1. Para regar 15 pequenos canteiros que estão dispostos em linha reta no Jardim das Flores, um jardineiro dispõe apenas de um balde que tem de encher na única torneira que existe no jardim.

   Um balde cheio é a quantidade de água necessária para regar cada canteiro. Inicia o processo de rega enchendo o balde que inicialmente está junto da torneira e dirige-se para o canteiro mais próximo da torneira para o regar. Volta à torneira para encher o balde e dirige-se ao segundo canteiro para o regar. Repete o processo por ordem (do mais próximo ao mais afastado) até finalizar a rega dos 15 canteiros e volta à torneira para deixar o balde.

   Sabendo que a torneira se encontra a uma distância de 20 metros do primeiro canteiro e que a distância entre dois canteiros consecutivos é 1 metro, considere a sucessão a_n cujo termo de ordem n representa a distância em metros percorrida pelo jardineiro para regar o n-ésimo canteiro, desde que enche o balde para esse canteiro até que regressa à torneira com o balde vazio após a rega desse mesmo canteiro. Note-se que $a_1 = 40$ (40 metros percorridos pelo jardineiro para regar o 1º canteiro desde que enche o balde até que regressa à torneira com o balde vazio).

   (a) Verifique que a sucessão (a_n) é uma progressão, identificando se se trata de uma progressão aritmética ou geométrica.

   (b) Identifique a fórmula do termo geral da progressão, a_n, e escreva a expressão deste termo.

   (c) Determine o termo da progressão correspondente aos metros percorridos pelo jardineiro no trajeto de rega do último canteiro e após regressar à torneira.

   (d) Se pretender determinar o número total de metros que percorreu o jardineiro na rega dos 15 canteiros após regar o último canteiro e regressar à torneira para deixar o balde, que fórmula do formulário deve usar? Calcule esse valor usando a fórmula identificada.

2. Uma empresa produtora de papel tem 2 fábricas dedicadas à produção de certos blocos de papel, uma na cidade de Aveiro e outra na cidade do Porto. As duas fábricas têm vindo a produzir os seguintes números fixos de blocos de papel por mês: 3000 (a de Aveiro) e 1000 (a do Porto). A partir de janeiro de 2023 (inclusive), as 2 fábricas aumentam de forma sucessiva a produção de blocos de papel: aumento de 70 blocos por mês a de Aveiro; e de 290 blocos por mês a do Porto.

   Considere as sucessões cujos termos de ordem n, a_n e b_n, representam o número de blocos de papel produzidos nas fábricas de Aveiro e do Porto, respetivamente, no mês n (começando no mês de janeiro de 2023).

   (a) Verifique, por dedução e justificando, se (a_n) e (b_n) são progressões aritméticas ou geométricas.

   (b) Identifique, para cada uma das progressões, a fórmula do termo geral da progressão e escreva a expressão deste termo.

   (c) Qual a equação ou inequação que deve resolver para determinar a partir de que mês a produção da fábrica do Porto irá superar a produção da fábrica de Aveiro? Encontre a solução desta equação/inequação e conclua em que mês isto acontecerá.

   (d) Para cada uma das progressões, calcule o termo da progressão correspondente ao primeiro mês em que a produção de blocos de papel na fábrica do Porto supera a da fábrica de Aveiro.

3. O número de teses de doutoramento concluídas numa certa universidade no ano 2022 foi de 150 teses. Estima-se que este número venha a aumentar em 2% ao ano a partir de 2023, inclusive. Considere a sucessão cujo termo de ordem n, a_n, representa a estimativa para o número de teses de doutoramento concluídas na referida universidade no ano n, sendo $a_1 = 153$.

   (a) Verifique, por dedução e justificando, se (a_n) é uma progressão aritmética ou geométrica.

(b) Identifique a fórmula do termo geral da progressão, a_n, e escreva a expressão deste termo.

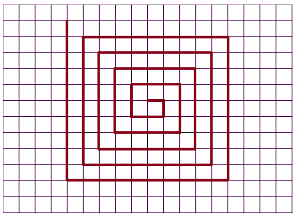
(c) Determine o termo da progressão correspondente à estimativa para o número de teses de doutoramento concluídas no ano de 2032 na referida universidade.

(d) Se pretender determinar uma estimativa para o número total de teses de doutoramento concluídas na referida universidade nos próximos 10 anos (incluindo o ano de 2023), que fórmula do formulário deve usar? Calcule esse valor usando a fórmula identificada.

