IMPRESSO NO BRASIL/PRINTED IN BRAZIL

CAPA/ ag artegrafica ltda.

Tiragem desta edição: 5.000 exemplares

1ª Edição — 1972
1ª Reimpressão — 1973

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte do Sindicato Nacional dos Editores de Livros, GB)

S237

Santos, Nathan Moreira dos, 1931-
Vetores e matrizes. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1972.
p. ilust.

Bibliografia.

"Publicado anteriormente pelo IMPA em sua Coleção/Elementos de Matemática."

1. Álgebra linear. 2. Cálculo vetorial. 3. Matrizes. I. Título.

CDD-512.897

72-0043

Índices para catálogo sistemático

1. Matrizes: Álgebra linear 512.896
2. Vetores: Álgebra linear 512.895
3. Cálculo vetorial: Álgebra linear 512.895
4. Álgebra linear 512.897
5. Álgebra 512

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITÔRA LTDA.
Av. Pres. Vargas, 962 — 6.º andar — ZC-58 — C.P. 3.655
Rio de Janeiro — GB

Maria de Fátima Ribeiro Co. 1973

Prefácio

Êste livro é o texto utilizado no curso de Álgebra Linear 1 da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Seu material é lecionado durante o primeiro semestre do primeiro ano a estudantes de engenharia, física, matemática, química e economia. Seu conteúdo é também bastante adequado a estudantes de psicologia. Os dois primeiros capítulos destinam-se essencialmente aos estudantes do último ano do curso secundário, principalmente àqueles que desejam cursar engenharia, física, matemática ou química.

Nosso objetivo é uma introdução à álgebra linear. Isso é alcançado através do estudo dos vetores, da geometria analítica, das matrizes e dos sistemas de equações lineares. O sucesso alcançado pelo curso de Álgebra Linear 1 e o apoio e encorajamento que obtive de meus colegas levaram à redação e publicação do presente texto. Em verdade, êsse trabalho é fruto da experiência obtida pelo Departamento de Matemática de nossa Universidade durante os cinco anos em que êsse curso vem sendo lecionado.

O Cap. 1 introduz os vetores como classes de equivalência de segmentos orientados e estuda as operações sôbre os vetores; algumas propriedades das figuras planas são demonstradas por meio de vetores. O Cap. 2 utiliza os vetores no estudo das retas e dos planos do espaço. As cônicas e quádricas são introduzidas no Cap. 3. No Cap. 4 introduzimos os espaços euclidianos, os quais são utilizados no Cap. 5, quando estudamos as matrizes e os sistemas de equações lineares.

Os exercícios são parte essencial do texto. Êles variam desde simples verificação de aprendizagem até alguns mais difíceis, cujo objetivo é desenvolver a iniciativa dos estudantes. Alguns exercícios estendem o texto, apresentando resultados importantes cujo conhecimento é, às vêzes, exigido nas seções seguintes.

Desejamos agradecer ao Prof. Aristides C. Barreto pela leitura do texto e pelas valiosas sugestões. Nossa gratidão também ao Prof. Elon Lages Lima por nos haver encorajado a redigir êste livro e sugerido a publicação de sua primeira edição entre as monografias do IMPA.

Rio de Janeiro, GB, Abril de 1972

Nathan Moreira dos Santos

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do
Rio de Janeiro

Conteúdo

Vetores

Capítulo 1

§ 1.1 – *Preliminares*

Vamos começar recordando as noções da geometria do espaço que serão utilizadas para definir vetor. Outros fatos geométricos serão mencionados quando houver necessidade. Esperamos que o leitor esteja razoàvelmente familiarizado com os conceitos básicos da geometria elementar.

Ponto, reta e *plano* são conceitos primitivos. As relações entre êsses conceitos são estabelecidas pelos *axiomas* da geometria elementar. Recordemos alguns axiomas que nos interessam de perto:

1. Três pontos quaisquer, não situados em uma mesma reta, determinam um plano.
2. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, essa reta está contida no plano.
3. Se dois planos têm um ponto em comum, então êles têm pelo menos uma reta em comum passando por êsse ponto.
4. Existem pelo menos quatro pontos que não pertencem a um mesmo plano.

Duas retas são *paralelas* quando estão situadas em um mesmo plano e não se interceptam. A relação de paralelismo é *transitiva*, isto é, se as retas r_1 e r_2 são paralelas e as retas r_2 e r_3 são paralelas, então r_1 e r_3 são também paralelas.

Se uma reta r não tem ponto em comum com um plano π diremos que r é paralela ao plano π. Caso contrário ou r está contida em π ou intercepta π exatamente em um ponto.

Se r intercepta π em um ponto p e além disso, qualquer reta do plano π que passe por p é perpendicular à reta r, diremos que a reta r *é perpendicular ao plano* π. Demonstra-se que se p é um ponto de um plano π, então existe uma única reta perpendicular a π passando por p.

§ 1.2 – *Vetores*

Dois pontos distintos A e B do espaço determinam uma reta r. O segmento da reta r entre A e B é a parte da reta compreendida entre êsses dois pontos. Podemos orientar êsse segmento considerando um dos pontos como origem e o outro como extremidade. O segmento orientado com origem A e extremidade B será indicado por AB. Os pontos serão, também, considerados como segmentos orientados (nulos). Assim, o ponto A pode ser identificado com o segmento orientado AA (origem A e extremidade A).

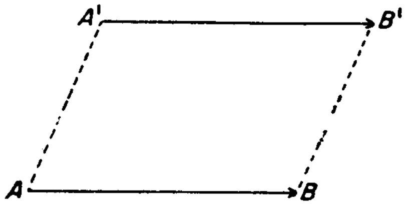


Figura 1.1

Sejam AB e $A'B'$ segmentos orientados.

DEFINIÇÃO 1.1 – Diremos que o segmento orientado AB é *eqüipolente* ao segmento orientado $A'B'$ se uma das três afirmações abaixo fôr verificada:

1. $A = B$ e $A' = B'$,
2. AB e $A'B'$ estão situados sôbre uma mesma reta e é possível fazer deslizar $A'B'$ sôbre essa reta de tal maneira que A' coincida com A e B' coincida com B.
3. O quadrilátero $ABB'A'$ (com os vértices dispostos nessa ordem) é um paralelogramo (veja Fig. 1.1).

Observe que dois pontos (quando considerados como segmentos orientados) são sempre eqüipolentes. O leitor pode mostrar fàcilmente que a relação de eqüipolência satisfaz às seguintes propriedades:

*E*1. *Reflexividade*: todo segmento orientado do espaço é eqüipolente a si mesmo.

*E*2. *Simetria*: se o segmento orientado AB é eqüipolente ao segmento orientado $A'B'$, então $A'B'$ é eqüipolente a AB.

*E*3. *Transitividade*: se o segmento orientado AB é eqüipolente ao segmento orientado $A'B'$ e se $A'B'$ é eqüipolente ao segmento orientado $A''B''$, então AB é eqüipolente a $A''B''$.

Devido às três propriedades acima, é usual dizer-se que a eqüipolência é uma relação de equivalência.

DEFINIÇÃO 1.2 – O *vetor* determinado por um segmento orientado AB

é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço que são eqüipolentes ao segmento orientado AB.

O vetor determinado por AB será indicado por $\overrightarrow{AB}$; o segmento orientado AB chama-se um *representante* do vetor $\overrightarrow{AB}$. É conveniente representar tanto o segmento orientado AB como o vetor $\overrightarrow{AB}$ por uma flecha com origem em A e extremidade em B. O leitor deve, entretanto, não se esquecer de que isto é um abuso de notação: o segmento orientado AB e o vetor $\overrightarrow{AB}$ são objetos matemáticos distintos: AB é um *segmento orientado* (isto é, um conjunto de pontos) enquanto $\overrightarrow{AB}$ é um *conjunto de segmentos orientados*.

Observemos que os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vetor se, e sòmente se, êsses segmentos são eqüipolentes. Assim, um mesmo vetor pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados distintos. Na verdade, se AB é um segmento orientado e P é um ponto qualquer do espaço, então o leitor pode ver fàcilmente que existe um, e sòmente um, segmento orientado PQ, com origem em P, tal que PQ é eqüipolente a AB. Segue-se, assim, que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem exatamente um representante em cada ponto do espaço.

Os vetores serão usualmente indicados por letras minúsculas com flechas em cima. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser indicado por $\vec{a}$. Os números reais serão indicados por letras minúsculas (sem flechas em cima).

