\
&= \int (\mathrm{cosec}^2\,\theta - 1)d\theta \\
&= -\,\mathrm{cotan}\,\theta - \theta + C.
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \mathrm{sen}^{-1}\,\frac{1}{3}x$. Para encontrar $\mathrm{cotan}\,\theta$, consulte a Figura 1 (para $x > 0$) e a Figura 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos $\mathrm{cotan}\,\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \mathrm{sen}^{-1}\,\frac{x}{3} + C.$$

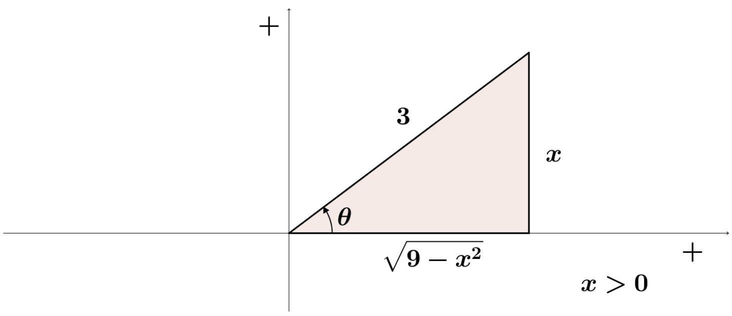

Figura 1: Exemplo 48.

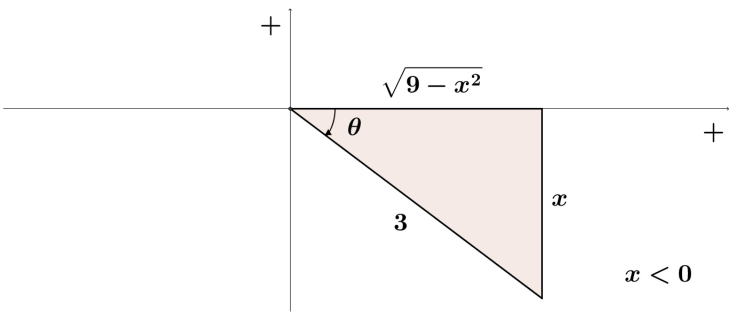

Figura 2: Exemplo 48.

■

Exemplo 49. Calcule
$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$$

Solução:

Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x) = 3+1-(x^2+2x+1) = 4-(x+1)^2.$$

Isso sugere a substituição $u = x+1$. Então $du = dx$ e $x = u-1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du.$$

Agora substituímos $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\ d\theta$ e $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta} 2\cos\theta\ d\theta = \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\ d\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4-u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3-2x-x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

■

1.6.2 Caso 2

O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2+u^2}$, onde $a > 0$.

Introduzimos uma nova variável θ fazendo

$$u = a\tan\theta,$$

onde $\quad 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi \quad$ se $\quad u \geq 0 \qquad$ e $\qquad -\frac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad$ se $\quad u < 0$.

Então $du = a\sec^2\theta\ d\theta$, e

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta} \\
&= a\sqrt{1+\tan^2\theta} \\
&= a\sqrt{\sec^2\theta}.
\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec\theta \geq 1$. Assim $\sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$, e

$$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta.$$

Como $\tan\theta = \frac{u}{a}$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, temos que,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{u}{a}.$$

Exemplo 50. Calcule

$$\int \sqrt{x^2+5}\; dx.$$

Solução:

Substituímos $x = \sqrt{5}\tan\theta$, onde $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geq 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\; d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+5} &= \sqrt{5\tan^2\theta+5}\\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2\theta}\\ &= \sqrt{5}\sec\theta.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+5}\; dx &= \int\sqrt{5}\sec\theta(\sqrt{5}\sec^2\theta\; d\theta)\\ &= 5\int\sec^3\theta\; d\theta.\end{aligned}$$

Usando o resultado do Exemplo 45, temos

$$\int\sqrt{x^2+5}\; dx = \frac{5}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{5}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C.$$

