PROBABILIDADES

Elaborado por : António Oliveira, MSc

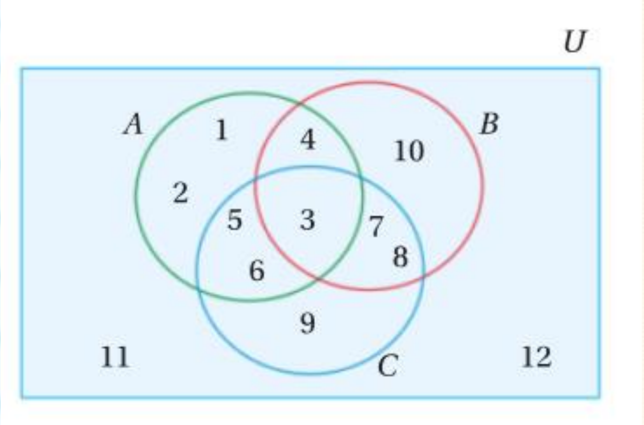
- É precisamente no século XVII, que os historiadores fixam o nascimento do Cálculo de Probabilidades como Ciência, tendo como origem o estudo de questões relacionadas com os chamados « Jogos de azar».
- **A Importância do estudo da Teoria das Probabilidades**
- A Teoria da Probabilidade prende-se com o estudo de modelos matemáticos especiais, a que chamamos modelos probabilísticos, para descrever fenómenos aleatórios.

«Depois de O terem crucificado, repartiram entre si as suas vestes, tirando-as à sorte»

Propriedades das Operações com conjuntos

- Considere o seguinte universo :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$



Sejam os seguintes conjuntos definidos :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{3, 4, 7, 8, 10\}$

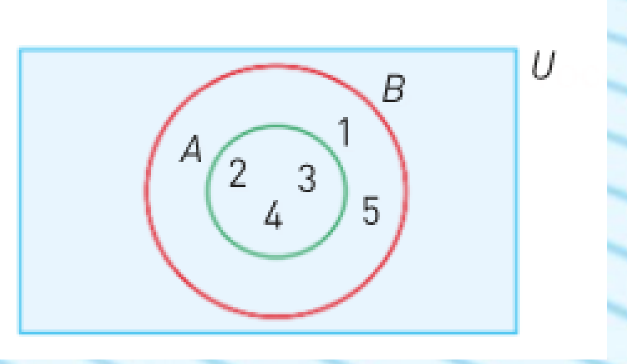
$C = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Verifique o seguinte :

- $A \cap B = B \cap A$ → Comutativa
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \{3\}$ → Associativa
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ → Distribuitiva
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4, 5, 6\}$

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Propriedade da Inclusão de Conjuntos



Consideremos os conjuntos :

$A = \{2 , 3\ 4\}$ e $B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

❑ *Observação*

- $A \subset B$
- $A \cap B = \{2 , 3 , 4\} = A$
- $A \cup B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\} = B = U$

❑ Dados os conjuntos $A \ e\ B$ subconjuntos de um conjunto U , tais que $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x , x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

se e somente se $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$

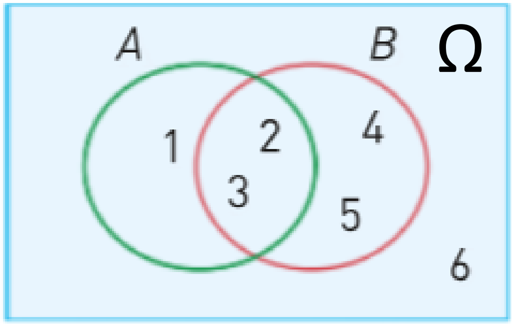
➢ **Tomando o contra - recíproco desta proposição, temos :**

$$\boldsymbol{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x , x \notin B \Longrightarrow x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x , x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$$

Nota : O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Leis de De Morgan



Consideremos , no universo $\Omega = \{1\ ,2\ .\ 3\ ,4\ ,5\ ,6\}$

$A = \{1, 2\ ,3\ \}$ e $B = \{\ 2\ ,3\ ,4\ ,5\}$

- **_Observação_**

$\mathbf{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\mathbf{2}\ ,\mathbf{3}\}$ **a negação** $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \{\mathbf{1}\ ,\mathbf{4}\ ,\mathbf{5}\ ,\mathbf{6}\ \}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}\ ,\mathbf{2}\ ,\mathbf{3}\ ,\mathbf{4}\ ,\mathbf{5}\}$ **a negação** $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \{\mathbf{6}\}$

- $\overline{\boldsymbol{A}} = \{\mathbf{4}\ ,\mathbf{5}\ ,\mathbf{6}\}$
- $\overline{\mathbf{B}} = \{\mathbf{1}\ ,\mathbf{6}\}$
- $\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}} = \{\mathbf{6}\} = \overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$
- $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} = \{\mathbf{1}\ ,\mathbf{4}\ ,\mathbf{5}\ ,\mathbf{6}\} = \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$
- $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

Nota : Verificámos que, neste caso, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Estas igualdades, são conhecidas por Leis de De Morgan para conjuntos, são válidas para quaisquer conjuntos.

Leis de De Morgan

❖ **Observação :**

$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{A}}$: Negar que se realizam simulamento dois acontecimentos é dizer que não se realiza pelo menos um deles.

Demonstração :

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$: Negar que se realiza pelo menos um dos dois acontecimentos é afirmar que não se realiza nem um nem outro.

Demostração:

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

Aplicação - Leis de De Morgan

$a)\ \ \left(\overline{A \cup \bar{B}}\right) \cap \bar{B} = \emptyset$

$\left(\overline{A \cup \bar{B}}\right) \cap \bar{B} = (\bar{A} \cap B) \cap \bar{B} = \bar{A} \cap (B \cap \bar{B}) = \bar{A} \cap \emptyset = \emptyset$

b)$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$

$\mathrm{A} \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

c) $\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)} = \bar{B}$

$\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap \bar{B}) = \emptyset \cup \bar{B} = \bar{B}$

d) $\overline{(\bar{A} \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)} = \bar{B}$

$\overline{(\bar{A} \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)} = (A \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = A \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cup \bar{A}) \cap \bar{B} = \Omega \cap \bar{B} = \bar{B}$

Probabilidade de um Acontecimentos – Lei de Laplace

- **A primeira definição de probabilidade**

(definição clássica de probabilidade) foi enunciada pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) e publicada num tratado, em 1812, designado por “ Théorie anaytique des probabilités” (Teoria Analítica das Probabilidades) .

- **Definição:**
- **A probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis da experiencia aleatória, supondo que todos os acontecimentos são equiprováveis.**

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis\ ao\ acontecimento\ A}{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ possíveis\ da\ experiência\ aleatória}$$

Universo de Resultados Ω

- **Experiência aleatória**

Uma experiência é um processo que conduz a um resultado pertencente a um conjunto previamente fixado designado por universo de resultados (ou espaço amostral), não dispondo de informação que permita excluir a possibilidade de ocorrência de qualquer desses resultados. Os elementos do universo de resultados designam-se por casos possíveis.

O universo de resultados ou espaço amostral também se pode designar por espaço de resultados, usualmente, representa-se por Ω , E ou S (do inglês space).

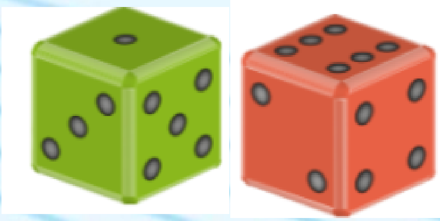
Considere-se uma experiência que consiste no lançamento de um dado cúbico.

Com faces numeradas de 1 a 6.

O espaço de resultados $\Omega = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,\}$

Experiência aleatória simples

Probabilidades - Experiências Compostas



❑ **Experiência aleatória Composta: lançamento de dois dados**

Lançam-se simultaneamente dois dados e somam –se os pontos das faces voltadas para cima.

Espaço amostral da soma dos pontos: $\Omega = \{2\ .\ 3\ ,4\ ,5\ ,6\ ,7\ ,8\ ,9\ ,10\ ,11\ ,12\ \}$

Considera-se os acontecimentos :

A: " $A\ soma\ do\ núimero\ de\ pontos\ das\ faces\ ser\ um\ número\ primo$"

B: " $A\ soma\ do\ número\ de\ pontos\ das\ faces\ ser\ mútiplo\ de$ 3“

Determina:

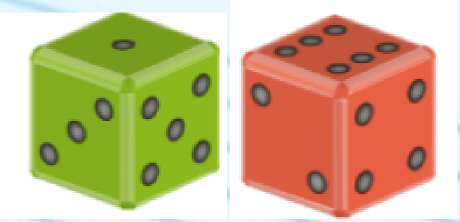
$a)$ $P(A)$

b) $P(B)$

c) $P(A \cap B)$

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Probabilidades - Experiências Compostas



A: " *A soma do núimero de pontos das faces ser um número primo*"

B: " *A soma do número de pontos* das faces ser múltiplo de 3 "

- Pela tabela dupla entrada ao lado, o universo de resultados

Tem 36 casos possíveis. Existem 15 casos favoráveis 12 a **A** e 12 casos favoráveis a **B.**

$\boldsymbol{\Omega = 6 \times 6 = 36\ casos\ possíveis}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}}$$

$$\boldsymbol{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{36} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}}$$

$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$: **Complementar de $\boldsymbol{\overline{A} \cup \overline{B}\ e\ A \cap B}$**

Probabilidades - Experiências Compostas


Espaço amostral : $\Omega = 6^2 = 36$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- Qual é a probabilidade de sair dois números maiores que 3 ?

$$P(\{sair\ dois\ números\ maiores\ que\ 3\}) = \frac{9}{36} = 0{,}25$$

Probabilidades - Experiências Compostas

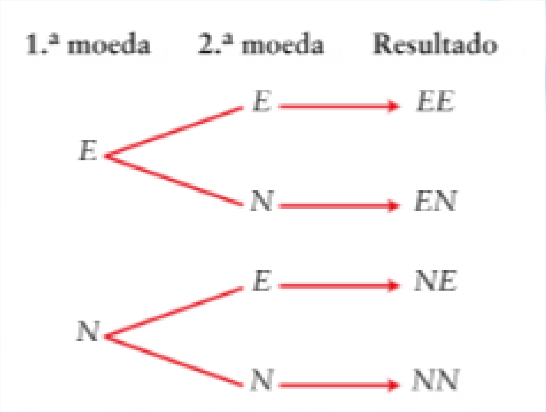
Considera a experiência aleatória que consiste em lançar duas moedas de 1 euro, uma a seguir à outra, e verifica-se as faces voltadas para cima.

Face europeia (E)

Face nacional (N)

Considere os seguintes acontecimentos:

a) Qual é o universo de resultados?



2.ª moeda / 1.ª moeda	E	N
E	EE	EN
N	NE	NN

$1^{\text{a}}\ \text{moeda}(E) \cap 2^{\text{o}} moeda(E) = EE$ $\quad$ $1^{\text{a}} moeda\ (E) \cap 2^{\text{a}} moeda(N) = EN$

$\Omega = \{EE\ , EN\ , NE\ , NN\}$

Probabilidades - Experiências Compostas

A: " $A\ face\ europeia$ é $observada\ uma\ e\ uma\ só\ vez$"

B: " $A\ face\ nacional$ é $observada\ pelo\ menos\ uma\ vez$"

b) Representa os acontecimentos em extensão:

$A = \{NE\ , NE\}$

$B = \{EN\ , NE\ , NN\}$

$\boldsymbol{\overline{A} = \{EE\ , NN\}}$

$\boldsymbol{\overline{B} = \{EE\}}$

$A \cup B = \{EN\ , NE, NN\}$

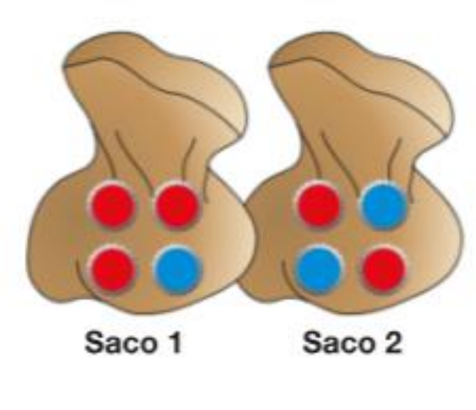
$A \cap B = \{EN\ , NE\}$

Na figura ao lado estão representados dois sacos com caricas

De duas cores, ou seja, azuis e vermelhas.

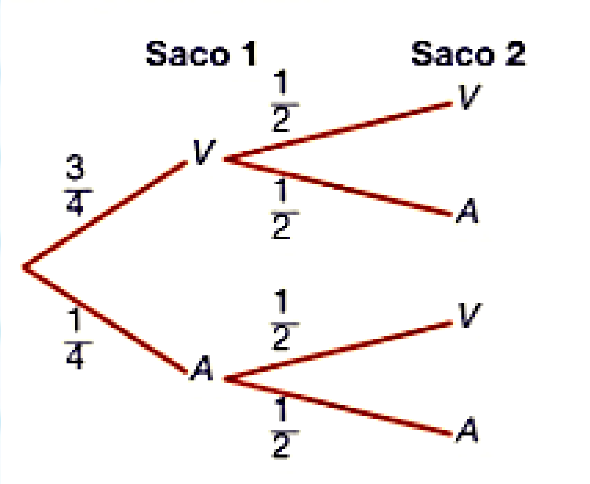
Retira-se, sucessivamente, uma carica do saco 1 e uma carica

Do saco 2.



a) Desenhe um diagrama de árvore .

Observação: Em experiências compostas, pode-se adoptar uma estratégia que envolve um diagrama de árvore e a respectiva probabilidade.



A: "a carica é azul"   V: " a carica é vermelha".

- $P(VV) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
- $P(VA) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
- $P(AV) = P(AA) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Axiomática de Probabilidade

- Foi proposta por Andrei Kolmogorov na qual axiomatizou a probabilidade em sua obra fundamental “ Foundations of the Teory of Probabilituy” em 1933. (implementada 1950)
- De acordo com esta definição, acontecimentos (aleatórios) são representados por conjuntos e probabilidades é apenas uma medida padronizada definida nesses conjuntos.

Definição : Uma função de P, definida na $\sigma - álgebra\, \mathcal{P}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0\,;1], P\colon \mathcal{P} \to [0\,;1]$ é uma medida de probabilidade se satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

I. Normalização Unitária . $P(\Omega) = 1$;

II. Não – negatividade. $\forall\, A \in \mathcal{P}, P(A) \geq 0$:

III. $\sigma - aditividade$. $\forall\, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{P}$, ou seja, forem acontecimentos em número infinito numerável, dois a dois incompatíveis / disjuntos , $A_i \cap A_J = \emptyset\ (i \neq j), então$

$$P\left(\cup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(A_j\right)$$

Em Resumo

- Dados um conjunto finito Ω, uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$das partes de Ω é uma função definida por:

$$\begin{array}{ccc} P: \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & IR_0^+ \\ X & \curvearrowright & P(X) \end{array}$$

Tal que :

Ω : é $o\ espaço\ amostral\ ou\ universo\ \ de\ resultados$;

$\mathcal{P}(\Omega)$: conjunto das partes de Ω , é $o\ espaço\ de\ acontecimentos$.

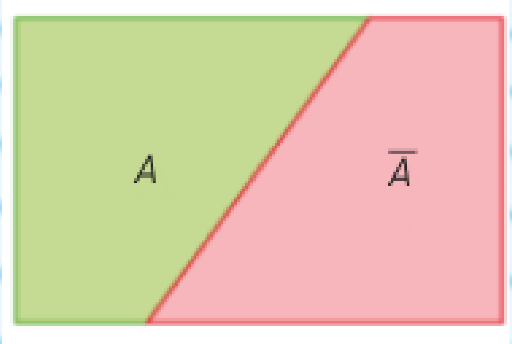
- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- Se A e B são subconjuntos disjuntos de Ω, isto é, se A e B ∈ $\mathcal{P}(\Omega)$ e $A \cap B = \emptyset$, tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\emptyset) = 0$

Observação : O conjunto vazio designa-se por acontecimento impossível

Propriedades da Medida de Probabilidade

- Com base na axiomática de Kolmogorov é possível deduzir um conjunto de propriedades da medida de probabilidade :



i. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

- Demonstração :

$\boldsymbol{A \cup \overline{A} = \Omega \ e \ A \cap \overline{A} = \emptyset}$

$\boldsymbol{P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1}$

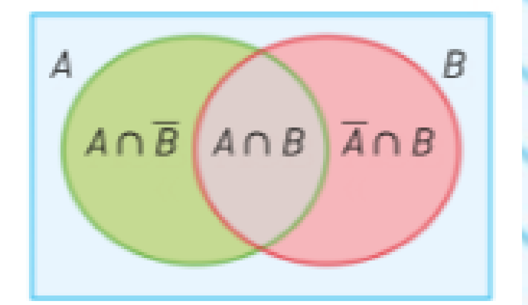
ii. $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$

- Demonstração

$\boldsymbol{\Omega \cup \emptyset = \Omega \quad e \quad \Omega \cap \emptyset = \emptyset}$

$\boldsymbol{P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + \mathrm{P}(\emptyset) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + 0 = 1}$

iii. $\boldsymbol{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$



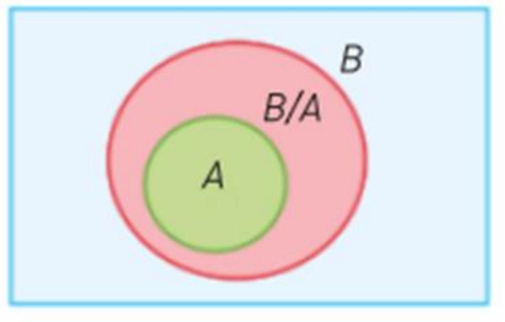
Demonstração:

$\boldsymbol{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \Omega = A}$

$\boldsymbol{(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset}$

Logo , $\boldsymbol{P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = P(A)]}$

Propriedades da Medida de Probabilidade



iv. $P(B - A) = P(B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) \leq P(B)$ **(monotonia da probabilidade)**

Demonstração

Da propriedade anterior, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$B \setminus A = \bar{A} \cap B$ **e se** $A \subset B$, $A \cap B = A, pelo\ que$:

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Leftrightarrow P(B) - P(A) = P(B \setminus A)$, **sendo que:**

$P(B) - P(A) \geq 0 \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$

Logo

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$

Exemplo de aplicação:

Em determinada população, 9,8% das pessoas adquirem a revista A, 22,9% a revista B E 5,1% ambas. Admite –se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas.

Propriedades da Medida de Probabilidade

iv. $P(B-A)=P(B)-P(A)=P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B\cap \overline{A})=P(B)-P(A\cap B)$

- **Definem –se o seguintes acontecimentos:**

- A« $adquirir\ a\ revista\ A$»
- B« $adquirir\ a\ revista\ B$»

a) A probabilidade de adquirir somente a revista A.

$A\cap \overline{B}=A-B$

$P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,098-0,051=0,047$

b) A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir pelo menos uma das revistas.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,098+0,229-0,051=0,276$

c) A probabilidade de não adquirir a revista A, nem a revista B.

$P(\overline{A}\cap \overline{B})=1-P\left(\overline{\overline{A}\cap \overline{B}}\right)=1-P(A\cup B)=1-0,276=0,724$

Propriedades da Medida de Probabilidade

VI. $\boldsymbol{A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A) - P(B) \leq 1}$

Exemplo de aplicação:

Sejam A e B dois acontecimentos de um mesmo espaço Ω.

Se $P(A) = 0{,}42\ e\ P(A \cap B) = 0{,}12$.

Mostre que o valor é no máximo de $P(B) \leq 0{,}7$.

