Álgebra Linear e Geometria Analítica

Grupo C

Ano Letivo 2023/24 (Versão: 14 de Setembro de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo I
Sistemas de equações lineares

ÍNDICE

1. Uma introdução aos números complexos

A origem de álgebra

- A palavra álgebra tem a origem árabe, mencionada primeira vez na obra ilm al-jebr wa'l-muqabala de Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi.

A orige

- A p … vez na obr … ça Alc

Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi (780 – 850), matemático, astrônomo, astrólogo, geógrafo e escritor persa.

A origem de álgebra

- A palavra álgebra tem a origem árabe, mencionada primeira vez na obra ilm al-jebr wa'l-muqabala de Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi.
- O significado do substantivo jebr pode-se descrever por «reunir partes quebradas», enquanto qabala refere a «colocar enfrente», ou «equilibrar».

A origem de álgebra

- A palavra álgebra tem a origem árabe, mencionada primeira vez na obra ilm al-jebr wa'l-muqabala de Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi.
- O significado do substantivo jebr pode-se descrever por «reunir partes quebradas», enquanto qabala refere a «colocar enfrente», ou «equilibrar».
- Num sentido muito tradicional, a álgebra investiga a manipulação de equações; apenas no início do século vinte evolveu numa área muito mais abstrata e, consequentemente, com influência mais abrangente.

Resolver equações de grau 2

Começando com a equação genérica $0 = x^2 + px + q$ com $p, q \in \mathbb{R}$, calculamos

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Por isso a equação acima é equivalente à

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

o que leva-nos à formula resolvente para equações quadráticas:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Resolver equações de grau 2

Começando com a equação genérica $0 = x^2 + px + q$ com $p, q \in \mathbb{R}$, calculamos

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Por isso a equação acima é equivalente à

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

o que leva-nos à formula resolvente para equações quadráticas:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nota

Neste momento esta expressão só faz sentido se $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$; e, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$.

Resolver equações de grau 2

Começando com a equação genérica $0 = x^2 + px + q$ com $p, q \in \mathbb{R}$, calculamos

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Por isso a equação acima é equivalente à

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

o que leva-nos à formula resolvente para equações quadráticas:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nota

Neste momento esta expressão só faz sentido se $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$; e, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$. Durante séculos, a raiz $\sqrt{-1}$ foi considerada «imaginária» ou «impossível» e, de facto, … não foi considerada.

Resolver equações cúbicas

O caso de equações cúbicas foi resolvido apenas no século XVI pelos matemáticos italianos Scipione del Ferro (1465 – 1526), Antonio Maria Fiore (século XV – século XVI), Nicolo Tartaglia (1500 – 1557) e Gerolamo Cardano (1501 – 1576), o último publicou a solução na sua obra *Ars Magna* em 1545.

Resolver equações cúbicas

O caso de equações cúbicas foi resolvido apenas no século XVI pelos matemáticos italianos Scipione del Ferro (1465 – 1526), Antonio Maria Fiore (século XV – século XVI), Nicolo Tartaglia (1500 – 1557) e Gerolamo Cardano (1501 – 1576), o último publicou a solução na sua obra *Ars Magna* em 1545.

Preparação

Para a equação

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

considerar $x = y - \frac{a}{3}$ transforma esta equação numa equação da forma

$$y^3 + py + q = 0$$

com $p, q \in \mathbb{R}$.

Saltando sobre algum cálculo ...

A equação $y^3 + px + q = 0$ tem a raiz

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

hoje em dia, este fórmula é conhecida como a fórmula de Cardano.

Saltando sobre algum cálculo ...

A equação $y^3 + px + q = 0$ tem a raiz

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

hoje em dia, este fórmula é conhecida como a fórmula de Cardano.

Exemplo

No caso da equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

a fórmula de Cardano produz a raiz

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Saltando sobre algum cálculo ...

A equação $y^3 + px + q = 0$ tem a raiz

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

hoje em dia, este fórmula é conhecida como a fórmula de Cardano.

Exemplo

No caso da equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

a fórmula de Cardano produz a raiz

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Cardano considerou esta expressão irredutível e ignorou o caso, possivelmente pensando que este termo não descreve uma solução real.

Nota

Neste ponto, o matemático italiano Rafael Bombelli teve «a ideia louca» de trabalhar com estas expressões como se fossem reais. Algum cálculo revela que

$$2+11\sqrt{-1}=(2+\sqrt{-1})^3 \qquad \text{e} \qquad 2-11\sqrt{-1}=(2-\sqrt{-1})^3,$$

assim obtém-se a raiz

$$(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4.$$

Nota

Neste ponto, o matemático italiano Rafael Bombelli teve «a ideia louca» de trabalhar com estas expressões como se fossem reais. Algum cálculo revela que

$$2 + 11\sqrt{-1} = (2 + \sqrt{-1})^3 \qquad \text{e} \qquad 2 - 11\sqrt{-1} = (2 - \sqrt{-1})^3,$$

assim obtém-se a raiz

$$(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

Salientamos o facto que, embora esta raiz de $x^3 - 15x - 4$ seja um número real (as outras raízes são $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$, também reais), o seu cálculo obrigou-nos a considerar «os números imaginários»!!

Definição

- Um **número complexo** é um par ordenado (a, b) de números reais a e b, mas escreve-se mais sugestivamente

$$a + bi,$$

com a intuição que o símbolo i representa $\sqrt{-1}$.

Definição

- Um **número complexo** é um par ordenado (a, b) de números reais a e b, mas escreve-se mais sugestivamente
$$a + bi,$$
com a intuição que o símbolo i representa $\sqrt{-1}$.
- Para o número complexo $\alpha = a + bi$, o número a é a **parte real** de α, denotada por $\Re(\alpha)$, e o número b é a **parte imaginária** de α, denotada por $\Im(\alpha)$.

Definição

- Um **número complexo** é um par ordenado (a, b) de números reais a e b, mas escreve-se mais sugestivamente

$$a + bi,$$

com a intuição que o símbolo i representa $\sqrt{-1}$.

- Para o número complexo $\alpha = a + bi$, o número a é a **parte real** de α, denotada por $\Re(\alpha)$, e o número b é a **parte imaginária** de α, denotada por $\Im(\alpha)$.
- Consideremos o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definição

- Um **número complexo** é um par ordenado (a, b) de números reais a e b, mas escreve-se mais sugestivamente
$$a + bi,$$
com a intuição que o símbolo i representa $\sqrt{-1}$.
- Para o número complexo $\alpha = a + bi$, o número a é a **parte real** de α, denotada por $\Re(\alpha)$, e o número b é a **parte imaginária** de α, denotada por $\Im(\alpha)$.
- Consideremos o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo

$\Re(3 + 4i) = 3$ e $\Im(3 + 4i) = 4$.

Definição

- Um **número complexo** é um par ordenado (a, b) de números reais a e b, mas escreve-se mais sugestivamente
$$a + bi,$$
com a intuição que o símbolo i representa $\sqrt{-1}$.
- Para o número complexo $\alpha = a + bi$, o número a é a **parte real** de α, denotada por $\Re(\alpha)$, e o número b é a **parte imaginária** de α, denotada por $\Im(\alpha)$.
- Consideremos o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo

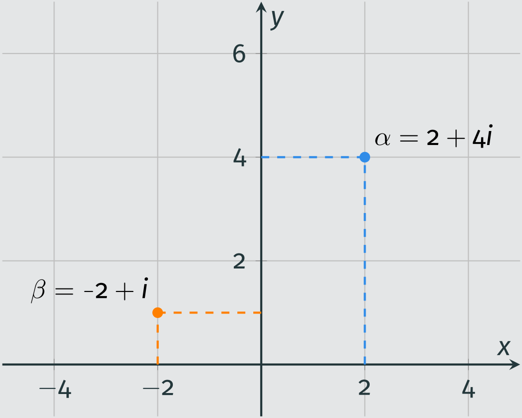
$\Re(3 + 4i) = 3$ e $\Im(3 + 4i) = 4$.

Nota

Para os números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, verifica-se $\alpha = \beta$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Nota

O número complexo $\alpha = a + bi$ pode-se representar como o ponto no plano com as coordenadas Cartesianas (a, b), por isso utiliza-se aqui a designação **plano complexo**:



Definição

Define-se a **adição**, a **multiplicação** e o **simétrico** de números complexos como (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i,\\ \text{-}(a+bi) &= \text{-}a+(\text{-}b)i.\end{aligned}$$

Definição

Define-se a **adição**, a **multiplicação** e o **simétrico** de números complexos como (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$
$$-(a+bi) = -a+(-b)i.$$

Exemplo

$$(2+3i)+(4+5i) = 2+4+3i+5i = 6+8i,$$
$$(2+3i)(4+5i) = 8+10i+12i+15i^2 = 8-15+(10+12)i = -7+22i.$$

Definição

Define-se a **adição**, a **multiplicação** e o **simétrico** de números complexos como (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i,\\ \text{-}(a+bi) &= \text{-}a+(\text{-}b)i.\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}(2+3i)+(4+5i) &= 2+4+3i+5i = 6+8i,\\ (2+3i)(4+5i) &= 8+10i+12i+15i^2 = 8-15+(10+12)i = \text{-}7+22i.\end{aligned}$$

Nota

- Cada número real a identifica-se com o número complexo $a+0i$. Assim pode-se considerar $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Definição

Define-se a **adição**, a **multiplicação** e o **simétrico** de números complexos como (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$-(a + bi) = -a + (-b)i.$$

Exemplo

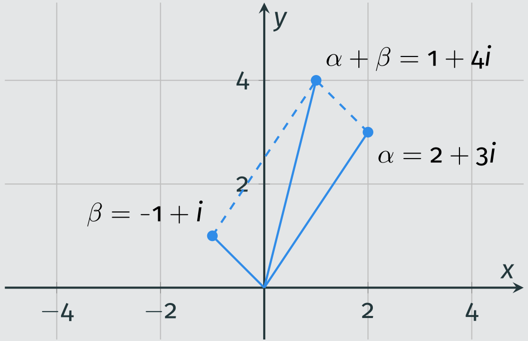
$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 2 + 4 + 3i + 5i = 6 + 8i,$$
$$(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 - 15 + (10 + 12)i = -7 + 22i.$$

Nota

- Cada número real a identifica-se com o número complexo $a + 0i$. Assim pode-se considerar $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$.
- Escreve-se simplesmente bi em lugar de $0 + bi$, ainda mais, escreve-se i em lugar de $0 + 1i$.