Determinamos $\sec\theta$ da Figura 3 (para $x \geq 0$) e da Figura 4 (para $x < 0$), onde $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$. Em ambos os casos vemos que $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+5}\; dx &= \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}+\frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|\sqrt{x^2+5}+x| - \frac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x) + C_1.\end{aligned}$$

Observe que substituímos $-\frac{5}{2}\ln\sqrt{5}+C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2+5}+x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto. ■

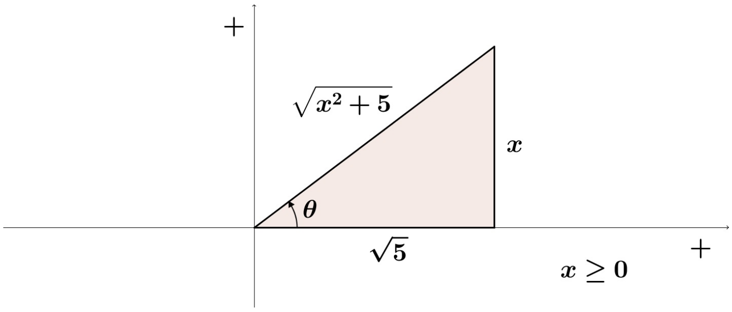

Figura 3: Exemplo 50.

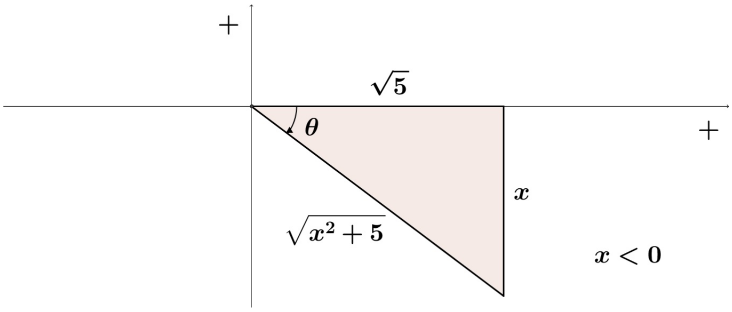

Figura 4: Exemplo 50.

1.6.3 Caso 3

O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$.

Introduzimos uma nova variável fazendo

$$u = a \sec \theta,$$

onde $\quad 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi \quad$ se $\quad u \geq a \qquad$ e $\qquad \pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi \quad$ se $\quad u \leq -a$.

Então $du = a \sec \theta \tan \theta \; d\theta \quad$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} \\ &= a\sqrt{\tan^2 \theta}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\tan \theta \geq 0$. Assim, $\sqrt{\tan^2 \theta} = \tan \theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta.$$

Como $\sec \theta = \frac{u}{a}$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}.$$

Exemplo 51. Calcule
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}.$$

Solução:

Seja $x = 3\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9} \\ &= 3\sqrt{\tan^2\theta} \\ &= 3\tan\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{27\sec^3\theta\ .\ 3\tan\theta} \\ &= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\ d\theta \\ &= \frac{1}{54}\int (1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{54}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) + C = \frac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C. \end{aligned}$$

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, temos que $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$.

Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 6. Em ambos os casos $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ e $\cos\theta = \frac{3}{x}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ .\ \frac{3}{x}\right) + C \\ &= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C. \end{aligned}$$

■

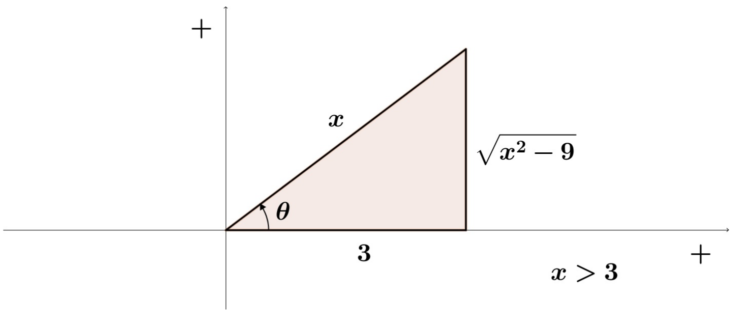

Figura 5: Exemplo 51.

