Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica 2023/24

Agrupamento II

Folha 2

1. Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais indicados.

   a) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o subconjunto dos vetores (x, y) tais que

      i. $x + y = 0$; ii. $(x, y) \neq (1, 1)$; iii. $xy = 0$;

   b) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o subconjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   c) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o subconjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x + 2y = 0$ e $z = 1$.

   d) No espaço vetorial $\mathbb{R}[t]$ dos polinómios em t e para $n \in \mathbb{N}$, o subconjunto dos polinómios

      i. de grau n; ii. de grau menor ou igual a n.

   e) No espaço vetorial $\mathbb{R}[t]_2$ dos polinómios em t de grau não superior a 2, o subconjunto dos polinómios $at^2 + bt + c$ com

      i. $c = 0$; ii. $b = 1$.

   f) No espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n, o subconjunto das matrizes

      i. simétricas; ii. triangulares;

      NOTA: Uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os i, j; triangular superior quando $a_{ij} = 0$ para todos os i, j com $i > j$; e triangular inferior quando $a_{ij} = 0$ para todos os i, j com $i < j$.

   g) No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções reais de variável real, o subconjunto das funções pares.

2. Escreva o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $(3, -6)$ e $(-1, 2)$ de duas maneiras diferentes.

3. Escreva, se possível, o vetor

   a) $(2, -3, -4, 3)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1, 0)$ e $(4, 1, -2, 3)$.

   b) $(1, 1, 0)$ como combinação linear dos vetores $(2, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

c) $-t^2+t+4$ como combinação linear dos vetores t^2+2t+1, t^2+3 e $t-1$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $(1,-1,-2)$ como combinação linear dos vetores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(3,4,1)$.

4. Determine α e β de modo que o vetor $(1,1,\alpha,\beta)$ pertença ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1,0,2,1)$ e $(1,-1,2,2)$.

5. Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,2)$ e $(1,-1,1)$ coincide com o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(2,-1,3)$ e $(0,-1,-1)$.

6. Determine o subespaço gerado pelos conjuntos de vetores indicados.

   a) $\{(0,1),(2,1),(2,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

   b) $\{(0,1),(0,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

   c) $\{(2,2,3),(-1,-2,1),(0,1,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

   d) $\{(1,1,1),(1,0,0),(2,2,2)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

   e) $\{t^2+1, t^2+t, t+1\}$ em $\mathbb{R}[t]_2$.

7. Sejam U_1 e U_2 subespaços de um espaço vetorial V. Mostre que:

   a) $U_1 \cap U_2$ é um subespaço de V.

   b) $U_1 \cup U_2$ não é necessariamente um subespaço de V.

   (NOTA: De facto, $U_1 \cup U_2$ é um subespaço de V se e só se $U_1 \subseteq U_2$ ou $U_2 \subseteq U_1$.)

8. Das seguintes sequências de vetores indique as que são bases dos espaços vetoriais indicados:

   a) $((1,2),(2,1))$ em $\mathbb{R}^2$;

   b) $((1,2),(2,4))$ em $\mathbb{R}^2$;

   c) $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ em $\mathbb{R}^3$;

   d) $((1,0,1),(2,1,0),(3,1,1))$ em $\mathbb{R}^3$;

   e) $((1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,1))$ em $\mathbb{R}^4$;

   f) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

   g) $(3t^2+2t+1, t^2+t+1, t^2+1)$ em $\mathbb{R}[t]_2$.

9. Determine os valores de α para os quais os vetores

$$(1,\alpha,1),(1,2,\alpha),(3,1,1)$$

formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

10. Considere a base $((1,1,1),(1,0,1),(1,2,3))$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

    a) Calcule o vetor das coordenadas relativamente a esta base de

        i. $(1,1,1)$;

        ii. $(1,1,1)+3(1,2,3)$;

        iii. $(1,-1,-1)$.

    b) Calcule o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ cujo vetor das coordenadas é $(1,2,3)$.

11. Averigue quais das seguintes sequências de vetores são linearmente independentes.

    a) $((1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(1,-1,1))$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$;

    b) $((1,2,3),(1,1,1),(1,0,1))$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$;

    c) $\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{bmatrix}\right)$ no espaço vetorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

    d) $(2t^2+1, t-2, t+3)$ no espaço vetorial $\mathbb{R}[t]_2$.

    e) $(1+i, 1-i)$ no espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

    f) $(1+i, 1-i)$ no espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$.

12. Considere vetores v_1, v_2, v_3 num espaço vetorial V. Mostre que

    a) a sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente se e só se a sequência $(v_1, v_2, v_3 + 3\cdot v_1)$ é linearmente independente.

    b) $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2, v_3 + 3\cdot v_1\rangle$.

13. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

    a) $(1,3,0),(-1,1,0)$ em $\mathbb{R}^3$;

    b) $(1,-1,1),(0,2,1),(1,1,2)$ em $\mathbb{R}^3$;

    c) t^2+1, t^2-t+1 em $\mathbb{R}[t]_2$;

    d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 2\end{bmatrix}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

14. Determine:

    a) uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,0,1,0)$ e $(0,1,-1,0)$;

    b) uma base de $\mathbb{R}[t]_2$ que contenha os vetores $1+t$ e $1+t+t^2$.

15. Determine uma base dos seguintes espaços vetoriais:

    a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$;

    b) $S = \{a+bt+ct^2 \in \mathbb{R}[t]_2 \mid a=0\}$;

c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a - b + c = 0 \quad \text{e} \quad a + b = 0 \right\}.$

Algumas soluções.

1. a) i. Sim. ii. Não. iii. Não.

b) Não.

c) Não.

d) i. Não. ii. Sim.

e) i. Sim. ii. Não.

f) i. Sim. ii. Não.

g) Sim.

3. a) $(2, -3, -4, 3) = -2(1, 2, 1, 0) + (4, 1, -2, 3)$.

b) $(1, 1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) - \frac{1}{3}(1, 0, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, 1)$.

c) -

d) -

e) Por exemplo, $(1, -1, -2) = (1, 1, 0) - 2(0, 1, 1) + 0(3, 4, 1)$.

4. $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

6. a) $\mathbb{R}^2$.

b) $\{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) $\mathbb{R}^3$.

d) $\{(a, b, c) \mid c - b = 0\}$.

e) $\mathbb{R}[t]_2$.

8. a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e) Sim.

f) Sim.

g) Sim.

9. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\}$.

10. a) i $(1,0,0)$.

ii $(1,0,3)$.

iii $(1,1,-1)$.

b) $(6,7,12)$.

11. a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

e) Sim.

f) Não.