Resolução:

$\boldsymbol{P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 0,42 + P(B) - 0,12 \leq 1}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow P(B) \leq 0,7}$

Propriedades da Medida de Probabilidade

v. Dados dois acontecimentos A e B quaisquer , tem -se

. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **,** $A \cap B \neq \emptyset$ **, em geral**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=1}^{n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Corolário : $\mathrm{P}(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Sejam $A,\ B\ e\ C\ acontecimentos\ aleatórios\ pertencentes\ \ ao\ mesmo\ espaço.$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen

Uma sondagem efectuada antes das eleições junto de 1000 eleitores , revelou as seguintes informações relativas a três candidatos $A, B\ e\ C$:

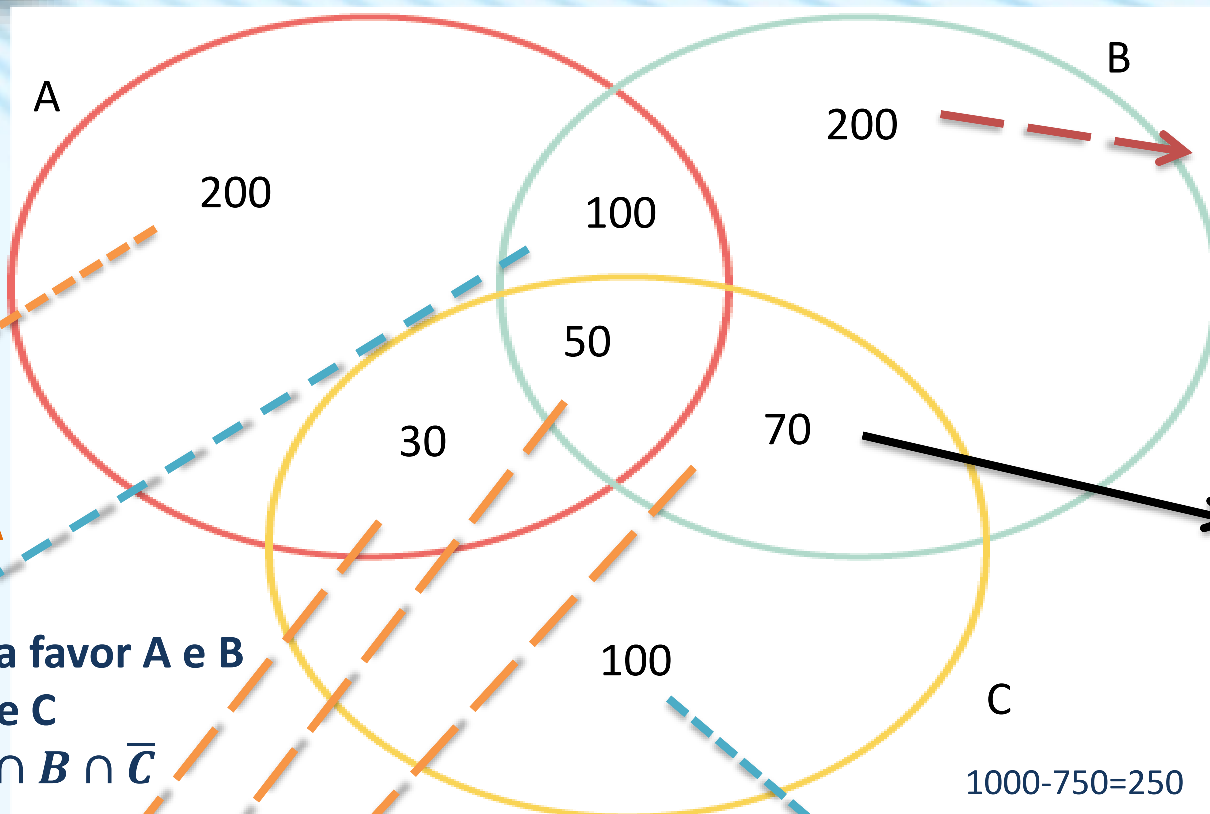
- 150 estão a favor de A e de B;
- 230 estão a favor de A mas não de B;
- 100 estão a favor C mas não estão a favor nem de A nem de B;
- 70 estão a favor de B e de C mas não estão a favor de A;
- 250 estão a favor de C;
- 200 estão a favor apenas de B;
- 50 estão a favor dos três candidatos.

- Nesta sondagem, qual a percentagem de eleitores

i. Favor de cada um dos candidatos?

ii. Favor de A e B mas não de C ?

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen



200 estão apenas a favor de B

200 estão apenas a favor de A

100 estão a favor A e B mas não de C

$A \cap B \cap \overline{C}$

70 estão a favor de B e de C mas não estão a favor de A

100 estão a favor de apenas C

30+50+70+100=250,
250 estão a favor de C

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen

i. Favor de cada um dos candidatos?

$$P(A) = \frac{200 + 100 + 50 + 30}{1000} = 0{,}38 = 38\%$$

$$P(B) = \frac{200 + 100 + 50 + 70}{1000} = 0{,}42 = 42\%$$

$$P(C) = \frac{100 + 70 + 50 + 30}{1000} = 0{,}25 = 25\%$$

i. Favor de A e B mas não de C ?

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P[(A \cap B)\backslash \mathrm{C}] = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = \frac{150 - 50}{1000} = 0{,}10$$

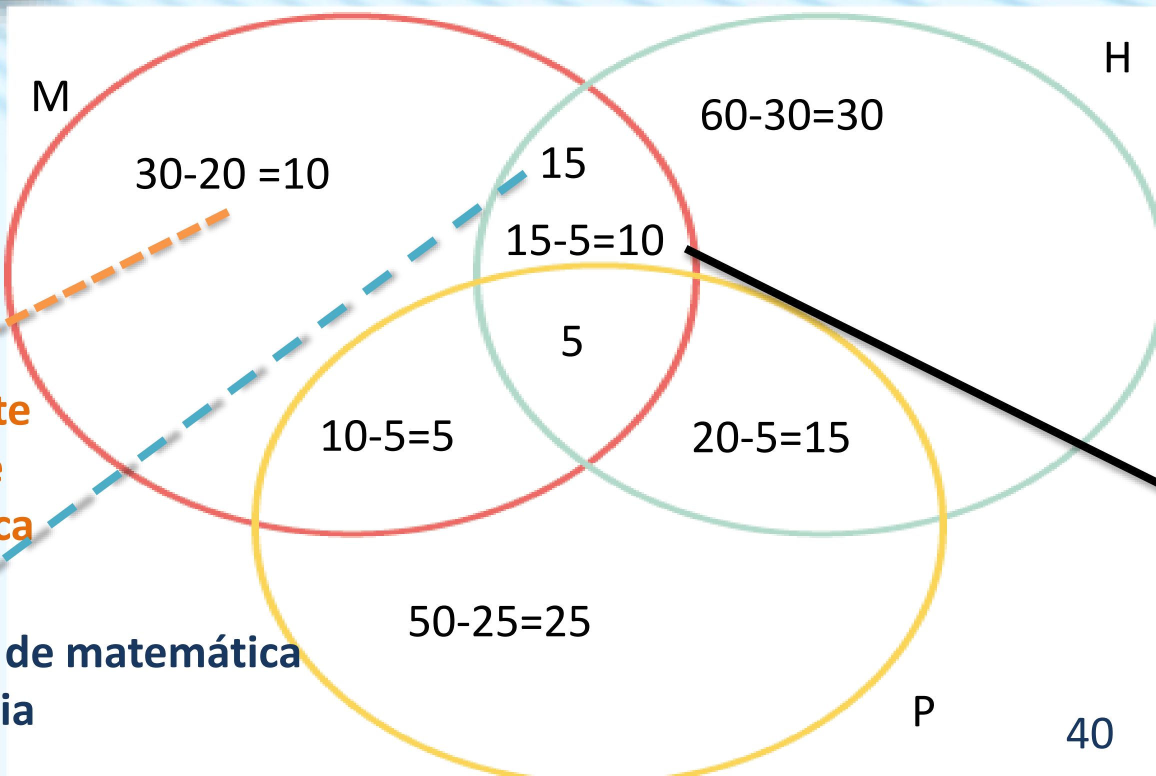
Propriedades da Medida de Probabilidade

- Uma pesquisa realizada com alunos de uma determinada escola revelou que 30 alunos gostam de matemática; 60 alunos gostam história ; 50 gostam de português; 20 gostam de português e história; 15 gostam de matemática e de história; 10 gostam de matemática e português. sabe-se ainda, que 5 gostam dessas três disciplinas; e 40 alunos não gostam de nenhuma dessas três .

Quantos alunos participaram na pesquisa ?

A 140 ☐ B 145 ☐ C 150 ☐ D 160 ☐

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen



10 somente gostam de matemática

15 gostam de matemática e de história

Apenas 10 gostam de matemática e de história

$$N = 10 + 10 + 30 + 5 + 5 + 10 + 25 + 40 = 140$$

140

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen

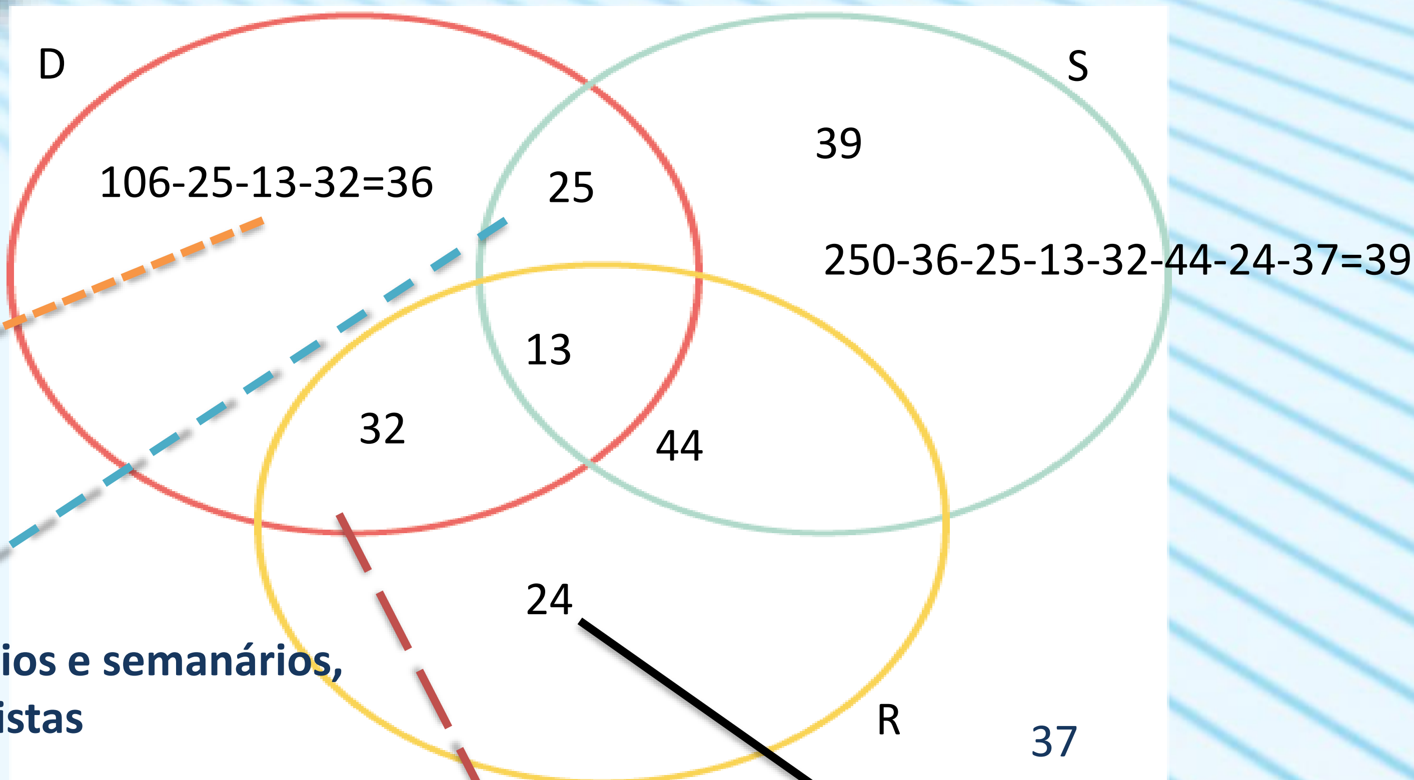
Foram inqueridos 250 indivíduos acerca dos jornais diários e semanais que lêem, bem como das revistas mensais. Desse inquérito conclui-se que :

- 37 não lêem este tipo de publicações
- 106 lêem jornais diários
- 113 lêem revistas
- 13 lêem os três tipos de publicações
- 25 lêem diários e semanários, mas não revistas
- 44 lêem semanários e revistas, mas não diários
- 24 só lêem revistas

i. Dos indivíduos inquiridos, quantos lêem apenas jornais diários?

ii. Qual a percentagem de indivíduos que lêem somente semanários?

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen



36 só lêem diários

25 lêem diários e semanários, mas não revistas

(113 lêem revistas) 113-24-44-32=32

24 só lêem revistas

i . 36 leitores de jornais diários

ii. 15,6% , ou seja, $\frac{39}{250} = 0{,}156$

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Exercício de Aplicação

- Suponha que há três revistas , A, B e C, com as seguintes percentagens de leitura:

$A\ -9{,}8\%\ ;B-22{,}9\%\ ;\ C-12{,}1\%\ ;A\ e\ B\ -5{,}1\%\ ;\ A\ e\ C\ -3{,}7\%\ ;B\ e\ C\ -6{,}0\%\ ,A,B\ e\ C\ -2{,}4\%$

Calcule a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser leitor:

a) De pelo menos uma das revistas.

A « $A\ pessoa\ escolhida, ao\ acaso,$ é $leitora\ da\ revista\ A$»

B « $A\ pessoa\ escolhida, ao\ acaso,$ é $leitora\ da\ revista\ B$»

C « $A\ pessoa\ escolhida, ao\ acaso,$ é $leitora\ da\ revista\ C$»

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A\cup B\cup C)=0{,}098+0{,}229+0{,}121-0{,}051-0{,}037-0{,}06+0{,}024=0{,}324$$

b) Da revista A e B mas não da revista C.

$$P(A\cap B\cap \bar{C})=P\big((A\cap B)-C\big)=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=0{,}051-0{,}024=0{,}027$$

c) $P(A\cap \bar{B}\cap \bar{C})=P(A)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$

Aplicação : Propriedades das Operações com conjuntos

- Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $P\left(\bar{A} \cup (A \cap \bar{B})\right) =?$

$(A)\ \dfrac{3}{5}$ $(B)\ \dfrac{2}{5}$ $(C)\ \dfrac{5}{5}$ $(D)\ \dfrac{4}{5}$

Resolução:

Cálculo auxiliar : $\bar{A} \cup (A \cap \bar{B}) = (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}), \text{sendo que}, \bar{A} \cup A = \Omega$ **e** $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

$$\mathbf{P}\left(\bar{\mathbf{A}} \cup (\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{B}})\right) = \mathbf{P}\left((\bar{\mathbf{A}} \cup \mathbf{A}) \cap (\bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}})\right) = \mathbf{P}\left((\boldsymbol{\Omega}) \cap (\bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}})\right) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

Aplicação : Propriedades das Operações com conjuntos

- Dado um conjunto finito Ω , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(\Omega)$ e dois acontecimentos $A , B \in P(\Omega)$ tais que $P(A) = 0{,}47 , P(B) = 0{,}52 \; e \; P(A \cap B) = 0{,}12 , determina$:

1.1. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$ $(leis \; de \; Morgan)$, ou , $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P\left(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}\right) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 , logo , P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}88$

1.2. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$ $(leis \; de \; Morgan)$, ou, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P\left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) = 1 - P(A \cup B)$

$\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - (0{,}47 + 0{,}52 - 0{,}12) = 0{,}13$

1.3. $P(\bar{B} \cup A)$

$\mathrm{P}(\bar{B} \cup A) = 1 - P(B) + P(A) - P(\bar{B} \cap A) = 1 - P(B) + P(A) - [P(A) - P(A \cap B)] = 0.6$

Não se Aplica a Lei de Laplace

- Num dado viciado, a probabilidade de sair 2 é dupla da probabilidade de sair 5 sabendo ainda que $P(\{1\}) = \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$.

Calcula a probabilidade de sair a face 3, $P(\{3\}) = ?$

✓ Resolução

$P(\{2\}) = 2P(\{5\})$

Sabendo que $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, ora:

$P(\{1\}) + \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{3\}) + \mathrm{P}(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow.$

$\Leftrightarrow P(\{5\}) = 2 \times \mathrm{P}(\{5\}) + \mathrm{P}(\{5\}) + P(\{5\}) + P(\{5\}) + P(\{5\}) = 1 \Leftrightarrow 7 \times P(\{5\}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\{5\}) = \frac{1}{7}.$

Como o $P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{7}$

A Lei de Laplace só se pode aplicar em experiências em que os acontecimentos elementares são equiparáveis

Não se Aplica a Lei de Laplace

- Num dado viciado, é tal que:

$P(\{1\}) = 2k$ e $P(\{2\}) = \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{4\}) = P(\{5\}) = k \qquad P(\{6\}) = 4k$

a) Calcule o número k.

b) Qual a probabilidade de obter um número par?

Sabendo que $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, ora:

$$P(\{1\}) + \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{3\}) + \mathrm{P}(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{k} + 4\mathrm{k} + 4\mathrm{k} = 1 \Leftrightarrow k = 0{,}1$$

b) $P(\{2\,,4\,,6\}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0.6$

A Lei de Laplace só se pode aplicar em experiências em que os acontecimentos elementares são equiparáveis

Acontecimento Condicional e Independentes

- Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de um universo Ω.

$A \text{ e } B \text{ são independentes } \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \mid B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Observação :

$Se\ A \cap B = \emptyset\ então\ P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)\ , logo\ A\ e\ B\ não\ são\ independentes,$

$mas\ dependentes.$

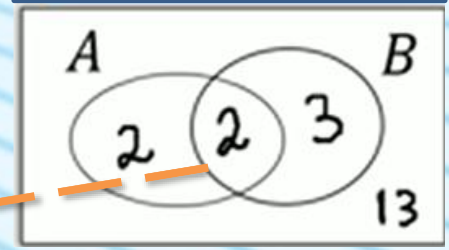
$Se\ A \cap B \neq \emptyset\ então\ os\ acontecimentos\ podem\ ser\ independentes\ ou\ não.$

Exemplo:

Relativamente a uma turma de 12º ano com 20 alunos, sabe-se que:

- 4 alunos não gostam de matemática.
- 5 alunos têm boas notas a matemática.
- 13 alunos não gostam da matemática e nem tiveram boas notas.

Acontecimento Condicional e Independentes



- Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de um universo Ω.

A: « *os alunos não gostam de matemática*»

B: « *os alunos têm boas notas a matemática*

$\mathbf{13+4+5=22}$*, **ou seja , há 2 alunos que estão na interseção dos dois conjuntos.***

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}} \qquad \boldsymbol{P(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}}$$

Sabendo que $P(A \mid B)=A$

Aplicando a condicionada $P(A \mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{2}{20}}{\frac{5}{20}}=\dfrac{2}{5} \neq P(A)$

Ou, $P(A \cap B)=P(A) \times P(B) \Leftrightarrow 0.1 \neq 0{,}05$

Acontecimento Condicional ou Probabilidade Condicional

- Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de um universo Ω.

A probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B (ou a probabilidade de $A\ se\ B$),

designa-se por $P(A \mid B)$, definida da forma :

Aplicando a condicionada $P(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}, \mathrm{P}(B) \neq 0$

Na prática há uma redução do espaço amostral.