§ 1.3 – *Adição de Vetores*

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores. Vamos definir o vetor *soma* dêsses vetores, que indicaremos por $\vec{a} + \vec{b}$. A definição é motivada pela composição de fôrças em mecânica. Escolhamos um representante qualquer AB, para o vetor $\vec{a}$.

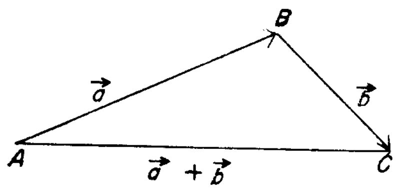


Figura 1.2

Já sabemos que existe um único segmento orientado com origem em B representando o vetor $\vec{b}$. Seja BC êsse segmento. Definimos o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ como sendo o vetor representado pelo segmento orientado AC (veja a Fig. 1.2).

É necessário verificar que a adição acima está bem definida, mostrando que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ é único, qualquer que seja a escolha dos representantes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Para mostrar isso, escolhamos novos representantes $A'B'$ e $B'C'$ para os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente.

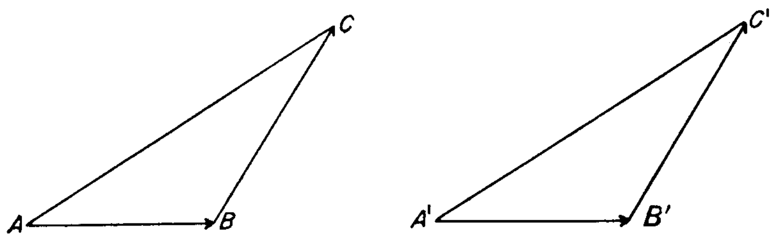


Figura 1.3

Como os segmentos orientados AC e $A'C'$ são eqüipolentes (veja a Fig. 1.3), resulta $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

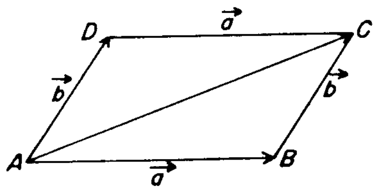


Figura 1.4

A adição de vetores é *comutativa*, isto é, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, então $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. De fato, observando a Fig. 1.4 vemos que $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; além disso, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ donde $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

A adição de vetores é *associativa*, isto é, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores quaisquer, então

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

A demonstração dessa propriedade pode ser feita fàcilmente, observando-se a Fig. 1.5.

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

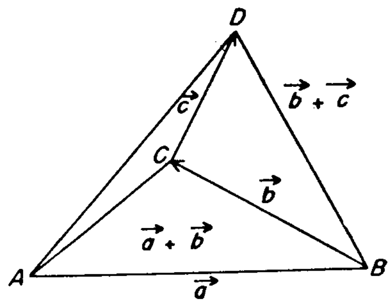


Figura 1.5

Concordamos em considerar um ponto A qualquer do espaço como um segmento orientado AA, com origem A e extremidade A. Assim, por

definição, todos os pontos do espaço são eqüipolentes entre si, portanto o conjunto de todos os pontos do espaço é um vetor, que será chamado de *vetor zero* e indicaremos por $\vec{0}$. Se $\vec{a}$ é um vetor qualquer, então

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

A cada vetor $\vec{a}$ associaremos da seguinte forma um vetor $-\vec{a}$, chamado de *simétrico* de $\vec{a}$: se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, então, $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, temos que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$; anàlogamente, $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$. O vetor $-\vec{a}$, acima definido, é o único vetor que satisfaz à igualdade $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Com efeito, suponha que $\vec{b}$ é um vetor tal que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; então somando $-\vec{a}$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$-\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{0}.$$

E, pela associatividade da adição de vetores, obtemos

$$(-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{b} = -\vec{a} + \vec{0}$$

ou seja

$$\vec{0} + \vec{b} = -\vec{a} + \vec{0}$$

donde

$$\vec{b} = -\vec{a}.$$

EXEMPLO 1.1 – Qual é a condição necessária e suficiente para que os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ possam ser representados pelos lados A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 de um polígono de n lados?

Pondo $\vec{a}_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n$, procuramos a condição necessária e suficiente para que $A_{n+1} = A_1$. Se $A_{n+1} = A_1$, então $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_1}$ ou seja $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$. Recìprocamente, se $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$, então $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{0}$ e portanto $A_1 = A_{n+1}$. Logo, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, podem ser representados pelos lados de um polígono de n lados se, e sòmente se, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$.

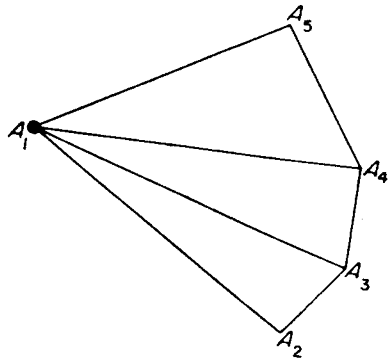


Figura 1.6

§ 1.4 – *Produto por Escalares*

O têrmo *escalar* é tradicionalmente usado com o significado de número real.

Sejam x um número real e $\vec{a}$ um vetor. Utilizaremos nossos conhecimentos de geometria para definir o vetor $x\vec{a}$ produto do vetor $\vec{a}$ pelo escalar x. Tomemos um representante AB do vetor $\vec{a}$. Se $x = 0$ ou $\vec{a} = \vec{0}$, pomos, por definição, $x\vec{a} = \vec{0}$. Se $x \neq 0$ e $\vec{a} \neq \vec{0}$, o vetor $x\vec{a}$ é definido como sendo o vetor que tem como representante o segmento AC, cujo comprimento é $|x|$ vêzes o comprimento de AB, situa-se sôbre a reta que contém AB, e é tal que, se $x > 0$, então C e B estão de um mesmo lado de A e, se $x < 0$, então A está entre C e B (veja a Fig. 1.7).

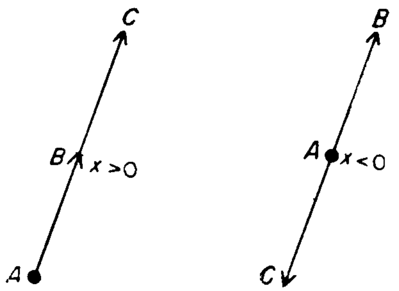


Figura 1.7

O leitor pode verificar fàcilmente as seguintes propriedades:

$$(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$$
$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$$
$$x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}.$$

As igualdades acima são válidas quaisquer que sejam os escalares x, y e os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$. É claro, também, que $1\vec{a} = \vec{a}$ e $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Observemos que $0\vec{a} = \vec{0}$ e $x\vec{0} = \vec{0}$ são, na verdade, conseqüências das propriedades da adição de vetores e da multiplicação de vetores por escalares. Realmente:

$$0\vec{a} = [1 + (-1)]\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

e

$$x\vec{0} = x[a + (-\vec{a})] = x\vec{a} + x(-1\vec{a}) = x\vec{a} + (-x\vec{a}) = \vec{0}.$$

Daremos abaixo um resumo das propriedades da adição de vetores e da multiplicação de vetores por escalares.

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
2. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
3. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$
6. $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$
7. $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$
8. $1\vec{a} = \vec{a}$

EXEMPLO 1.2 – Em um quadrilátero qualquer (não necessàriamente convexo) $ABCD$ os pontos médios D, E, F e G, dos lados, são os vértices de um paralelogramo.
H

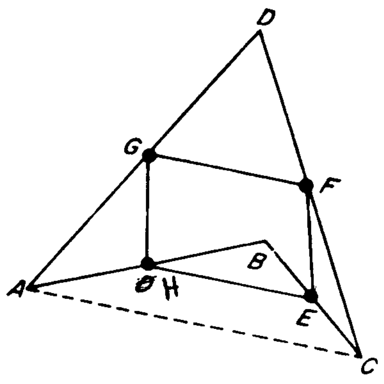


Figura 1.8

Realmente, observando a figura, vemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE}\end{aligned}$$

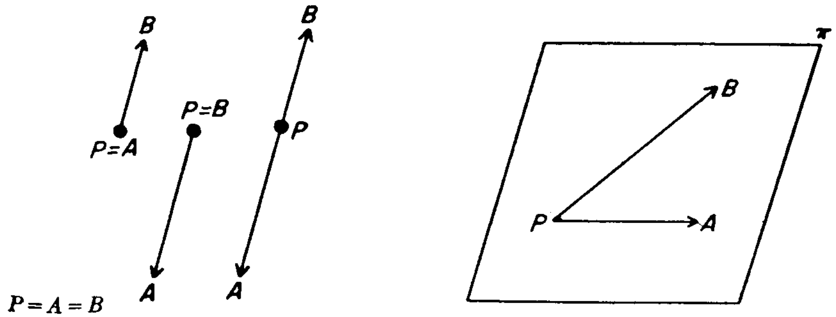
pelo exemplo 1.1, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, portanto $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DE}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}\\ &= (\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{FE}\\ &= \overrightarrow{FE}.\end{aligned}$$

Assim, os lados opostos do quadrilátero $DEFG$ são paralelos, mostrando que é um paralelogramo.