Nota

A adição de números complexos calcula-se «componente a componente» o que podemos representar geometricamente pela «regra do paralelogramo».



Proposição

- *Comutatividade: para todos os* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*,*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad e \qquad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

- *Associatividade: para todos os* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$*,*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad e \qquad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

- *Unidades: para todo o* $\alpha \in \mathbb{C}$*,*

$$\alpha + 0 = 0 \qquad e \qquad \alpha\, 1 = \alpha.$$

- *Inverso aditivo: para todo o* $\alpha \in \mathbb{C}$*,*

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

- *Distributividade: para todos os* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$*,*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Definição

Para $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o número complexo **conjugado** $\overline{\alpha}$ de α é o número complexo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$

O **módulo** do número complexo $\alpha = a + bi$ é o número real

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Definição

Para $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o número complexo **conjugado** $\overline{\alpha}$ de α é o número complexo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$

O **módulo** do número complexo $\alpha = a + bi$ é o número real

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Exemplo

$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$ e $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 = |3 - 4i|$.

Definição

Para $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o número complexo **conjugado** $\overline{\alpha}$ de α é o número complexo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$

O **módulo** do número complexo $\alpha = a + bi$ é o número real

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Exemplo

$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$ e $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 = |3 - 4i|$.

Nota

- Para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \qquad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \qquad \text{e} \qquad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta},$$

Definição

Para $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o número complexo **conjugado** $\overline{\alpha}$ de α é o número complexo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$

O **módulo** do número complexo $\alpha = a + bi$ é o número real

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Exemplo

$$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i \quad \text{e} \quad |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 = |3 - 4i|.$$

Nota

- Para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \qquad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \qquad \text{e} \qquad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta},$$

- α é um número real se e somente se $\overline{\alpha} = \alpha$.

Definição

Para $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, o número complexo **conjugado** $\overline{\alpha}$ de α é o número complexo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$

O **módulo** do número complexo $\alpha = a + bi$ é o número real

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Exemplo

$$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i \quad \text{e} \quad |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 = |3 - 4i|.$$

Nota

- Para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \qquad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \qquad \text{e} \qquad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta},$$
- α é um número real se e somente se $\overline{\alpha} = \alpha$.
- $|\alpha|$ é a distância do ponto α à origem 0 no plano complexo.

Nota

Tem-se $|\alpha|^2 = \alpha\,\overline{\alpha}$, donde se tira logo que, para $\alpha \neq 0$,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2}\,\overline{\alpha} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Nota

Tem-se $|\alpha|^2 = \alpha\,\overline{\alpha}$, donde se tira logo que, para $\alpha \neq 0$,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2}\,\overline{\alpha} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Dividir números complexos

Para os números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di \neq 0$, define-se

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\,\beta^{-1} = \frac{\alpha\overline{\beta}}{|\beta|^2}$$

e calcula-se

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Nota

Tem-se $|\alpha|^2 = \alpha\,\overline{\alpha}$, donde se tira logo que, para $\alpha \neq 0$,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2}\,\overline{\alpha} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Dividir números complexos

Para os números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di \neq 0$, define-se

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\,\beta^{-1} = \frac{\alpha\overline{\beta}}{|\beta|^2}$$

e calcula-se

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Nota

Verificam-se

$$\Re(\alpha) = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} \qquad \text{e} \qquad \Im(\alpha) = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}.$$

Lema

Para os números complexos α, β,

$$|\overline{\alpha}| = |\alpha|, \qquad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Lema

Para os números complexos α, β,

$$|\overline{\alpha}| = |\alpha|, \qquad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Nota

Geometricamente, a desigualdade acima afirma que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado.

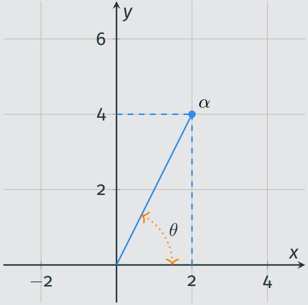
Nota

As vezes é mais útil representar o número complexo $\alpha = a + bi \neq 0$ pelas suas **coordenadas polares**:

$$a = r\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad b = r\,\text{sen}(\theta),$$

aqui $r = |\alpha|$ é o módulo de α e θ um **argumento** de α,

$$\theta = \arg(\alpha).$$



Portanto, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$, e $\alpha = r(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i)$.

Nota

Note-se que cada número complexo diferente do zero tem uma infinidade de argumentos, com θ também $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, ... são argumentos de α. Concretamente, para $\alpha = a + bi \neq 0$, tem-se

$$\arg(\alpha) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{se } a \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \end{cases} \quad + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Convenciona-se que o **argumento principal** de $\alpha \neq 0$ é aquele argumento θ de α com $-\pi < \theta \leq \pi$.

Nota

Note-se que cada número complexo diferente do zero tem uma infinidade de argumentos, com θ também $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, ... são argumentos de α. Concretamente, para $\alpha = a + bi \neq 0$, tem-se

$$\arg(\alpha) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{se } a \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \end{cases} \qquad + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Convenciona-se que o **argumento principal** de $\alpha \neq 0$ é aquele argumento θ de α com $-\pi < \theta \leq \pi$.

Exemplo

Consideremos $\alpha = -1 - \sqrt{3}i$. Portanto, $|\alpha| = \sqrt{1+3} = 2$.

Nota

Note-se que cada número complexo diferente do zero tem uma infinidade de argumentos, com θ também $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, $\dots$ são argumentos de α. Concretamente, para $\alpha = a + bi \neq 0$, tem-se

$$\arg(\alpha) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{se } a \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \end{cases} \qquad + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Convenciona-se que o **argumento principal** de $\alpha \neq 0$ é aquele argumento θ de α com $-\pi < \theta \leq \pi$.

Exemplo

Consideremos $\alpha = -1 - \sqrt{3}i$. Portanto, $|\alpha| = \sqrt{1+3} = 2$.

O ponto α no plano complexo está no terceiro quadrante e $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, o argumento principal de α é $\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Definição

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) i;$$

esta fórmula é conhecida como a fórmula de Euler.

Defini

Para c

esta f

Leonard Euler (1707 – 1783), matemático e físico suíço. Introduziu o símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$.

Definição

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) i;$$

esta fórmula é conhecida como a fórmula de Euler.

Nota

O uso da notação exponencial é justificada pelas igualdades

$$e^{0i} = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{(\theta_1+\theta_2)i} = e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i},$$

para todos os $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Definição

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) i;$$

esta fórmula é conhecida como a fórmula de Euler.

Nota

O uso da notação exponencial é justificada pelas igualdades

$$e^{0i} = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{(\theta_1+\theta_2)i} = e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i},$$

para todos os $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Assim pode-se reescrever a forma polar de um número complexo α na **forma exponencial**:

$$\alpha = re^{\theta i},$$

com $r = |\alpha|$ e θ é um argumento de α.

Exemplo

Em particular, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{2\pi i} = e^{0i} = 1$ e $e^{\pi i} = -1$. A última igualdade pode-se também escrever na forma

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

o que é uma fórmula notável porque envolve exatamente uma vez os números $0, 1, e, \pi, i$, bem como as operações de adição, de multiplicação e de exponenciação.

Exemplo

Em particular, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{2\pi i} = e^{0i} = 1$ e $e^{\pi i} = -1$. A última igualdade pode-se também escrever na forma

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

o que é uma fórmula notável porque envolve exatamente uma vez os números $0, 1, e, \pi, i$, bem como as operações de adição, de multiplicação e de exponenciação.

Nota

Note-se ainda que, para os números complexos não nulos $\alpha = r_1 e^{\theta_1 i}$ e $\beta = r_2 e^{\theta_2 i}$,

$$\alpha = \beta \text{ se e somente se } r_1 = r_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Algumas propriedades

Para os números complexos não nulos $\alpha = r_1 e^{\theta_1 i}$ e $\beta = r_2 e^{\theta_2 i}$:

- $\alpha\beta = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$, portanto, $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.

Algumas propriedades

Para os números complexos não nulos $\alpha = r_1 e^{\theta_1 i}$ e $\beta = r_2 e^{\theta_2 i}$:

- $\alpha\beta = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$, portanto, $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.
- Para $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} = \frac{1}{r_2} e^{-\theta_2 i}$, logo, $\arg(\beta^{-1}) = -\arg(\beta)$.

Algumas propriedades

Para os números complexos não nulos $\alpha = r_1 e^{\theta_1 i}$ e $\beta = r_2 e^{\theta_2 i}$:

- $\alpha\beta = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$, portanto, $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.
- Para $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} = \frac{1}{r_2} e^{-\theta_2 i}$, logo, $\arg(\beta^{-1}) = -\arg(\beta)$.
- Mais geral, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}$, logo, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$.

Algumas propriedades

Para os números complexos não nulos $\alpha = r_1 e^{\theta_1 i}$ e $\beta = r_2 e^{\theta_2 i}$:

- $\alpha\beta = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$, portanto, $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.
- Para $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} = \frac{1}{r_2} e^{-\theta_2 i}$, logo, $\arg(\beta^{-1}) = -\arg(\beta)$.
- Mais geral, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}$, logo, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$.

