

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica 2023/24

Grupo C

Folha 0

1. Simplifica as seguintes expressões.

a) $(3 + 4i)(2 - i) + (8 + 7i)$.

b) $\frac{3+4i}{4i} - \frac{1+i}{1-i}$.

c) $\sum_{k=0}^{100} i^k$.

d) $(1 + 3i)^{-2}$.

2. Determine $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $(6 - i)\alpha$ seja um número real e $6 - i + \alpha$ seja um número imaginário puro.

3. Mostre que não existe um número complexo α com $|\alpha| - \alpha = i$.

4. Demonstre que, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\Re(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \Im(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}.$$

5. Considere $\alpha = 3i$ e $\beta = 2 - 2i$. Calcule $|\alpha + \beta|$, $|\alpha - \beta|$, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ e represente α e β na forma exponencial.

6. Encontre o argumento principal de $\alpha = -10$ e de $\beta = 1 - i$.

7. Encontre a forma Cartesiana $\alpha = a + bi$ do número complexo α com $|\alpha| = 3$ e o argumento principal de α é $\frac{\pi}{4}$.

8. Escreve os seguintes polinómios como produtos de polinómios de grau 1.

a) $z^2 + 1$.

b) $z^4 - 1$.

c) $z^2 - 2z + 5$.

9. Determine as raízes quadradas de $-1 - i$.

10. Determine as raízes cúbicas de $-\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$.

11. Seja p um polinómio com coeficientes reais. Mostre que, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz de p , então $\bar{\alpha}$ também é raiz de p .
12. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $-i$ é seja raiz do polinómio $p = z^3 - z^2 + z + 1 + a$. Para este valor de a , escreve p como um produto de polinómios de grau 1.
13. Encontre dois números cuja soma seja 10 e cujo produto seja 40.
-

Algumas soluções

1. a) $18 + 12i$

b) $1 - \frac{7}{4}i$

c) 1

d) $-\frac{8}{100} - \frac{6}{100}i$

2. $\alpha = -6 - i$.

5. $|\alpha + \beta| = \sqrt{5}$, $|\alpha - \beta| = \sqrt{29}$, $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$, $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$. $\alpha = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$ e $\beta = \sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

6. O argumento principal de $\alpha = -10$ é π , e o argumento principal de $\beta = 1 - i$ é $-\frac{\pi}{4}$.

7. $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

8. a) $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$.

b) $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$.

c) $z^2 - 2z + 5 = (z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))$.

9. $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{3}{8}\pi i}$ e $\sqrt[4]{2}e^{\frac{5}{8}\pi i}$.

10. $2e^{\frac{3}{12}\pi i}$, e $2e^{\frac{11}{12}\pi i}$, $2e^{-\frac{5}{12}\pi i}$.

12. $a = -2$, $z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z - i)(z + i)$.