4. Uma "serpente" é desenhada em papel quadriculado 1 x 1 como se ilustra na figura.

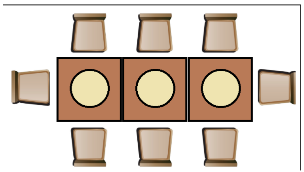
   Determine o comprimento total, expresso em quadrículas, da "serpente" representada na figura.

   Observando que a última secção da figura tem 10 quadrículas de comprimento, determine o comprimento total de uma "serpente" cuja última secção tem um comprimento de 120 quadrículas.



5. O café Aveiro tem apenas mesas quadradas, cada uma das quais pode acomodar 4 pessoas. Se juntar duas mesas quadradas, poderá acomodar 6 pessoas. A imagem mostra o caso em que 3 mesas quadradas foram colocadas ao longo de uma linha, podendo assim acomodar 8 pessoas.

   Juntando 16 mesas quadradas ao longo de uma única linha, quantas pessoas poderão sentar-se? Justifique a sua resposta.



6. À medida que um isótopo radioativo se desintegra, a sua massa diminui para metade em cada 7 minutos. Sabendo que no início do processo a massa do isótopo era de 640 mg, encontre o valor da massa do isótopo (em miligramas) após 42 minutos.

7. O Sr. Costa celebrou um contrato com o seu banco por um período de 5 anos em que se comprometia a depositar anualmente 10.000 €, sem retirar fundos depositados anteriormente. No final de cada ano, o banco credita 5 % de juros sobre o montante total dos fundos investidos pelo Sr. Costa até ao momento. Quanto dinheiro poderá o Sr. Costa levantar no banco após o vencimento do contrato?

8. Representa a fração decimal 2,5(3) na forma de uma fração simples.

9. Representa a fração decimal 1,2(7) na forma de uma fração simples.

10. Representa a fração decimal 6,(6) na forma de uma fração simples.

11. Mostre que $0,(9)$ (dízima infinita periódica) é uma forma d e representar o número 1.

12. Sabendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica com $a_1 = 3$ e $a_6 = 96$,

    (a) Determine a razão da progressão geométrica.

    (b) Escreva o termo geral da sucessão.

    (c) Calcule $\displaystyle\sum_{i=10}^{30} a_i$.

(d) Determine uma expressão para a sucessão $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

(e) Determine o limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

13. Considere as sucessões $u_n = \left(\frac{7}{11}\right)^n$ e $v_n = \left(\frac{10}{3}\right)^n$.

    (a) Determine $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

    (b) Determine uma expressão para a sucessão $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{7}{11}\right)^k$.

    (c) Calcule o $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

    (d) Determine $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

    (e) Determine uma expressão para a sucessão $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{10}{3}\right)^k$.

    (f) Calcule o $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

    (g) O que pode afirmar sobre a natureza da sucessão $(S_n + T_n)_n$?

14. Averigúe se a série dada é convergente ou divergente indicando a sua soma em caso em convergência.

    (a) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

    (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$

    (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$

    (d) $\sum_{n=2}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$

15. Considere a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$.

    (a) Justifique que se trata de uma série redutível.

    (b) Determine a expressão do termo geral S_n da sucessão das somas parciais associada à série.

    (c) Determine o limite de S_n, $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

16. Considere a sucessão de números reais cujo termo geral é definido por $a_n = \frac{1}{4^{n-1}}$.

    (a) Mostre que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica.

    (b) Analisando a razão de (a_n), o que pode concluir acerca da natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

    (c) Determine a expressão do termo geral, S_n, da sucessão das somas parciais associada à série, e o seu limite, $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Justifique se a série converge ou diverge.

17. Considere a sucessão $u_n = (\mathrm{arctg}(n+3) - \mathrm{arctg}(n))$.

    (a) Determine o limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(b) Determine uma expressão para $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$.

(c) Determine o termo geral da sucessão $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

(d) Determine o limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

18. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n}\right)$.

(a) Justifique que se trata da Série Mengoli.

(b) Justifique que a expressão do termo geral da sucessão de somas parciais associada à série é dada por $S_n = 3 - \frac{3}{n+1}$.

(c) Estude a natureza da série e em caso da convergência, determine a sua soma.

Formulário

Progressão aritmética

Termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

onde $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a razão da progressão aritmética (se $r = 0$ temos a sucessão constante)

Soma dos n primeiros termos da progressão aritmética:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)r) = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica

Termo geral:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

onde $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ é a razão da progressão geométrica (se $r = 1$ temos a sucessão constante)-

Soma dos n primeiros termos da progressão geométrica:

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$