Nota

Em particular, com $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(re^{\theta i}\right)^n = r^n e^{n\theta i},$$

daqui obtém-se a fórmula de De Moivre:

$$(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)^n = \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta)i.$$

Exemplo

Consideremos a equação $z^3 = 1$ em $\mathbb{C}$.

Aqui $\alpha = re^{\theta i}$ é uma solução desta equação se e somente se

$$r^3 = 1 \text{ e } 3\theta = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo

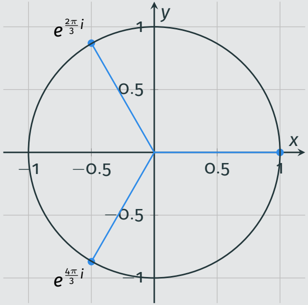
Consideremos a equação $z^3 = 1$ em $\mathbb{C}$.

Aqui $\alpha = re^{\theta i}$ é uma solução desta equação se e somente se

$$r^3 = 1 \text{ e } 3\theta = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, a equação $z^3 = 1$ tem as três raízes distintas

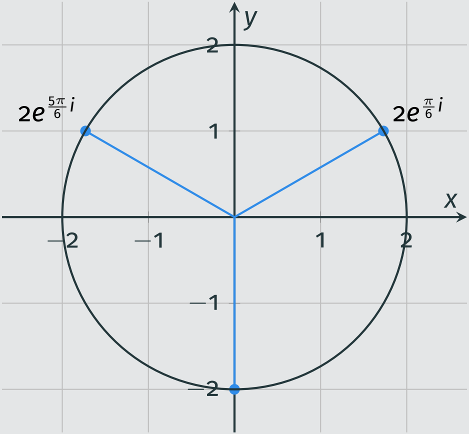
$$1 = e^{0i}, \quad e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$



Exemplo

De forma semelhante, a equação $z^3 = 8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ tem as três raízes distintas

$$2e^{\frac{\pi}{6}i}, \quad 2e^{\frac{5\pi}{6}i}, \quad 2e^{\frac{9\pi}{6}i} = -2.$$



Nota

De facto, cada equação da forma $z^n = \beta$ em $\mathbb{C}$ pode-se resolver da mesma maneira. Com $\beta = re^{\theta i}$, as n raízes de β são dadas por

$$\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + \operatorname{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n})i\right), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Nota

De facto, cada equação da forma $z^n = \beta$ em $\mathbb{C}$ pode-se resolver da mesma maneira. Com $\beta = re^{\theta i}$, as n raízes de β são dadas por

$$\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + \operatorname{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n})i\right), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Teorema (Teorema Fundamental de Álgebra)

Cada polinómio não constante em $\mathbb{C}$ tem uma raiz.

Nota

De facto, cada equação da forma $z^n = \beta$ em $\mathbb{C}$ pode-se resolver da mesma maneira. Com $\beta = re^{\theta i}$, as n raízes de β são dadas por

$$\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + \operatorname{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n})i\right), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Teorema (Teorema Fundamental de Álgebra)

Cada polinómio não constante em $\mathbb{C}$ tem uma raiz.

Nota

Consequentemente, cada polinómio p de grau $n \geq 0$ em $\mathbb{C}$ (na variável z) tem a fatorização única (a menos da ordem dos fatores)

$$p = c(z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n),$$

com $c, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

2. Equações lineares

O que é?

Equações lineares são equações de termos com certas incógnitas formados utilizando apenas produtos com constantes e somas.

Exemplos

- $3x + 7y = 9$ é uma equação linear.
- $3(x - y + z) = 2x + 8z + 1$ é uma equação linear.

O que é?

Equações lineares são equações de termos com certas incógnitas formados utilizando apenas produtos com constantes e somas.

Exemplos

- $3x + 7y = 9$ é uma equação linear.
- $3(x - y + z) = 2x + 8z + 1$ é uma equação linear.
- $x^2 + yx = 1$ não é linear.
- $x_1\left(3 - \frac{4}{x_1}\right) = x_2$ não é linear

O que é?

Equações lineares são equações de termos com certas incógnitas formados utilizando apenas produtos com constantes e somas.

Exemplos

- $3x + 7y = 9$ é uma equação linear.
- $3(x - y + z) = 2x + 8z + 1$ é uma equação linear.
- $x^2 + yx = 1$ não é linear.
- $x_1\left(3 - \frac{4}{x_1}\right) = x_2$ não é linear mas $3x_1 - 4 = x_2$ é linear.

O que é?

Equações lineares são equações de termos com certas incógnitas formados utilizando apenas produtos com constantes e somas.

Exemplos

- $3x + 7y = 9$ é uma equação linear.
- $3(x - y + z) = 2x + 8z + 1$ é uma equação linear.
- $x^2 + yx = 1$ não é linear.
- $x_1\left(3 - \frac{4}{x_1}\right) = x_2$ não é linear mas $3x_1 - 4 = x_2$ é linear.

Nota

Tipicamente apresentamos uma equação linear na forma normal onde

- o primeiro termo é uma soma de parcelas da forma «constante · incógnita», e
- o segundo termo é uma constante real ou complexa.

Definição

Seja $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. A sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de n números reais ou complexos é **solução** desta equação quando

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Definição

Seja $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. A sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de n números reais ou complexos é **solução** desta equação quando

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Nota

Se todos os coeficientes e o termo independente são reais, estamos interessados em soluções reais; caso contrário procuramos as soluções complexas.

Definição

Seja $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. A sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de n números reais ou complexos é **solução** desta equação quando

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Nota

Se todos os coeficientes e o termo independente são reais, estamos interessados em soluções reais; caso contrário procuramos as soluções complexas.

Exemplos

- A equação $3x = 6$ de só uma incógnita x tem a única solução $x = 2$.

Definição

Seja $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. A sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de n números reais ou complexos é **solução** desta equação quando

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Nota

Se todos os coeficientes e o termo independente são reais, estamos interessados em soluções reais; caso contrário procuramos as soluções complexas.

Exemplos

- A equação $3x = 6$ de só uma incógnita x tem a única solução $x = 2$.
- Consideremos agora a equação $x_1 + x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2. Neste caso, temos as soluções $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ...

Definição

Seja $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. A sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de n números reais ou complexos é **solução** desta equação quando

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Nota

Se todos os coeficientes e o termo independente são reais, estamos interessados em soluções reais; caso contrário procuramos as soluções complexas.

Exemplos

- A equação $3x = 6$ de só uma incógnita x tem a única solução $x = 2$.
- Consideremos agora a equação $x_1 + x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2.

  Neste caso, temos as soluções $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\ldots$ e o conjunto das soluções reais é

$$\{(1 - x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reais é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reais é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).

- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).
- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $3y = 6$ de só uma incógnita y tem a única solução $y = 2$.

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).
- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x + 3y = 6$ nas incógnitas x e y:

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).

- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

- A equação $3y = 6$ nas incógnitas x e y:

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).

- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

- A equação $3y = 6$ nas incógnitas x e y:

  o conjunto das soluções reais é $\{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplos

- A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reias é $\{(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $0x_1 + 0x_2 = 1$ nas incógnitas x_1 e x_2 não tem solução.

  No caso desta equação escrevemos apenas $0 = 1$ (em geral, não escrevemos as incógnitas com fator 0).
- O conjunto das soluções reais da equação $0x_1 + 0x_2 = 0$ nas incógnitas x_1 e x_2 é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $3y = 6$ nas incógnitas x e y:

  o conjunto das soluções reais é $\{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- A equação $x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

  o conjunto das soluções reais é

$$\{(x_1, 1 - x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Definição

Uma **equação linear** (na forma normal) de n incógnitas é dada por

- uma sequência de n incógnitas diferentes,
- uma lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (os coeficientes da equação),
- um número b (o termo independente);

esta informação organiza-se na forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Definição

Uma **equação linear** (na forma normal) de n incógnitas é dada por

- uma sequência de n incógnitas diferentes,
- uma lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (os coeficientes da equação),
- um número b (o termo independente);

esta informação organiza-se na forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Dizemos que a incógnita x_j é **visível** quando $a_j \neq 0$. No caso de $a_j = 0$ diz-se que x_j é **invisível**.

Exemplo

Na equação $x_2 + x_3 = 1$ nas incógnitas x_1, x_2 e x_3, as incógnitas x_2, x_3 são visíveis e a incógnita x_1 é invisível.

O procedimento

Consideremos a equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

1. $0 = b$ (todas as incógnitas são invisíveis):
   - Se $b \neq 0$, a equação não tem nenhuma solução.
   - Se $b = 0$, então cada elemento de $\mathbb{C}^n$ é solução da equação.

O procedimento

Consideremos a equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

1. $0 = b$ (todas as incógnitas são invisíveis):
   - Se $b \neq 0$, a equação não tem nenhuma solução.
   - Se $b = 0$, então cada elemento de $\mathbb{C}^n$ é solução da equação.
2. $a_1x_1 = b$ com $a_1 \neq 0$ (apenas uma incógnita, esta incógnita é visível):

   Calcula-se $x_1 = \frac{b}{a_1}$, sendo esta a única solução do sistema.

O procedimento

Consideremos a equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

1. $0 = b$ (todas as incógnitas são invisíveis):
   - Se $b \neq 0$, a equação não tem nenhuma solução.
   - Se $b = 0$, então cada elemento de $\mathbb{C}^n$ é solução da equação.
2. $a_1x_1 = b$ com $a_1 \neq 0$ (apenas uma incógnita, esta incógnita é visível):

   Calcula-se $x_1 = \frac{b}{a_1}$, sendo esta a única solução do sistema.
3. Mais do que uma incógnita e pelo menos uma é visível:

   Determina-se a primeira incógnita visível em função das restantes incógnitas.