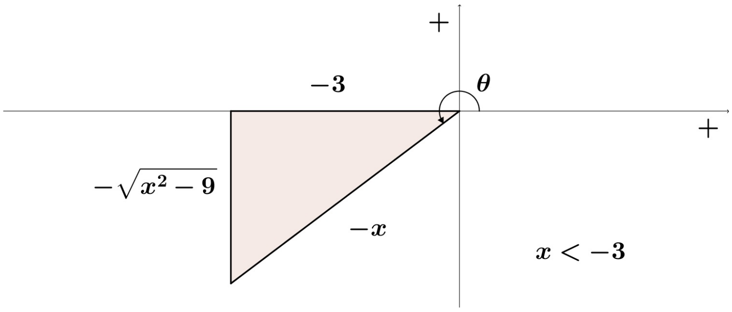

Figura 6: Exemplo 51.

Exemplo 52. Calcule
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}.$$

Solução:

Seja $x = 5\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ e
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-25} &= \sqrt{25\sec^2\theta-25}\\ &= 5\sqrt{\tan^2\theta}\\ &= 5\tan\theta.\end{aligned}$$

Logo,
$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} &= \int\frac{5\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{5\tan\theta}\\ &= \int\sec\theta\ d\theta\\ &= \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C.\end{aligned}$$

Para encontrar $\tan\theta$, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec\theta = \frac{x}{5}$ e $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$. Temos então,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2-25}| - \ln 5 + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2-25}| + C_1.\end{aligned}$$

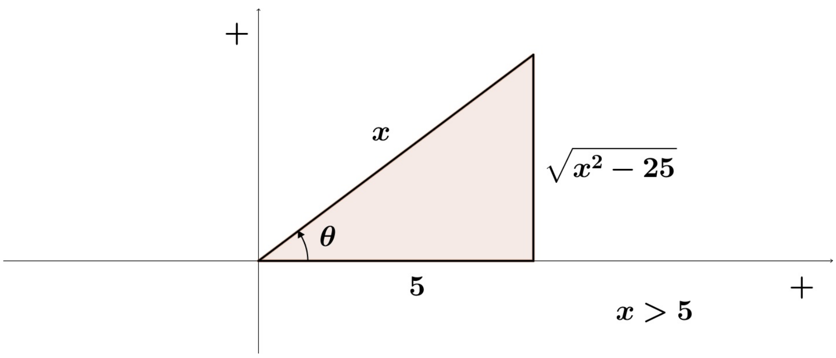

Figura 7: Exemplo 52.

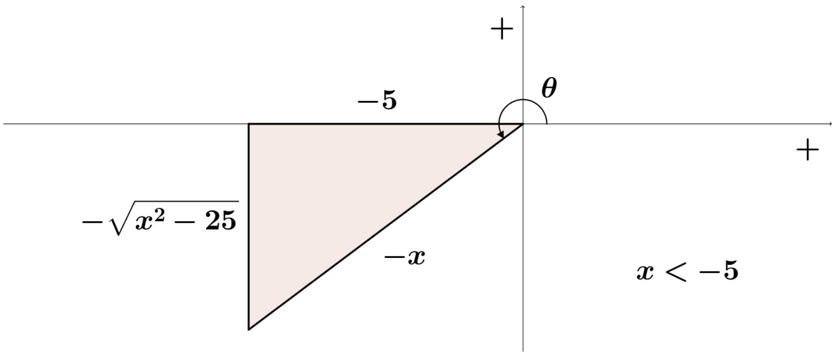

Figura 8: Exemplo 52.