Exemplo: de um baralho de 52 cartas

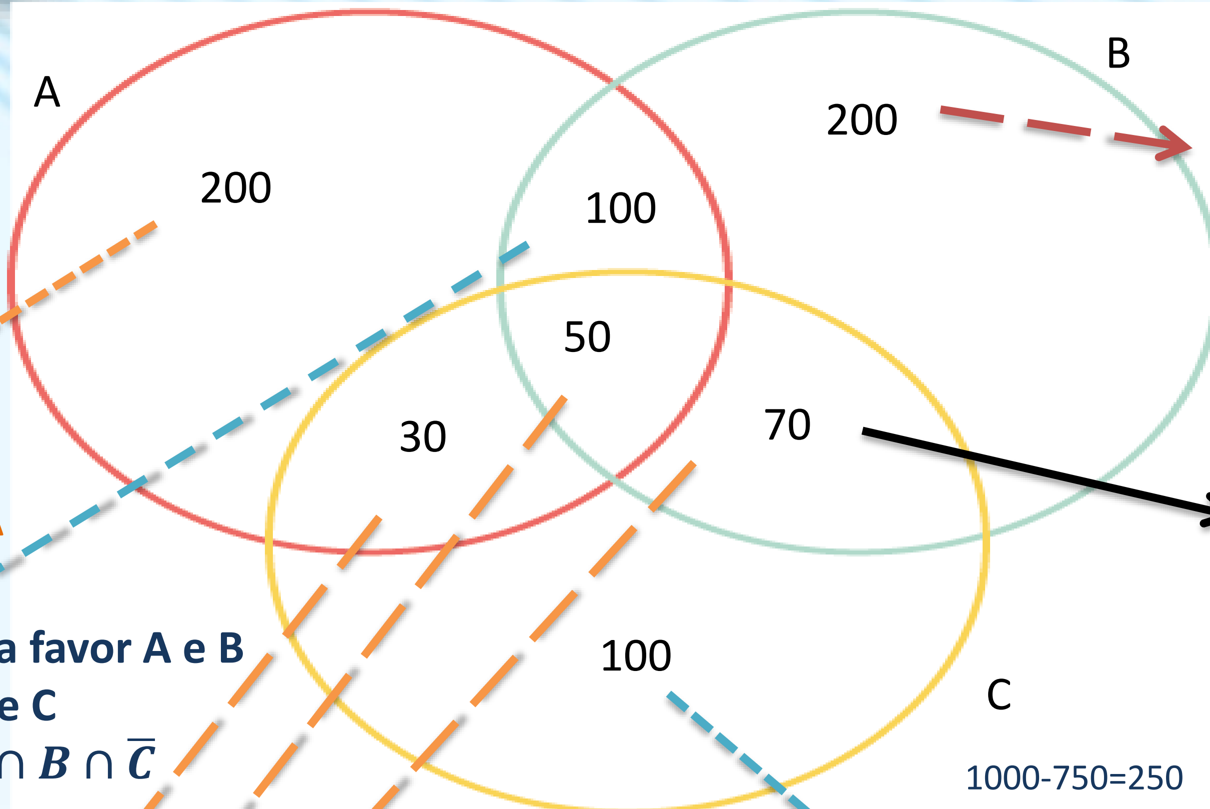
A: « $extrair\ um\ rei$ » $\qquad P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

B: « $extrair\ um\ figura$ » $\qquad P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

C: « $extrair\ uma\ carta\ de\ copas$ » $\qquad P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{4}{12} = \frac{4\ Reis}{12\ figuras}$ $\qquad \mathrm{P}(A \mid C) = \frac{1}{13} = \frac{1\ Rei\ (\ que\ \acute{e}\ o\ rei\ de\ copas)}{13\ copas\ no\ novo\ espaço\ amostral}$

Condicional de Conjuntos – Diagrama de Veen



200 estão apenas a favor de B

200 estão apenas a favor de A

100 estão a favor A e B mas não de C

$A \cap B \cap \overline{C}$

70 estão a favor de B e de C mas não estão a favor de A

100 estão a favor de apenas C

30+50+70+100=250,
250 estão a favor de C

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Propriedades dos Conjuntos – Diagrama de Veen

iii. Favor de A ou de B, sabendo que eles são favoráveis a C ?

$$P(A \cup B|\, C) = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} =$$

$$= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{30+50}{1000} + \frac{70+50}{1000} - \frac{50}{10000}}{\frac{250}{1000}} = 0{,}60$$

Acontecimento Condicional ou Probabilidade Condicional

- Uma tômbola tem 40 bolas de igual tamanho, sendo 17 brancas e 23 vermelhas , todas as bolas se podem abrir e 10 delas têm dentro um prémio surpresa , conforme a tabela seguinte:

	Brancas (B)	Vermelhas (V)	Total
Com surpresa (S)	6	4	10
Sem surpresa $(\bar{S})$	11	19	30
Total	17	23	40

:

- Probabilidade de a bola ter surpresa : $P(S) = \frac{10}{40,} = 0{,}25$
- Probabilidade de a bola de não ter surpresa : $P(\overline{\boldsymbol{S}}) = \frac{30}{40}$

Saiu uma bola branca. Terá surpresa ? Poderá ter ou não?

- Vamos calcular a probabilidade de a bola ter surpresa, sabendo que é branca : $P(S|\, B)$.

$$P(S \mid B) = \frac{P(S\ \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{40}}{\frac{17}{40}} = \frac{6}{17}$$

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Acontecimento Condicional ou Probabilidade Condicional

- Continuação

	Brancas (B)	Vermelhas (V)	Total
Com surpresa (S)	6	4	10
Sem surpresa $(\bar{S})$	11	19	30
Total	17	23	40

:

- Probabilidade de tirar uma bola branca e com surpresa é a probabilidade da intersecção dos acontecimentos « *a bola ser branca* » *e* « *a bola ter surpresa*»
- $P(B \cap S) = \frac{6}{40}$
- Probabilidade de a bola ser branca, há 17 num total de 40 bolas.

Observação : $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) \times P(A \mid B) = P(A \cap B)$

Ou seja, a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, sabendo que o primeiro aconteceu.

Acontecimento Condicional ou Probabilidade Condicional

- Uma caixa contém bolas brancas e bolas vermelhas , indistinguíveis ao tato.

  Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são vermelhas; → $P(V) = \frac{2}{5}$
- 20% das bolas vermelhas têm um número par; → $P(\overline{\mathbf{I}} \mid \mathbf{V}) = 0{,}20$
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar. → $P(I \mid B) = 0{,}4$

Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa. Determine a probabilidade de essa bola ser vermelha, sabendo que tem um número par. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Resolução:

Sejam os seguintes acontecimentos :

V: « $a\ bola\ que\ saiu$ é $verlmelha$»

I: « $a\ bola\ que\ saiu$ é $impar$»

B: « $a\ bola\ que\ saíu$ é $branca$»

- Continuação

$$P(V \mid \bar{I}) = \frac{P(V \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = ?$$

Sabe-se que :

$$P(\bar{I}) = P(\bar{I} \cap V) + P(\bar{I} \cap \bar{V}) = \frac{2}{25} + \frac{9}{25} = \frac{11}{25}$$

$$P(\bar{V}) = P(\bar{V} \cap I) + P(\bar{V} \cap \bar{I}) \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{5} + P(\bar{V} \cap \bar{I}) \Leftrightarrow P(\bar{V} \cap \bar{I}) = \frac{9}{25}$$

$$P(\bar{I} \mid V) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{I} \cap V)}{P(V)} = 0{,}2 \Leftrightarrow P(\bar{I} \cap V) = 0{,}2 \times P(V) = 0{,}2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

$$P(I \mid B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(I \cap B) = 0{,}4 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

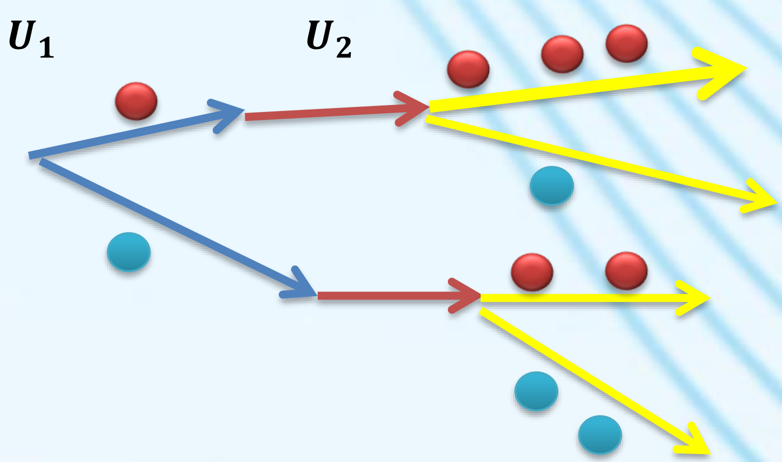
$$P(V \mid \bar{I}) = \frac{P(V \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}}$$

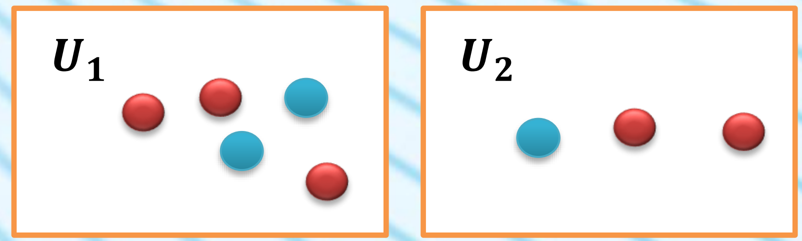
Acontecimento Condicional ou Probabilidade Condicional

Uma urna U_1 contém 3 bolas vermelhas e 2 azuis .

A urna U_2 contém 2 bolas vermelhas e 1 azul.

Retira-se uma bola de U_1 e coloca-se em U_2 e em seguida retira-se uma bola de U_2 . Qual a probabilidade de tirar uma bola azul de U_2?





$$P(qual\ é\ a\ probabilidade\ de\ tirar\ bola\ azula\ na\ U_2) = P(V \mid U_1) \times P(A \mid U_2) + P(B \mid U_1) \times P(B \mid U_2) =$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{20}$$

Aplicação – Exercício

- Do conjunto das grandes empresas que actuam num dado sector industrial, sabe-se que 60% dessas empresas têm departamento de controlo e qualidade, 40% têm departamento de recursos humanos e 20% têm ambos os departamentos.

Escolhe –se ao acaso uma empresa do referido sector. Calcule a probabilidade da empresa seleccionada se encontrar nas seguintes condições :

a) Ter departamento de controlo da qualidade ou departamento de recursos humanos.
b) Ter apenas um dos departamentos.
c) Não ter departamento de controlo da qualidade e ter departamento de recursos humanos.
d) Ter departamento de controlo da qualidade mas não ter departamento de recursos humanos.

Resolução

a) Consideremos os seguintes acontecimentos:

$$\boldsymbol{Q} \ - \text{" A empresa tem departamento de controlo da qualidade"}$$

$$R \ - \text{"} \ A \ empresa \ \ tem \ departamento \ de \ recurosos \ humanos\text{"}$$

45

Sabe do enunciado o seguinte :

$P(Q) = 60\%$, $P(R) = 40\%$ e $P(Q \cap R) = 20\%$

$P(Q \cup R) = P(Q) + P(R) - P(Q \cap R) = 0{,}60 + 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}8.$

b) Apenas um dos departamentos

$$P[(\bar{Q} \cap R) \cup (Q \cap \bar{R})] = P(\bar{Q} \cap R) + P(Q \cap \bar{R}) = P(R) - P(Q \cap R) + P(Q) - P(Q \cap R)$$

$$P[(\bar{Q} \cap R) \cup (Q \cap \bar{R})] = P(R) + P(Q) - 2P(Q \cap R) = 0{,}40 + 0{,}60 - 2 \times 0{,}20 = 0{,}60$$

c) Não ter qualquer um dos departamentos

$$P(\bar{Q} \cap \bar{R}) = P(\overline{Q \cup R}) = 1 - P(Q \cup R) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

46

d) Não ter departamento de qualidade e ter departamento de recursos humanos

$$P(R \setminus Q) = P(R \cap \bar{Q}) = P(R) - P(Q \cap R) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$$

e) Ter departamento de controlo da qualidade mas não o de recursos humanos

$$P(Q \setminus R) = P(Q) - P(Q \cap R) = 0{,}60 - 0{,}20 = 0{,}40$$

Exercício - Aplicação

Num saco seis bolas verdes e três cor de laranja indistinguíveis ao tato.

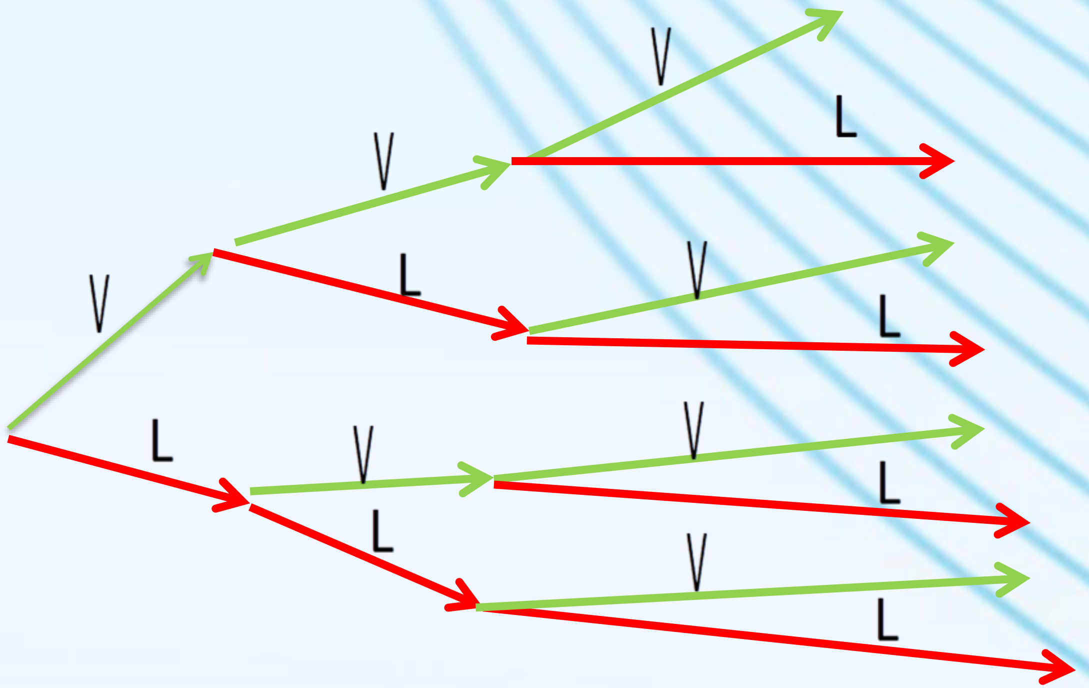
Extraem-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

Determine a probabilidade de:

a) Todas a bolas seres verdes;

b) As três bolas serem da mesma cor;

c) Pelo menos duas serem verdes.



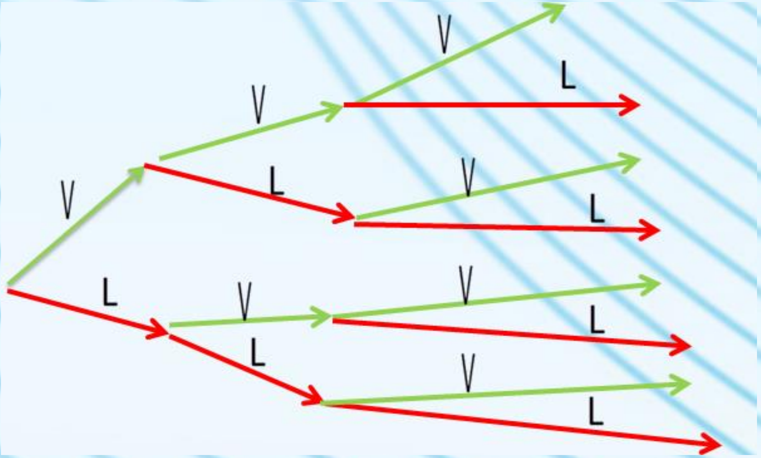
48

Continuação

Num saco seis bolas verdes e três cor de laranja indistinguíveis ao tato.

Extraem-se, simultaneamente e ao acaso,

três bolas do saco.



Determine a probabilidade de:

a) Todas a bolas seres verdes;

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = P(V_1) \times P(V_2|V_1) \times P(V_3|V_1 \cap V_2) = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

Abordagem às combinações

➢ $${}^{n}C_{P} = \frac{{}^{\mathrm{n}}\mathrm{A}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}!} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\times p!}$$

- Número de casos possíveis : $\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$
- Número de casos favoráveis : $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$

A Probabilidade pedida é : $P = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$

Continuação

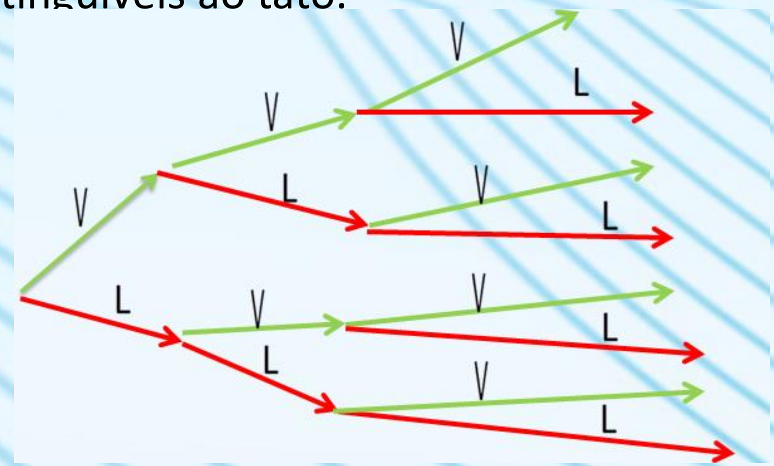
Num saco seis bolas verdes e três cor de laranja indistinguíveis ao tato.

Extraem-se, simultaneamente e ao acaso,

três bolas do saco.

Determine a probabilidade de:

b) As três bolas serem da mesma cor;



$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = \frac{120}{504} + \frac{6}{504} = 0{,}25$$

Ou

- Número de casos possíveis : $\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$
- Número de casos favoráveis : $\binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 21$

A Probabilidade pedida é : $P = \frac{21}{84} = 0{,}25$

50

Continuação

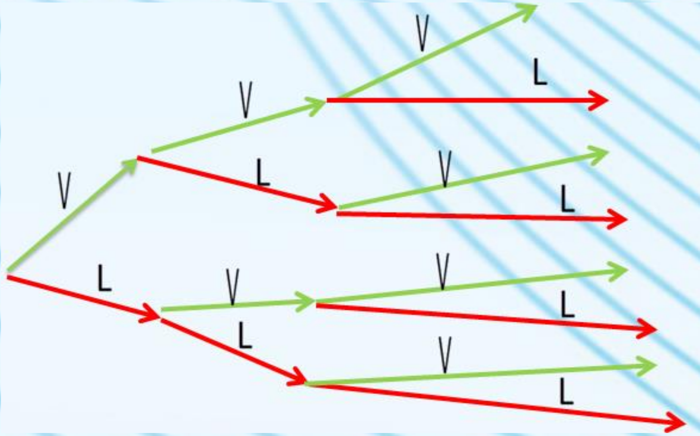
Num saco seis bolas verdes e três cor de laranja indistinguíveis ao tato.

Extraem-se, simultaneamente e ao acaso,

três bolas do saco.

Determine a probabilidade de:

c) Pelo menos duas mesma cor;



$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap L_3) + P(V_1 \cap L_2 \cap V_3) +$

$+P(L_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{120}{504} + 3 \times \left(\frac{90}{504}\right) = 0{,}7738$

- Número de casos possíveis :$\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ $\quad {}^{n}C_{P} = \binom{n}{P}$
- Número de casos favoráveis : $\binom{6}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{6}{3} \times \binom{3}{0} = 65$

A Probabilidade pedida é : $P = \frac{65}{84} = 0{,}7738$

51

Conceito de Combinação

- Um conjunto de $n \in IN_0$ elementos tem exactamente $\frac{{}^{n}A_{p}}{P!}$ subconjuntos de p elementos

$(0 \leq P \leq n)$. Designamos esse número por (número de) combinações de n elementos P a P e representamo-lo por ${}^{n}C_{P}$.

Formar subconjuntos de P elementos, dados $n \in IN$ elementos, é equivalente a escolher P objectos de entre n (portanto, sem considerar a ordem), pelo que há exactamente ${}^{n}C_{P}$ formas de o fazer.