§ 1.5 – *Dependência e Independência Linear*

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores dados. Fixe um ponto qualquer, P, do espaço. Sejam PA e PB representantes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente.



1.º Caso 2.º Caso

Figura 1.9

Podemos, então, encontrar uma das seguintes situações:

1.º *Caso*

PA e PB situados sôbre uma mesma reta r; isso acontece se, e sòmente se, existe um número real x tal que $\vec{a} = x\vec{b}$ ou $\vec{b} = x\vec{a}$. Diremos, então, que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são *linearmente dependentes* ou *colineares* (veja a Fig. 1.9).

2.° *Caso*

PA e PB não situados sôbre uma mesma reta. Assim, PA e PB determinam um plano π. Diremos, então, que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são *linearmente independentes.*

Sejam x e y escalares quaisquer. Uma expressão da forma $x\vec{a} + y\vec{b}$ chama-se uma *combinação linear* dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente dependentes e não simultâneamente nulos, então, êles *geram uma reta*, isto é, todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b}$ podem ser representados sôbre uma mesma reta r. Recìprocamente, se C é um ponto qualquer de r, então existem escalares x e y tais que $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{PC}$ na verdade se, por exemplo, $\vec{a} \neq 0$, então existe um escalar x tal que $x\vec{a} = \overrightarrow{PC}$ (a rigor, existe uma infinidade de escalares x e y tais que $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{PC}$).

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, então, todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b}$ podem ser representados sôbre um mesmo plano π.

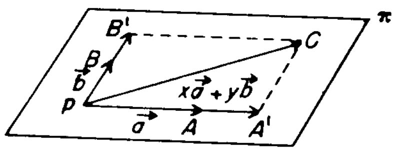


Figura 1.10

Recìprocamente, se C é um ponto qualquer do plano π, então a Fig. 1.10 nos mostra que $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'}$, onde $\overrightarrow{PA'} = x\vec{a}$ e $\overrightarrow{PB'} = y\vec{b}$. Vemos, assim, que todo vetor $\vec{v}$ que possua representante no plano π pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$; e que tôda combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser representada sôbre o plano π. Por essa razão, se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, diremos que êles *geram um plano.*

Se um vetor $\vec{v}$ se escreve como uma combinação linear $x\vec{a} + y\vec{b}$, diremos que os vetores $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$ são componentes do vetor $\vec{v}$ em relação aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. Os escalares x e y são as *coordenadas* de $\vec{v}$ em relação aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Observe que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, então cada vetor $\vec{v}$ que possua representante em π se escreve de maneira única como uma combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores não simultâneamente nulos. Pode, então, ocorrer um dos dois casos abaixo:

1.° *Caso*

Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são *linearmente dependentes*, isto é,

i) ou $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ possuem representantes numa mesma reta (nesse caso diremos que êsses vetores são *colineares*);

ii) ou $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ possuem representantes em um mesmo plano; nesse caso diremos que êles são *coplanares* (observe que a colinearidade de três vetores é um caso particular da coplanaridade, isto é, o item (i) acima é um caso particular do item (ii).

2.° *Caso*

Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são *linearmente independentes* ou *não-coplanares*, isto é, não possuem representantes em um mesmo plano.

Sejam x, y e z escalares quaisquer. Uma expressão da forma $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ chama-se uma *combinação linear* dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

É fácil ver que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores colineares, não todos nulos, então êles geram uma reta, isto é, todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ possuem representantes numa mesma reta; recìprocamente, se r é uma reta sôbre a qual existem representantes PA, PB e PC para os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, respectivamente, e D é um ponto qualquer de r, então existe uma infinidade de escalares x, y e z tais que $\overrightarrow{PD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. É igualmente fácil ver que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores coplanares, mas não-colineares, então todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ possuem representantes sôbre um mesmo plano. Recìprocamente, se π é um plano que contém os representantes PA, PB e PC de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, respectivamente, e D é um ponto qualquer de π, então existe uma infinidade de escalares x, y e z tais que $\overrightarrow{PD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Por essa razão, diremos que três vetores coplanares, mas não-colineares, *geram um plano.* Do visto acima, concluímos que *três vetores linearmente dependentes, não simultâneamente nulos, ou geram uma reta ou um plano.*

Mostraremos agora que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente independentes, então êles *geram o espaço*, isto é, se $\vec{v}$ é um vetor qualquer, então existe um (único) terno ordenado (x, y, z) de escalares tais que $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Para vermos isso, escolhamos os representantes PA, PB, PC e PM para os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{v}$, respectivamente, com origem no ponto P (veja a Fig. 1.11).

Por M, tracemos a paralela a PC. Seja M' o ponto de encontro dessa paralela com o plano determinado pelos segmentos PA e PB. O ponto M' existe, pois, caso contrário, PC estaria no plano determinado por PA e PB, o que contraria a hipótese de que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são não-coplanares. Vemos, assim, que $\overrightarrow{PM} =$

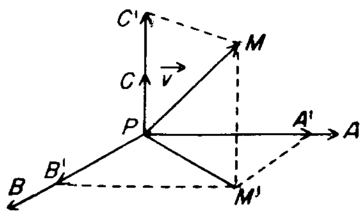


Figura 1.11

$= \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PC'}$, onde $\overrightarrow{PC'} = z\overrightarrow{PC}$, para algum escalar z. Além disso, $\overrightarrow{PM'}$ está no plano determinado por PA e PB e portanto existem escalares x e y tais que $\overrightarrow{PM'} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$. Portanto, $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Chamaremos os vetores $x\vec{a}$, $y\vec{b}$ e $z\vec{c}$ de componentes do vetor $\vec{v}$ em relação aos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$; os números x, y e z são as coordenadas de $\vec{v}$ em relação aos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Um conjunto de três vetores linearmente independentes chama-se uma *base* para o espaço dos vetores. A base que consiste dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, nessa ordem, será indicada por $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Se escolhermos uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, então a cada vetor $\vec{v}$ corresponde um único terno ordenado (x, y, z) de escalares, a saber, as coordenadas de $\vec{v}$ em relação a essa base. Recìprocamente, a cada terno ordenado (x, y, z) de números reais corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

EXERCÍCIOS

1. Sejam P, A e B pontos do espaço. Seja C o ponto no segmento AB tal que $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{PC}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.

2. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam no meio.

3. Demonstre que a relação de eqüipolência é reflexiva, simétrica e transitiva.

4. Sejam AB e CD segmentos orientados. Demonstre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e sòmente se, AB e CD são eqüipolentes.

5. *a)* Seja ABC um triângulo qualquer com medianas AD, BE e CE. Demonstre que
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$$
b) Seja ABC um triângulo qualquer. Mostre que existe um triângulo com lados paralelos às medianas de ABC e com os comprimentos destas.

6. *a)* Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores linearmente independentes e x, y e z escalares quaisquer. Demonstre que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ se, e sòmente se, $x = y = z = 0$.
b) Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores que satisfazem à seguinte propriedade: "se x, y e z são escalares tais que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ então $x = y = z = 0$". Demonstre que êsses vetores são linearmente independentes.

7. *a)* Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores linearmente dependentes. Demonstre que existem escalares x, y e z, não todos nulos, tais que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.
b) Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores. Suponha que existam escalares x, y e z, não todos nulos, tais que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. Demonstre que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes.