■

1.6.4 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$$

(b) $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx.$$

(c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$$

(d) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}}\,dx.$$

(e) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}.$$

(f) $$\int \sqrt{1-u^2}\,du.$$

(g) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

(h) $$\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2-7}}.$$

(i) $$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

(j) $$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(k) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16+x^2}}.$$

(l) $$\int \frac{2\,dt}{t\sqrt{t^4+25}}.$$

(m) $$\int \frac{x^3}{(25-x^2)^2}\,dx.$$

(n) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}.$$

(o) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

(p) $$\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(q) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}.$$

(r) $$\int \frac{\sec^2 x}{(4-\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

(s) $$\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

(t) $$\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w-4}}\,dw.$$

(u)
$$\int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{\frac{3}{2}}}.$$

(v)
$$\int \frac{e^t \, dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{\frac{3}{2}}}.$$

(w)
$$\int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x} \, dx.$$

1.7 Integração das Funções Racionais por Frações Parciais

1.7.1 Quando o denominador tem somente Fatores Lineares

Da definição de função racional, H será racional se $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Se o grau do numerador não for menor do que o grau do denominador, temos uma fração imprópria e, nesse caso, dividimos o numerador pelo denominador até obter uma fração própria, isto é, uma fração cujo numerador tenha grau menor do que o grau do denominador. Por exemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}.$$

Assim, se quisermos integrar

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} dx,$$

o problema se reduz a integrar

$$\int (x^2 - 6) dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4} dx.$$

Em geral, então, estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$.

Para fazer isso, em geral é necessário escrever $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como a soma de **frações parciais**. Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos onde os fatores quadráticos não têm zeros reais. Algumas vezes pode ser difícil encontrar esses fatores de $Q(x)$; porém, um teorema de Álgebra Avançada estabelece que teoricamente isso sempre pode ser feito.

Após fatorar $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos, o método de determinar as frações parciais irá depender da natureza desses fatores. Vamos considerar separadamente os vários casos. Os resultados de Álgebra Avançada fornecem a forma da fração parcial em cada caso.

1.7.2 Caso 1

Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e nenhum é repetido. Isto é,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_nx + b_n),$$

onde não existem dois fatores idênticos. Nesse caso escrevemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

onde A_1, A_2, ..., A_n, são constantes a serem determinadas.

Observe que na igualdade acima usamos $\equiv$ (que se lê idêntico) no lugar de $=$, pois trata-se de uma identidade.

Exemplo 53. Calcule

$$\int \frac{(x-1)}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx.$$

Solução:

Para calcular

$$\int \frac{(x-1)}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx,$$

fatoramos o denominador obtendo

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}.$$

Assim,

$$\frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}. \qquad (18)$$

Como (18) é uma identidade, deve ser válida para todo x exceto 0, 2 e -1. De (18),

$$x - 1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2). \qquad (19)$$

A igualdade (19) é uma identidade válida para todos os valores de x inclusive 0, 2 e -1. Queremos encontrar as constantes A, B e C. Substituindo x por 0 em (19), obtemos

$$-1 = -2A \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Substituindo x por 2 em (19), obtemos

$$1 = 6B \Leftrightarrow B = \frac{1}{6}.$$

Substituindo x por -1 em (19), obtemos

$$-2 = 3C \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}.$$

Há um outro método para encontrar os valores de A, B e C. Se no segundo membro de (19) agruparmos os termos,

$$x - 1 \equiv (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A.$$

Como temos uma identidade, os coeficientes do primeiro membro devem ser iguais aos coeficientes correspondentes do segundo membro. Assim,

$$\begin{array}{rcl} A + B + C & = & 0 \\ -A + B - 2C & = & 1 \\ -2A & = & -1. \end{array}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$ e $C = -\frac{2}{3}$. Substituindo esses valores em (18), teremos

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}.$$

Assim, a integral dada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln C \\ &= \frac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + \ln C) \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{Cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right|. \end{aligned}$$