${}^{n}A_{P} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-P+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$, tem –se : ${}^{n}C_{P} = \frac{\frac{n!}{(n-P)!}}{P!} = \frac{n!}{P!(n-P)!}$

○ ${}^{n}C_{P} = {}^{n}C_{n-p}$, ${}^{n}C_{p+1} = {}^{n}C_{P} + {}^{n}C_{P+1}$, ${}^{n}C_{0} = {}^{n}C_{n} = 1$

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$
- Até K termos o factorial poderá ser escrito como :

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(K-1)\big)!$

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Lei do Grandes Números - Bernoulli

- A Lei dos Grandes Números refere o seguinte:

- Para um grande número de realizações de uma experiência, a frequência relativa de um acontecimento é aproximadamente igual à probabilidade desse acontecimento.

$$P(A) \approx \lim_{n \to +\infty} \frac{fr(A)}{n}$$

- A Lei de Laplace ou a probidade clássica , em que os acontecimentos elementares são equiparáveis: $P(A) = \frac{nº\ de\ cassos\ favoráveis}{nº\ de\ casos\ possíveis}$.

- Acontecimento elementares, refere apenas a um elemento de um acontecimento, isto é : $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de sair a face 2 de um dado;

- Acontecimentos Compostos, referem-se a mais de um elemento, isto é :

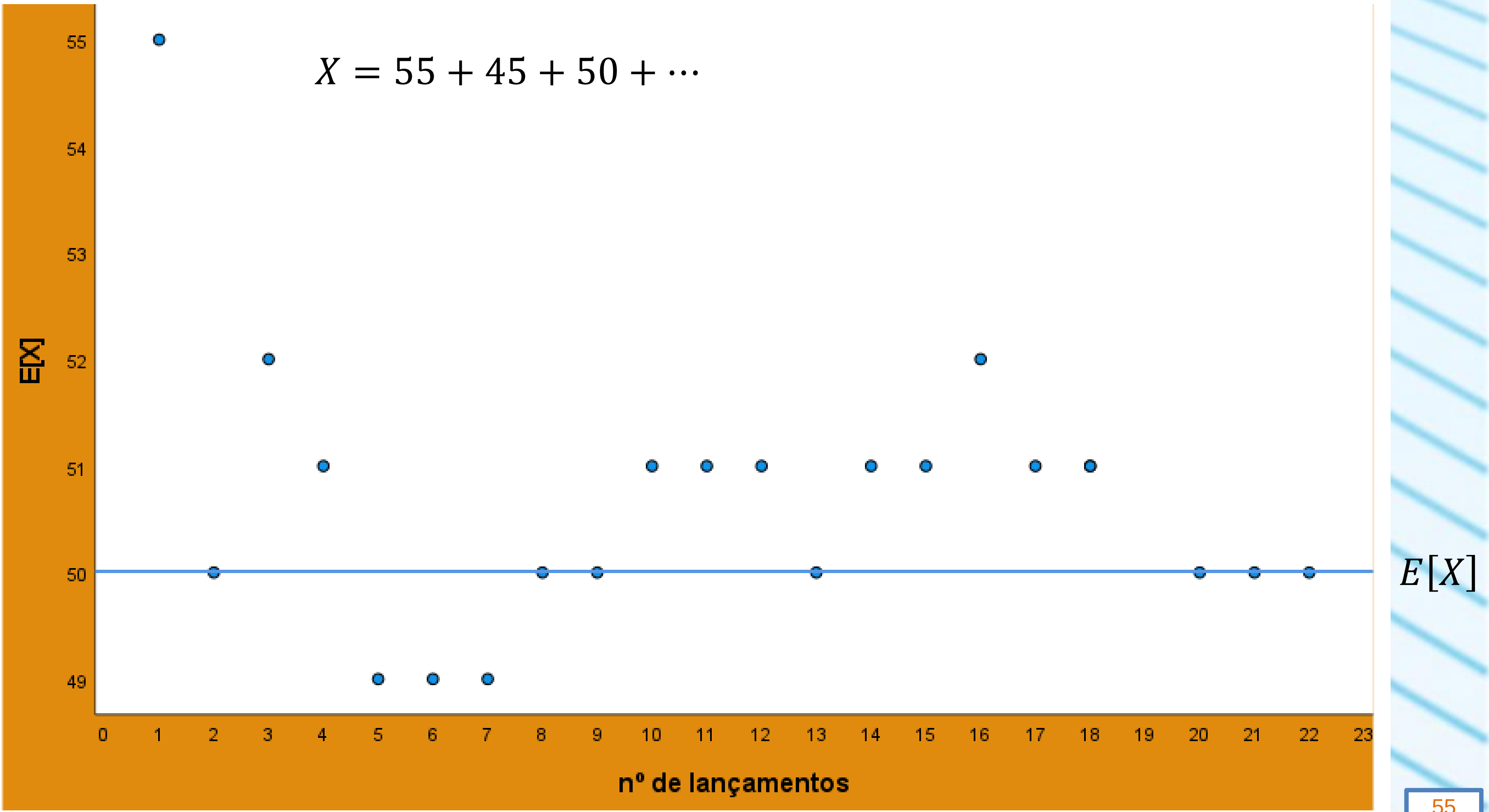
$P(\{par\}) = \frac{1}{2}$, ou seja, a probabilidade de sair face para é 50%.

Notas e Diferença - Lei do Grandes Números entre a Lei de Laplace

- ❑ A Lei de Laplace é aplicada à priori da realização da experiência
- ❑ A Lei dos Grandes Números é aplicada à posterior da realização da experiência.
- ❖ A Lei dos grandes Números pode ser aplicada em qualquer experiência, tendo o inconveniente de estar sempre dependente de um grande número de realizações da mesma para poder ser aplicada.
- ❖ De forma geral
- ○ Seja X e $E(X)$ quando $n \to +\infty$ $\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n} = E(X)$

X : Representa a face nacional de n laçamentos de moeda 100

$E(X) = 100 \times 0{,}5 = 50$, ou seja, espera-se 50 faces com o símbolo em n jogadas



Peão Viciado

Numa aula de análise e de experiências aleatórias , o professor formou 4 grupos e distribui 4 peões, um dos quais era viciado. Assim sendo, a experiência consiste rodar o pião e registar o número da face que fica encostado à mesa e obteve-se os seguintes registos.

Grupo	N.º experiências	Resultados		
		Face 1	Face 2	Face 3
1	10	3	1	6
2	555	187	177	191
3	515	85	285	145
4	445	146	158	141

Número de lançamentos é muito baixo para tirar conclusões, assim sendo, não é seguro afirmar se o Peão é viciado.

$$\Omega = \{1\,,2\,,3\} \quad ,\#\Omega = 3$$

$$P(\{sair\ face\ 1\}) = P(\{sair\ face\ 2\}) = P(\{sair\ face3\}) = 0{,}3333$$

- Dada a análise do quadro, verifica-se que existe evidência estatística que o peão Viciado seja do grupo 3.

Elaborado por : António Oliveira, MSc

Peão Viciado

Probabilidade frequência :

- Probabilidade frequência (ou empírica) de um acontecimento A é o valor é o valor para o qual tende a estabilizar a frequência relativa da realização de A , à medida que aumenta o número de repetições da experiência aleatória.

Grupo	N.º experiências	"sair face 1"		"sair face 2"		"sair face 3"	
		FA	FR	FA	FR	FA	FR
2	555	187	33,69%	177	31,89%	191	34,41%
3	515	85	16,50%	285	55,34%	145	28,16%
4	445	146	32,81%	158	35,51%	141	31,69%

- Conclui-se que o peão viciado é o do grupo 3

Lei das Probabilidades Composta (Acontecimentos Independentes)

Intersecção

Nota : a Lei das Probabilidades composta servem para dar uma ordem aos acontecimentos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Exemplo :

Num baralho de 52 cartas , qual é a probabilidade de sair dama na 5 extracção .

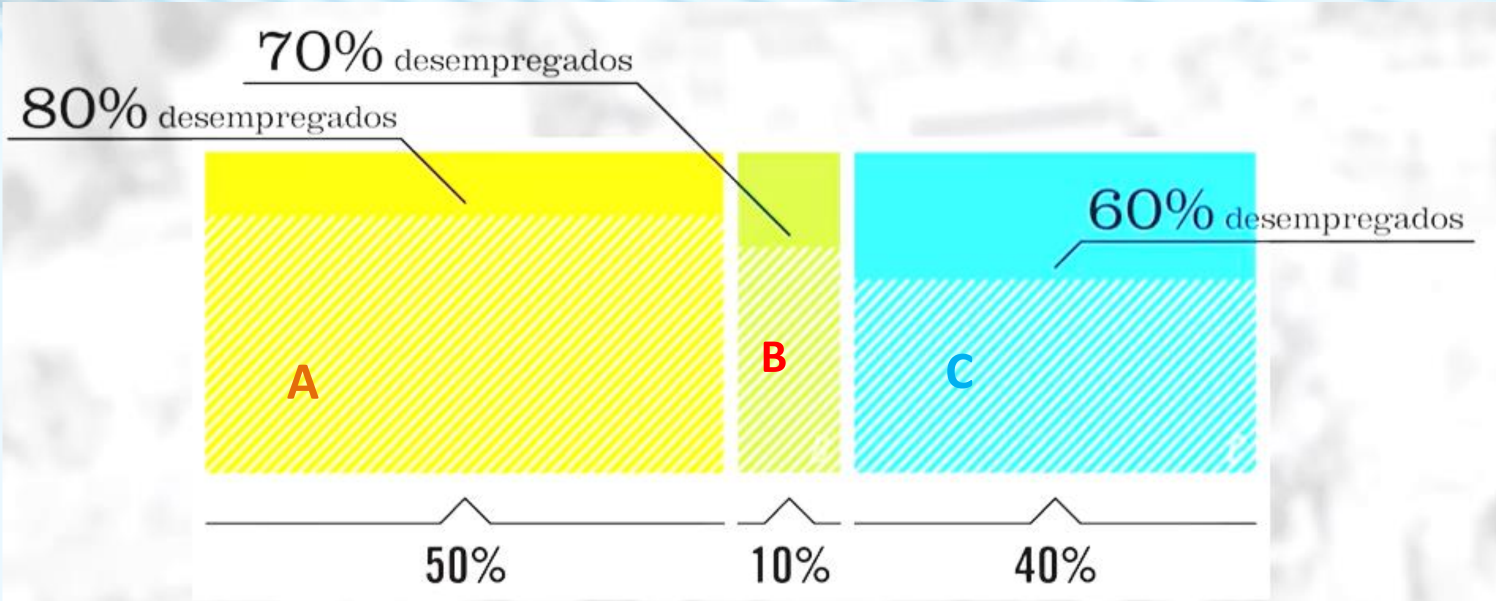
Nota : as extracções são realizadas sem reposição.

Sejam os seguintes acontecimentos : S: « *sucesso*» *e* $\bar{S}$: « *insucesso* »

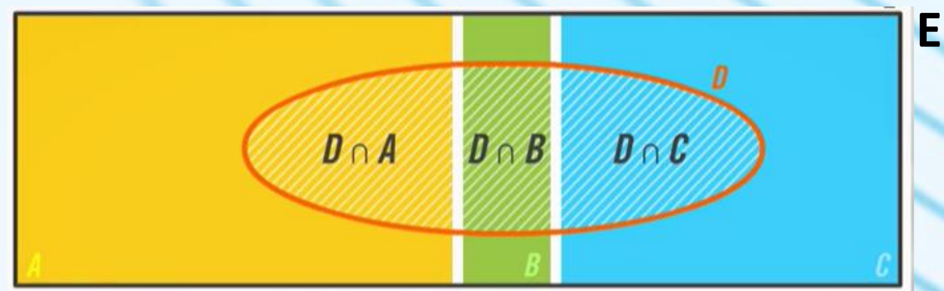
$$P(S_5) = P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2} \cap \overline{S_1}) \times P(\overline{S_3} \mid \overline{S_1} \cap \overline{S_2}) \times \cdots \times P(S_5 \mid \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \overline{S_4}) =$$

$$= \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{46}{50} \times \frac{45}{49} \times \frac{4}{48} \approx 0{,}05989$$

Teorema da Probabilidade Total



Encontra-se uma pessoa ao acaso dentro do recinto , qual é a probabilidade dessa pessoa estar desempregada?



$A \cap B = \varnothing \qquad A \cap C = \varnothing \qquad B \cap C = \varnothing$

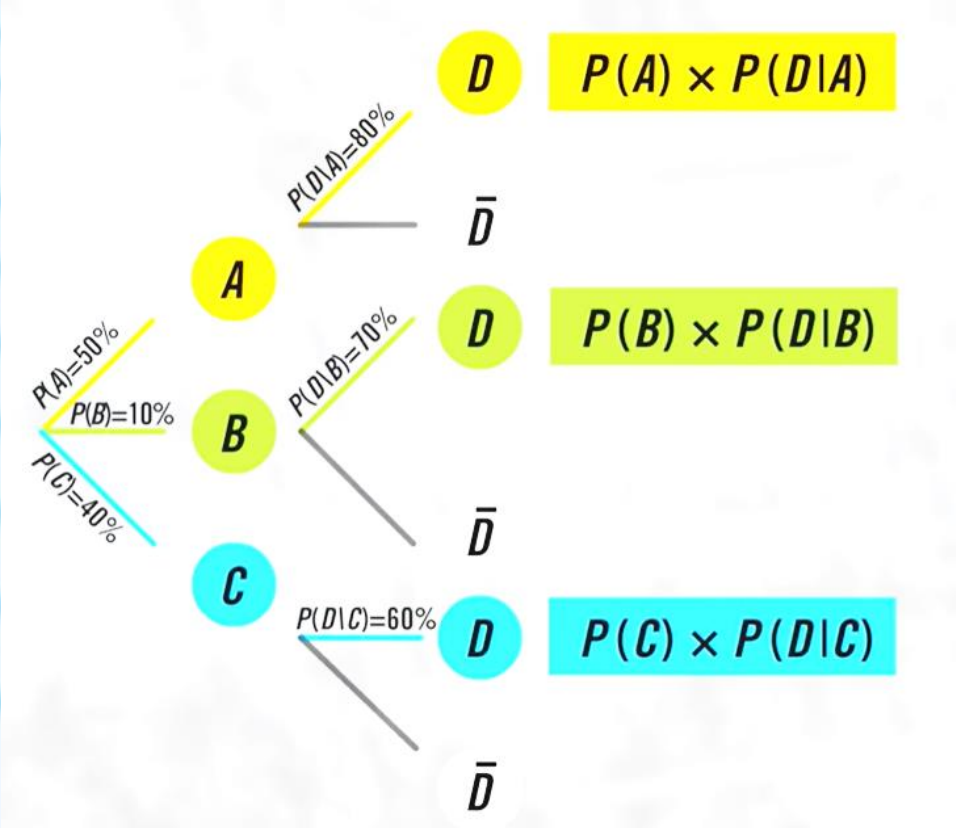
$A \cup B \cup C = E \Rightarrow \{A, B, C\}$ é uma partição de E

Teorema da Probabilidade Total

- $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap B) =$

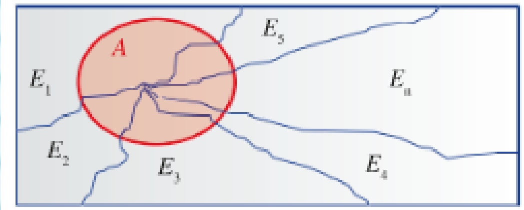
$= P(A)P(A \mid D) + P(B)P(B \mid D) +$

$+P(C)P(C \mid D)$



$P(A) = 0{,}5 \times 0{,}80 + 0{,}10 \times 0{,}70 + 0{,}40 \times 0{,}60 = 0{,}71 = 71\%$

Teorema da Probabilidade Total



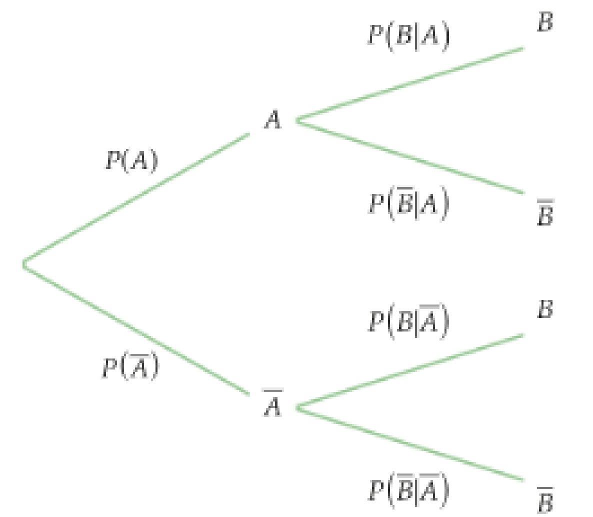
O Teorema da Probabilidade total estabelece que :

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega \,.\, \mathcal{P}(\Omega)\,, P), n \in IN$, e uma partição $E_1\,, E_2, \ldots, E_n$ de Ω $(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega, \mathit{disjuntos\ dois\ a\ dois\ e\ de\ probabilidade\ não\ nula})$, $\forall\, A \subset \Omega$

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = P(A|E_1) \times P(E_1) + P(A\,|E_2) \times P(E_2) + \cdots + P(A \mid E_n) \times P(E_n) =$$

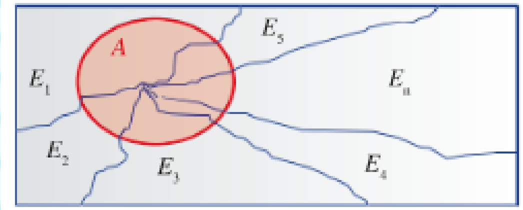
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A\,|E_i) \times P(E_i)$$



- $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) =$

$$= P(B|A) \times P(A) + P(B \mid \bar{A}) \times P(\bar{A})$$

Teorema da Probabilidade Total



Exemplo

São lançadas duas moedas, uma das quais é viciada .

Na moeda viciada a probabilidade de sair face euro é $\mathrm{P}(E) = \frac{3}{4}$

Qual é a probabilidade de sair a face nacional ?

Sejam os seguintes acontecimentos :

V: « *a moeda é viciada*» $\bar{V}$: « *a moeda não é viciada*»

$$P(N) = P(V) \times P(N \mid V) + P(\bar{V}) \times P(N \mid \bar{V}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

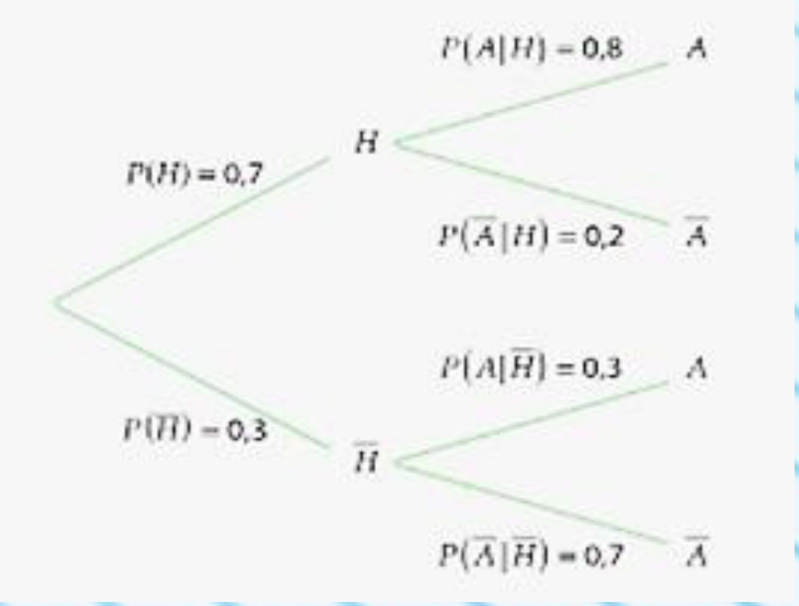
Teorema da Probabilidade Total

Numa escola, o toque de saída para o almoço soa na hora certa com probabilidade 0,7.

Se tocar na hora certa, a probabilidade de um aluno apanhar o autocarro é 0,8 , se não tocar na hora certa, a probabilidade de o aluno apanhar o autocarro é 0,3.

Qual é a probabilidade de o aluno apanhar o autocarro ?

Resolução :



Sejam os acontecimentos :

A : « o $aluno$ $apanha$ o $autocarro$ » ;

H: « a $campainha$ $toca$ na $hora$ $certa$».

$$P(A) = P(H)P(A \mid H) + P(\overline{H})P(A \mid \overline{H}) =$$

$$= 0{,}8 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}65$$

A probabilidade de o aluno apanhar o autocarro é 0,65 (0,65%).