O procedimento

Consideremos a equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

1. $0 = b$ (todas as incógnitas são invisíveis):
   - Se $b \neq 0$, a equação não tem nenhuma solução.
   - Se $b = 0$, então cada elemento de $\mathbb{C}^n$ é solução da equação.
2. $a_1x_1 = b$ com $a_1 \neq 0$ (apenas uma incógnita, esta incógnita é visível):

   Calcula-se $x_1 = \frac{b}{a_1}$, sendo esta a única solução do sistema.
3. Mais do que uma incógnita e pelo menos uma é visível:

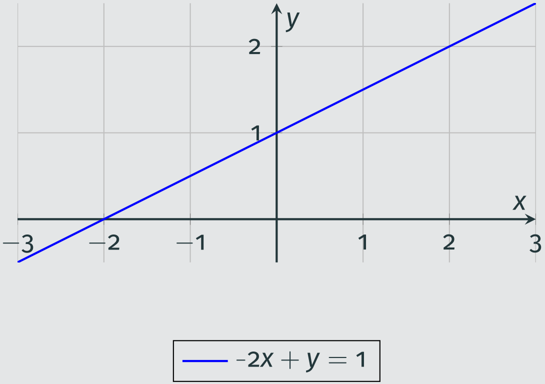
   Determina-se a primeira incógnita visível em função das restantes incógnitas.

Nota

Uma equação linear pode ter ou nenhuma solução, ou exatamente uma solução, ou uma infinidade de soluções.

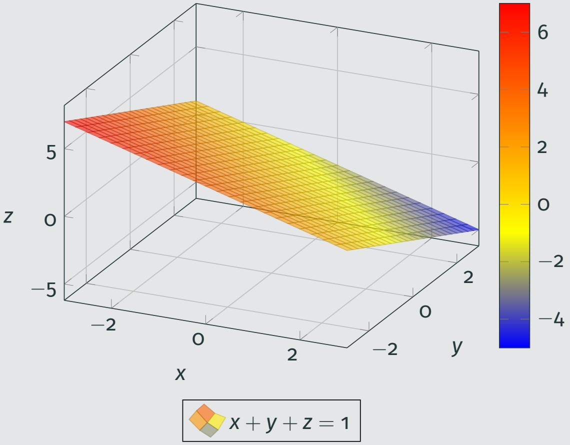
Exemplo

O conjunto das soluções reais de uma equação linear real de duas incógnitas, com pelo menos uma destas visível, pode-se interpretar como uma reta no plano.



Exemplo

O conjunto das soluções reais de uma equação linear real de três incógnitas, com pelo menos uma destas visível, pode-se interpretar como um plano no espaço.



3. Sistemas em escada

Definição

Um **sistema de equações lineares** de n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ e m equações é dado por uma sequência

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

de equações lineares de incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ com os coeficientes $a_{i,j}$ (reais ou complexos) e os termos independentes b_i (reais ou complexos).

Definição

Um **sistema de equações lineares** de n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ e m equações é dado por uma sequência

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

de equações lineares de incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ com os coeficientes $a_{i,j}$ (reais ou complexos) e os termos independentes b_i (reais ou complexos).

Diz-se **solução** de um sistema com n incógnitas cada $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ que é solução de todas as equações deste sistema.

Exemplo

Consideremos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3.

Exemplo

Consideremos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3.

Por exemplo,

- $(1, 0, 2)$ é solução deste sistema.

Exemplo

Consideremos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3.

Por exemplo,

- $(1, 0, 2)$ é solução deste sistema.
- $(0, 0, 1)$ é solução da primeira equação mas não da segunda; logo não é solução do sistema.

Exemplo

Consideremos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3.

Por exemplo,

- $(1, 0, 2)$ é solução deste sistema.
- $(0, 0, 1)$ é solução da primeira equação mas não da segunda; logo não é solução do sistema.

Nota

- Se uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$ pertence ao sistema, então o sistema não tem solução.

Exemplo

Consideremos o sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3.

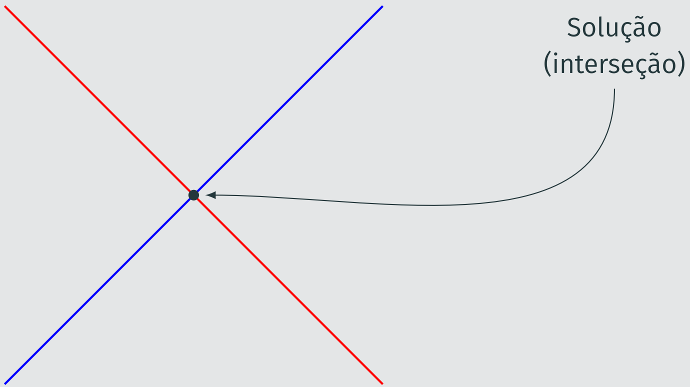
Por exemplo,

- $(1, 0, 2)$ é solução deste sistema.
- $(0, 0, 1)$ é solução da primeira equação mas não da segunda; logo não é solução do sistema.

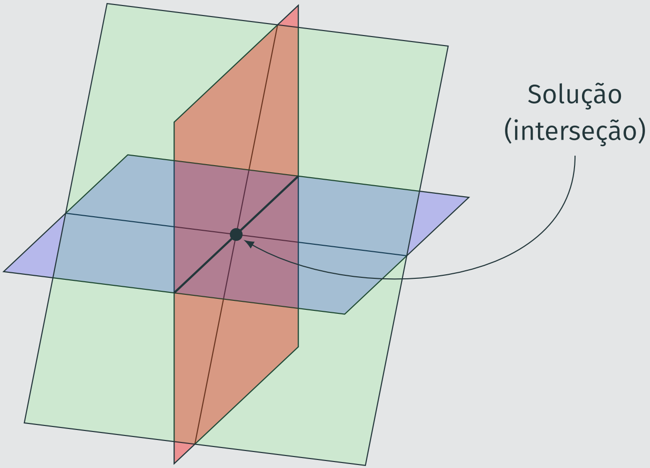
Nota

- Se uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$ pertence ao sistema, então o sistema não tem solução.
- Cada equação da forma $0 = 0$ pode-se «ignorar».

Exemplo

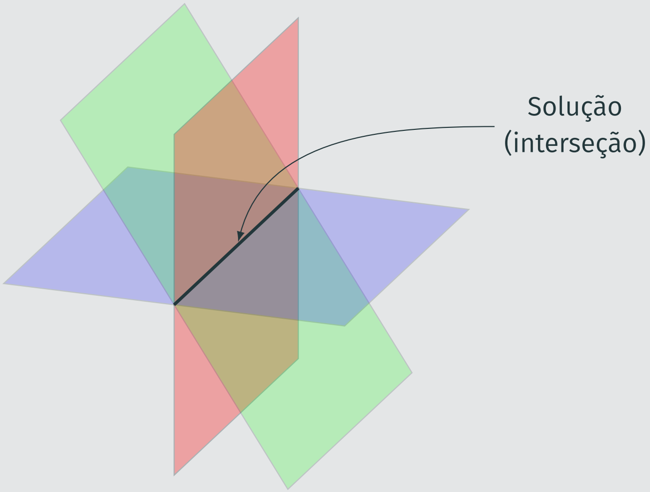


Exemplo



https://tex.stackexchange.com/questions/509160/intersection-of-3-planes

Exemplo



https://tex.stackexchange.com/questions/509160/intersection-of-3-planes

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Para resolver (B), calculamos:

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Para resolver (B), calculamos:

- $x_3 = 2$.

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Para resolver (B), calculamos:

- $x_3 = 2$.
- $x_2 = 2 - x_3 = 2 - 2 = 0$.

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Para resolver (B), calculamos:

- $x_3 = 2.$
- $x_2 = 2 - x_3 = 2 - 2 = 0.$
- $x_1 = -1 + 2x_2 + x_3 = -1 + 2 = 1.$

Exemplo

Consideremos os seguintes sistemas com incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Notamos que o sistema (B) é «mais fácil» do que o sistema (A) porque «a equação seguinte tem menos incógnitas».

Para resolver (B), calculamos:

- $x_3 = 2.$
- $x_2 = 2 - x_3 = 2 - 2 = 0.$
- $x_1 = -1 + 2x_2 + x_3 = -1 + 2 = 1.$

Então, $(1, 0, 2)$ é a única solução do sistema (B).

Definição

Um sistema de m equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ diz-se **escalonado**, ou **em escada**, quando,

> *se x_j é a primeira incógnita visível da equação $i > 1$, então há uma incógnita visível na equação $i - 1$ com índice menor do que j.*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Definição

Um sistema de m equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ diz-se **escalonado**, ou **em escada**, quando,

> *se x_j é a primeira incógnita visível da equação $i > 1$, então há uma incógnita visível na equação $i - 1$ com índice menor do que j.*

Exemplos

O sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8, \\ \qquad\quad -x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3 é escalonado.

Definição

Um sistema de m equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ diz-se **escalonado**, ou **em escada**, quando,

> *se x_j é a primeira incógnita visível da equação $i > 1$, então há uma incógnita visível na equação $i - 1$ com índice menor do que j.*

Exemplos

O sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8, \\ -x_2 + x_3 = 4, \\ 0 = 0, \\ 0 = 3 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3 é escalonado.

Definição

Um sistema de m equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ diz-se **escalonado**, ou **em escada**, quando,

> *se x_j é a primeira incógnita visível da equação $i > 1$, então há uma incógnita visível na equação $i - 1$ com índice menor do que j.*

Exemplos

O sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2 e x_3 não é escalonado.

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.
2. Passamos para a equação anterior:

$$x_1 = -5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5$$

.