■

Exemplo 54. Calcule

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx.$$

Solução:

Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2).$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando tem a forma

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$, obtendo

$$x^2+2x-1 \equiv A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1). \qquad (20)$$

Expandindo o lado direito de (20) e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$x^2+2x-1 \equiv (2A+B+2C)x^2 + (3A+2B-C)x - 2A. \qquad (21)$$

Os polinômios de (21) são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A+B+2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{aligned} 2A+B+2C &= 1 \\ 3A+2B-C &= 2 \\ -2A \qquad\quad &= -1. \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{10}$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Ao integrar o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x-1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = \frac{du}{2}$.

■

1.7.3 Caso 2

Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e alguns são repetidos.

Suponha que $(a_ix + b_i)$ seja um fator que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(a_ix+b_i)^2} + \frac{A_p}{a_ix+b_i},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_p$, são constantes a serem determinadas.

Exemplo 55. Calcule

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}\, dx.$$

Solução:

A fração no integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2}. \tag{22}$$

Multiplicando ambos os membros de (22) pelo mínimo múltiplo comum, teremos

$$x^3 - 1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2. \tag{23}$$

Substituindo x por 2 em (23), obtemos

$$7 = 4C \Leftrightarrow C = \frac{7}{4}.$$

Substituindo x por 0 em (23), obtemos

$$-1 = -8A \Leftrightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Substituímos esses valores de A e C em (23) e expandindo as potências dos binômios, teremos

$$\begin{aligned}
x^3 - 1 &\equiv \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \frac{7}{4}x^2 + \\
&\quad + Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4) \\
x^3 - 1 &\equiv (B+E)x^4 + \left(\frac{1}{8} - 6B + D - 4E\right)x^3 + \left(-\frac{3}{4} + 12B + \frac{7}{4} - 2D + 4E\right)x^2 + \\
&\quad + \left(\frac{3}{2} - 8B\right)x - 1.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, obtemos

$$\begin{aligned} B+E &= 0 \\ \frac{1}{8} - 6B + D - 4E &= 1 \\ -\frac{3}{4} + 12B + \frac{7}{4} - 2D + 4E &= 0 \\ \frac{3}{2} - 8B &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos

$$B = \frac{3}{16}, \qquad D = \frac{5}{4} \qquad \text{e} \qquad E = -\frac{3}{16}.$$

Logo, de (22),

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{x-2}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + C \\ &= \frac{-11x^2+17x-4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 56. Calcule

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx.$$

Solução:

A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos

$$\begin{aligned} 4x &\equiv A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &\equiv (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C). \end{aligned}$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{aligned} A \quad + \quad C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \quad C &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 57. Calcule
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}.$$

Solução:
$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}.$$
Multiplicando por $(u-a)(u+a)$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(u+a) + B(u-a) \\ 1 &\equiv (A+B)u + Aa - Ba. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, teremos

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Aa - Ba &= 1. \end{aligned}$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos

$$A = \frac{1}{2a} \qquad \text{e} \qquad B = -\frac{1}{2a}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|u-a| - \frac{1}{2a}\ln|u+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \end{aligned}$$

■

O tipo de integral do Exemplo 57 ocorre com uma frequência tal que justifica ser dado como fórmula. Trata-se de uma simples integração por frações parciais.

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.}$$

Se tivermos
$$\int \frac{du}{a^2-u^2},$$
escreveremos,
$$\begin{aligned}\int \frac{du}{a^2-u^2} &= -\int \frac{du}{u^2-a^2}\\ &= -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C.\end{aligned}$$

Essa integração será também dada como fórmula.