8. *a)* Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores linearmente independentes. Mostre que se x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 são escalares tais que
$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$$
então
$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2.$$
b) Mostre que se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores linearmente dependentes e $x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$ então *não* podemos concluir que $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

§ 1.6 – *O Produto Interno*

Motivados na expressão do trabalho em mecânica vamos definir o produto interno de dois vetores. Essa operação associa a cada par $\vec{a}$, $\vec{b}$ de vetores um número real que será indicado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

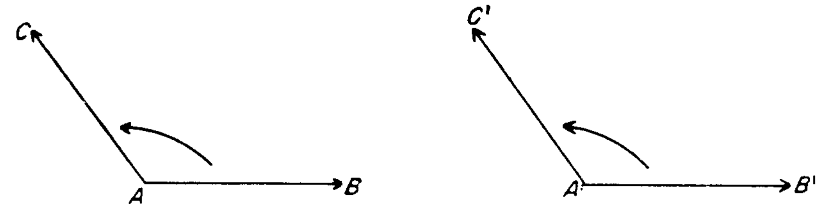


Figura 1.12

A fim de definirmos o produto interno necessitamos do conceito de ângulo entre dois vetores. O *ângulo* entre os vetores não nulos $\vec{a}$ e, $\vec{b}$ indicado por $(\vec{a}, \vec{b})$, é definido como sendo o ângulo entre seus representantes. Mais precisamente, se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, então o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é, por definição, o ângulo entre os segmentos orientados AB e AC. Para que essa definição faça sentido, devemos mostrar que $(\vec{a}, \vec{b})$ não depende da escolha dos representantes AB e AC. Mais precisamente, o leitor deverá mostrar que se $A'B'$ e $A'C'$ são também representantes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente, então (veja a Fig. 1.12) o ângulo entre os segmentos orientados AB e AC é igual ao ângulo entre os segmentos orientados $A'B'$ e $A'C'$.

Observemos que o ângulo (AB, AC) é o menor ângulo segundo o qual AB deve girar para se tornar colinear com AC. Êsse ângulo é positivo se a rotação fôr no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio e negativo em caso contrário. Isso nos permite associar a cada ângulo $(\vec{a}, \vec{b})$ seu ângulo *negativo* ou *oposto* $(\vec{b}, \vec{a})$.

Outro conceito que será também necessário é o de *comprimento* ou *norma* de um vetor. Escolhamos um segmento orientado não-nulo qualquer AB e chamemo-lo segmento orientado unitário. Todo segmento orientado congruente a AB será também chamado segmento orientado unitário. Um vetor é *unitário* se um de seus representantes (e então todos) fôr um segmento orientado unitário.

Dado o vetor $\vec{a}$, seja $\vec{v}$ um unitário colinear com $\vec{a}$. Pela colinearidade, existe um número t, conforme §1.5, positivo, nulo ou negativo, tal que

$$\vec{a} = t\vec{v}.$$

Chama-se *norma* ou *comprimento* de $\vec{a}$, e se indica por $\|\vec{a}\|$, o módulo dêsse número t. Então

$$\|\vec{a}\| = |t|.$$

É claro dessa definição que um vetor é unitário se, e sòmente se, sua norma é igual a um. O leitor poderá fàcilmente demonstrar as seguintes propriedades da norma:

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$; $\|\vec{a}\| = \vec{0}$ se, e sòmente se, $\vec{a} = \vec{0}$.
2. $\|x\vec{a}\| = |x| \; \|\vec{a}\|$.

As propriedades acima se verificam quaisquer que sejam o vetor $\vec{a}$ e o escalar x.

Passemos agora à definição do produto interno.

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não-nulos. O *produto interno* do vetor $\vec{a}$ pelo vetor $\vec{b}$, indicado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$, é definido por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Se um dos vetores $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ fôr o vetor nulo definimos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

O produto interno satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (simetria)
2. $x(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (x\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(x\vec{b})$ (homogeneidade)
3. $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$ (distributividade)

(quaisquer que sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e qualquer que seja o escalar x). Observemos que essas propriedades são verificadas trivialmente se um dos

vetores fôr o vetor zero. Na verdade, $\vec{a}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{b} = 0$ é a única definição compatível com elas, pois, pela segunda propriedade acima, temos

$$0 = 0(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (0\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(0\vec{b})$$

donde

$$0\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0$$

pois $0\vec{a} = 0\vec{b} = \vec{0}$.

Passemos agora à demonstração das propriedades do produto interno.

1.ª) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não-nulos, temos:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \|\vec{b}\| \; \|\vec{a}\| \; \cos(\vec{b}, \vec{a}) \\ &= \vec{b}\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

2.ª) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não-nulos e $x \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} x(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= x\,\|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \|x\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \cos(x\vec{a}, \vec{b}) \\ &= (x\vec{a})\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

3.ª) Consideraremos primeiro o caso em que $\vec{c} = \vec{u}$ é unitário. Escolhamos um representante PQ para o vetor $\vec{u}$ e seja r a reta que contém o segmento PQ (Fig. 1.13).

Escolhamos representantes AB e BC para os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. Consideremos as projeções ortogonais A', B' e C' dos pontos A, B e C, respectivamente, sôbre a reta r. Sejam x, y e z os escalares tais que

$$\vec{PA'} = x\vec{u}, \; \vec{PB'} = y\vec{u} \text{ e } \vec{PC'} = z\vec{u}.$$

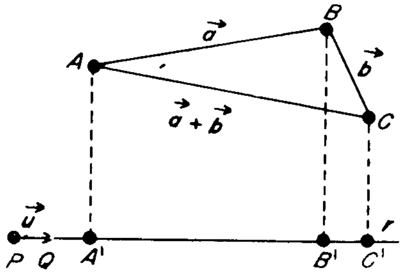


Figura 1.13

Observemos agora que $\vec{u}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos(\vec{u}, \vec{a}) = y - x$ e anàlogamente $\vec{u}\cdot\vec{b} = z - y$, $\vec{u}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = z - x$. Portanto

$$\vec{u}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{u}\cdot\vec{a} + \vec{u}\cdot\vec{b}.$$

O caso geral se reduz ao anterior. Se $\vec{c}$ é um vetor qualquer, não nulo, usando homogeneidade do produto interno e a distributividade para vetores unitários, obtemos:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \left(\|\vec{c}\|\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}\right)\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \|\vec{c}\|\left(\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}\cdot\vec{a} + \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}\cdot\vec{b}\right)$$

$$= \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}.\ \vec{b}.$$

Òbviamente $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$, pois, $\cos(\vec{a}, \vec{a}) = 1$. Isso nos leva a indicar $\vec{a}\cdot\vec{a}$ por $\vec{a}^2$, às vêzes. Observe que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos, então $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ se, e sòmente se, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro qualquer. Por essa razão, diremos que o vetor $\vec{a}$ é *perpendicular* (ou ortogonal) ao vetor $\vec{b}$ quando $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. O leitor deve observar que, de acôrdo com essa definição, o vetor $\vec{0}$ é perpendicular a todos os vetores do espaço. Na verdade, $\vec{0}$ é o único vetor que possui essa propriedade, isto é, se $\vec{a}$ é um vetor tal que $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ qualquer que seja o vetor $\vec{b}$, então $\vec{a} = \vec{0}$. Para provar isso, basta tomar, em particular, $\vec{b} = \vec{a}$, donde $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 0$ o que implica $\vec{a} = \vec{0}$.

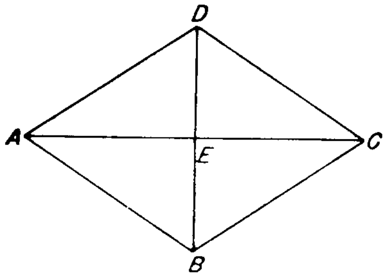


Figura 1.14

EXEMPLO 1.3 – Demonstrar que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Mostrar que $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$. Observe que

$$\begin{aligned}\vec{AC}\cdot\vec{BD} &= (\vec{AB} + \vec{BC})\cdot(\vec{BA} + \vec{AD})\\ &= \vec{AB}\cdot\vec{BA} + \vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{BC}\cdot\vec{BA} + \vec{BC}\cdot\vec{AD}\\ &= -\|\vec{AB}\|^2 + \vec{AB}\cdot\vec{AD} - \vec{AB}\cdot\vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

pois $\|\vec{AD}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AD}\|$.

§ 1.7 – *Bases Ortonormais*

Uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ chama-se *ortogonal* se os seus vetores são mùtuamente ortogonais, isto é, se $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$. Se, além disso, os vetores são unitários, a base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ chama-se *ortonormal*.

Os exemplos que daremos abaixo mostram a conveniência do uso de bases ortonormais.

EXEMPLO 1.4 – Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal e $\vec{u}$ é um vetor qualquer, então

$$\vec{u} = (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{u})\vec{b} + (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{c}.$$

O que sabemos é que $\vec{u}$ pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Calculando, então, o produto interno $\vec{a}\cdot\vec{u}$, obtemos $\vec{a}\cdot\vec{u} = x(\vec{a}\cdot\vec{a}) + y(\vec{a}\cdot\vec{b}) + z(\vec{a}\cdot\vec{c}) = x$, pois $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1$ e $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. Anàlogamente demonstramos que $y = \vec{b}\cdot\vec{u}$ e $z = \vec{c}\cdot\vec{u}$.