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.
2. Passamos para a equação anterior:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \\ &= -5 - 2x_2 + 1 - x_4 + x_4 - 3x_5 \qquad . \end{aligned}$$

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.
2. Passamos para a equação anterior:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \\ &= -5 - 2x_2 + 1 - x_4 + x_4 - 3x_5 = -4 - 2x_2 - 3x_5. \end{aligned}$$

$(x_2, x_5$ pode-se escolher livremente)

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.
2. Passamos para a equação anterior:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \\ &= -5 - 2x_2 + 1 - x_4 + x_4 - 3x_5 = -4 - 2x_2 - 3x_5. \end{aligned}$$

$(x_2, x_5$ pode-se escolher livremente$)$

Solução real: $\{(-4 - 2x_2 - 3x_5, x_2, 1 - x_4, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

Exercício

Consideremos o sistema (em escada!!) de duas equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -5, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. *Resolvemos o sistema*:

1. $x_3 = 1 - x_4$, e x_4 pode-se escolher livremente.
2. Passamos para a equação anterior:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \\ &= -5 - 2x_2 + 1 - x_4 + x_4 - 3x_5 = -4 - 2x_2 - 3x_5. \end{aligned}$$

$$(x_2, x_5 \text{ pode-se escolher livremente})$$

Solução real: $\{(-4 - 2x_2 - 3x_5, x_2, 1 - x_4, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

Portanto, os valores de x_1 e x_3 são determinados pelos valores de x_2, x_4 e x_5, os quais podemos escolher livremente.

Definição

Uma incógnita de um sistema de equações lineares em escada diz-se **determinada** quando ocorre em uma das equações como primeira incógnita visível; caso contrário diz-se **livre**.

Definição

Uma incógnita de um sistema de equações lineares em escada diz-se **determinada** quando ocorre em uma das equações como primeira incógnita visível; caso contrário diz-se **livre**.

O procedimento

Se o sistema tem uma equação da forma $0 = b_i$ com $b_i \neq 0$, então o sistema não tem nenhuma solução.

Definição

Uma incógnita de um sistema de equações lineares em escada diz-se **determinada** quando ocorre em uma das equações como primeira incógnita visível; caso contrário diz-se **livre**.

O procedimento

Se o sistema tem uma equação da forma $0 = b_i$ com $b_i \neq 0$, então o sistema não tem nenhuma solução.

Caso contrário, apagam-se todas as equações da forma $0 = 0$ e:

Definição

Uma incógnita de um sistema de equações lineares em escada diz-se **determinada** quando ocorre em uma das equações como primeira incógnita visível; caso contrário diz-se **livre**.

O procedimento

Se o sistema tem uma equação da forma $0 = b_i$ com $b_i \neq 0$, então o sistema não tem nenhuma solução.

Caso contrário, apagam-se todas as equações da forma $0 = 0$ e:

- começando pela última equação, em cada equação determina-se a primeira incógnita visível desta equação em função das incógnitas de índice superior, substituindo sempre as incógnitas já determinadas;

Definição

Uma incógnita de um sistema de equações lineares em escada diz-se **determinada** quando ocorre em uma das equações como primeira incógnita visível; caso contrário diz-se **livre**.

O procedimento

Se o sistema tem uma equação da forma $0 = b_i$ com $b_i \neq 0$, então o sistema não tem nenhuma solução.

Caso contrário, apagam-se todas as equações da forma $0 = 0$ e:

- começando pela última equação, em cada equação determina-se a primeira incógnita visível desta equação em função das incógnitas de índice superior, substituindo sempre as incógnitas já determinadas;
- as incógnitas livres são precisamente aquelas incógnitas que não aparecem em nenhuma equação como primeira incógnita visível.

O problema

Em algumas situações não será necessário obter as soluções de um sistema mas sim responder a perguntas como:

- *Existem soluções?*
- *Se sim, quantas?*

O problema

Em algumas situações não será necessário obter as soluções de um sistema mas sim responder a perguntas como:

- *Existem soluções?*
- *Se sim, quantas?*

Definição

Diz-se que um sistema de equações lineares é

- **impossível** quando não existe uma solução,

O problema

Em algumas situações não será necessário obter as soluções de um sistema mas sim responder a perguntas como:

- *Existem soluções?*
- *Se sim, quantas?*

Definição

Diz-se que um sistema de equações lineares é

- **impossível** quando não existe uma solução,
- **possível** quando existe pelo menos uma solução .

O problema

Em algumas situações não será necessário obter as soluções de um sistema mas sim responder a perguntas como:

- *Existem soluções?*
- *Se sim, quantas?*

Definição

Diz-se que um sistema de equações lineares é

- **impossível** quando não existe uma solução,
- **possível** quando existe pelo menos uma solução .
- Além disso, diz-se que o sistema é **possível e determinado** quando tem exatamente uma solução e **possível e indeterminado** quando tem mais do que uma solução.

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada *classifica-se como*

- *impossível se e só se tem uma equação da forma* $0 = b$ *com* $b \neq 0$.
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x - 7y + 8z + 10w = 1, \\ \qquad\qquad\qquad y + w = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w é

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x - 7y + 8z + 10w = 1, \\ \hfill y + w = 2, \\ \hfill w = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w é possível e indeterminado.

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x - 7y + 8z + 10w = 1, \\ y + w = 2, \\ 0 = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w é

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x - 7y + 8z + 10w = 1, \\ \qquad\qquad\qquad y + w = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w é impossível.

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma* $0 = b$ *com* $b \neq 0$.
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} -7y + 8z + 10w = 1, \\ z + w = 2, \\ w = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas y, z e w é

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma* $0 = b$ *com* $b \neq 0$.
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

O sistema escalonado

$$\begin{cases} -7y + 8z + 10w = 1, \\ z + w = 2, \\ w = 6 \end{cases}$$

nas incógnitas y, z e w é possível e determinado.

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$.*
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

Neste momento não sabemos classificar sistemas não escalonados em geral.

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma* $0 = b$ *com* $b \neq 0$.
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

Neste momento não sabemos classificar sistemas não escalonados em geral. No entanto, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2 \end{cases}$$

nas incógnitas x e y é

Teorema

Um sistema de equações lineares em escada classifica-se como

- *impossível se e só se tem uma equação da forma* $0 = b$ *com* $b \neq 0$.
- *possível e determinado se e só se é possível e cada incógnita do sistema é determinada.*
- *possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma incógnita do sistema é livre.*

Exemplo

Neste momento não sabemos classificar sistemas não escalonados em geral. No entanto, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2 \end{cases}$$

nas incógnitas x e y é impossível embora não tenha uma equação da forma $0 = b \neq 0$. Note-se que o sistema não é em escada.

Exemplo

O sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 8z + w = 0, \\ x + y - z + w = 0, \\ -x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w não é escalonado; mesmo assim, podemos logo afirmar que o sistema é

Exemplo

O sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 8z + w = 0, \\ \quad x + y - z + w = 0, \\ \quad\quad -x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w não é escalonado; mesmo assim, podemos logo afirmar que o sistema é possível porque tem a solução $(0, 0, 0, 0)$.

Exemplo

O sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 8z + w = 0, \\ x + y - z + w = 0, \\ -x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z e w não é escalonado; mesmo assim, podemos logo afirmar que o sistema é possível porque tem a solução $(0, 0, 0, 0)$.

Neste momento não sabemos se é determinado.

Definição

Um sistema de equações lineares diz-se **homogéneo** quando o segundo membro de cada equação é igual a zero:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0. \end{cases}$$

Definição

Um sistema de equações lineares diz-se **homogéneo** quando o segundo membro de cada equação é igual a zero:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0. \end{cases}$$

Nota

Observamos imediatamente que todo o sistema homogéneo é possível porque tem a solução **nula** (ou seja, todas as incógnitas têm o valor 0).

4. Utilizando a linguagem de matrizes

Sistemas em geral

Descrevemos um método para transformar um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m; \end{cases}$$

num sistema escalonado de modo tal que ambos os sistemas tenham as mesmas soluções.

Sistemas em geral

Descrevemos um método para transformar um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m; \end{cases}$$

num sistema escalonado de modo tal que ambos os sistemas tenham as mesmas soluções.

Definição

Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto de soluções (reais ou complexas).

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Sobre a terceira operação

A equação

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

é equivalente a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 7 - 3.$$

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Sobre a terceira operação

O sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 &= 7 - 3. \end{aligned}$$

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Sobre a terceira operação

O sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - (x_1 - x_2 + x_3) &= 7 - 3. \end{aligned}$$

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Sobre a terceira operação

O sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ 3x_2 - 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Exemplo

Se adicionamos no sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Nota

A partir de um sistema obtém-se um sistema equivalente se se aplicar uma das seguintes **operações elementares**:

1. troca de duas equações,
2. multiplicação de uma equação por um número diferente do zero,
3. adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Exemplo

Se adicionamos no sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

o dobro da primeira linha à segunda, obtemos o sistema (em escada!!)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

equivalente.

Nota

Como «os nomes das incógnitas» são irrelevantes, temos toda a informação sobre um sistema necessária para resolver ou classificar o sistema se soubermos

- o número n de incógnitas e o número m das equações, e
- os coeficientes $a_{i,j}$ e os segundos membros b_i.

Nota

Como «os nomes das incógnitas» são irrelevantes, temos toda a informação sobre um sistema necessária para resolver ou classificar o sistema se soubermos

- o número n de incógnitas e o número m das equações, e
- os coeficientes $a_{i,j}$ e os segundos membros b_i.

Por exemplo, o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z pode ser descrito por um quadro com 3 linhas e 4 colunas:

$$\begin{cases} 2x - 7y + 3z = 2 \\ x + y = 1 \\ -x - 4y + 7z = -3 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Definição

Uma **matriz** consiste em:

- um tipo $m \times n$ com números naturais m e n, e
- a cada par (i, j) com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ está associado um número $a_{i,j}$.