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C.}$$

1.7.4 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a) $$\int \frac{dx}{x^2-4}.$$

(b) $$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}.$$

(c) $$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx.$$

(d) $$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx.$$

(e) $$\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}\,dw.$$

(f) $$\int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2}\,dt.$$

(g) $$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx.$$

(h) $$\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx.$$

(i) $$\int \frac{dx}{x^3+3x^2}.$$

(j) $$\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}\,dx.$$

(k) $$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}.$$

(l) $$\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx.$$

(m) $$\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx.$$

(n) $$\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}.$$

(o) $$\int \frac{3z+1}{(z^2-4)^2}\,dz.$$

(p) $$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx.$$

(q) $$\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx.$$

(r) $$\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx.$$

(s)

$$\int \frac{-24x^3 + 30x^2 + 52x + 17}{9x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 4x + 4}\, dx.$$

(t)

$$\int \frac{dx}{16x^4 - 8x^2 + 1}.$$

1.7.5 Quando o denominador contém Fatores Quadráticos

A discussão de integração de funções racionais por frações parciais continua com dois casos onde o denominador contém fatores quadráticos *irredutíveis*. Um fator $ax^2 + bx + c$ será irredutível se uma equação $a^2 + bx + c = 0$ não tiver raízes reais, isto é, $b^2 - 4ac < 0$.

1.7.6 Caso 3

Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos, e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Exemplo 58. Calcule

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}\, dx.$$

Solução:

A fração no integrando pode ser escrita como a seguinte soma de frações parciais:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1}. \tag{24}$$

Multiplicando ambos os membros de (24) pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2). \tag{25}$$

Podemos calcular C substituindo x por 1 em (25) e obtendo

$$-4 = 5C \Leftrightarrow C = -\frac{4}{5}.$$

Substituímos C por $-\frac{4}{5}$ em (25) e multiplicando o segundo membro, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv \left(A - \frac{4}{5}\right)x^2 + \left(B - A - \frac{8}{5}\right)x + \left(-\frac{8}{5} - B\right).$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, teremos

$$\begin{aligned} A - \frac{4}{5} &= 1 \\ B - A - \frac{8}{5} &= -2 \\ -\frac{8}{5} - B &= -3. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \frac{9}{5} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{7}{5}.$$

Substituindo os valores de A, B e C em (24), teremos

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}}{x^2+2x+2} + \frac{-\frac{4}{5}}{x-1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\, dx = $$
$$= \frac{9}{5}\int \frac{x\ dx}{x^2+2x+2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1}. \tag{26}$$

Para integrar

$$\frac{x\ dx}{x^2+2x+2},$$

vemos que a diferencial do denominador é $2(x+1)dx$; assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, iremos obter

$$\frac{9}{5}\int \frac{x\ dx}{x^2+2x+2} = \frac{9}{5}\int \frac{(x+1)\ dx}{x^2+2x+2} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Substituindo essa desigualdade em (26) e combinando os termos, teremos

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\, dx = $$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)\ dx}{x^2+2x+2} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1| \\ &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\tan^{-1}(x+1) - \frac{8}{10}\ln|x-1| + \frac{1}{10}\ln C \\ &= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{C(x^2+2x+2)^9}{(x-1)^8}\right| - \frac{2}{5}\tan^{-1}(x+1). \end{aligned}$$

■

Observação: No Exemplo 58 podemos evitar algumas passagens, se, em vez de (24), expressarmos a fração original como

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{D(2x+2)+E}{x^2+2x+2} + \frac{F}{x-1}.$$

Escrevemos $D(2x+2)+E$ em vez de $Ax+B$, pois

$$2x+2 = D_x(x^2+2x+2).$$

Então, resolvendo para D, E e F, obtemos

$$D = \frac{9}{10}, \qquad E = -\frac{2}{5} \qquad \text{e} \qquad F = -\frac{4}{5},$$

resultando em

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x-1}$$

diretamente.