Elaborado por : António Oliveira, MSc

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Seja $\{A\}_{n \in IN}$, uma partição do universo Ω em acontecimentos , e B um acontecimento de Ω . Então :

- $$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad ; \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) = 1$$

Exemplo

Nos três parques industriais, P_1 , P_2 e P_3 , dedicam-se à actividade têxtil, respectivamente , 10%, 40% e 25% das empresas. Escolhido ao acaso um parque.

Qual a probabilidade de que o parque seja P_1 , sabendo que a empresa é têxtil?

Seja o seguinte acontecimento : E: « $actividade\ da\ empresa$ é $têxtil$»

$$P(P_1) = P(P_2) = P(P_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(E \mid P_1) = 0{,}1 \ ; \ P(E| P_2) = 0{,}4 \ ; \ P(E \mid P_3) = 0{,}25$$

$$P(P_1 \mid E) = \frac{P(P_1) \times P(E \mid P_1)}{P(P_1) \times P(P_1 \mid E) + P(P_2) \times P(E \mid P_2) + P(P_3) \times P(E \mid P_3)}$$

Exemplo:

Uma companhia de seguros distribui os segurados por três classes, A_1, A_2 e A_3, consoante o menor ou maior risco que lhes atribui; em certo momento, a carteira de apólices é tal que $P(A_1) = 0{,}35$, $P(A_2) = 0{,}50$ e $P(A_3) = 0{,}15$. Sabe-se também que a probabilidade de os segurados de cada classe terem um ou mais acidentes durante um ano é , respectivamente, $0{,}01$, $0{,}04$ e $0{,}15$. A companhia, naturalmente, nunca tem a certeza de conhecer a classe a que pertence o subscritor de uma apólice.

Se um tiver um ou mais acidentes durante um ano, que conclusões podem retirar –se quanto à classe a que pertence ?

Resolução :

Seja B o seguinte acontecimento : $\boldsymbol{B}$: « $\boldsymbol{um\ ou\ mais\ acidentes\ durante\ um\ ano}$»

$$P(A_i \mid B) = ?$$

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Continuação : $\mathrm{P}(B \mid A_1) = 0{,}01 \;,\; P(B \mid A_2) = 0{,}04 \;\; e \;\; P(B \mid A_3) = 0{,}15$

Aplicação da Fórmula de Bayes

Classes	Prob. a priori	Verosimillhanças		Prob. a posterior
A_i	$P(A_i)$	$P(B \mid A_i)$	$P(A_i) \times P(B \mid A_i)$	$P(A_i \mid B)$
A_1	0,35	0,01	0,0035	0,0761
A_2	0,50	0,04	0,020	0,4348
A_3	0,15	0,15	0,0225	0,4891
$Total$	1,00		0,0460	1,000

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1) \times P(B \mid A_1)}{P(A_1) \times P(B \mid A_1) + P(A_2) \times P(B \mid A_2) + P(A_3) \times P(B \mid A_3)} =$$

$$= \frac{0{,}35 \times 0{,}01}{0{,}35 \times 0{,}01 + 0{,}5 \times 0{,}04 + 0{,}15 \times 0{,}15} = 0{,}0761$$

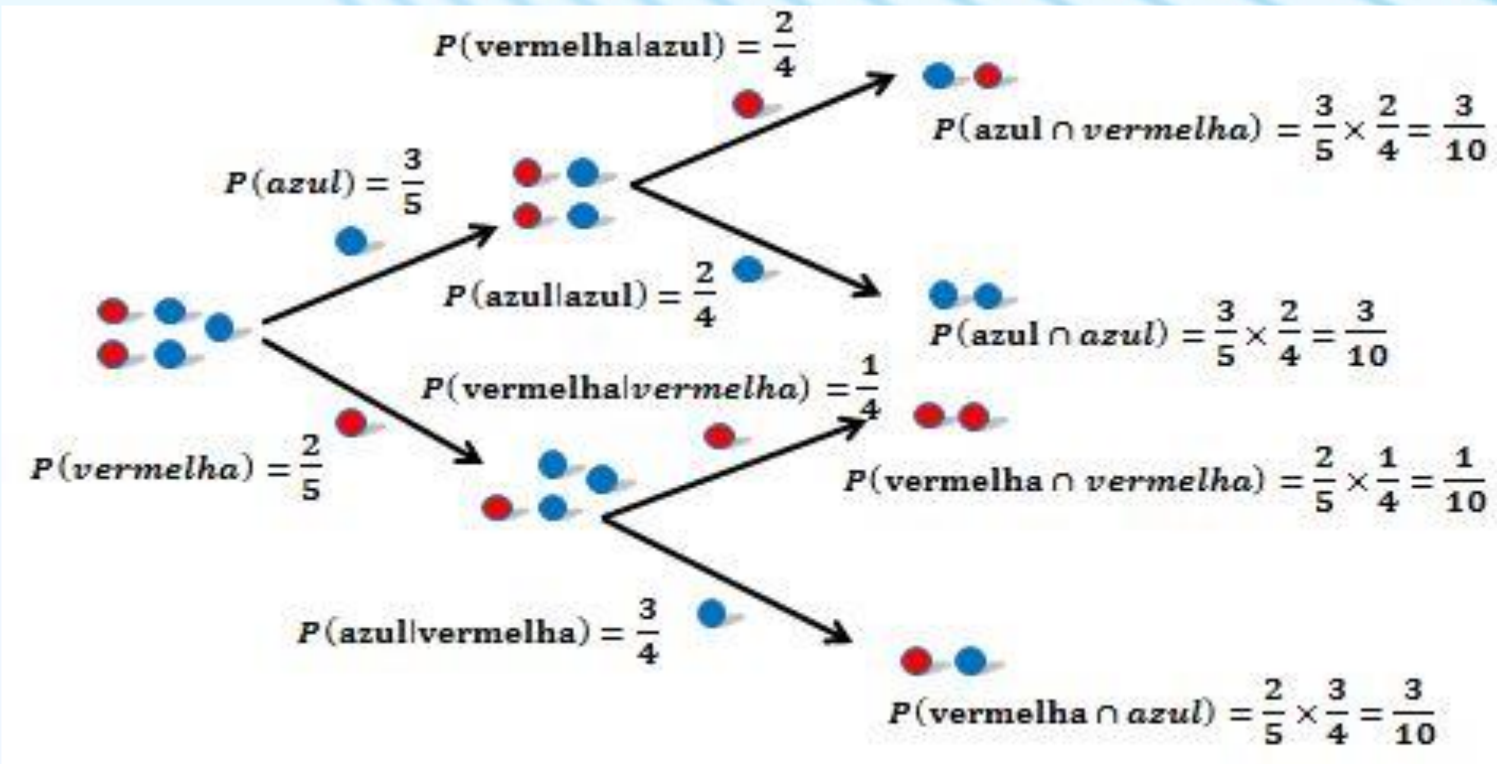
- **Verifica-se que é relativamente improvável que o segurado pertença à classe A_1, sendo mais provável que ele pertença à classe A_3.**

66

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Sejam **A** e **B** os acontecimentos definidos por :

A:« Sair bola azul»   B:« sair uma bola vermelha»



O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Sejam **A** e **B** os acontecimentos definidos por :

A:« Sair bola azul»   B:« sair uma bola vermelha»

Nota : a primeira questão resolve – se pela probabilidade condicionada.

a) Qual é a probabilidade de a **segunda** bola retirada ser vermelha sob a condição de a **primeira** bola retirada ser azul?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(vermelha|azul) = \frac{P(azul \cap vermelha)}{P(azul)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

68

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Sejam **A** e **B** os acontecimentos definidos por :

A:« Sair bola azul» B:« sair uma bola vermelha»

Nota : a segunda questão resolve – se pela probabilidade de Bayes.

b) Qual é a probabilidade de a **primeira** bola retirada ser a azul sob a condição de a **segunda** ser vermelha?

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A)\times P(B|A)+P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}$$

$$P(azul|vermelha)=\frac{P(azul\cap vermelha)}{P(azul\cap vermelha)+P(vermelha\cap vermelha)}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{10}}=\frac{3}{4}$$

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Uma urna contém cinco dados: sendo quatro são honestos e um viciado. No viciado **a probabilidade de ocorrer face "seis" é o triplo da probabilidade de ocorrer face "um".** As demais faces têm igual probabilidade de ocorrer. Um dado retirado da urna ao acaso é lançado. Qual é a probabilidade desse dado ser honesto sabendo que a face **"seis" ocorreu?**

Qual é a probabilidade desse dado ser honesto sabendo que a face **"seis" ocorreu?**

Sejam **V** e **S** os acontecimentos definidos por :

V:« Saída do dado viciado» **S:« saída da face 6»**

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

Sejam **V** e **S** os acontecimentos definidos por :

V:« Saída do dado viciado» S:« saída da face 6»

$$P(S|V) = \frac{1}{2}$$

$$P(V \cap S) = P(V) \times P(s|V) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = 0{,}1$$

$$\mathbf{P(V)=}\frac{1}{5} \qquad V$$

$$P(\bar{\boldsymbol{S}}|V = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{P(\bar{V}) = \frac{4}{5}} \qquad \bar{V}$$

$$P(\bar{V} \cap S) = P(\bar{V}) \times P(s|\bar{V}) = \\ = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{30} = 0{,}1333(3)$$

$$P(S|\bar{\boldsymbol{V}}) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$$P(\bar{\boldsymbol{S}}|\bar{\boldsymbol{V}}) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \simeq 0{,}67$$

O Teorema de Bayes, ou da Probabilidade inversa, ou das Causas

$$P(\bar{V}|S) = \frac{P(\bar{V} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\bar{V}) \times P(S|\bar{V})}{P(V \cap S) + P(\bar{V} \cap S)} = \frac{P(\bar{V}) \times P(S|\bar{V})}{P(V) \times P(s|V) + P(\bar{V}) \times P(S|\bar{V})} = \frac{4}{7}$$

$$P(S) = P(V \cap S) + P(\bar{V} \cap S) = P(V) \times P(s|V) + P(\bar{V}) \times P(S|\bar{V}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{30} = \frac{4}{30}$$

Qual é a probabilidade desse dado ser honesto sabendo que a face **"seis" ocorreu?**

R: A probabilidade desse dado ser honesto sabendo que a face seis ocorreu é de 0,5714 , ou seja, 57,14% aproximadamente.

Variável Aleatória - Função de Probabilidade

Seja $\Omega = \{a_1 . a_2, a_3, \dots, a_n\}$ o espaço amostral de uma experiência aleatória.

A toda a correspondência X de Ω para IR tal que a cada elementos um e um só número real X, chama-se variável aleatória $(v.a.)$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Exemplo :

Quando se lançam dois dados, o espaço de resultados é Dado pelo conjunto $\Omega = \{(i\ ,j): i, j = 1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\}$ e quando se regista a soma de pontos das duas faces , v.a. definida da seguinte maneira :

$$X: (i, j) \in \ \Omega \longrightarrow (i + j) \in \ IR$$

Imagens	Imagens Inversas	Prob.
$\{2\}$	$\{(1\ ,1)\}$	$\frac{1}{36}$
$\{3\}$	$\{(1\ \ ,2), (2\ ,1)\}$	$\frac{2}{36}$
.	.	.
.	.	.
$\{12\}$	$\{(6\ ,6)\}$	$\frac{1}{36}$

Tipos de Variáveis Aleatórias - Discretas

- Uma variável aleatória diz –se discreta se toma valores num conjunto finito ou infinito numerável . Todas as variáveis aleatórias discretas têm associada uma distribuição de Probabilidade a que chamamos **Função Massa de Probabilidade** $(f.m.p)$.

Trata-se de uma função que a cada valor que a variável toma esteja associada a respectiva probabilidade de se observar tal valor, ou seja,

	$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$X =$	$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

Contudo, para que a função seja uma função massa de probabilidade é necessário que sejam verificadas as seguintes condições

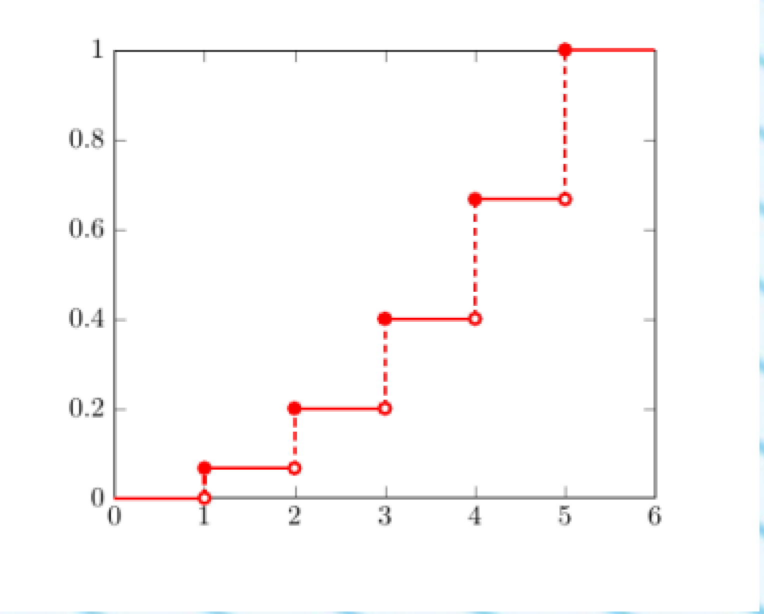
$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P(X = x_i) = 1 \qquad e \quad 0 \leq P(X = x_i) \leq 1, \forall i$$

74

Distribuição de Probabilidade ou Função de Probabilidade

Definição : A função de distribuição ou função acumulada de probabilidade de uma Variável aleatória discreta X é definida para qualquer número real x, pela seguinte expressão:

- $F(x) = P(X \leq x)$, ou seja, $F(x) = \sum_{x_i \leq x}^{n} P(X = x_i) = 1$
- Trata-se portanto de uma função acumulativa, sendo a sua representação gráfica uma função em escada.



Distribuição de Probabilidade ou Função de Probabilidade

Exemplo : Seja X a variável aleatória que representa o número de acidentes observados numa determinada via da capital.

Considerando que se observam no máximo 6 acidentes, o suporte da variável é $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. A distribuição de probabilidade é dada por :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P_i = P(X = x_i)$	0,287	0,358	0,224	0,093	0,029	0,007	0,002

Podemos dizer que se trata de uma função massa de probabilidade.

R: De facto constata-se que todas as probabilidades são maiores ou iguais a 0 e que a soma é igual a unidade $\sum_{i=1}^{6} P_i = \sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) = 1$, pelo que podemos concluir que se trata de uma $f.m.p.$

76

Função de Distribuição

Considerando novamente o exemplo do número de acidentes, a função de distribuição é definida por :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P_i = P(X = x_i)$	0,287	0,358	0,224	0,093	0,029	0,007	0,002

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.287 & 0 \leq x < 1 \\ 0.645 & 1 \leq x < 2 \\ 0.869 & 2 \leq x < 3 \\ 0.962 & 3 \leq x < 4 \\ 0.991 & 4 \leq x < 5 \\ 0.998 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Função de Distribuição

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P_i = P(X = x_i)$	0,287	0,358	0,224	0,093	0,029	0,007	0,002

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.287 & 0 \leq x < 1 \\ 0.645 & 1 \leq x < 2 \\ 0.869 & 2 \leq x < 3 \\ 0.962 & 3 \leq x < 4 \\ 0.991 & 4 \leq x < 5 \\ 0.998 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Se pensarmos por exemplo, na probabilidade de se observarem mais que 2 acidentes, tal probabilidade pode ser facilmente calculada com recurso à função massa de probabilidade.

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}335$$

Ou com recurso à função de distribuição

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F_X(1) = 1 - 0{,}645 = 0{,}355$$

Função de Probabilidade e de Distribuição

❖ O número de telemóveis vendidos semanalmente numa loja é uma variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade :

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

Calcule , justificando, o valor de c e determine a função de distribuição.

$$P(X = x_i) = 1 \Leftrightarrow c = 0{,}48$$

$$F_X = \begin{cases} 0 & se\ x < 1 \\ 0{,}48 & se\ \ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}48 + \frac{0{,}28}{2} 0{,}72 = & se\ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}72 + \frac{0{,}48}{3} = 0{,}88 & se\ 3 \leq x < 4 \\ 0{,}88 + \frac{0.48}{4} = 1 & se\ \ x \geq 4 \end{cases}$$

Função de Probabilidade e de Distribuição

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

- Calcule a probabilidade do número de telemóveis vendidos não chegar a 4, sabendo que este valor é superior a 1 .

$$P(X < 4 \mid X > 1) = P(X \leq 3 \mid X > 1) = \frac{P(X \leq 3 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X \leq 1)}$$

$$P(X < 4|X > 1) = \frac{0{,}24 + 01{,}6}{1 - 0{,}48} \approx 0{,}7692$$

Ou $\mathrm{P}(X \leq 3 \ \cap X > 1) = F(3) - F(1) = 0{,}88 - 0{,}48 = 0{,}40$

Distribuição de Probabilidade ou Função de Probabilidade

- Exemplo : lança-se 2 dados equilibrados numerados de um seis, registando -se a faces que ficam voltadas .

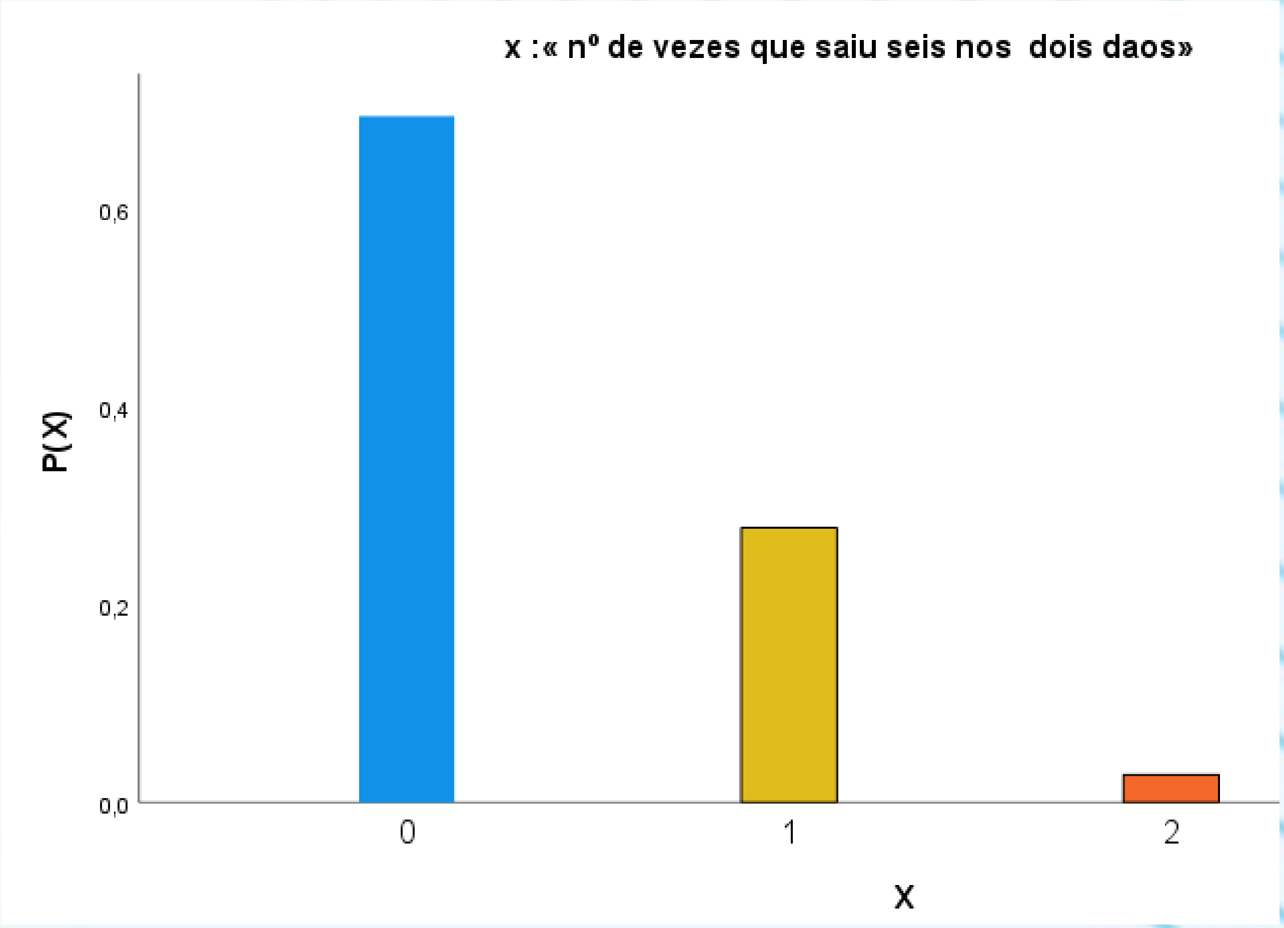
D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- X: « $n^{\underline{o}}$ *de vezes que saiu seis nos dois dados* »
- $X = 0\,, X = 1\ e\ X = 2$
- Função de distribuição

$$X = \begin{array}{c|ccc} X = x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline P(X = x_i) & \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

Representação Gráfica – Função Massa de Probabilidade

- A representação gráfica da distribuição de probabilidade de $v.a.$ é idêntica à da distribuição da frequência relativa (diagrama de barras).