Observemos que, se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ fôsse uma base qualquer, não necessàriamente ortonormal, então as coordenadas x, y e z do vetor $\vec{u}$ seriam a solução do sistema

$$\begin{cases} x(\vec{a}\cdot\vec{a}) + y(\vec{a}\cdot\vec{b}) + z(\vec{a}\cdot\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{u}\\ x(\vec{b}\cdot\vec{a}) + y(\vec{b}\cdot\vec{b}) + z(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{u}\\ x(\vec{c}\cdot\vec{a}) + y(\vec{c}\cdot\vec{b}) + z(\vec{c}\cdot\vec{c}) = \vec{c}\cdot\vec{u}\end{cases}$$

EXEMPLO 1.5 – Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal e $\vec{u} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $\vec{v} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$ são vetores quaisquer, então

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Realmente,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c})\cdot(x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) =\\ &= (x_1x_2)\vec{a}\cdot\vec{a} + (y_1y_2)\vec{a}\cdot\vec{b} + (x_1z_2)\vec{a}\cdot\vec{c} +\\ &+ (x_2y_1)\vec{b}\cdot\vec{a} + (y_1y_2)\vec{b}\cdot\vec{b} + (y_1z_2)\vec{b}\cdot\vec{c} +\\ &+ (x_2z_1)\vec{c}\cdot\vec{a} + (y_2z_1)\vec{c}\cdot\vec{b} + (z_1z_2)\vec{c}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Como $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal, seus vetores satisfazem às relações

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{c} = 1.$$

Assim, a expressão acima se reduz a

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Veremos agora que, após escolhida uma orientação para o espaço, será possível distinguir duas classes de bases ortonormais: as positivas e as negativas. Para a adição de vetores, a multiplicação de vetores por escalares, o produto interno, a orientação do espaço não tem importância alguma, podendo ser dispensada. A escolha de uma orientação para o espaço é, entretanto, indispensável para a introdução do produto vetorial, que faremos na próxima seção.

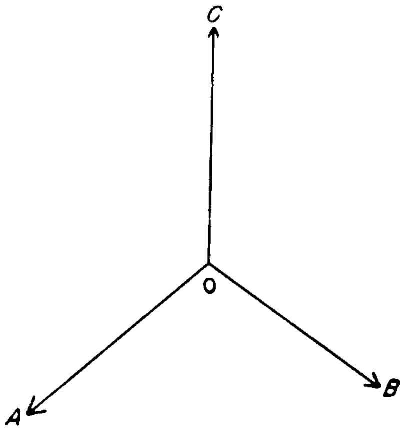


Figura 1.15

Escolhamos um ponto, O, do espaço que chamaremos *origem*. Um *triedro* é um terno ordenado (OA, OB, OC) de segmentos orientados OA, OB e OC não coplanares. Êsses três segmentos dão origem, permutando a ordem dos segmentos, a seis ternos ordenados distintos. Consideremos um qualquer dêsses ternos e o observemos de uma posição tal que o terceiro segmento orientado esteja dirigido para os nossos olhos. A seguir, consideremos a rotação (de menor ângulo) do primeiro segmento até que êle fique colinear com o segundo segmento (veja a Fig. 1.15). Diremos que o triedro é *positivo* se a rotação fôr no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio e *negativo*, caso contrário.

Por exemplo, o triedro (OA, OB, OC) da Fig. 1.15 é positivo, enquanto (OB, OA, OC) é negativo.

Consideremos três vetores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Diremos que o terno ordenado $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é positivo (ou negativo) se o triedro (OA, OB, OC) fôr positivo (ou negativo).

É possível mostrar que, se $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é um terno positivo e PM, PN e PQ são representantes quaisquer dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, respectivamente, então o triedro (PM, PN, PQ) é positivo. Uma base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ diz-se *positiva* se o terno $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ fôr positivo.

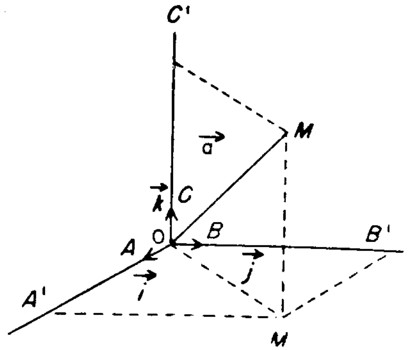


Figura 1.16

Fixemos um triedro positivo (OA, OB, OC) de segmentos orientados unitários e mùtuamente ortogonais (veja a Fig. 1.16). Sejam $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$. Assim, a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

é ortonormal e positiva. Portanto, os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ satisfazem às seguintes relações:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

onde $\vec{i}^2 = \vec{i}\cdot\vec{i}$ etc. Além disso, o Exemplo 1.4 nos diz que, se $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ é um vetor qualquer, então $\vec{a}$ pode ser decomposto de maneira única como combinação linear

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

onde as coordenadas a_1, a_2 e a_3 são dadas por

$$a_1 = \vec{a}\cdot\vec{i} = \|\vec{a}\| \quad \cos(\vec{a}, \vec{i})$$

$$a_2 = \vec{a}\cdot\vec{j} = \|\vec{a}\| \quad \cos(\vec{a}, \vec{j})$$

$$a_3 = \vec{a}\cdot\vec{k} = \|\vec{a}\| \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}).$$

Os números reais a_1, a_2 e a_3 são as *coordenadas cartesianas* (retangulares) do ponto M. Além disso o exemplo 1.5 nos diz que, se

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

então

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

e

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Se o ponto M tem coordenadas cartesianas a_1, a_2 e a_3, indicaremos isso escrevendo $M(a_1, a_2, a_3)$.

EXERCÍCIOS

1. *a*) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer. Demonstre que

$$(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

e

$$(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$

b) Use o resultado do item *a*) para demonstrar a lei dos cossenos num triângulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

onde

$$a = \|\overrightarrow{BC}\|, \quad b = \|\overrightarrow{AC}\|, \quad c = \|\overrightarrow{AB}\|$$

e

$$\hat{A} = (AB, AC).$$

2. Sejam $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   a) Mostre que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base.
   b) Determine x, y e z tais que $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.
3. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam no meio.
4. Calcule as seguintes somas e diferenças:
   a) $(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$
   b) $(-\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}) + (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + (\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$
   c) $(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) - (6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$
   d) $(\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) - (2\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}) + (3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k})$.
5. Sejam $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine vetores unitários paralelos aos vetores
   a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$; c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.
6. Calcule as normas de cada um dos seguintes vetores:
   a) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$
   b) $\vec{b} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$
   c) $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
7. Demonstre que os pontos $A(1, 2, 2)$, $B(3, 3, 4)$, $C(4, 5, 3)$ e $D(2, 4, 1)$ são os vértices de um paralelogramo.
8. Dados os pontos $A(2, 1, 5)$ e $B(3, 6, 2)$, escreva o vetor $\overrightarrow{AB}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Qual é a norma de $\overrightarrow{AB}$?
9. Calcule os seguintes produtos internos:
   a) $(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k})$
   b) $(3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$
   c) $(-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k})$.
10. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e $3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.
11. Determine o valor de x para o qual os vetores $x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ são perpendiculares.
12. Demonstre que não existe um número real x tal que os vetores $x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ sejam perpendiculares.
13. Ache os ângulos entre os seguintes pares de vetores:
   a) $2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} - \vec{k}$
   b) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $-2\vec{j} - 2\vec{k}$
   c) $3\vec{i} + 3\vec{j}$, $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

14. Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são os pontos
$$A(3, 2, 1), \quad B(3, 2, 2) \quad \text{e} \quad C(3, 3, 2).$$
15. Verifique se os seguintes vetores são linearmente independentes:
   a) $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
   b) $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $4\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.
16. Verifique se os seguintes pontos são coplanares:
   a) $A(2, 2, 1)$, $B(3, 1, 2)$, $C(2, 3, 0)$ e $D(2, 3, 2)$
   b) $A(2, 0, 2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 1)$ e $D(1, 2, 0)$.
17. Sejam $\vec{v}$ um vetor não-nulo qualquer e α, β, γ os ângulos que $\vec{v}$ forma com vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente. Demonstre que
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$
18. Demonstre que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, então:
   a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\left[\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right]$
   b) $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$.