Definição

Uma **matriz** consiste em:

- um tipo $m \times n$ com números naturais m e n, e
- a cada par (i, j) com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ está associado um número $a_{i,j}$.

De forma mais legível, representa-se uma matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad A = [a_{i,j}],$$

assim m corresponde ao número de linhas e n ao número de colunas da matriz A.

Definição

Uma **matriz** consiste em:

- um tipo $m \times n$ com números naturais m e n, e
- a cada par (i, j) com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ está associado um número $a_{i,j}$.

De forma mais legível, representa-se uma matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad A = [a_{i,j}],$$

assim m corresponde ao número de linhas e n ao número de colunas da matriz A.

O elemento $a_{i,j}$ que se encontra na linha i e na coluna j designa-se por entrada (i, j) de A.

Sistemas $\rightsquigarrow$ matrizes

A um sistema de m equações lineares com n incógnitas associa-se a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

de m linhas e $n+1$ colunas.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m; \end{cases}$$

Sistemas $\rightsquigarrow$ matrizes

A um sistema de m equações lineares com n incógnitas associa-se a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

de m linhas e $n+1$ colunas.

Aqui A é a matriz dos coeficientes do sistema e b é a coluna dos termos independentes

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Com esta notação, denota-se a matriz do sistema por $A \,|\, b$.

Matrizes $\rightsquigarrow$ sistemas

Cada matriz do tipo $m \times (n+1)$ com $n, m \in \mathbb{N}$ pode ser interpretada como um sistema de n incógnitas e m equações lineares:

> *escolhem-se uma lista de n incógnitas (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$), a última coluna da matriz fornece os segundos membros das equações e os restantes elementos são os coeficientes.*

Matrizes $\rightsquigarrow$ sistemas

Cada matriz do tipo $m \times (n+1)$ com $n, m \in \mathbb{N}$ pode ser interpretada como um sistema de n incógnitas e m equações lineares:

> *escolhem-se uma lista de n incógnitas (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$), a última coluna da matriz fornece os segundos membros das equações e os restantes elementos são os coeficientes.*

Exemplo

Consideremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

do tipo 2×4.

Matrizes $\rightsquigarrow$ sistemas

Cada matriz do tipo $m \times (n+1)$ com $n, m \in \mathbb{N}$ pode ser interpretada como um sistema de n incógnitas e m equações lineares:

> *escolhem-se uma lista de n incógnitas (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$), a última coluna da matriz fornece os segundos membros das equações e os restantes elementos são os coeficientes.*

Exemplo

Consideremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

do tipo 2×4.

Escolhendo a lista das três incógnitas x, y e z, obtém-se o sistema

Matrizes $\rightsquigarrow$ sistemas

Cada matriz do tipo $m \times (n+1)$ com $n, m \in \mathbb{N}$ pode ser interpretada como um sistema de n incógnitas e m equações lineares:

> *escolhem-se uma lista de n incógnitas (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$), a última coluna da matriz fornece os segundos membros das equações e os restantes elementos são os coeficientes.*

Exemplo

Consideremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

do tipo 2×4.

Escolhendo a lista das três incógnitas x, y e z, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Definição

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$.

Definição

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$.

- O primeiro elemento não nulo de uma linha de A diz-se **pivô** desta linha.

  Portanto, as linhas nulas de uma matriz não tem pivô e cada linha não nula tem exatamente um pivô.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$.

- O primeiro elemento não nulo de uma linha de A diz-se **pivô** desta linha.
- Diz-se que **a coluna j da matriz A tem um pivô**, ou A tem um pivô na coluna j, se A tem uma linha com pivô na coluna j.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$.

- O primeiro elemento não nulo de uma linha de A diz-se **pivô** desta linha.
- Diz-se que **a coluna j da matriz A tem um pivô**, ou A tem um pivô na coluna j, se A tem uma linha com pivô na coluna j.
- A é uma matriz **em escada** (ou **escalonada**) quando, para cada $i \geq 2$, se a linha i tem um pivô, então a linha anterior também tem um pivô que está numa coluna mais à esquerda do que a coluna do pivô da linha i.

$$\begin{bmatrix} \star & - & - & \dots & - & - & \dots & - \\ 0 & \star & - & \dots & - & - & \dots & - \\ & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \star & - & \dots & - \\ & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Nota

O sistema corresponde à matriz $A \mid b$

- $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix},$$

Nota

- O sistema corresponde à matriz $A \mid b$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix},$$

- As entradas da coluna j de A $=$ $\begin{cases}\text{os coeficientes da incógnita } x_j \\ \text{no sistema.}\end{cases}$

Nota

O sistema corresponde à matriz $A \mid b$

- $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right],$$

- As entradas da coluna j de A $=$ $\begin{cases}\text{os coeficientes da incógnita } x_j \\ \text{no sistema.}\end{cases}$

- A incógnita x_j é a primeira incógnita visível da equação i se e somente se a linha i de A tem um pivô na coluna j.

Nota

O sistema corresponde à matriz $A \mid b$

- $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right],$$
- As entradas da coluna j de A $=$ $\begin{cases}\text{os coeficientes da incógnita } x_j \\ \text{no sistema.}\end{cases}$
- A incógnita x_j é a primeira incógnita visível da equação i se e somente se a linha i de A tem um pivô na coluna j.
- O sistema acima é escalonado se e somente se a matriz A é escalonada.

Nota

- O sistema corresponde à matriz $A \mid b$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix},$$

- As entradas da coluna j de A $=$ $\begin{cases}\text{os coeficientes da incógnita } x_j \\ \text{no sistema.}\end{cases}$
- A incógnita x_j é a primeira incógnita visível da equação i se e somente se a linha i de A tem um pivô na coluna j.
- O sistema acima é escalonado se e somente se a matriz A é escalonada.

  Neste caso, as incógnitas livres do sistema correspondem às colunas de A sem pivô e as incógnitas determinadas do sistema correspondem às colunas de A com pivô.

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*

Exemplos

$$\begin{bmatrix} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{bmatrix}$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*

Exemplos

$$\begin{bmatrix} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & \star & - \end{bmatrix}$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Exemplos

$$\begin{bmatrix} \star & - & - & - \\ 0 & 0 & \star & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô = *número de incógnitas livres* = *grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$\begin{bmatrix} \star & - & - & - \\ 0 & 0 & \star & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô = *número de incógnitas livres* = *grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ corresponde a um sistema

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A\,|\,b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A\,|\,b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô	=	*número de incógnitas livres*	=	*grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$A\,|\,b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ corresponde a um sistema impossível.

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô	=	número de incógnitas livres	=	grau de indeterminação do sistema.

Exemplos

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ corresponde a } \left\{ \vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}} \right.$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô = *número de incógnitas livres* = *grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ corresponde a $\begin{cases} \text{um sistema possível e} \\ \text{determinado.} \end{cases}$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô = *número de incógnitas livres* = *grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ corresponde a } \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Teorema (classificar sistemas em escada)

Seja $A \mid b$ a matriz de um sistema de equações lineares em escada.

1. *O sistema é impossível se e só se a última coluna de $A \mid b$ tem pivô.*
2. *O sistema é possível e determinado se e só se é possível e cada coluna da matriz A tem um pivô.*
3. *O sistema é possível e indeterminado se e só se é possível e pelo menos uma coluna da matriz A não tem um pivô.*

Número de colunas de A sem pivô = *número de incógnitas livres* = *grau de indeterminação do sistema.*

Exemplos

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ corresponde a $\left\{\text{um sistema possível e indeterminado (o grau de indeterminação é um).}\right.$

As operações elementares (com linhas)

1. Troca de duas linhas.
2. Multiplicação de uma linha por um número real diferente do zero.
3. Adição de um múltiplo de uma linha a uma outra linha.

Recordamos

As operações elementares com equações:

1. Troca de duas equações.
2. Multiplicação de uma equação por um número real diferente do zero.
3. Adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

As operações elementares (com linhas)

1. Troca de duas linhas.
2. Multiplicação de uma linha por um número real diferente do zero.
3. Adição de um múltiplo de uma linha a uma outra linha.

Nota

- Escrevemos $A \rightsquigarrow B$ para indicar que B se obtém a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

  O processo $A \rightsquigarrow B$ referimos como **redução de Gauß**[a] ou simplesmente **redução**, e dizemos que A e B são equivalentes por linhas.

[a] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), matemático alemão.

As operações ele

1. Troca de dua
2. Multiplicaçã erente do zero.
3. Adição de um nha.

Nota

- Escrevemos A artir de A aplicando um ares.

  O processo A ^{a} ou simplesment uivalentes por linhas.

[a] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), matemático alemão.

As operações elementares (com linhas)

1. Troca de duas linhas.
2. Multiplicação de uma linha por um número real diferente do zero.
3. Adição de um múltiplo de uma linha a uma outra linha.

Nota

- Escrevemos $A \rightsquigarrow B$ para indicar que B se obtém a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

  O processo $A \rightsquigarrow B$ referimos como **redução de Gauß**[a] ou simplesmente **redução**, e dizemos que A e B são equivalentes por linhas.

- Quando B é em escada, diz-se que $A \rightsquigarrow B$ é uma **escalonação** de A.

[a] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), matemático alemão.

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3\leftarrow(L3-2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L3\leftarrow(L3+3\,L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L3 \leftarrow (L3 + 3\,L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O processo termina com uma matriz em escada.

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O processo termina com uma matriz em escada.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3} L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}\,2$)

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3}L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}2$)
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3} L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}\, 2$)
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\, L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3}L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}2$)
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\,L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3}L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}2$)

- $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\,L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\,L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow \left(L2 - \frac{1}{3}L1\right)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (Por exemplo: $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{3}2$)
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\, L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow 3\, L2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow L2 - 2\, L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$.

