

# Sujets Maths en Jeans 2023-2024

Alexandre Pasco<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centrale Nantes, Nantes Université, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
**Alexandre.Pasco@ec-nantes.fr**

# 1 Ta fête

## 1.1 Problème

Vous choisissez aléatoirement des personnes pour participer à une fête. Au minimum, combien de personnes faut-il choisir pour qu'il existe un groupe de 3 personnes qui se connaissent (ou ne se connaissent pas) mutuellement ?

## 1.2 Solution

C'est une illustration du théorème des amis et des étrangers , qui est lui même un cas particulier du théorème de Ramsey. L'idée est que dès qu'un individu connaît ou ne connaît pas au moins 3 personnes, alors parmi ces  $3 + 1$  personnes il y a au moins un trio qui se connaissent ou ne se connaissent pas mutuellement.

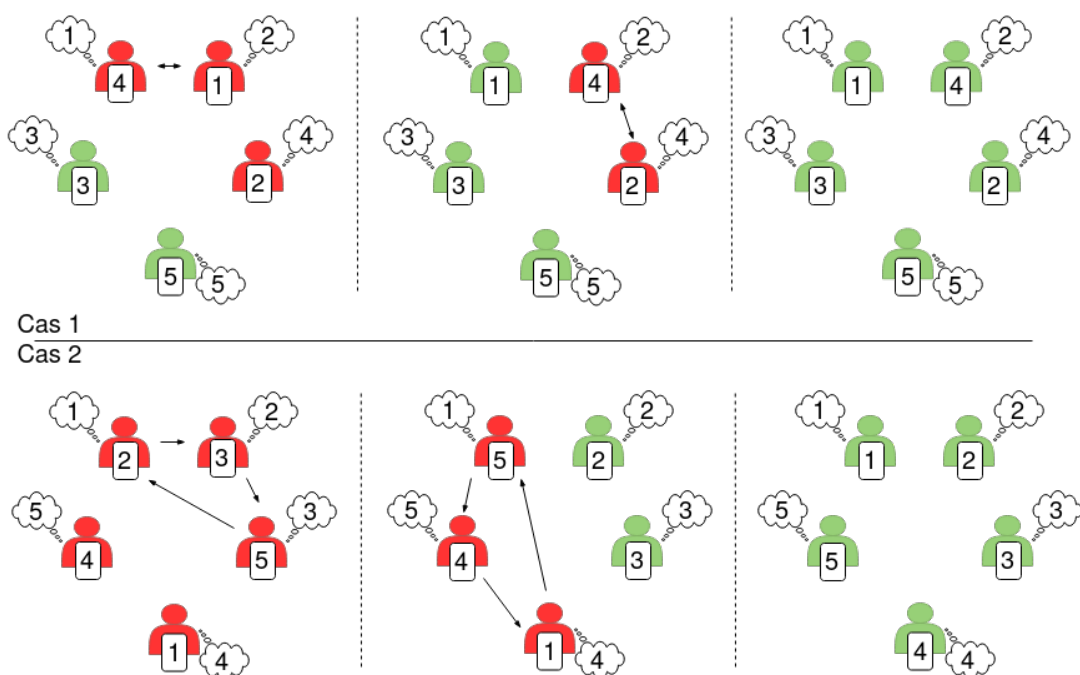
## 2 Traders en herbe

### 2.1 Problème

Vous êtes  $n$  joueurs et chacun de vous a un nombre fétiche entre 1 et  $n$ . Deux joueurs ne peuvent pas avoir le même nombre fétiche. Vous tirez aléatoirement 1 carte dans un paquet contenant  $n$  cartes numérotées de 1 à  $n$ . Votre but est que tous les joueurs obtiennent leur nombre fétiche. Pour ce faire vous pouvez faire des échanges entre vous.

1) Pouvez vous réussir en n'effectuant que des échanges deux à deux (cas 1 de la figure) ? Si oui, proposez une stratégie qui marcherait pour tout nombre de joueurs. Si non, trouvez un contre exemple.

2) Pouvez-vous réussir en n'effectuant que des échanges par groupes de trois (cas 2 de la figure) ? Si oui, proposez une stratégie qui marcherait pour tout nombre de joueurs. Si non, trouvez un contre exemple.



**Figure 1:** Exemples d'échanges à  $n = 5$  joueurs pour obtenir la distribution désirée. Cas 1, échanges en groupes de 3. Cas 2, échanges en groupes de 3.

### 2.2 Solution

1) Toute permutation peut-être décomposée en transpositions. Une stratégie est d'utiliser un pivot qui sera utilisé pour tous les échanges.