   (O item a) mostra que é possível definir o produto interno apenas em têrmos da norma, sem usar ângulos. O item b) corresponde à lei do paralelogramo, isto é, a soma dos quadrados dos comprimentos dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais.)
19. Demonstre que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, então:
   a) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ (desigualdade de Schwarz)
   b) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (desigualdade triangular)
   Sugestão: desenvolva $(\vec{a} + \vec{b})^2$ e utilize a desigualdade de Schwarz.
   c) $\left|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\right| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

   (A desigualdade de Schwarz tem muitas aplicações em matemática. A desigualdade triangular corresponde ao seguinte fato geométrico: o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor que ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados.)
20. Se $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, utilize a expressão $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ como definição do produto interno e demonstre as propriedades usuais:
   a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
   b) $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
   c) $x(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (x\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(x\vec{b})$.

21. Demonstre a desigualdade de Schwarz utilizando apenas a definição do produto interno do exercício 20.

Sugestão: ponha $x = \vec{b}\cdot\vec{b}$, $y = -\vec{a}\cdot\vec{b}$ e observe que $(x\vec{a} + y\vec{b})^2 \geq 0$.

22. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não-nulos, utilize a expressão

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

como definição de $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ e mostre que $-1 \leq \cos(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1$.

§ 1.8 - *O Produto Vetorial*

Definiremos uma nova operação tal que a cada par ordenado $(\vec{a}, \vec{b})$ de vetores associe um vetor, indicado por $\vec{a} \times \vec{b}$.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares, pomos, por definição $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares, então $\vec{a} \times \vec{b}$ é definido como sendo o único vetor que satisfaz às seguintes condições:

1.ª) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,|\text{sen}(\vec{a}, \vec{b})|$

2.ª) $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular ao plano gerado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

3.ª) O terno ordenado $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ é positivo.

A operação assim definida chama-se *produto vetorial* ou *produto externo*. Resulta imediatamente da definição que

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

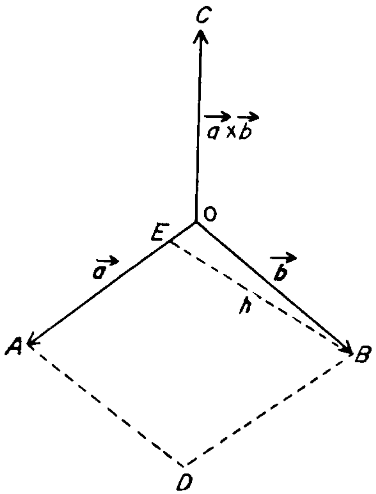


Figura 1.17

Além disso, se $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é a base ortonormal positiva da seção anterior, então

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

e

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Examinando a Fig. 1.17, vemos que a altura h do paralelogramo $OADB$ é dada por $\|\vec{b}\|\,|\text{sen}(\vec{a}, \vec{b})|$ e, portanto, $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ é a área dêsse paralelogramo. Assim, $\|\vec{a} \times \vec{b})\|$ é igual à área de qualquer paralelogramo cujos lados sejam representantes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

É fácil ver que, se x é um escalar qualquer, então

$$x(\vec{a} \times \vec{b}) = (x\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (x\vec{b}).$$

O produto vetorial é distributivo em relação à adição de vetores, isto é, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores quaisquer, então

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Para demonstrar isso, necessitaremos de propriedades do produto misto, que será definido na próxima seção.

§ 1.9 - *O Produto Misto*

Usaremos o produto interno e o produto vetorial para definir o *produto misto*. A cada terno ordenado de vetores, essa operação associa um número real. O número real associado ao terno ordenado $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ será indicado por $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, e é definido por

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Examinemos a Fig. 1.18.

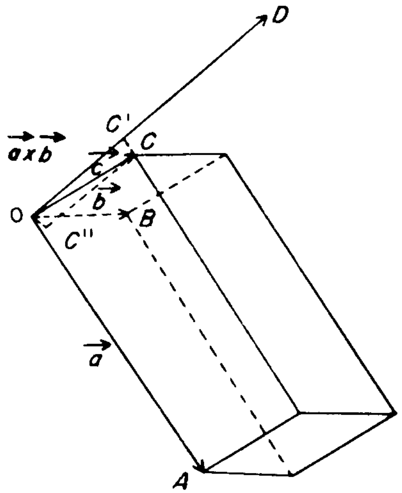


Figura 1.18

O volume do paralelepípedo é igual ao produto da altura pela área da base. Vimos, na seção 1.8, que a área da base é igual a $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Vemos, pela figura, que a altura é dada por $\|\vec{c}\|\,|\cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})|$. Portanto, o volume do paralelepípedo é dado por

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\,|\cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|.$$

Assim, *o valor absoluto do produto misto de três vetores é igual ao volume de qualquer paralelepípedo cujas arestas são representantes dêsses três vetores.* (Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares, então o paralelepípedo degenera-se em um conjunto plano que, por definição, tem volume zero.)

Examinando ainda a Fig. 1.18, vemos que, se $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é um terno ordenado positivo, então o ângulo entre $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{c}$ é um ângulo agudo e portanto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} > 0$. Anàlogamente, vemos que, se $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é um terno ordenado negativo, então $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$.

Podemos caracterizar a dependência linear de três vetores pelo anulamento do produto misto dêsses vetores. Mais precisamente, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes se, e sòmente se, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Realmente, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes, o paralelepípedo é um conjunto plano, portanto seu volume $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ é nulo. Recìprocamente se $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, então o paralelepípedo é um conjunto plano, portanto $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes.

Investigaremos agora a maneira como varia o produto misto quando a ordem dos vetores no terno $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é alterada. Em primeiro lugar, observemos que $\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\cdot\vec{a}$, desde que o produto interno é simétrico. Os ternos ordenados $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ e $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ determinam o mesmo paralelepípedo, donde

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]|.$$

Além disso, êsses ternos ou são ambos positivos ou ambos negativos. Portanto,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = \vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Resulta do que vimos acima que,

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c} \times \vec{a})\\
&= (\vec{c} \times \vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b} \times \vec{a})\\
&= -(\vec{b} \times \vec{a})\cdot\vec{c} = -\vec{b}\cdot(\vec{a} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c})\cdot\vec{b}\\
&= -\vec{a}\cdot(\vec{c} \times \vec{b}) = -(\vec{c} \times \vec{b})\cdot\vec{a}.
\end{aligned}$$

Usaremos agora as propriedades acima para demonstrar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de vetores. Mais precisamente, demonstraremos que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores quaisquer, então

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

Para isso, mostraremos que o vetor

$$\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c})$$

é o vetor nulo. Realmente, como conseqüência das propriedades do produto interno e do produto misto, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{v} &= \vec{v}\cdot\{\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})\} - \vec{v}\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{v}\cdot(\vec{a} \times \vec{c})\\
&= (\vec{v} \times \vec{a})\cdot(\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{v} \times \vec{a})\cdot\vec{b} - (\vec{v} \times \vec{a})\cdot\vec{c}\\
&= (\vec{v} \times \vec{a})\cdot(\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{v} \times \vec{a})\cdot(\vec{b} + \vec{c})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{v} = \vec{0}.$$

O leitor deve observar que também vale a distributividade à direita, isto é,

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a}).$$

Para mostrar isso, observe que

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}).$$

As propriedades distributivas simplificam bastante o cálculo de produtos vetoriais. Como exemplo disso, calculemos $\vec{a} \times \vec{b}$, onde

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \text{ e } \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =\\
&= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} +\\
&+ a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} +\\
&+ a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} =\\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Nos cálculos acima, levamos em conta as relações $\vec{i} \times \vec{i} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ etc. Podemos escrever o produto vetorial acima em forma de determinante, como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

Desenvolvendo o "determinante" acima segundo os elementos da primeira linha, obtemos a expressão encontrada acima para $\vec{a} \times \vec{b}$. O leitor deve, no entanto, ter em mente que nem tôdas as propriedades de determinante são válidas nesse caso; por exemplo, não tem sentido adicionar a segunda linha à primeira, é entretanto muito conveniente calcular o produto vetorial como um determinante simbólico.

