TD 7 : Théorie de la couche limite - Solution de Blasius

On s'intéresse à la formation de la couche limite au voisinage d'une plaque plane dans un écoulement uniforme à l'infini sans incidence. La vitesse et la pression asymptotiques sont $U_\infty \underline{e}_x$ et p_∞. Le fluide est visqueux newtonien incompressible. La plaque est représentée géométriquement par un segment limité à gauche par l'origine O du système de coordonnées inclus dans l'axe Ox.

La méthode de résolution détaillée dans la suite est légèrement différente de celle présentée à la section 9.7.4 du livre que l'on pourra également étudier avec profit.

La première étape dans la construction de la solution dans la couche limite est la détermination de l'écoulement extérieur (où les effets de la viscosité sont négligés).

1. Les informations requises sont la pression $p^e(x)$ et la vitesse $\underline{U}^e(x)$. Que valent-elles dans le cas de la plaque plane sans incidence ?

On cherche à analyser la structure de la couche limite à l'abscisse x. Celle-ci fournit par construction la jauge (dimensionnelle) pour les variations des champs dans le sens de l'écoulement.

2. Donner l'expression de la jauge $\delta(x)$ permettant d'étudier les variations des champs dans le sens perpendiculaire à l'écoulement.
3. Rappeler les équations de Prandtl en considérant les hypothèses de travail.

Etant donné que $\delta(x)$ est la jauge pour les variations spatiales transversales, il est naturel de chercher à normaliser la dépendance des champs en y en considérant la variable adimensionnée $\tilde{y} = y/\delta(x)$. On va aller plus loin en cherchant à construire la solution des équations de Prandtl à partir de l'hypothèse que la dépendance en x et y de $u_x(x, y)$ est contrôlée par le rapport $\eta = y/\delta(x)$ [1] :

$$u_x(x, y) = U_\infty \, f(\eta)$$

4. Exprimer la dérivée $\partial u_x/\partial x$ en fonction de $\delta(x)$, $\delta'(x)$ et $f'(\eta)$.
5. Montrer que la solution $u_y(x, y)$ n'est pas auto-semblable. On pourra utiliser l'équation de continuité (première équation de Prandtl) et la condition d'adhérence. On donnera l'expression de u_y en fonction de $\delta(x)$, $\delta'(x)$ et de la primitive de $f(\eta)$, notée $g(\eta)$ et vérifiant $g(0) = 0$.

La deuxième équation de Prandtl exprime la projection parallèlement à l'écoulement de l'équation de la dynamique. D'après le cours, elle se met sous la forme ($p_e(x) = p_\infty$ (uniforme) :

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

On montre, sans peine, que l'on a (exercice !) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\delta(x)} g''(\eta) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\delta^2(x)} g^{(3)}(\eta) \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = -U_\infty \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \eta g''(\eta)$$

6. Établir l'équation différentielle ordinaire à vérifier par $g(\eta)$. Ce résultat constitue l'équation de Blasius.

1. On dit que la solution est auto-semblable.

7. Etant donné l'ordre de l'équation différentielle établie à la question précédente, indiquer le nombre de conditions aux limites attendues. Préciser les arguments physiques permettant de les établir et la forme de celles-ci.

La résolution de l'équation de Blasius est numérique. Elle est représentée sur la figure 1. Le respect de la condition asymptotique fixe la pente initiale $f'(0) = g''(0) = 0.332$.

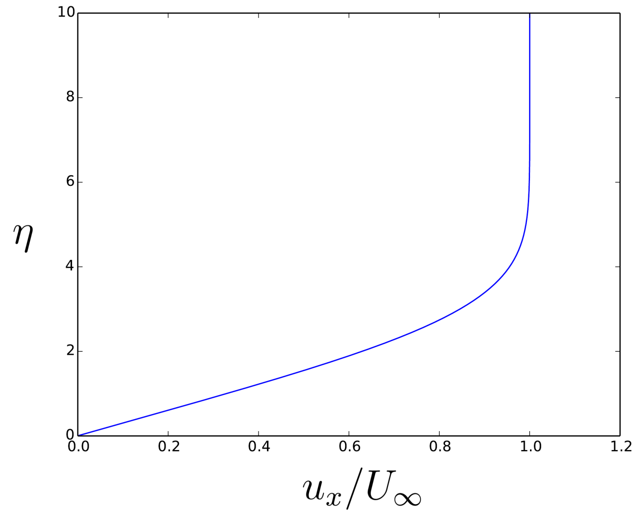

FIGURE 1 – Profil de la vitesse d'auto-similitude de Blasius

On s'intéresse à présent au calcul de la traînée de couche limite.

8. Après avoir fait l'inventaire des grandeurs géométriques et physiques du problème, identifier la structure de la force de trainée par application du théorème de Vaschy-Buckingham.
9. Déterminer la contrainte tangentielle exercée par l'écoulement sur l'extrados.
10. En déduire l'expression de la force linéique de traînée due à la couche limite pour une plaque de largeur ℓ.
11. Comparer les applications numériques pour l'air et l'eau.
12. Application : Calculer et commenter la force de trainée sur les ailes d'un Airbus A320 avec les données suivantes :
    † surface alaire 120 m^2,
    † envergure 35m,
    † diamètre du fuselage 4m,
    † longueur 40m, † vitesse de croisière 840 km.h^{-1},
    † poussée des moteurs 300 kN,
    † viscosité dynamique de l'air à 3000m 2.5 10^{-5} Pa.s,
    † masse volumique $\rho = 0.4$kg.m^{-3}.