Probabilidades - Experiências Compostas

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar duas moedas de 1 euro, uma a seguir à outra, e verifica-se as faces voltadas para cima.

Face europeia (E)


Face nacional (N

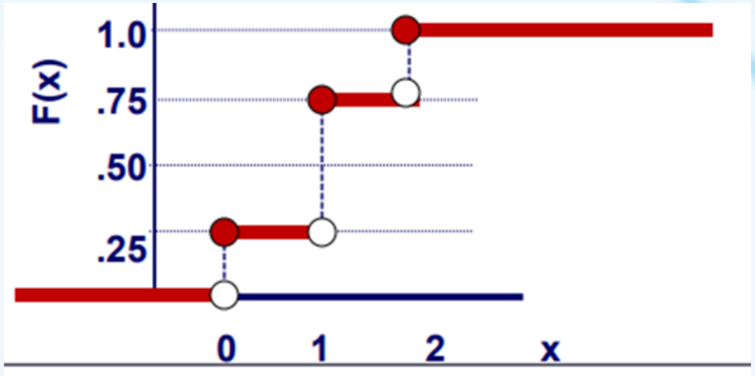
Considere os seguintes acontecimentos:

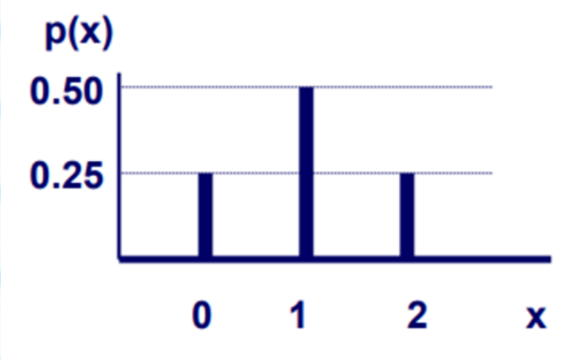
$\Omega = \{EE\ ,EN\ ,NE\ ,NN\}$

X : " $v.a.$ $que\ representa\ a\ face\ europeia\ (E)\ em\ 2\ lançamentos$

X =

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$





Elaborado por : António Oliveira, MSc

- Um apostador, tem numa bolsa : duas moedas de 1 euro e quatro moedas de 50 cêntimos. O apostador retira, simultaneamente e ao acaso, duas moedas da bolsa.

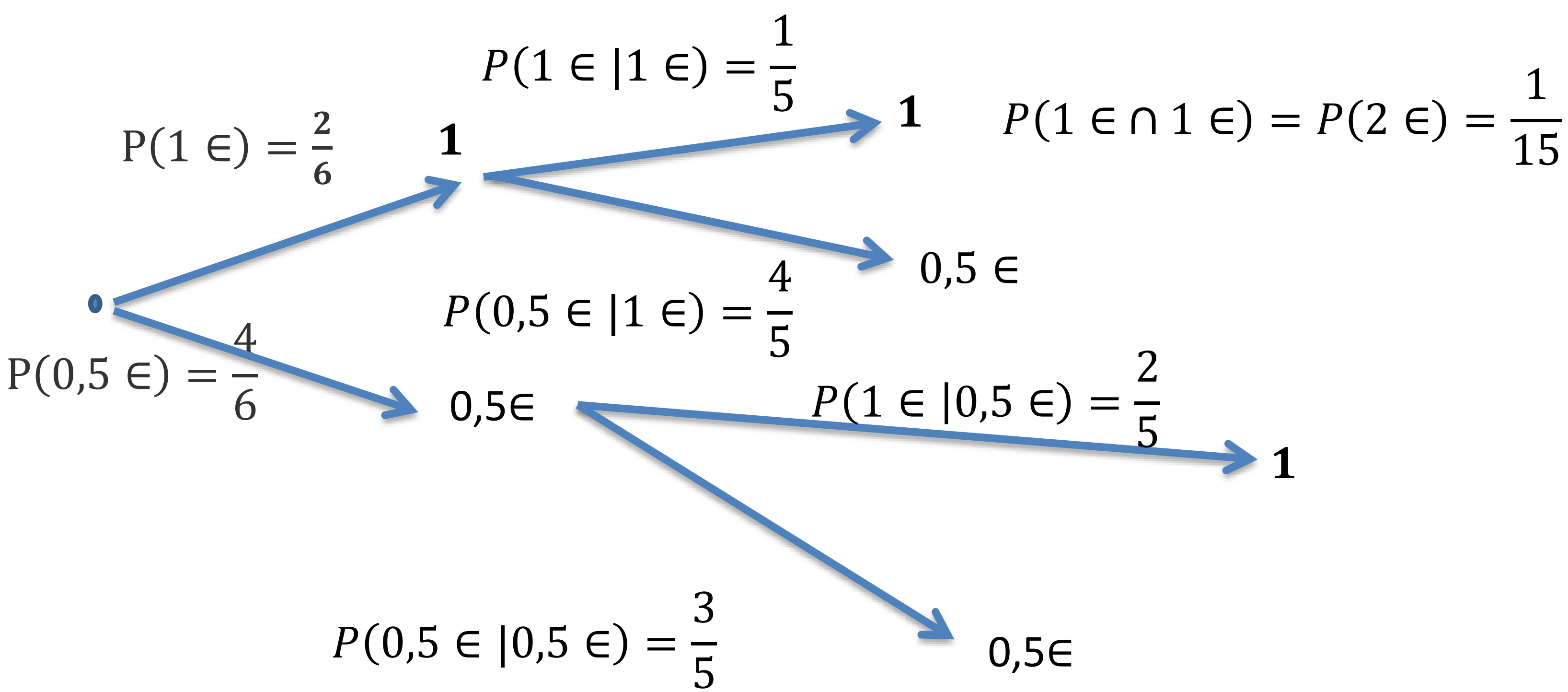
a) Seja X a v.a. que representa a soma da quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável , apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

b) Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o apostador informou ao seu adversário que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros. Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

Probabilidades - Experiências Compostas

Resolução

X:« a soma quantidade, em euros, correspondente ás moedas retiradas»



Probabilidades - Experiências Compostas

X:« a quantidade, em euros, correspondente ás moedas retiradas»

1º Método : Informação recolhida através da árvore

x_i	1	1,5	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$P(1\,€) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P(1{,}5\,€) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(2\,€) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

2º Método : informação recolhida pela tabela de dupla entrada

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5		1	1	1	1,5	1,5
0,5	1		1	1	1,5	1,5
0,5	1	1		1	1,5	1,5
0,5	1	1	1		1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5		2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	

$$P(X=1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \qquad P(X=1{,}5) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

x_i	1	1,5	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

3º Método : Pelas combinações

$$P(X=1) = \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} \qquad P(X=1{,}5) = \frac{{}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2}$$

$$P(X=2) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2}$$

b) Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o apostador informou ao seu adversário que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros. Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

Sejam os seguintes acontecimentos:

A:« a quantia retirada é de 2€ » **B:« as moedas retiradas são iguais »**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{30}}{\frac{2}{30} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}} = \frac{1}{7}$$

Propriedade – Função de Distribuição

Para qualquer função de distribuição , $F_X(x)$: $\text{IR} \longrightarrow [0\,;1]$

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \in \,]-\infty\,, x])$;

Propriedades

- $F_{X(-\infty)} = \lim\limits_{x \to (-\infty)} F_X(x) = 0$ e $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to (+\infty)} F_X(x) = 1$;

- $F_X(x)$ é $\textit{não decrescente}$: $F_X(x_1) < F_X(x_2)$;

- Se X $\textit{discreta então}$ $P(X = x) = F_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
- Se X $\textit{continua a}$ $F_X(x)$ é $\textit{continua no ponto}$

89

Operacionalizando Função de Distribuição

$F_X(x) = P(X \leq x);$

Caso em que $X\ v.a.discreta$

$F_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{x} P(X = x)$

Caso que $X\ v.a.continua$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x\,(u)du$

- Exemplo caso discreto

$$P(X = x)\begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } x = 0\ ,2 \\ \frac{2}{6} & \text{se } x = 1 \\ \frac{3}{6} & \text{se } x=3 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}+\frac{2}{6} = \frac{3}{6} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{6}+\frac{1}{6} & se\ \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

90

Momentos de uma Variável Aleatória Discreta – Valor Médio

Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade dada por:

$$X = \begin{cases} x_K & K \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z} = 1,2,\dots,n) \\ & P_K = P(X = x_K) \end{cases}$$

- ❑ O valor médio (ou valor esperado , ou esperança matemática, ou momento de 1ª ordem de X é
- ▪ $E(X) = \mu_X = \sum_{K=1}^{n} x_k \times P(X = x_K)$
- ➢ O valor médio de X^n, chamado momento de ordem n, é : $E(X^n) = \sum_{K\in\mathbb{Z}} x_K^n \times P_K$
- ❑ Exigindo –se convergência absoluta da série, isto é :

$$\sum |x_K| \times P_K$$

91

Propriedades – Valor Médio

Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade dada por:

$$X = \begin{cases} x_K & K \in \mathbb{Z}\,(\mathbb{Z} = 1,2,\dots,n) \\ & P_K = P(X = x_K) \end{cases}$$

- ❑ $E[E(X)] = E(X)$;
- ❑ $E(C) = C$, $em\ que\ C$ é $uma\ constante$;
- ❑ Dados a , b $\in IR\ quaisquer, se\ existir\ E(X)$, então, $E(aX + b) = a \times E(X) + b$;
- ❑ O valor médio da soma de duas variáveis aleatórias é a soma dos respectivos valores médios. Isto é : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$:
- ❑ Se Xe Y são duas variáveis aleatórias discretas independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$

92

Propriedades – Valor Médio

Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade dada por:

$$X = \begin{cases} x_K & K \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z} = 1,2, \dots, n) \\ & P_K = P(X = x_K) \end{cases}$$

- Mais geralmente, sendo $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias quaisquer,

$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$;

- Se as variáveis aleatórias forem $i.i.d.$ (independentes e identicamente distribuídas) , então $E(X_i) = E(X) = \mu, \forall i \in \{1,2, \dots, , n\}$, onde, $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n \times E(X) = n\mu$.

Propriedades – Valor Médio

Dada uma amostra aleatória, a sua média é uma medida de localização de bastante importância, uma vez que é a medida utilizada para fazer inferência sobre o valor médio populacional.

- Define como $\bar{X} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} X_i$, sendo o seu valor esperado é dado por:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

- Obs: $E\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{E(X)}$
- $E(|X|) \neq |E(X)|$

94

Esperança Matemática ou Valor Esperado

Definição : de esperança de uma v.a. Discreta

Dada uma variável aleatória real discreta X com o contradomínio $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, a esperança , valor esperado ou valor médio de X é dado por:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

X =

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}25 & se \quad x = 0 \\ 0{,}5 & se \quad x = 1 \\ 0{,}25 & se \quad x = 2 \end{cases}$$

- $E(X) = 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}25 = 1$

Esperança Matemática ou Valor Esperado

Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,05	0,15	0,42	0,2	0,08	0,1

a) Calcule a probabilidade de vender mais que 2 livros por semana.

$$P(>2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}2 + 0{,}08 + 0.1 = 0.38$$

b) Calcule a probabilidade de vender no máximo um livro.

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0.2$$

96

Esperança Matemática ou Valor Esperado

Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,05	0,15	0,42	0,2	0,08	0,1

c) Calcule o número esperado de livros vendidos por semana.

$$E(X) = 0 \times 0{,}05 + 1 \times 0{,}15 + 2 \times 0{,}42 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}08 + 5 \times 0{,}1 = 2{,}41$$

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

Se os custos fixos semanais são de 30 u.m. quando são vendidos 2 ou menos telemóveis e 15 u.m quando se vender mais do que 2 telemóveis e, além disso, por cada telemóvel vendido há um lucro de 35 u.m. , determine a receita líquida semanal.

Resolução

- Para determinar a receita líquida semanal, precisamos calcular a receita total e subtrair os custos totais. A receita total é o lucro por telemóvel multiplicado pelo número total de telemóveis vendidos, e os custos totais são a soma dos custos fixos semanais.
- O lucro por telemóvel vendido é de 35 u.m. Vamos denotar o número total de telemóveis vendidos por *N*. Sabemos que a variável aleatória *X* representa o número de telemóveis vendidos semanalmente. Então, a receita total é dada por:

$$RECEITA\ TOTAL = 35 \times N$$

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

Custos totais:

Os custos fixos semanais são de 30 u.m. quando são vendidos 2 ou menos telemóveis e 15 u.m. quando se vende mais de 2 telemóveis. Vamos denotar os custos totais por *C*. Podemos calcular *C* usando a função de distribuição acumulada *F*(*x*) que determinamos anteriormente:

$$C = \begin{cases} \mathbf{30 \;\; se\; X \leq 2} \\ \mathbf{15\; se\; X > 2} \end{cases}$$

Agora, precisamos calcular o valor esperado da receita líquida semanal. O valor esperado, denotado por *E*[*R*], é dado por:

$$E[R] = E[Receita\ Total] - E[Custos\ Totais]$$

99

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	0,48	0,24	0,16	0,12

Para calcular o valor esperado de Receita Total Receita Total, precisamos primeiro encontrar o valor esperado de *N*, o número total de telemóveis vendidos semanalmente. Em seguida, substituímos esse valor na fórmula da receita total.

$$E[N] = \sum_{i=1}^{4} x \times f(x) = 1 \times 0{,}48 + 2 \times 0{,}24 + 3 \times 0{,}16 + 4 \times 0{,}12 = 1{,}92$$

$$E[Receita\ Total] = 35 \times E[N] = 35 \times 1{,}92 = 67{,}2$$

$$E[Custos\ Totais] = \sum_{i=1}^{4} C\ \times P(X = i) = 30 \times P(X \leq 2) + 15 \times P(X > 2) =$$

$$= 30 \times (0{,}48 + 0{,}24) + 15\big(1 - P(X \leq 2)\big) = 25{,}8$$

$$E[N] = 67{,}2 - 25{,}8 = 41{,}4\ u.m$$

100

Variância de Uma Variável Discreta

❑ A variância de uma variável aleatória é uma medida de dispersão em torno do seu valor médio, sendo definida por:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\{(X-\mu)^2\} = \sum_{i=1}^{K} (x_i - \mu)^2 \, P(X = X_i)$$

❑ *Teorema de König*

- $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$
- $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$
- $E\{(X-\mu)^2\} = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$
  $= E(X^2) - \mu^2$, então

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)$$

Variância e desvio padrão de uma v.a. Discreta

Dada uma variável aleatória real discreta X com o contradomínio $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, a sua variância é dada por:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 P(X = x_i) - \mu_X^2$$

Teorema de $K\ddot{o}nig$

No caso de existir a variância da variável aleatória X,

X =

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$Var(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2$, sendo que , $E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i)$

$E(X)^2 = 0 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}25 = 1{,}5 \, , logo$

$Var(X) = 1{,}5 - 1^2 = 0{,}5$

102

Variância e desvio padrão de uma v.a. Discreta

Dada uma variável aleatória real discreta X com o contradomínio $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, a sua variância é dada por:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 P(X = x_i) - \mu_X^2$$

Teorema de K$o\ddot{n}ig$

No caso de existir a variância da variável aleatória X,

$Var(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2$, sendo que , $E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i)$

$E(X)^2 = 0 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}25 = 1{,}5$, $logo$

$Var(X) = 1{,}5 - 1^2 = 0{,}5$

103

Esperança Matemática ou Valor Esperado

Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,05	0,15	0,42	0,2	0,08	0,1

d) Calcule a variância dos livros vendidos por semana.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X^2)]$$

$$E(X^2) = 0 \times 0{,}05 + 1^2 \times 0{,}15 + 2^2 \times 0{,}42 + 3^2 \times 0{,}2 + 4^2 \times 0{,}08 + 5^2 \times 0{,}1 = 7{,}41$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X^2)] = 7{,}41 - 2{,}41^2 = 1{,}6$$

104

Esperança Matemática ou Valor Esperado

Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,05	0,15	0,42	0,2	0,08	0,1

e) Seja $Y = 3X^2 + X - 2$ o lucro da livraria em função dos livros vendidos. Qual o lucro esperado da livraria?

$$E(Y) = E(3X^2 + X - 2) = E(3X^2) + E(X) + E(-2) = 3 \times 7{,}41 + 2{,}41 - 2 = 22{,}64$$

Propriedades da Variância - Variável Aleatória Discreta

Dada uma variável aleatória real discreta X com o contradomínio $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- A variância de uma constante é zero : $Var(C) = 0$;
- Se $X = \alpha X + C$, Var $(X) = Var(\alpha X + C) = \alpha^2 Var(X)$;
- Sejam $X\ e\ Y\ duas\ variáveis\ aletórias$:

i. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$;

ii. $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2cov(X,Y)$;

iii. $Var(X+Y) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$se forem variáveis independentes;

iv. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias $i.i.d$, em que $V(X) = \sigma^2$. Então ,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

106

Modelos Discretos

- Modelar : É estabelecer uma aproximação à realidade . Tendo em conta a característica que se observa, é estabelecer um modelo probabilístico que caracteriza o comportamento dessa característica com o objectivo de estabelecer inferências.
- As variáveis aleatórias discretas resultam essencialmente de contagens. São apresentados os principais modelos de probabilidade utilizados quando estamos na presença de variáveis aleatórias discretas.

Modelo de Bernoulli

- O modelo de Bernoulli é dos modelos de probabilidade mais simples, uma vez que existem apenas duas possibilidades (0 ou 1), genericamente chamadas de **“ sucesso”** e **“ insucesso”**, em que 1 representa o “ sucesso” e 0 “ insucesso”.

$$X = \begin{cases} 1-p\,, k=0 \\ p\,, k=1 \end{cases}$$, sendo que , $P(X=K) = P^K\,(1-p)^{1-K}$

107

Distribuição de Bernoulli

- A função massa de probabilidade é dada por:

X	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	P

- $X \sim B_{er}(n = 1\,; P)$

- $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 1 \times P = P$
- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2 = P(1 - P)$

Exemplo : Foi levado a cabo um estudo por parte da seguradora " Seguríssima " sobre a satisfação dos seus clientes relativamente ao seguro que possuem actualmente (trata-se apenas da satisfação de um único seguro).

❖ A questão colocada é muito simples e possui apenas duas possibilidades de resposta :

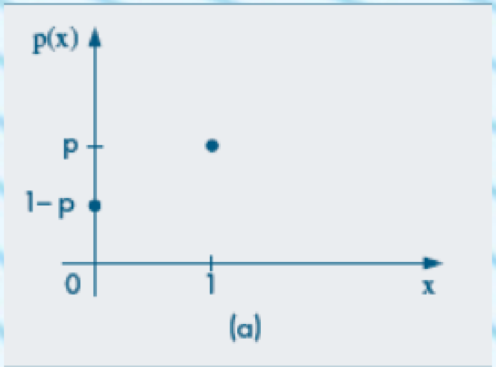
" Estou satisfeito" , " Não estou satisfeito". De anos anteriores, a seguradora sabe que a probabilidade de sucesso (" Estar satisfeito ") com o seguro em estudo é de 43%. Procedeu –se à selecção aleatória de um cliente e colocou-se a questão.