EXEMPLO 1.6

$$\begin{aligned}
(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) &= \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} =\\
&= \vec{i}(1 - 1) - \vec{j}(-2 - 1) + \vec{k}(2 + 1) =\\
&= 3\vec{j} + 3\vec{k}.
\end{aligned}$$

Podemos também exprimir o produto misto como um determinante. Na verdade, um determinante legítimo (e não simbólico, como o obtido para o produto vetorial). Se

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \text{ e}$$
$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

são três vetores quaisquer, então, como foi visto acima,

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}.$$

Levando em conta que

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$$

obtemos

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

O leitor pode ver fàcilmente que a expressão acima é o desenvolvimento do determinante

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

segundo os elementos da primeira linha. Assim,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}.$$

A expressão acima permite ver que muitas das propriedades usuais dos determinantes (de terceira ordem) podem ser obtidas como conseqüências de propriedades análogas do produto misto.

EXEMPLO 1.7 – Se duas linhas de um determinante são permutadas entre si, o sinal do determinante é trocado.

A propriedade acima é conseqüência de que, se dois vetores em $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ são permutados entre si, o sinal do produto misto varia.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores e x é um escalar, então

   a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

   b) $x(\vec{a} \times \vec{b}) = (x\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (x\vec{b})$.

2. Demonstre que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são vetores quaisquer, então

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{Vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{Vmatrix}.$$

3. Calcule o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ para os seguintes ternos de vetores:

   a) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

   b) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + 1000\vec{j}$ e $\vec{c} = 100\vec{i} - 200\vec{j}$.

   c) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{j}$ e $\vec{c} = 4\vec{k}$.

   d) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

4. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A(2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B(4, 1, 3)$, $C(1, 3, 2)$ e $D(1, 2, 1)$.

5. Calcule os seguintes produtos vetoriais:

   a) $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

   b) $(-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$.

   c) $(2\vec{i} - 3\vec{i} - \vec{k}) \times (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

6. Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(3, 2, 5)$.

7. Demonstre que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal, onde $\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{k})$ e $\vec{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

   Essa base é positiva ou negativa?

8. Calcule a área do triângulo com vértices $A(1, 2, 1)$, $B(3, 0, 4)$ e $C(5, 1, 3)$.

9. Determine um vetor unitário perpendicular aos vetores

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

10. Calcule os produtos $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$ e $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot(\vec{a} \times \vec{c})$ quando $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

11. Calcule $\|\vec{c}\|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ e o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

12. Use o produto misto para demonstrar que se duas linhas quaisquer em um determinante de terceira ordem são iguais, então o valor dêsse determinante é zero.

13. Utilize o produto misto para mostrar que:

    a) $$\begin{Vmatrix} xa_1 & xa_2 & xa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} = x \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

b) $\begin{Vmatrix} a_1+a'_1 & a_2+a'_2 & a_3+a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$

14. Demonstre que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, com $\vec{a} = x\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$, $\vec{b} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$ e $\vec{c} = -2x\vec{i} + x\vec{j} + 2x\vec{k}$, é uma base ortogonal positiva se $x \neq 0$.
Para que valor de x essa base é ortonormal?

15. O produto vetorial é associativo? Justifique sua resposta.

16. Seja $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}$.
Calcule:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{b}$

c) $\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ d) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

Retas e Planos

Capítulo 2

Neste capítulo, usaremos nossos conhecimentos sôbre vetores para resolver alguns problemas relacionados com as retas e os planos.

§ 2.1 – *Coordenadas Cartesianas*

No capítulo anterior, fixamos um ponto O do espaço, que chamamos origem, e três segmentos unitários, mùtuamente ortogonais, OA, OB e OC, formando um triedro positivo (OA, OB, OC) (veja a Fig. 2.1). Os vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, representados por êsses três segmentos, formam uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Indicaremos por OX, OY e OZ as retas que contêm os segmentos OA, OB e OC, respectivamente. Essas retas são usualmente chamadas, respectivamente, *eixo dos x*, *eixo dos y* e *eixo dos z*. O plano determinado pelo eixo dos x e o eixo dos y chama-se *plano xy*; o *plano yz* é o plano que contém o eixo dos y e o eixo dos z; o *plano xz* é o que contém o eixo dos x e o eixo dos z.

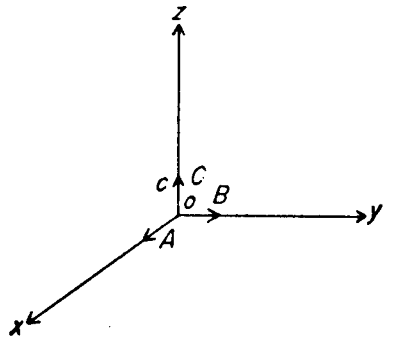


Figura 2.1

A cada ponto P do espaço corresponde um único segmento orientado OP, com origem em O. O segmento orientado OP determina um único vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, que se escreve de maneira única como uma combinação linear $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Assim, a cada ponto P do espaço corresponde um único terno ordenado (x, y, z) de números reais. Os números reais x, y e z são as *coordenadas cartesianas* de P no sistema $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Recìprocamente, a cada terno ordenado (x, y, z) de números reais corresponde um único ponto P do espaço, tal que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Assim, podemos representar os pontos do espaço por ternos ordenados de números reais.

Portanto, se P satisfaz certas condições de natureza geométrica essas condições podem ser expressas por meio de relações numéricas entre suas coordenadas x, y e z: êsse é o método que utilizaremos neste capítulo e no próximo. É chamado tradicionalmente *geometria analítica*.

EXEMPLO 2.1 – *Distância entre dois pontos.*

Sejam P_1 e P_2 dois pontos do espaço com coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), respectivamente. A *distância*, entre êsses dois pontos, indicada por $d(P_1, P_2)$ é, por definição, o comprimento do segmento P_1P_2. Assim, observando a Fig. 2.2, vemos que

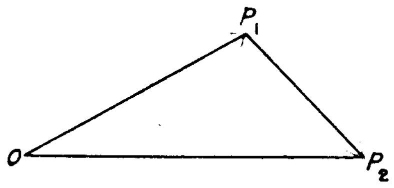


Figura 2.2

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$$

e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + \\ &+ (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Portanto (veja §1.7)

$$\begin{aligned}d(P_1, P_2) &= \sqrt{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}\\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.\end{aligned}$$

§ 2.2 – *Equações do Plano*

Equação do plano determinado por três pontos.

Um dos axiomas da geometria do espaço nos diz que três pontos não-colineares,

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2) \quad \text{e} \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

determinam um plano π. Desejamos encontrar as relações que as coordenadas (x, y, z) de um ponto P devem satisfazer para que P pertença ao plano π.

Observe que P_1, P_2 e P_3 são não-colineares se, e sòmente se, os vetôres $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são linearmente independentes. Além disso, P pertence ao plano π se, e sòmente se, o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ pertence ao plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, isto é, se $\overrightarrow{P_1P}$ se escreve como uma combinação linear

$$\overrightarrow{P_1P} = p\overrightarrow{P_1P_2} + q\overrightarrow{P_1P_3}.$$

Observando que $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, concluímos que: P pertence a π se, e sòmente se, existem números reais p e q tais que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + p\overrightarrow{P_1P_2} + q\overrightarrow{P_1P_3}. \tag{1}$$

Tendo em vista que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\\ \overrightarrow{OP_1} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \text{ e}\\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}\end{aligned}$$

a equação (1) se escreve, em têrmos de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, como

$$\begin{aligned}x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = &[x_1 + p(x_2 - x_1) + q(x_3 - x_1)]\,\vec{i}\\ &+ [y_1 + p(y_2 - y_1) + q(y_3 - y_1)]\,\vec{j}\\ &+ [z_1 + p(z_2 - z_1) + q(z_3 - z_1)]\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Assim P pertence ao plano determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 se, e sòmente se, existe um par (p, q) de números reais tais que

$$\left.\begin{aligned}x &= x_1 + p(x_2 - x_1) + q(x_3 - x_1)\\ y &= y_1 + p(y_2 - y_1) + q(y_3 - y_1)\\ z &= z_1 + p(z_2 - z_1) + q(z_3 - z_1).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Essas são as *equações paramétricas do plano.*

Elas mostram que a cada ponto P de π corresponde um par ordenado (p, q) de números reais e, reciprocamente, a cada par ordenado (p, q) de números reais corresponde um ponto P do plano π. Os números p e q são os *parâmetros* do ponto P.