Exemplo 59. Calcule

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx.$$

Solução:

Como $x^3+4x = x(x^2+4)$ não pode mais ser fatorado, escrevemos

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Multiplicando por $x(x^2+4)$, temos

$$\begin{aligned} 2x^2-x+4 &\equiv A(x^2+4)+(Bx+C)x \\ &\equiv (A+B)x^2+Cx+4A. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$A+B=2, \qquad C=-1 \qquad \text{e} \qquad 4A=4.$$

Então $A=1$, $B=1$, $C=-1$ e, dessa forma,

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx.$$

Para integrar o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx.$$

Fazemos a substituição $u = x^2+4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Calculamos a segunda integral usando a fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

com $a = 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 60. Calcule

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx.$$

Solução:

Como o grau do numerador não é menor que o do denominador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}.$$

Observe que o termo quadrático $4x^2-4x+3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2-4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica de frações parciais.

Para integrar a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2-4x+3 = (2x-1)^2+2.$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$. Então, $du = 2\ dx$ e $x = \frac{1}{2}(u+1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right)\,dx \\
&= x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}\,du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du \\
&= x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

■

1.7.7 Caso 4

Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se ax^2+bx+c for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2+bx+c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^p} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_px+B_p}{ax^2+bx+c}.$$

Observação: Se o denominador contém o fator $(x^2-5x+2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2},$$

ou, de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x-5)+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{C(2x-5)+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{E(2x-5)+F}{x^2-5x+2}.$$

Exemplo 61. Calcule
$$\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2}\,dx.$$

Solução:
$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}.$$

Multiplicando ambos os membros dessa relação pelo mínimo denominador comum, teremos
$$x-2 \equiv A(x^2-4x+5)^2+x(2Bx-4B+C)+x(x^2-4x+5)(2Dx-4D+E) \quad (27)$$
$$x-2 \equiv Ax^4+16Ax^2+25A-8Ax^3+10Ax^2-40Ax+2Bx^2-4Bx+Cx+$$
$$+2Dx^4-12Dx^3+Ex^3+26Dx^2-4Ex^2-20Dx+5Ex$$
$$x-2 \equiv (A+2D)x^4+(-8A-12D+E)x^3+(26A+2B+26D-4E)x^2+$$
$$+(-40A-4B+C-20D+5E)x+25A. \quad (28)$$

O valor de A pode ser calculado de (27), substituindo x por 0. Se igualarmos os coeficientes em (28) e resolvermos simultaneamente as equações resultantes, iremos obter
$$A=-\frac{2}{25}, \qquad B=\frac{1}{5}, \qquad C=\frac{1}{5}, \qquad D=\frac{1}{25} \qquad \text{e} \qquad E=-\frac{4}{25}.$$

Logo,
$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} = -\frac{2}{25}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{5}\int\frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-4x+5)^2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}+$$
$$+\frac{1}{25}\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5}-\frac{4}{25}\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$$
$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} = -\frac{2}{25}\ln|x|-\frac{1}{5(x^2-4x+5)}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2}+$$
$$+\frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5|-\frac{4}{25}\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)+1}. \quad (29)$$

Vamos calcular separadamente as integrais do terceiro e quinto termos do segundo membro de (29),

$$\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}.$$

Seja $x-2=\tan\theta$, onde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \ge 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 2$. Então $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $(x-2)^2+1 = \tan^2\theta + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} &= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2} \\
&= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} \\
&= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} \\
&= \int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C_1 \\
&= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1.
\end{aligned}$$

Como $\tan\theta = x-2$ e $-\frac{1}{2}\pi < 0 < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \tan^{-1}(x-2)$. Encontramos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 9 (se $x \ge 2$) e da Figura 10 (se $x < 2$). Em ambos os casos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

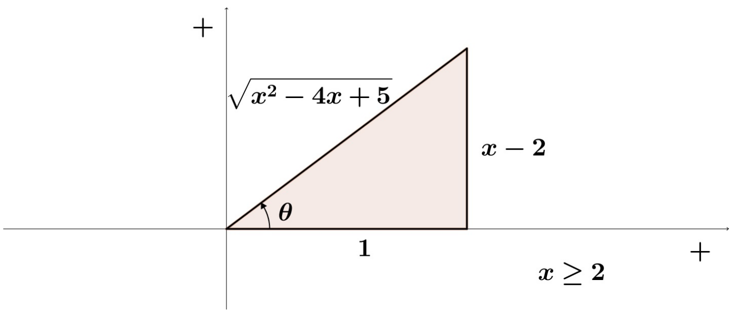

Figura 9: Exemplo 61.