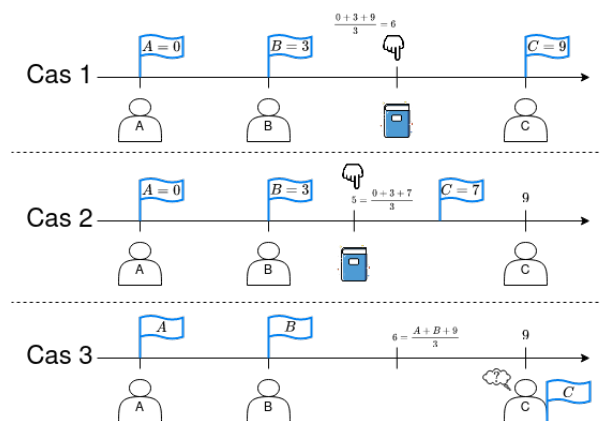
2) Toute permutation ne peut pas être décomposée en cycles de taille 3. En effet, un cycle de taille trois est de signature paire (i.e. décomposable en 2 permutations). Ainsi, une permutation de signature impaire ne pourra pas être décomposée en une composition de tels cycles.

### 3 Une nouvelle librairie en ville

#### 3.1 Problème

Vous êtes le maire d'une ville de 3 habitants,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , vivant le long d'une route. Vous voulez y construire une nouvelle librairie pour faire plaisir aux habitants. Chaque habitant sera d'autant plus content que la librairie sera proche de sa maison. Vous demandez à chaque habitant de mettre un drapeau sur l'emplacement qu'il préférerait. La librairie sera construite à l'emplacement moyen des drapeaux (cas 1 de la figure).

- 1) L'habitant  $C$  connaît les préférences des autres (cas 2 de la figure). A-t'il intérêt à mentir ?
- 2) L'habitant  $C$  ne connaît pas les préférences des autres. Il connaît cependant le résultat d'un sondage effectué auprès de tous les habitants, où tout le monde a été honnête (cas 3 de la figure). A-t'il encore intérêt à mentir ?
- 3) Proposer une nouvelle méthode pour sélectionner l'emplacement de la librairie qui serait moins vulnérable face à quelqu'un comme  $C$ .
- 4) Généraliser les questions précédentes pour une ville avec plus d'habitants.
- 5) En restant à 3 habitants, généralisez les questions 1 et 2 au cas où les habitants vivent non plus le long d'une route, mais dans une ville plus classique (en 2 dimensions) ?



**Figure 2:** Cas 1, tout le monde est honnête. Cas 2, l'habitant  $C$  ment en connaissant les choix de  $A$  et  $B$ . Cas 3, l'habitant  $C$  se demande s'il peut gagner à mentir, sachant le résultat du sondage.

#### 3.2 Solution

**1,2,4)** l'habitant  $C$  peut mentir et placer la librairie où il le souhaite. Cela reste vrai avec plus d'habitants.

**3,4)** En 1D, une solution moins vulnérable est la médiane des coordonnées. Alors,  $C$  n'a pas d'intérêt à mentir sur sa vraie préférence. Cela reste vrai avec plus d'habitants.

**5)** En 2D pour 3 habitants, une solution moins vulnérable est la médiane géométrique, qui est obtenue en résolvant géométriquement le problème de Fermat. C'est la solution qui minimize la somme des distance euclidiennes. Une autre solution consiste à prendre l'intersection des bissectrices du triangle.

Contrairement au cas 1D, ici Jean a quand même un intérêt à mentir. Cependant, la zone dans laquelle il peut placer la librairie est bornée.

## 4 Le mieux est l'ennemi du bien

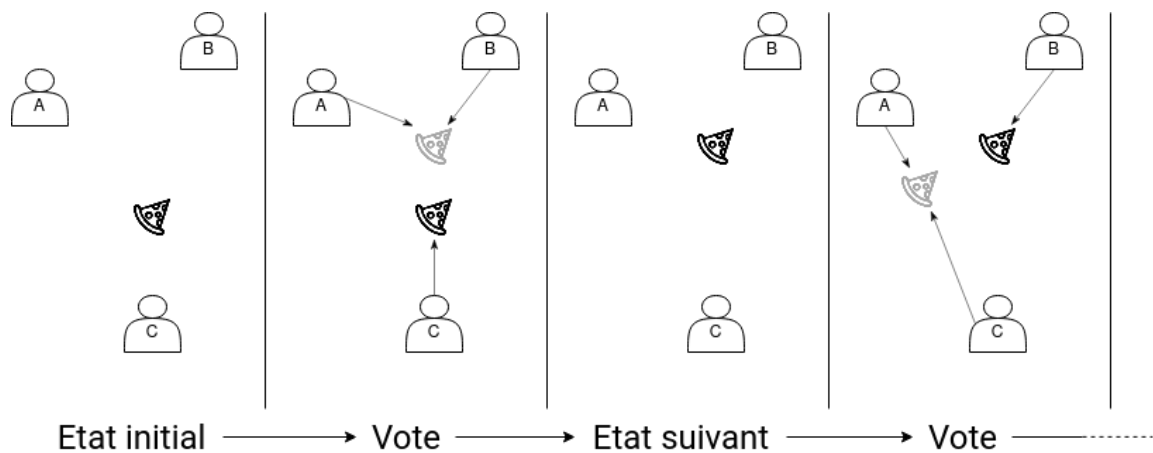
### 4.1 Problème

Vous êtes la mairesse d'une ville de 3 habitants. Un nouveau fast-food va se construire au centre de la ville, et ça ne vous plaît pas. La construction est inévitable, seul l'emplacement peut être modifié. Votre but est de l'éloigner autant que possible de l'emplacement d'origine.