Distribuição de Bernoulli

- Seja X a variável aleatória que indica o grau de satisfação do cliente.

A função massa de probabilidade é definida por

X	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - 0{,}43$	$0{,}43$



$$X \sim B_{er}(P = 0{,}43)$$

- $E(X) = 0{,}43$
- $Var(X) = 0{,}43 \times (1 - 0{,}43) = 0{,}2451$

- **Nota : Os modelos de probabilidade têm particularidade de serem constituídos por parâmetros (desconhecidos) e que normalmente são estimados com recurso a uma amostra representativa da população.**
- **No caso do modelo de Bernoulli, este é constituído por um único parâmetro p**

109

Distribuição de Binomial

- Seja $X_i \sim B_{er} \underset{\substack{i=1,2,3,\dots,n \\ independentes}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B_{in}(n\,,p)$

Assim a variável $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Longrightarrow X \sim B_{in}(n\,,p)$, com função massa de probabilidade

$$X: \begin{cases} k & ,k = 0,1\,,\dots,n \\ \binom{n}{k} P^k (1-p)^{n-k} & \end{cases}$$

- $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n \times E(X_i) = n \times P$
- $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \times P(1-p)$
- $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} P(X=k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} P^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1}$
- $\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}}$

110

Distribuição de Binomial

- Seja $X_i \sim B_{er} \underset{independentes}{\overset{\Longrightarrow}{i=1,2,3,\dots,n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B_{in}(n\,,p)$

Assim a variável $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Longrightarrow X \sim B_{in}(n\,,p)$, com função massa de probabilidade

$$X: \begin{cases} k & , k = 0, 1\,, \dots, n \\ \binom{n}{k} P^k (1-p)^{n-k} & \end{cases}$$

- $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n \times E(X_i) = n \times P$
- $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \times P(1-p)$
- $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} P(X=k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} P^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1}$
- $\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}}$

Distribuição de Binomial

- Retomemos o exemplo abordado no modelo de Bernoulli.

Consideremos que foram seleccionados de forma aleatória 10 clientes. Para estes 10 clientes pretende-se saber quantos estão satisfeitos com o seguro.

Seja

$X\ a variável\ aleatória\ que\ representa\ o\ número\ de\ indivíduos\ satisfeitos, em\ 10.$

$$X \sim B_{in}(n = 10\ , p = 0{,}43)$$

$$X: \begin{cases} k & , k = 0, 1\ , \dots , n \\ \binom{10}{k} 0{,}43^{k}(1 - 0{,}43)^{n-k} & \end{cases}$$

- $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times (0{,}43)^{k} \times (1 - 0{,}43)^{n-k}$

Valor Esperado ou Esperança Matemática

Binomial:

- Um vendedor de carros durante a semana tem 5 carros para venda. Se ele vender até Dois carros não ganha qualquer comissão adicional ao seu salário ; porém se ele vender três ou mais carros, ganha uma comissão de 500.000 Kz por cada carro vendido. Tendo em conta o seu historial de vendas, a probabilidade de vender um carro é 60% . A venda dos carros diversos carros são independentes.

Determine o valor esperado, a variância e o desvio –padrão do prémio semanal a ser Recebido pelo vendedor.

Solução :

Seja $\boldsymbol{Y\ a\ v.a\ que\ representa\ o\ valor\ semanal\ a\ receber\ das\ vendas}.$

$$E(Y) = \mu_y = E(Y) = \sum_{I=1}^{5} y \times P(Y = y_i)$$

Valor Esperado ou Esperança Matemática

continuação :

- $P(de\ cada\ carro\ ser\ vendido) = 0{,}6$
- Acontecimentos independentes
- $P(X = k) = \ {}^{n}C_{k} \quad P^{k}(1 - P)^{n-k}$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times (0{,}6)^3 \times (0{,}4)^{5-3} = 0{,}3456$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times (0{,}6)^4 \times (0{,}4)^{5-4} = 0{,}2592$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times (0{,}6)^5 \times (0{,}4)^{5-5} = 0{,}0778$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{2} 0 \times P(Y = k) + \sum_{k=3}^{5} 500 \times k \times P(Y = k) = 1500 \times 0{,}3456 + 2000 \times 0{,}2592 +$$

$$+2500 \times 0{,}0778 = 1231{,}80Kz$$

114

Variância & Desvio - Padrão

Variância

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \times P(Y = y_i) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

- $E(Y^2) = 0 + 1500^2 \times 0{,}3456 + 2000^2 \times 0{,}2592 + 2500^2 \times 0{,}0778 = 2300650\ Kz$
- $Var(Y) = 2300650 - 1231{,}30^2 = 784550{,}31$
- $DP(Y) = \sqrt{784550{,}31} = 885.75\ Kz$

- Nota: o prémio do vendedor é variável.
- Se aceitarmos uma variação de $E(Y) \pm 2 \times DP$ é bem provável que possa ganhar desde zero até cerca de 3000.000 Kz com grande chance.

Distribuição Binomial

- O serviço de expedição de correio de certa agência bancária localizada em Luanda está encarregado de manter e actualizar uma extensa lista de moradas dos seus clientes. Devido à experiência dos acontecimentos passados, o serviço afirma que a probabilidade de uma informação da lista de endereço estar desactualizada, dando origem ao extravio de uma carta enviada é de 0,05.

i) Qual o número esperado de cartas extraviadas se for enviado 3 cartas num dia? Calcule o desvio padrão? interprete os resultados obtidos.

Resolução :

Seja Y $v.a. que\ respresenta\ o\ número\ de\ cartas\ extraviadas\ \ em\ 3\ enviadas$

$$Y \sim B_i(n = 3\ , P = 0{,}05)$$

116

Distribuição Binomial

Seja Y $v.a.\ que\ respresenta\ o\ número\ de\ cartas\ extraviadas\ \ em\ 50\ enviadas$

$$Y \sim B_i(n = 3\ , P = 0{,}05)$$

Função massa de probabilidade

Y	0	1	2	3
$P(Y = i)$	0,8574	0,1354	0,0071	0,0001

$$\sum_{i=0}^{4} P(Y = i) = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (0{,}05)^k (1 - 0{,}05)^{n-k} = 1$$

$$E[Y] = 0 + 1 \times 0{,}1354 + 2 \times 0{,}0071 + 3 \times 0{,}0001 = 0{,}1499 \approx 0{,}15$$

Ou $E[Y] = n \times p = 3 \times 0{,}05 = 0{,}15$

Variância : $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0{,}1354 + 4 \times 0{,}0071 + 9 \times 0{,}0001 - 0{,}15^2$

$$Var(Y) = 0{,}1422$$

Ou $Var(Y) = np(1 - p) = 0{,}15 \times (1 - 0{,}05) = 0{,}1425$

Distribuição Binomial

- $E[Y] = n \times p = 3 \times 0{,}05 = 0{,}15$

- $Var(Y) = np(1-p) = 0{,}15 \times (1 - 0{,}05) = 0{,}1425$

Em 3 cartas enviadas esperam-se que no máximo que uma seja extraviada com um desvio de extravio avariar no intervalo de 0 a 1 carta.

- Se fossem enviadas 100 cartas

Seja $Z\ a\ v.a.\ que\ representa\ o\ número\ de\ cartas\ extravidas\ em\ 100\ enviadas$

$$Z \sim B_i(n = 100\ , P = 0{,}05)$$

$$E[Z] = 100 \times 0{,}05 = 5 \quad , Var[Z] = 5 \times (1 - 0{,}05) = 4{,}75$$

Em 100 cartas enviadas esperam-se que 3 sejam extraviadas com o desvio a variar entre 4 a 5 cartas extraviadas.

Distribuição Binomial

Calcule a probabilidade de se extraviarem mais de 3 cartas num dia da semana em que o serviço do Banco tenha enviado 12 cartas pelo correio.

Seja Y $v.a.\,que\ respresenta\ o\ número\ de\ cartas\ extraviadas\ \ em\ 12\ \text{enviadas}$

$$Y \sim B_i(n = 12\,, P = 0{,}05)$$

$$P(X > 3) = P(X \leq 3) + P(X > 3) = 1 \Leftrightarrow P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - (0{,}5404 + 0{,}3413 + 0{,}0988 + 0{,}0173) = 0{,}0022$$

- ❑ Qual a probabilidade de apenas seis cartas chegarem ao seu destino se em dez enviadas, soubermos que pelo menos três delas tinham de certeza o destinatário incorrecto.

$$P[X = 10 - 6 = 4\ (se\ apenas\ 6\ chegam\ ao\ destino\ \text{é}\ porque\ 4\ se\ vão\ extraviar)]$$

$$P(X = 4|\, X \geq 3) = \frac{P(X = 4\,, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X = 4)}{1 - P(X < 3)} = \frac{0{,}0021}{1 - 0{,}9805} \approx 0{,}1077$$

119

Propriedades - Distribuição Binomial

- Na tabela encontram –se as probabilidades para alguns valores de $n(de\ 1\ a\ 20)\ e\ de\ P\ de\ (0{,}05 \leq P \leq\ 0{,}5)$.
- A relação $X \sim B_i(n\,;p) \Leftrightarrow (n - X) \sim B_i(n; 1 - P)$

Exemplo : Sabe-se que, com determinado tratamento administrado a pacientes em condições bem definidas, se alcança 70% de cura para certa doença. Se o tratamento for aplicado a 20 pacientes em tais condições, qual a probabilidade de :

i) Obter 15 curas no máximo ?

ii) Obter 12 ou mais curas?

iii) Obter um número de curas não inferior a 10 nem superior a 15 ?

Resolução :

Seja $X\ a\ v.a.que\ representa\ o\ número\ de\ pacientes\ curados\ em\ 20\ pacientes$

$$X \sim B_i(n = 20, p = 0.70)$$

Propriedades - Distribuição Binomial

Seja $X\ a\ v.a.\ que\ representa\ o\ número\ de\ pacientes\ curados\ em\ 20\ pacientes$

$$X \sim B_i(n = 20, p = 0.70) \Leftrightarrow Y = (20 - X) \sim B_i(20; P = 0,3)$$

i) $P(X \leq 15) = P(Y \geq 20 - X) = P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5)) = 1 - 0,2375 = 0,7625$

ii) $P(X \geq 12) = P(Y \leq 20 - X) = P(Y \leq 8) = 0,8867$

iii) $P(10 \leq X \leq 15) = P(20 - 15 \leq Y \leq 20 - 10) = P(5 \leq Y \leq 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 4) =$
$0,9829 - 0,2375 = 0,7454$

❖ Outra forma de resolução:

$$P(5 \leq Y \leq 10) = P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = 0,7454$$

121

Distribuição Hipergeométrica

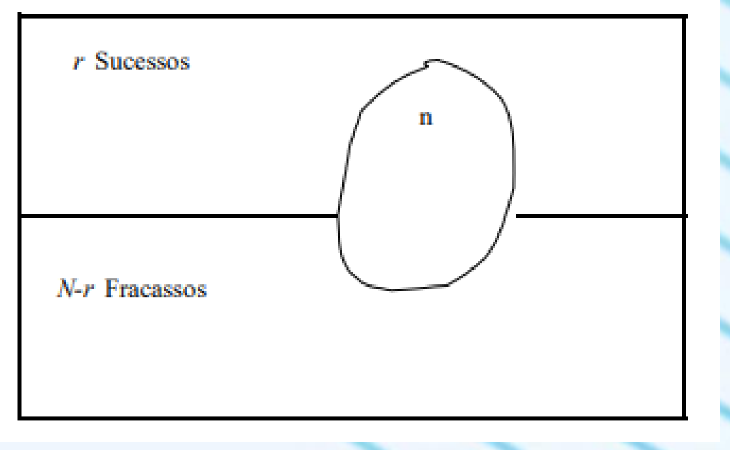
❑ Definição

$$X \sim hiper(N, r, n)$$

❑ Tais exercícios podem ser encaixados na seguinte situação: considere uma **população de tamanho N** (se for o caso de uma urna é a soam de todas as bolas) dividida em 2 classes (duas cores), uma **composta de r "sucessos"** e a **outra composta de $N-r$ "fracassos"**. Dessa população, vai –se extrair uma **amostra de tamanho n sem reposição**, o que, no caso de uma urna, equivale também retirar as n bolas simultaneamente.

❖ **Ilustração de uma experiência de uma v.a. Hipergeométrica**

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\{sucessos\} \times \binom{N-r}{n-k}\{insucessos\}}{\binom{N}{n}}$$



Distribuição Hipergeométrica

$$X \sim hiper(N, r, n)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \times \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, \dots, n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

- $E(X) = n \times \frac{r}{N}$, ***sendo que*** $\boldsymbol{p = \frac{r}{N}}$, *ou seja,* $E(X) = n \times p$
- $Var(X) = n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \mathrm{n} \times p(1-p) \times \frac{N-n}{N-1}$
- Em alternativa também se pode designar a distribuição com os seguintes parâmetros

$$X \sim hiper\ (N, n, p)$$

Distribuição Hipergeométrica

- Uma urna é composta por 3 bolas verdes e 5 bolas brancas. É retirada 2 bolas sem reposição. Seja X a v.a. que representa a saída de bolas verdes.

- Note que, apesar de estarmos observando sucessos e fracassos, os dados não são precisamente modelados pela distribuição binomial, porque a probabilidade de sucesso em cada triagem não é a mesma, já que o tamanho da população remanescente muda conforme removemos cada bola.

$N = 8\,, r = 3\ (\,total\ das\ bolas\ verdes), \mathrm{n} = 2\ (\,\text{nº de extracções}), \mathrm{k} = \text{nº de sucessos}$

$$X \sim hiper(N = 8\,; r = 3; n = 2)$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \times \binom{8-3}{2-0}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}\,, \quad \text{ou}\,, \qquad P(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{28}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{2-1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}\,, \quad \text{ou}\,, \quad P(X = 1) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{7}\right) = \frac{15}{28}$$

124

Distribuição Hipergeométrica

$N = 8\,, r = 3\ (\,total\ das\ bolas\ verdes), \mathrm{n} = 2\ (\ \mathrm{nº\ de\ extracções}), \mathrm{k} = \mathrm{nº\ de\ sucessos}$

$X \sim hiper(N = 8\,; r = 3; n = 2)$

$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\times\binom{5}{2-2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$, ou , $P(X = 1) = \left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\right) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

Função massa de probabilidade

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

125

Distribuição Hipergeométrica

Suponha-se que num a situação de emergência um serviço de saúde contacta 30 dadores de sangue de tipo O, dos quais 18 são Rh^{+} o 12 são Rh^{-} . Qual é a probabilidade de entre os 6 primeiros que se apresentam 2 serem Rh^{-}?

Resolução

$N = 30$

$r = 12\ (\ sucessos)$

$N - r = 30 - 12 = 18\ (\ inscessos)$

$n = 6\ (\ 6\ primeiros\ que\ se\ apresentam)$

$X \sim hiper\ (N = 30, r = 12, n = 6)$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{18}{6-2=4}}{\binom{30}{6}}$$

126

- Um armazém tem armazenado 2000 caixas de leite. Das 2000 caixas, sabe-se que 120 delas estão deterioradas e não podem ser vendidas. Para inspecção foram seleccionadas aleatoriamente 300 caixas .

Seja X v.a. que representa o nº de caixas deterioradas num total de 2000 caixas em 300 seleccionadas.

Calcule :

i. Valor esperado das caixas deterioradas em 300 caixas seleccionadas aleatoriamente.

ii. Valor do desvio – padrão das caixas deterioradas em 300 caixas seleccionadas aleatoriamente.

❖ Resolução:

i. $E(X) = n \times \left(\frac{r}{N}\right) = 300 \times \left(\frac{120}{2000}\right) = 18$

Ou seja, num total de 2000 caixas armazenadas das quais 300 seleccionadas sabendo que existem 120 deterioradas, espera-se que 18 estejam entre as seleccionadas.

- Um armazém tem armazenado 2000 caixas de leite. Das 2000 caixas, sabe-se que 120 delas estão deterioradas e não podem ser vendidas. Para inspecção foram seleccionadas aleatoriamente 300 caixas .

Seja X v.a. que representa o nº de caixas deterioradas num total de 2000 caixas em 300 seleccionadas.

i.i. Valor do desvio – padrão das caixas deterioradas em 300 caixas seleccionadas aleatoriamente.

$$Var(X) = \frac{n \times r}{N} \times \left(\frac{N-r}{N}\right) \times \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 300 \times \left(\frac{120}{2000}\right) \times \left(\frac{1880}{2000}\right) \times \left(\frac{1700}{1999}\right) \approx 14{,}389$$

$$dp_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{14{,}389} \approx 3{,}793 \approx 4$$

Ou seja, num total de 2000 caixas armazenadas das quais 300 seleccionadas sabendo que existem 120 deterioradas, espera-se que 18 estejam entre as seleccionadas com um desvio de 4 caixas aproximadamente .

Distribuição Hipergeométrica

Num município em que estão inscritos $N = 400$ eleitores fez-se um inquérito a uma amostra de 20 eleitores escolhidos ao acaso sem reposição. Dos 20 eleitores consultados , 17 manifestaram-se a favor do projecto apresentado no inquérito e 3 manifestaram-se contra. Pode-se concluir que a maioria dos eleitores aprova o projecto ?

Resolução :

- Para responder a esta pergunta pode pensar –se do seguinte modo : se a maioria é contra o projecto, isto é, $r \geq 200\ eleitores\ \ contra$. Assim sendo, a probabilidade de obter 3 votos ou menos contra o projecto considerado é :

$$Seja\ X\ v.a. que\ representa\ o\ número\ de\ obter\ 3\ votos\ contra\ \ ou\ menos\ em\ n = 20$$

$$X \sim Hiper\ (N = 400, r = 200, n = 20)$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \left[\frac{\binom{200}{x} \times \binom{200}{20-x}}{\binom{400}{200}} \right] = 0{,}01$$

- Como esta probabilidade é muito pequena (e, ainda, é menor para valores de $r > 200$), não é razoável a ideia de que a maioria é contra o projecto.
- De facto, a ser verdadeira tal hipótese, tinha –se verificado a ocorrência de um acontecimento muito improvável.

Captura / Recaptura - Distribuição Hipergeométrica

- Para avaliar a dimensão de uma população usa –se muitas vezes o método de captura – - recaptura , admitindo que a probabilidade de captura de um individuo da população da população é um valor p fixo.
- Suponha-se então que se pretende estimar N, a dimensão de população, e que para o efeito se capturam r animais , que são marcados.
- Isto divide a população em duas classes , marcados e não marcados, com efectivos r e $N-r$, respectivamente.
- Os animais marcados são libertados, e passado algum procede-se a uma segunda captura (recaptura), de n indivíduos, e conta-se o número de sucessos (marcados) y que existem nesta amostra.

Então y é o valor observado de uma variável $Y \sim hiper\ (N\ ; n\ , P = \frac{r}{N})$

Então y é o valor observado de uma variável $Y \sim hiper\ (N\ ; n\ , P = \frac{r}{N})$

$y = n \times \left(\frac{r}{N}\right) \Longrightarrow N\ pode\ ser\ estimado\ por\ \widehat{N} = \frac{n \times r}{y}$ (estimador de Petersen)

- Por exemplo, se numa primeira fase marcamos $r = 26\ indivíduos$, e se numa segunda fase capturáramos$n = 20\ indivíduos, dos\ quais\ y = 8\ que\ estão\ marcados$, estimação da população desta espécie é :

$$\widehat{N} = \frac{20 \times 26}{8} = 65$$

Distribuição De POISSON (Siméon Denis Poisson em 1838)

- Considere as seguintes variáveis definidas por uma contagem de certos tipos de acontecimentos em um dado intervalo :
- - número de carros que passam por um cruzamento por minuto;
- - número de multas por veículo;
- - número de buracos por m^2 de uma estrada ;
- - número de bactérias por litro de leite;
- - número de partículas radioactivas por segundo.