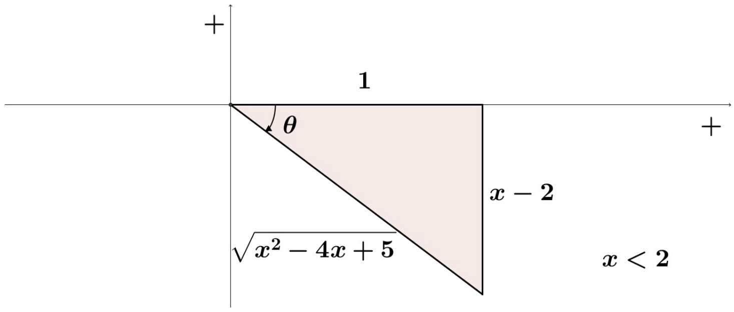

Figura 10: Exemplo 61.

Assim,

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_1. \qquad (30)$$

Considerando agora a outra integral no segundo membro de (29), teremos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} &= \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}\\ \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} &= \tan^{-1}(x-2)+C_2.\end{aligned}$$

Substituindo essa relação e (30) em (29), teremos

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} =$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\tan^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)} +\\ &\quad +\frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\tan^{-1}(x-2)+C\\ &= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\tan^{-1}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 62. Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}.$$

Solução:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3} \equiv$$
$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}.$$

■

Exemplo 63. Calcule

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx.$$

Solução:
A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, temos

$$\begin{aligned} -x^3+2x^2-x+1 &\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x \\ &\equiv A(x^4+2x^2+1)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+Dx^2+Ex \\ &\equiv (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A. \end{aligned}$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A+B=0, \qquad C=-1, \qquad 2A+B+D=2, \qquad C+E=-1, \qquad A=1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.
\end{aligned}$$

■

1.7.8 Exercícios

1. Calcule a integral indefinida.

(a) $$\int \frac{dx}{2x^3+x}.$$

(b) $$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx.$$

(c) $$\int \frac{dx}{16x^4-1}.$$

(d) $$\int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx.$$

(e) $$\int \frac{t^2+t+1}{(2t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

(f) $$\int \frac{3w^3+13w+4}{w^3+4w}\,dw.$$

(g) $$\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

(h) $$\int \frac{dx}{9x^4+x^2}.$$

(i) $$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}.$$

(j) $$\int \frac{x+3}{4x^4+4x^3+x^2}\,dx.$$

(k) $$\int \frac{2x^2-x+2}{x^5+2x^3+x}\,dx.$$

(l) $$\int \frac{2x^3-9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}\,dx.$$

(m) $$\int \frac{5z^3-z^2+15z-10}{(z^2-2z+5)^2}\,dz.$$

(n) $$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}.$$

(o) $$\int \frac{x^2+2x-1}{27x^3-1}\,dx.$$

(p) $$\int \frac{e^{5x}\,dx}{(e^{2x}+1)^2}.$$

(q) $$\int \frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2}.$$

(r) $$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx.$$

(s)

$$\int \frac{(\sec^2 x + 1)\sec^2 x \; dx}{1 + \tan^3 x}.$$

(t)

$$\int \frac{6w^4 + 4w^3 + 9w^2 + 24w + 32}{(w^3 + 8)(w^2 + 3)}\, dw.$$

2 Referências

- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2002. Volume 1.
- LEITHOLD, Louis, **O Cálculo com geometria analítica: Um**, Editora Harbra Ltda, 3ª edição, 1994.
- STEWART, James. **Cálculo**. 6ª edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. Volume 1.