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada,

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada, caso contrário:

$$\begin{bmatrix} - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ \vdots & & & \\ - & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada, caso contrário:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ \vdots & & & \\ 0 & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Se todas as entradas da primeira coluna são iguais à zero, então aplicamos o procedimento à matriz

$$A - \text{«a primeira coluna»}.$$

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada, caso contrário:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ * & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ \vdots & & & \\ - & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Se A tem um pivô na primeira coluna,

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada, caso contrário:

$$\begin{bmatrix} * & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ \vdots & & & \\ 0 & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Se A tem um pivô na primeira coluna, então utilizamos este pivô para eliminar todas as outras entradas da primeira coluna. Se for preciso, trocando linhas «transportamos» esta linha para o início.

Teorema

Para cada matriz A existe uma escalonação $A \rightsquigarrow B$.

O algoritmo.

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Se $m = 0$ ou $n = 0$, então A é escalonada, caso contrário:

$$\begin{bmatrix} * & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ 0 & - & \dots & - \\ \vdots & & & \\ 0 & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Depois, aplicamos o procedimento à matriz

$$A - \text{«a primeira coluna e a primeira linha»}. \qquad \square$$

O procedimento

- Escrever o sistema na forma matricial $A \mid b$.
- Fazer uma redução de Gauß

$$A \mid b \;\rightsquigarrow\; A' \mid b'$$

  tal que $A' \mid b'$ seja uma matriz em escada.
- Resolver (ou classificar) o sistema correspondente à matriz $A' \mid b'$ (que é um sistema em escada).

Exercício

Resolvemos o sistema nas incógnitas x, y, z e w

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ -z + 2w = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Exercício

Resolvemos o sistema nas incógnitas x, y, z e w

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ -z + 2w = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

com a matriz

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Resolvemos o sistema nas incógnitas x, y, z e w

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ -z + 2w = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

com a matriz

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos:

$$\underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Resolvemos o sistema nas incógnitas x, y, z e w

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ -z + 2w = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

com a matriz

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos:

$$\underset{L3 \leftarrow (L3 - 2\,L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 + 3\,L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde

ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad\quad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad\quad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad\quad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad\quad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad\quad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad\quad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad\quad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad\quad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.
- $z = -3 + 2w$

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde

ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ -z + 2w = 3, \\ 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.
- $z = -3 + 2w = 1$.

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde

ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.
- $z = -3 + 2w = 1$.
- $x = 1 - y + z - w$

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ \qquad -z + 2w = 3, \\ \qquad\qquad 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.
- $z = -3 + 2w = 1$.
- $x = 1 - y + z - w = 1 - y + 1 - 2 = -y$.

Exercício (continuação)

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - z + w = 1, \\ -z + 2w = 3, \\ 4w = 8 \end{cases}$$

(equivalente ao sistema original).

Solução:

- y é livre.
- $w = 2$.
- $z = -3 + 2w = 1$.
- $x = 1 - y + z - w = 1 - y + 1 - 2 = -y$.

O conjunto das soluções reais: $\{(-y, y, 1, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exercício

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (-3 + i)z_3 &= -1 - i \\ 2z_1 + (1 + 3i)z_2 + (-4 + 2i)z_3 &= 2i \\ 2iz_1 - 2z_2 + (-2 - 3i)z_3 &= -1 + i \end{aligned}$$

de equações lineares complexas nas incógnitas z_1, z_2, z_3.

Exercício

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (-3+i)z_3 &= -1 - i \\ 2z_1 + (1+3i)z_2 + (-4+2i)z_3 &= 2i \\ 2iz_1 - 2z_2 + (-2-3i)z_3 &= -1 + i \end{aligned}$$

de equações lineares complexas nas incógnitas z_1, z_2, z_3.

Para resolver o sistema, escrevemos a matriz correspondente

$$\begin{bmatrix} 1 & i & (-3+i) & (-1-i) \\ 2 & (1+3i) & (-4+2i) & 2i \\ 2i & -2 & (-2-3i) & (-1+i) \end{bmatrix},$$

e aplicamos o algoritmo da redução.

Exercício

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (-3+i)z_3 &= -1 - i \\ 2z_1 + (1+3i)z_2 + (-4+2i)z_3 &= 2i \\ 2iz_1 - 2z_2 + (-2-3i)z_3 &= -1 + i \end{aligned}$$

de equações lineares complexas nas incógnitas z_1, z_2, z_3.

Para resolver o sistema, escrevemos a matriz correspondente

$$\begin{bmatrix} 1 & i & (-3+i) & (-1-i) \\ 2 & (1+3i) & (-4+2i) & 2i \\ 2i & -2 & (-2-3i) & (-1+i) \end{bmatrix},$$

e aplicamos o algoritmo da redução. Subtraindo o dobro da primeira linha à segunda linha e subtraindo $2i$ vezes a primeira linha à terceira, obtém-se a matriz em escada

Exercício

Subtraindo o dobro da primeira linha à segunda linha e subtraindo $2i$ vezes a primeira linha à terceira, obtém-se a matriz em escada

$$\begin{bmatrix} 1 & i & (-3+i) & (-1-i) \\ 0 & (1+i) & 2 & 2+4i \\ 0 & 0 & 3i & (-3+3i) \end{bmatrix}.$$

Exercício

Subtraindo o dobro da primeira linha à segunda linha e subtraindo $2i$ vezes a primeira linha à terceira, obtém-se a matriz em escada

$$\begin{bmatrix} 1 & i & (-3+i) & (-1-i) \\ 0 & (1+i) & 2 & 2+4i \\ 0 & 0 & 3i & (-3+3i) \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema é possível e determinado, com a solução única

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{-3+3i}{3i} = 1+i, \\ z_2 &= \frac{2+4i-2-2i}{1+i} = 1+i, \\ z_1 &= (-1-i) - i(1+i) - (-3+i)(1+i) = 4. \end{aligned}$$

Simplificar ainda mais

Para determinar a solução de um sistema, por vezes é útil reduzir a matriz do sistema ainda mais, de modo que cada pivô seja igual a 1 e cada um dos restantes elementos de uma coluna com pivô seja igual a 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & - & \dots & 0 & - & \dots & - \\ 0 & 1 & - & \dots & 0 & - & \dots & - \\ & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Esta matriz diz-se em **escada reduzida**.

Simplificar ainda mais

Para determinar a solução de um sistema, por vezes é útil reduzir a matriz do sistema ainda mais, de modo que cada pivô seja igual a 1 e cada um dos restantes elementos de uma coluna com pivô seja igual a 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & - & \dots & 0 & - & \dots & - \\ 0 & 1 & - & \dots & 0 & - & \dots & - \\ & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & - & \dots & - \end{bmatrix}$$

Esta matriz diz-se em **escada reduzida**.

Nota

Uma tal redução é sempre possível aplicando as operações elementares. Utilizamos a designação método de eliminação de Gauß-Jordan[a] para referir a este procedimento.

[a] Wilhelm Jordan (1842 – 1899), matemático alemão.

Simplificar ainda mais

Para determinar a so… é útil reduzir a matriz do sistema ai…vô seja igual a 1 e cada um dos restante…m pivô seja igual a 0.

Esta matriz diz-se em…

Nota

Uma tal redução é se…erações elementares. Utilizamos a designa…Gauß-Jordan[a] para referir a este procedimento.

[a] Wilhelm Jordan (1842 – 1899), matemático alemão.

Exercício (continuação alternativa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{L2\leftarrow -L2,\ L3\leftarrow \frac{1}{4}L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício (continuação alternativa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -L_2,\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow (L_1 - L_3) \\ L_2 \leftarrow (L_2 + 2\, L_3)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício (continuação alternativa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow -L2,\ L3 \leftarrow \frac{1}{4}L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L1 \leftarrow (L1 - L3) \\ L2 \leftarrow (L2 + 2\,L3)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L1 \leftarrow (L1 + L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício (continuação alternativa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow -L2,\ L3 \leftarrow \frac{1}{4} L3}{\leadsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L1 \leftarrow (L1 - L3) \\ L2 \leftarrow (L2 + 2\,L3)}}{\leadsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L1 \leftarrow (L1 + L2)}{\leadsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício (continuação alternativa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{L2\leftarrow -L2,\ L3\leftarrow \frac{1}{4}L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L1\leftarrow(L1-L3) \\ L2\leftarrow(L2+2\,L3)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L1\leftarrow(L1+L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \\ w = 2 \end{cases}$$

cuja solução é:

- y é livre,
- $x = -y$,
- $z = 1$,
- $w = 2$.

O conjunto das soluções reais é $\{(-y, y, 1, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\mathrm{car}(A)$.

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\operatorname{car}(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - \frac{1}{3} L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad \operatorname{car}(A) = 2.$$

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\mathrm{car}(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - \frac{1}{3} L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad \mathrm{car}(A) = 2.$$

$$\text{Alternativa:} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3\, L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\operatorname{car}(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - \frac{1}{3} L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad \operatorname{car}(A) = 2.$$

$$\text{Alternativa:} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftarrow (L2 - 3\, L1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Será que cada escalonação de A produz o mesmo número de pivôs?

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\operatorname{car}(A)$.

Nota

- Se $A \rightsquigarrow B$ e $A \rightsquigarrow B'$ com B, B' em escada, então

$$\boxed{B, B' \text{ tem os pivôs nas mesmas colunas.}}$$

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\mathrm{car}(A)$.

Nota

- Se $A \rightsquigarrow B$ e $A \rightsquigarrow B'$ com B, B' em escada, então

$$\boxed{B, B' \text{ tem os pivôs nas mesmas colunas.}}$$

De facto, sendo $A = [a_1\, a_2 \ldots a_m]$ com as colunas a_i e suponha que $A \rightsquigarrow C$ é uma escalonação:

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\mathrm{car}(A)$.