❖ Em que X é $v.a. que\ representa\ \ o\ nº\ de\ sucessos$.

❖ $\lambda\ \ é\ o\ nº o\ médio\ de\ sucessos\ num\ dado\ intervalo\ \ , E(X) = Var(X) = \lambda\ \times t$

$$X \sim P(\lambda)$$

❖ A função de probabilidade : $\mathrm{P(X = x)} = \dfrac{\mathrm{e^{-\lambda}\lambda^{x}}}{\mathrm{x!}}$, $\qquad e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^x}{x!}$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1$$

Uma loja recebe em média 6 clientes por hora, qual a probabilidade de receber pelo menos 3 clientes em 25 minutos?

Seja $X\ v.a.\, que\ representa\ o\ número\ de\ chegada\ de\ clientes\ por\ hora$

$$X \sim P(\lambda = 6\,t), \qquad t = tempo\ em\ hora$$

$X \sim P(\lambda = 6)$

- Como queremos calcular a probabilidade de receber pelo menos 3 clientes em 25 minutos,

logo $\lambda = 6 \times \left(\frac{25}{60}\right) = 2{,}5$

$$X \sim P(\lambda = 2{,}5)$$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}082085 + 0{,}2052125 + 0{,}2565156) \approx 0{,}456187$

134

Suponha que a probabilidade de uma companhia de seguros pagar um seguro em dado período de 6 (seis) meses relativo a roubo de carro é de 0,0003.

Calcule a probabilidade de que, 15000 seguros contra roubo de carro, a companhia pague, no máximo, 7 seguros durante o ano.

Resolução :

Seja $X\ v.a. que\ representa\ o\ número\ de\ seguros\ durante\ o\ ano$

$E[X] = \lambda \times t = 0{,}0003 \times 15000 \times 2\ (\ um\ ano\ tem\ \ 2 \times 6\ meses) = 9$

$X \sim P(\lambda \times t = 9)$

$P(X \leq 7) = 0{,}0001 + 0{,}0011 + 0{,}0050 + 0{,}0150 + 0{,}0337 + 0{,}0607 + 0{,}0911 + 0{,}1171 = 0{,}3238$

135

- Numa fábrica de têxteis existem numerosos teares do mesmo tipo. Depois de muitas observações, chegou-se à conclusão de que o número de teares avariados segue um processo de Poisson com taxa média de 3 por mês.

  Seja X a $v.a.$ Que representa o número de teares por mês, tem-se

$$X \sim P(\lambda = 3)$$

i. A probabilidade para que durante um mês se avariem sete ou mais teares .

$$P(X \geq 7) = \sum_{x=7}^{+\infty} \frac{e^{-3}3^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-3}3^x}{x!} = 1 - 0{,}9665 = 0{,}0335$$

ii. Para determinar a capacidade mensal mínima disponível, C , da oficina de reparação de modo a ser pelo menos 0,9 a probabilidade de não haver teares a aguardar reparação.

- **Observação : C é o menor dos inteiros a verificar a condição.**

$$\boldsymbol{P(X \leq C) = \sum_{x=0}^{C} \frac{e^{-3}3^x}{x!} \geq 0,9 = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = c) \geq 0,9}$$

Consultando a tabela cumulativa: $\boldsymbol{P(X \leq C) = 0,9161 > 0,9, ou\ C = 5\ capacidade}$ desejada.

136

Distribuição - POISSON

O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As actuais instalações podem atender, no máximo, a três petroleiros por dia. Se mais três aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

i. Em um dia, qual a probabilidade de ser enviar petroleiros a outro porto?

Seja $X\ v.a.$ Que representa o número de petroleiros que aportam por dia.

$$X \sim P(\lambda = 2)$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}8571 = 0{,}1429$$

ii. De quanto deverão ser aumentadas as instalações para atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

$$P(X \leq C) \geq 0{,}95 = P(X = 0) + \cdots + P(X = 5) \geq 0{,}05 \Leftrightarrow P(X \leq C = 5) = 0{,}9834 \geq 0.095$$

Logo , as instalações deverão ser aumentas no mínimo a suportarem mais 5 navios.

137

Diferenças

Experiência : lançamento de um papel amachucado para um cesto de papéis a uma distância de 4 metros. A probabilidade de acertar é de 40%.

Qual é a probabilidade de em 10 lançamentos acertar 6 vezes ?

- **Distribuição Binomial : dá – nós a probabilidade do número de sucessos obtidos em n realizações independentes de uma experiência.**

- **Resolução:**

Seja X: « a v.a que representa o número de sucessos em 10 lançamentos»

$$X \sim B_i(n\,,p) = B_i(10\ ;\ 0{,}4)$$

Seja A: « $acetar\ no\ cesto\ de\ p\boldsymbol{apeis}$»

$$A\ \bar{A}\ \bar{A}\ A\ A\ \bar{A}\ A\ A\ \bar{A}\ A\quad ou\quad A\ A\ A\ A\ \bar{A}\ A\ A\ \bar{A}\ \bar{A}\ \bar{A} \Longrightarrow \binom{10}{6}$$

$$P(X = 6) = 0{,}4^6 \times 0{,}6^{0{,}4} \times {}^{10}C_6$$

Diferenças

Experiência : lançamento de um papel amachucado para um cesto de papéis a uma distância de 4 metros. A probabilidade de acertar é de 40%.

Qual é a probabilidade de necessitarmos de mandar o papel ao cesto 10 vezes para acertar 6 vezes?

- **Distribuição Binomial Negativa : dá – nós a probabilidade de necessitarmos de n realizações experiência independentes para obter K sucessos**

- **Resolução:**

Seja X: « a v.a que representa o número de experiências necessárias para acertar 6 vezes»

$X \sim BN(r\ ,p) = BN(6\ \ ,0{,}4)$. $\boldsymbol{r}$ é $\boldsymbol{o\ n\acute{u}mero\ de\ sucessos\ pretendido}$.

Seja A: « $acetar\ no\ cesto\ de\ p\boldsymbol{apeis}$»

$$A\ \ \bar{A}\ \ \bar{A}\ \ A\ \ A\ \bar{A}\ \ A\ \ A\ \ \bar{A}\ \ \ \boldsymbol{A}$$

Diferenças

Seja X: « a v.a que representa o número de experiências necessárias para acertar 6 vezes»

$X \sim BN(r, p) = BN(6, 0{,}4)$. $\boldsymbol{r}$ é **o número de sucessos pretendido.**

Seja A: « $acetar\ no\ cesto\ de\ p\boldsymbol{apeis}$»

$$A\ \bar{A}\ \bar{A}\ A\ A\ \bar{A}\ A\ A\ \bar{A}\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}\ \text{é}\ fixo\ e\ os\ restantes\ A\ \text{são}\ aleatórios$$

$$P(X = 10) = 0{,}4^6 \times 0{,}6^4 \times {}^{10-1}C_5$$

140

Diferenças

- **Distribuição Hipergeométrica : não existem experiências independentes.**

Exemplo : num grupo com 10 homens e 15 mulheres, qual é a probabilidade de escolher

Uma comissão de 5 pessoas que inclua 2 mulheres e 3 homens?

$$\boldsymbol{P} = \frac{{}^{15}C_{\mathbf{2}} \times {}^{10}C_{\mathbf{3}}}{{}^{25}C_{\mathbf{5}}}$$

Seja X: « a v.a que representa o número de experiências necessárias para acertar 6 vezes

141

Diferenças

142

Considere a seguinte função densidade de probabilidade da variável aleatória X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+k}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante k.

Teoria : a função de densidade de probabilidade é dada por : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^2 \frac{x+k}{2}\ dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 (x+k)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}[x^2]_0^2 + \frac{1}{2}k\ [x]_0^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

b) Defina a função de distribuição da variável aleatória X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & se\ \ x \in [0\,,2] \\ 0\ se\ x \notin\ ]0\,,2[\end{cases}$$

$$Por\ definição:\ \ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$$

b) Defina a função de distribuição da variável aleatória X.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \ \ se \ \ x \in [0\,,2] \\ \\ 0 \; se \; x \notin \ ]0\,,2[\end{cases}$$

$$Por\ definição: \ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$$

Se $x \ \in \ [0\,, \ 2]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0 \ dx + \int_{0}^{x} f_x(u)du = \int_{0}^{x} \frac{u}{2} \ du = \frac{1}{4}[u^2]_0^2 = \frac{u^2}{4}$$

Se $x > 2$

$$\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \ dx + \int_{0}^{2} f_x(x) \ dx + \int_{2}^{x} 0 \ du = \int_{0}^{2} f_x(x)dx = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \ \ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & se \ \ 0 \le x \le 2 \\ 1 & se \ \ x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \quad se \quad x \in [0\,,2] \\ \\ 0 \; se \; x \notin \;]0\,,2[\end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & se \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & se \quad x > 2 \end{cases}$$

c) Determine:

i. $P(X > 1{,}5) = 1 - P(X \leq 1{,}5) = 1 - (0{,}25 \times 1{,}5^2) = 0{,}4375 \; ou \quad \int_{1,5}^{2} f(x)\,dx$

ii. $P(X = 0{,}752) = 0$,

❖ **porque há uma infinidade de valores arredondados dá o mesmo valor .**

❖ $\boldsymbol{P(X = 1,78) = P(X = 1,77) = \cdots P(X = 1,7777) = 0,}$ **só é** $\boldsymbol{válido\ nas\ continuas}$

iii. $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = F_X(1{,}5) - F_X(0{,}5) = 0{,}25(1{,}5^2 - 0{,}5^2) = 0{,}5 \; ou \; \int_{0,5}^{1,5} f(x)dx$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \quad se \;\; x \in [0\,,2] \\ \\ 0 \; se \; x \notin \;]0\,,2[\end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & se \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & se \quad x > 2 \end{cases}$$

d) Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória X.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x) dx = \int_0^2 x \times \frac{x}{2}\, dx = \frac{4}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Sendo que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^2 x^2 \times \frac{x}{2} dx = 2$$

$$Var(X) = 2 - \frac{4}{3}^2 = \frac{2}{9}$$

146

- Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal $N(60\,;5)$, em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição.
- Retira-se, ao acaso, uma dessas maças.
- Considere os acontecimentos:

$$A\text{: « } o\ peso\ da\ maçã\ retirada\ \text{é}\ superior\ a\ 66\ gramas\text{»}$$

$$B\text{: « } o\ peso\ da\ maçã\ retirada\ \text{é}\ inferior\ a\ 48\ gramas\text{»}$$

- Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(B) < P(A)$ (C) $P(A) < P(B)$

(D) $P(A) + P(B) = 1$

Distribuição Normal

- Uma fábrica de camisas pretende fabricar camisas para homens cujo o perímetro do pescoço é uma v.a. normal de média 39 cm e variância de 1,21 cm^2. Analise, se faz mais sentido, fabricar mais camisas com o colarinho entre 37 e 38 cm de perímetro ou camisas com o colarinho entre 39 e 40.

- Resolução :

Seja X $v.a.$ que representa a produção de camisas para homens com o respectivo perímetro de colarinho a serem fabricadas

$$X \sim N(\mu = 39\,;\, \sigma^2 = 1{,}21) \Longrightarrow Z = \frac{X - 39}{\sqrt{1{,}21}} \cap N(0\,;1)$$

$$P(37 \le X \le 38) = P\left(\frac{37-39}{\sqrt{1{,}21}} \le Z \le \frac{38-39}{\sqrt{1{,}21}}\right) = P(-\,1{,}818 \le Z \le -0{,}909) =$$

$$= \Phi(-0{,}909) - \phi(-1{,}818) = 1 - \phi(0{,}91) - [1 - \phi(1{,}82)] = -0{,}8186 - 0{,}9656 =$$

$$= 0{,}1470$$

Distribuição Normal

Seja X $v.a.$ que representa a produção de camisas para homens com o respectivo perímetro de colarinho a serem fabricadas

$$X \sim N(\mu = 39\,;\, \sigma^2 = 1{,}21) \Rightarrow Z = \frac{X - 39}{\sqrt{1{,}21}} \cap N(0\,;1)$$

$$P(39 \leq X \leq 40) = P\left(\frac{39 - 39}{\sqrt{1{,}21}} \leq Z \leq \frac{40 - 39}{\sqrt{1{,}21}}\right) = P(0 \leq Z \leq -0{,}909) =$$

$$= \Phi(0{,}909) - \phi(0) = 0{,}8186 - 0{,}5 = 0{,}3186$$

$n = 1000\ pessoas$

- $n \times P(37 \leq X \leq 38) = 1000 \times 0{,}147 = 147$
- $n \times P(39 \leq X \leq 40) = 1000 \times 0{,}3186 = 319$

❖ Numa dimensão de 1000 pessoas escolhidas aleatoriamente , espera-se encontrar 147 com um perímetro entre 37 e 38 cm e 319 com um perímetro compreendido entre 39 e 40 cm.

Admita que $v.a.$,X, representa a altura de um homem escolhido ao acaso com distribuição normal de média 165 cm e variância 25 cm^2. Pretende-se determinar a percentagem inferior ou igual a 85% da altura dos homens na população.

❖ Resolução

Seja X $v.a.$ que representa a altura de um homem escolhido ao acaso

$$X \sim N(\mu = 165\,;\, \sigma^2 = 25) \Longrightarrow Z = \frac{X-165}{\sqrt{25}} \cap N(0\,;1)$$

$Seja\ x$ o valor da altura dos homens a calcular

$$P(X \leq x) \leq 0{,}85 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x-165}{5}\right) \leq 0{,}85 \Leftrightarrow \frac{x-165}{5} \leq \phi^{-1}(0{,}85) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-165}{5} \leq 1{,}04 \Leftrightarrow x \leq 1{,}04 \times 5 + 165 = 170{,}2$$

$$\phi^{-1}(0{,}85) = 1{,}04$$

Ou seja, até 85% da população dos homens têm uma altura 170,2 cm

Distribuição Normal

Um restaurante tem um lucro médio diário de $1600 \times 10^2 kz$ com uma variância $360000 \times 10^4 kz^2$. A sua despesa mensal é de $24000 \times 10^2 kz$.

Se o restaurante está 25 dias por mês aberto, qual é a probabilidade do seu lucro mensal seja pelo menos $14000 \times 10^2 kz$.

- Resolução
- Admitindo que n é suficiente grande para aplicar o T.L.C

Seja X $v.a.$ que representa a receita diária

$$X \sim N(\mu = 1600 \times 10^2\ ;\ \sigma^2 = 360000 \times 10^4)$$

- **Pretende –se saber o lucro mensal que seja pelo menos $\boldsymbol{L \geq 14000 \times 10^2}$**

- $Seja\ L\ o\ lucro\ mensal\ , L = receita\ mensal\ - despesa\ mensal$

$L = r - d \geq 14000 \Leftrightarrow L = r - 24000 \geq 14000 \Leftrightarrow L = r \geq 38000$

- $P\left(\sum_{i=1}^{25} r_i \geq 38000\right) = ?$
- $\sum_{i=1}^{25} r_i = receita\ mensal\ para\ os\ 25\ dias$

Distribuição Normal

$$X \sim N(\mu = 1600 \times 10^2\, ;\, \sigma^2 = 360000 \times 10^4)$$

$$\sum_{i=1}^{25} r_i \sim N(\mu = 25 \times 1600\, ;\, \sigma^2 = 25 \times 360000) \Rightarrow Z = \frac{\sum_{i=1}^{25} r_i - 40000}{\sqrt{9000000}} \cap N(0\,;1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} r_i \geq 38000\right) = P\left(Z \geq \frac{38000 - 40000}{\sqrt{9000000}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{-2000}{3000}\right) = 1 - \phi(-0{,}67) =$$

$$= 1 - [1 - \phi(0{,}67)] = \phi(0{,}67) = 0{,}7486$$

- Alternativa
- $P(Z \geq -0{,}67) = P(Z < 0{,}67) = \phi(0{,}67) = 0{,}7486$
- A probabilidade de o lucro mensal ser maior ou igual a $14000 \times 10^2 kz$ é de 74,86%.

A padaria " Pão Quente " tem 3 lojas (A , B e C), sendo o volume de vendas mensal (em milhares de euros) de cada loja uma variável aleatória com

$$X_A \sim N(9\,,2) \quad ; \; X_B \sim N(12\;\,,3) \; e \; X_c \sim N(10\,,2)$$

Calcule a probabilidade de , um mês, o volume de vendas da padaria ser superior a 30 milhares de euros (assuma a independência entre as variáveis).

Academia Aberta

Nota : Em alguns casos , é muito complicado fazer cálculo exacto.

- Um armazém tem armazenado 2000 caixas de leite. Das 2000 caixas, sabe-se que 120 delas estão deterioradas e não podem ser vendidas. Para inspecção foram seleccionadas aleatoriamente 300 caixas para saber a probabilidade de pelo menos 30 caixas estejam em condições para venda.

- Condições de aplicação : $n \times \left(\frac{r}{N}\right) > 15 \quad e \quad n \times \left(1 - \frac{r}{N}\right) > 15$

❖ Resolução

$$P(X \geq 30) = P(X = 30) + P(X = 31) + \cdots + P(X = 300)$$

- Aproximação à normal

$$X \sim N(E[X] = 18 \, , Var[X] = 14{,}4) \Longrightarrow Z = \frac{X - 18}{\sqrt{14{,}4}} \sim N(0 \, , 1\,)$$

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30) \approx 1 - P\left(Z < \frac{30 - 18}{\sqrt{14{,}4}}\right) = 1 - \Phi(3{,}16) = 1 - 0{,}9989$$

$$= 0{,}0011$$

Teorema do Limite Central

Teorema do Limite Central : Seja X_1 , $X_2, \ldots, X_n$, uma $a.a.$ De dimensão $n \longrightarrow +\infty$, e $n <$

$(+\infty)$ com $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

tem-se o seguinte :

❖ $E(S_n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$

❖ $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$

$$\frac{S_n = \sum_{i=1}^{ni} X_i - E(X_i)}{\sqrt{Var(X)}} \sim N(0\,;1)$$

- Corolário : (Teorema de Moivre – Laplace) : Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$, uma $a.a.$ de dimensão n , com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$ para $i = 1,2,\dots,n$. Considere –se o seguinte :

$$n \longrightarrow +\infty \quad \wedge \quad n < +\infty \,, \qquad \bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{n} \,, tem - se$$

- $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$

- $Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\frac{\bar{X} - E(X)}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0\,;1)$$

Teorema do Limite Central

Um fabricante de computadores compra chips a um fornecedor que os disponibiliza em lotes de 1000 unidades. O controlo de qualidade examina ao acaso e com reposição alguns chips de cada lote seleccionado.

i. Admita que, para avaliar a qualidade de um lote, o fabricante examina 10 chips e rejeita esse lote se for encontrado pelo menos um chip defeituoso entre os chips examinados.

Qual é probabilidade de um lote contendo 5 chips defeituosos de não ser rejeitado.

Resolução :

Seja $X\ v.a.$ Que representa o nº de chips defeituosos em 10 examinados.

$$\mathrm{X} \sim B_i\left(n = 10\,, P = \frac{5}{100}\right)$$

$$P(lote\ não\ ser\ rejeitado) = P(X < 1) = P(X = 0) \approx 0{,}5987 \approx 0{,}60$$

Teorema do Limite Central

i.i. Admita que a proporção de chips defeituosos produzidos pelo fornecedor é 0,05. Sabendo que o fornecedor vendeu 36 lotes de 100 chips, calcule a probabilidade aproximada de nº médio de chips, defeituosos por lote (no conjunto de 36 lotes vendidos) se quanto muito um

Resolução :

Seja X_i que representa o nº de chips defeituosos por lote

- ❖ $X_i \sim B_i(n = 100\ ;\ P = 0{,}05)$
- ❖ $\sum_{i=1}^{36} X_i \sim B_i\ (n = 36 \times 100\ \ ; p = 0{,}05)$
- ❖ $E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = 36 \times 100 \times 0{,}05 = 1800$
- ❖ $Var\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = 1800 \times 0{,}95 = 1710$

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i < 5\right) = P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i \leq 4\right) \cong \phi\left(\frac{4 - 1800}{\sqrt{1710}}\right)$$