Pour ce faire, vous pouvez proposer un nouvel emplacement à vos habitants, qui sera opposé au précédent lors d'un vote à la majorité. Chaque habitant votera pour l'emplacement le plus proche de chez lui.

Vous pouvez faire voter un nouvel emplacement autant de fois que vous le souhaitez. Ce dernier sera alors opposé à celui ayant remporté le vote précédent.

- 1) Jusqu'où pouvez vous éloigner le fast-food ?
- 2) Pouvez-vous généraliser à une ville possédant plus d'habitants ?



**Figure 3:** Deux votes successifs. Une nouvelle proposition est en gris. La proposition votée précédemment est en noir.

### 4.2 Solution

Le problème est très bien illustré dans cette vidéo qui illustre les résultats de [McKelvey(1976)].

- 1) Si les habitants ne sont pas alignés, alors peut importe l'emplacement initial, il est possible de faire des propositions d'emplacement successives de sorte qu'il n'y ait pas de limite à l'éloignement de l'emplacement finalement. Sans aller jusqu'à le prouver rigoureusement, on peut le constater en traçant quelques cercles.
- 2) La réponse est la même qu'à la question précédente et le processus est semblable.

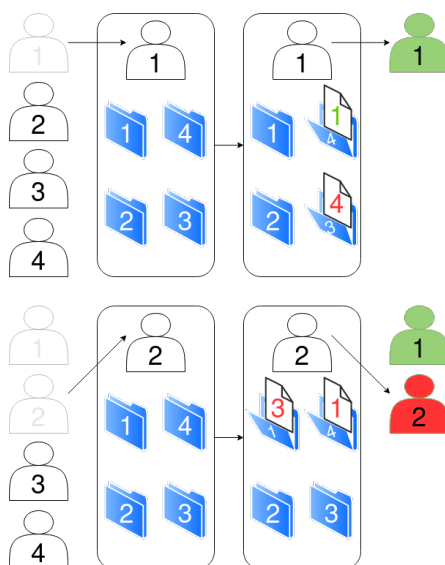
## 5 Une histoire de boîtes

### 5.1 Problème

Vous êtes une équipe de 4 joueurs devant l'entrée d'une pièce, contenant 4 boîtes fermées. A tour de rôle, vous entrez dans la pièce, ouvrez 2 boîtes et lisez leur contenu. Vous sortez ensuite de la pièce en la laissant exactement comme elle était à votre arrivée. Vous ne pouvez interagir entre vous qu'avant d'entrer dans la pièce. L'équipe gagne si **tous les joueurs** trouvent leur propre numéro.

1) Proposez des stratégies et calculez (ou estimez) les chances de victoire correspondantes. Vous pourrez tester les performances de vos stratégies en faisant des simulations sur ordinateur.

2) Même question avec un plus grand nombre de joueurs. Pour  $n$  joueurs, chacun ouvrira  $\frac{n}{2}$  boîtes.



**Figure 4:** Le joueur 1 a trouvé la feuille correspondant à son numéro, il ne fera donc pas perdre l'équipe. Le joueur 2 n'a pas trouvé sa feuille, l'équipe sera donc annoncée perdante à la fin des passages.

### 5.2 Solution

Si les  $n$  joueurs ouvrent aléatoirement les boîtes, alors leur chance de victoire est  $\frac{1}{2^n}$ . Construire un arbre de probabilités permet d'obtenir ce résultat. La stratégie optimale consiste à ouvrir la boîte sur laquelle est inscrite son numéro, puis ouvrir celle indiquée par le papier, etc. Avec cette stratégie, l'équipe de  $n$  joueurs a pour probabilité de défaite

$$\frac{1}{\frac{n}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{n}{2} + 2} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(2) \simeq 69\%.$$

Ce résultat s'obtient en dénombrant les permutations de  $\{1, \dots, n\}$  contenant des cycles de taille  $k > n/2$ . C'est un problème généralement formulé avec des prisonniers, par exemple sur ce wiki.

## References

- [McKelvey(1976)] Richard D McKelvey. Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control. *Journal of Economic Theory*, 12(3):472–482, 1976. ISSN 0022-0531. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90040-5](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90040-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053176900405>.