Nota

- Se $A \rightsquigarrow B$ e $A \rightsquigarrow B'$ com B, B' em escada, então

$$\boxed{B, B' \text{ tem os pivôs nas mesmas colunas.}}$$

De facto, sendo $A = [a_1\, a_2 \ldots a_m]$ com as colunas a_i e suponha que $A \rightsquigarrow C$ é uma escalonação:

$$\boxed{C \text{ tem um pivô na coluna } j} \iff \boxed{\text{o sistema } [a_1\, a_2 \ldots a_{j-1} \mid a_j] \text{ é impossível.}}$$

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\operatorname{car}(A)$.

Nota

- Se $A \rightsquigarrow B$ e $A \rightsquigarrow B'$ com B, B' em escada, então

$$\boxed{B, B' \text{ tem os pivôs nas mesmas colunas.}}$$

- $A \rightsquigarrow B$, $A \rightsquigarrow B'$, B, B' em escada reduzida $\implies B = B'$.

Definição

A **característica** de uma matriz A é o número de pivôs de uma matriz em escada obtida a partir de A aplicando um número finito de operações elementares.

A característica de A representa-se por $\operatorname{car}(A)$.

Nota

- Se $A \rightsquigarrow B$ e $A \rightsquigarrow B'$ com B, B' em escada, então

$$\boxed{B, B' \text{ tem os pivôs nas mesmas colunas.}}$$

- $A \rightsquigarrow B$, $A \rightsquigarrow B'$, B, B' em escada reduzida $\implies B = B'$.

Nota

- $\operatorname{car}(A) \leq$ número de linhas de A,
- $\operatorname{car}(A) \leq$ número de colunas de A.

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff$
- *o sistema é possível* $\iff$
- *no caso do sistema ser possível:*
    - *o sistema é determinado* $\iff$
    - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \begin{bmatrix} \star & - & - & \mid & - \\ 0 & \dots & & \mid & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mid & \star \end{bmatrix}$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff$
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff$
  - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \begin{bmatrix} \star & - & - & | & - \\ 0 & \dots & & | & \dots \\ 0 & 0 & 0 & | & \star \end{bmatrix}$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff$
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff$
  - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \begin{bmatrix} \star & - & - & | & - \\ 0 & \ddots & & | & \dots \\ 0 & 0 & \star & | & - \end{bmatrix}$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
    - *o sistema é determinado* $\iff$
    - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & \star & - \end{array}\right]$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff$
  - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & \star & - \end{array}\right]$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff \operatorname{car}(A) = n$.
  - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & \star & - \end{array}\right]$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff \operatorname{car}(A) = n$.
  - *o sistema é indeterminado* $\iff$

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
  - *o sistema é determinado* $\iff \operatorname{car}(A) = n$.
  - *o sistema é indeterminado* $\iff \operatorname{car}(A) < n$.

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema

Dado um sistema de m equações e n incógnitas com a matriz correspondente $A \mid b$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\iff \operatorname{car}(A) < \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *o sistema é possível* $\iff \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A \mid b)$.
- *no caso do sistema ser possível:*
    - *o sistema é determinado* $\iff \operatorname{car}(A) = n$.
    - *o sistema é indeterminado* $\iff \operatorname{car}(A) < n$.

      Neste caso o sistema tem grau de indeterminação

      $$n - \operatorname{car}(A) \quad \text{(o número de incógnitas livres).}$$

Exemplo

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & - & - & - \\ 0 & \star & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. Discussão de sistemas

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay - z = b \end{cases}$$

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay - z = b \end{cases}$$

Com $a = b = 0$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado.

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay - z = b \end{cases}$$

Com $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y - z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O sistema é possível e indeterminado.

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay - z = b \end{cases}$$

Com $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y - z = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

O problema

Vamos considerar sistemas com parâmetros em lugar de alguns coeficientes ou termos independentes.

Queremos saber todos os valores dos parâmetros que tornam o sistema ***possível e determinado***, ***possível e indeterminado*** *(e o respectivo grau de indeterminação)*, ou ***impossível***.

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay - z = b \end{cases}$$

Com $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y - z = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{array}\right] \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{array}\right]$$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A\,|\,b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(por enquanto consideremos } a \neq 0\text{)}}{L3 \leftarrow (L3 - \tfrac{a+1}{a} L2)} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a + 1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A\,|\,b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1 = 0$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A\,|\,b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2\leftarrow(L2-a\,L1) \\ L3\leftarrow(L3-L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(por enquanto consideremos } a\neq 0)}{L3 \leftarrow (L3 - \tfrac{a+1}{a}L2)} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1 = 0$ e $b+a = 0$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0\text{)}}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1=0$ e $b+a=0$
  $\iff a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

  O grau de indeterminação é 1.

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A\,|\,b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{array}\right] \underset{\substack{L2\leftarrow(L2-a\,L1)\\ L3\leftarrow(L3-L1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\text{(por enquanto consideremos } a\neq 0)}{L3 \leftarrow (L3 - \tfrac{a+1}{a} L2)} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{array}\right]$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1 = 0$ e $b+a=0$
  $\iff a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

  O grau de indeterminação é 1.
- impossível $\iff$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0\text{)}}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1 = 0$ e $b+a=0$
  $\iff a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

  O grau de indeterminação é 1.
- impossível $\iff 2a+1=0$ e $b+a \neq 0$

Exercício (discutir o sistema da página anterior)

$$A\,|\,b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2\leftarrow(L2-a\,L1) \\ L3\leftarrow(L3-L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L3 \leftarrow (L3 - \frac{a+1}{a} L2) \\ \text{(por enquanto consideremos } a \neq 0)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & -\frac{2a+1}{a} & b+a \end{bmatrix}$$

No caso de $a \neq 0$: o sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1 = 0$ e $b+a=0$
  $\iff a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

  O grau de indeterminação é 1.
- impossível $\iff 2a+1=0$ e $b+a \neq 0 \iff a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq \frac{1}{2}$.

Exercício (continuação)

Falta tratar o caso de $a = 0$:

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

Exercício (continuação)

Falta tratar o caso de $a = 0$:

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

Com $a = 0$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o sistema é

Exercício (continuação)

Falta tratar o caso de $a = 0$:

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow (L2 - a\,L1) \\ L3 \leftarrow (L3 - L1)}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

A parte acima desaparece agora!!

Com $a = 0$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o sistema é possível e determinado.

Exercício (continuação)

Com $a = 0$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o sistema é possível e determinado.

E desapareceu …

Exercício (continuação)

Com $a = 0$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \end{bmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o sistema é possível e determinado.

Resumindo: o sistema é

- possível e determinado se e só se $a \neq -\frac{1}{2}$;
- possível e simplesmente indeterminado se e só se $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$;
- impossível se e só se $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq \frac{1}{2}$.

Exercício (da página anterior da página anterior ...)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

Exercício (da página anterior da página anterior ...)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftarrow (L3 - L2) \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \end{bmatrix}$$

Exercício (da página anterior da página anterior ...)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftarrow (L3 - L2) \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftrightarrow L2 \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & a & 1 & -a \end{bmatrix}$$

Exercício (da página anterior da página anterior ...)

$$A \mid b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & a+1 & -1 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftarrow (L3 - L2) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftrightarrow L2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & a & 1 & -a \end{bmatrix}$$

$$L3 \leftarrow (L3 - aL2) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a-a(b+a-1) \end{bmatrix}$$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a-a(b+a-1) \end{bmatrix}$$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1=0$ e $a(b+a)=0$
  $\iff a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

  O grau de intermināção é 1.

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1=0$ e $a(b+a)=0$
  $\iff a=-\frac{1}{2}$ e $b=\frac{1}{2}$.

  O grau de interminação é 1.
- impossível $\iff$

Exercício (da pagina anterior)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+a-1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a(b+a) \end{bmatrix}$$

O sistema é

- possível e determinado $\iff 2a+1 \neq 0 \iff a \neq -\frac{1}{2}$.
- possível e indeterminado $\iff 2a+1=0$ e $a(b+a)=0$
  $\iff a=-\frac{1}{2}$ e $b=\frac{1}{2}$.

  O grau de interminação é 1.
- impossível $\iff 2a+1=0$ e $a(b+a)\neq 0$
  $\iff a=-\frac{1}{2}$ e $b\neq\frac{1}{2}$.

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad (\text{e } b \in \mathbb{R})$.

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad$ (e $b \in \mathbb{R}$).

Se $a = 0 \ldots$

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad$ (e $b \in \mathbb{R}$).

Se $a = 0 \ldots$ a escalonação ainda não acabou!!

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff$ $a \neq 0 \quad$ (e $b \in \mathbb{R}$).

Se $a = 0$ … a escalonação ainda não acabou!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

- O sistema é possível e indeterminado $\iff$

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad$ (e $b \in \mathbb{R}$).

Se $a = 0 \ldots$ a escalonação ainda não acabou!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

- O sistema é possível e indeterminado $\iff a = 0$ e $b = 1$.

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad$ (e $b \in \mathbb{R}$).

Se $a = 0 \ldots$ a escalonação ainda não acabou!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - L2)}{\leadsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

- O sistema é possível e indeterminado $\iff a = 0$ e $b = 1$.
- O sistema é impossível $\iff$

Exemplo

Consideremos o sistema correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$.

- O sistema é possível e determinado $\iff a \neq 0 \quad (\text{e } b \in \mathbb{R})$.

Se $a = 0 \ldots$ a escalonação ainda não acabou!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow (L3 - L2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

- O sistema é possível e indeterminado $\iff a = 0$ e $b = 1$.
- O sistema é impossível $\iff a = 0$ e $b \neq 1$.