EXEMPLO 2.2 – O plano que passa pelos pontos $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 1)$ e $P_3(1, 2, 1)$ tem as equações paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 1 + p(0 - 1) + q(1 - 1) = 1 - p\\ y &= 0 + p(1 - 0) + q(2 - 0) = p + 2q\\ z &= 1 + p(1 - 1) + q(1 - 1) = 1.\end{aligned}$$

É possível, também, usar o produto misto para obter uma condição necessária e suficiente para que um ponto P pertença ao plano π. Observemos que P, P_1, P_2 e P_3 são coplanares se, e sòmente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são linearmente dependentes; sabemos (§1.9) que êsses três vetores são linearmente dependentes se, e sòmente se, $[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}] = 0$. Assim, uma condição necessária e suficiente para que um ponto P pertença ao plano determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 é que

$$[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}] = 0.$$

Em têrmos das coordenadas dos pontos P, P_1, P_2 e P_3, a condição acima se escreve como

$$\begin{Vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{Vmatrix} = 0$$

que podemos ainda escrever como

$$a_1x + a_2y + a_3z + d = 0 \qquad (3)$$

onde

$$a_1 = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)$$
$$a_2 = -(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) + (x_3 - x_1)(z_2 - z_1)$$
$$a_3 = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

e

$$d = -(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1).$$

A equação (3) chama-se *equação cartesiana do plano.* Observemos que essa equação é linear, isto é, envolve apenas têrmos de primeiro grau em x, y e z.

EXEMPLO 2.3 – A equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(1, 1, 0)$ e $P_3(2, 2, 2)$ é

$$\begin{Vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1-1 & 1-0 & 0-1 \\ 2-1 & 2-0 & 2-1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = 0$$

que pode ser escrita como

$$3x - y - z - 2 = 0.$$

Equação Normal do Plano

Um vetor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ é *perpendicular* ou *normal* a um plano π se, e sòmente se, $\vec{a}$ é perpendicular a todos os vetores que possuem representantes no plano π.

Seja $\vec{a}$ um vetor não-nulo, normal ao plano π, e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π (veja a Fig. 2.3). Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano π se, e sòmente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é perpendicular ao vetor $\vec{a}$. Assim, uma condição necessária e suficiente para que um ponto P pertença ao plano π é que $\vec{a} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ (equação normal do plano).

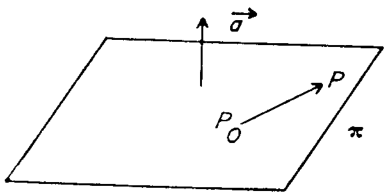


Figura 2.3

Desde que

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

e

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

então

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{P_0P} = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0);$$

Assim, P pertence a π se, e sòmente se, suas coordenadas x, y e z satisfazem à equação

$$a_1x + a_2y + a_3z + d = 0,$$

em que

$$d = -(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0).$$

EXEMPLO 2.4 – A equação cartesiana do plano que contém o ponto $P_0(1, -1, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ é

$$2(x - 1) - 3(y + 1) + 1(z - 2) = 0,$$

isto é,

$$2x - 3y + z - 7 = 0.$$

Plano determinado por um ponto e dois vetores

Consideremos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Sejam P_0P_1 e P_0P_2 os representantes (com origem em P_0) dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. Se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, existe um único plano π que contém os segmentos P_0P_1 e P_0P_2.

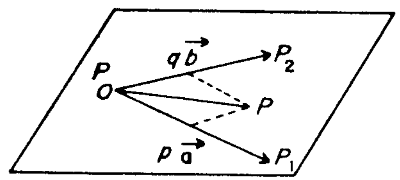


Figura 2.4

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano π se, e sòmente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ se escreve como uma combinação linear (veja a Fig. 2.4)

$$\overrightarrow{P_0P} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Observando que $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, podemos escrever

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + p\vec{a} + q\vec{b}.$$

Assim, $\overrightarrow{OP}$ se escreve, em têrmos dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= (x_0 + pa_1 + qb_1)\vec{i} \\ &+ (y_0 + pa_2 + qb_2)\vec{j} \\ &+ (z_0 + pa_3 + qb_3)\vec{k} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} x &= x_0 + pa_1 + qb_1 \\ y &= y_0 + pa_2 + qb_2 \\ z &= z_0 + pa_3 + qb_3 \end{aligned}$$

que são as equações paramétricas do plano π. Elas fazem corresponder a cada ponto P do plano π um par ordenado (p, q) de números reais. Por exemplo, os pontos P_0, P_1 e P_2 correspondem aos pares $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente.

Para obter a equação cartesiana de π, procederemos da seguinte maneira: observemos que o vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e, portanto, $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vetor normal ao plano π. Poderemos, assim, obter fàcilmente essa equação. Note que P pertence a π se, e sòmente se,

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Portanto, a equação cartesiana de π é

$$c(x - x_0) + d(y - y_0) + e(z - z_0) = 0$$

sendo

$$c = a_2b_3 - a_3b_2, \quad d = -(a_1b_3 - a_3b_1), \quad e = a_1b_2 - a_2b_1.$$

EXEMPLO 2.5 - Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $P_0(1, 2, 1)$ e é paralela aos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Podemos resolver êsse problema de duas maneiras. $P(x, y, z)$ pertence a êsse plano se, e sòmente se,

$$[\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}] = \begin{Vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

$$= -1(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z - 1) = 0.$$

Portanto, a equação é:

$$x - 3y - z + 6 = 0.$$

A segunda maneira de resolver êsse problema é calcular

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

e observar que $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vetor normal ao plano que passa por $P_0(1, 2, 1)$. Assim, temos a equação

$$-1(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z - 1) = 0$$

ou seja

$$x - 3y - z + 6 = 0.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule a distância entre os pontos:

   a) $P_1(1, 2, 0)$ e $P_2(0, 1, 1)$

   b) $P_1(0, 1, \sqrt{2})$ e $P_2(1, 0, 0)$

   c) $P_1(1, \text{sen } \theta, 0)$ e $P_2(1, 0, \cos \theta)$.

2. Demonstre que, se P_1, P_2 e P_3 são três pontos quaisquer, então
$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3).$$

3. Ache a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 3)$ e $C(0, 1, 2)$.

4. Demonstre que os pontos $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(2, 3, 1)$ e $P(0, -2, 4)$ determinam um plano e ache a equação dêsse plano.

5. Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A(5, 1, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

6. Encontrar a equação do plano que passa por $P_0(1, 2, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

7. Encontrar um vetor unitário normal ao plano de equação
$$x - y + \sqrt{2}z + 1 = 0.$$

8. Encontrar a equação do plano que passa por $P_1(1, 2, 1)$ e é perpendicular ao segmento P_1P_2, onde $P_2(0, -1, 2)$.

9. Dados os pontos $A(2, 1, 6)$ e $B(-4, 3, 3)$, encontrar a equação do plano que passa por A e é perpendicular à reta determinada por A e B.

10. Sejam $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 1)$, $P_3(1, 2, 1)$ e $P(-1, 4, 1)$.

    a) Demonstre que êsses quatro pontos são coplanares, mas não colineares.

    b) Escreva o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$.

11. Encontrar a equação do plano que passa por $A(1, -2, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

12. Ache a equação do plano que passa por $Q(1, 0, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$.

13. Achar a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.

14. Considere os vetores $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Seja π um plano paralelo aos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e r uma reta perpendicular ao plano π. Ache a projeção ortogonal do vetor $\vec{a}$ sôbre a reta r.

15. Encontre um vetor unitário, normal ao plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.

16. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos

$$x + 2y - 3z + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 4z - 1 = 0.$$

17. Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y = z$.

18. Seja $ax + by + cz + d = 0$ a equação de um plano π que não passa pela origem e corta os três eixos.

a) Determine a interseção de π com os eixos.

b) Se $P_1(p_1, 0, 0)$, $P_2(0, p_2, 0)$ e $P_3(0, 0, p_3)$ são os pontos de interseção de π com os eixos, a equação de π pode ser posta sob a forma

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1.$$

c) Ache o ponto de interseção do plano $2x + y - z - 3 = 0$ com os eixos OX, OY e OZ.

d) Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.

§ 2.3 - *Ângulo Entre Dois Planos*

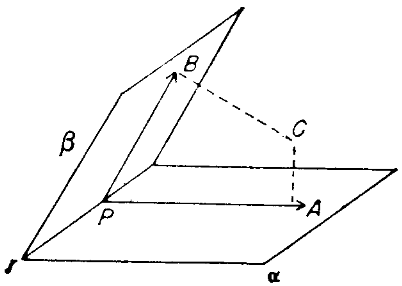


Figura 2.5

Consideremos dois planos quaisquer, α e β. O ângulo entre α e β, indicado por (α, β) é zero se α e β são paralelos. Se êsses planos não são paralelos, êles se cortam segundo uma reta r (veja a Fig. 2.5).

Trace por um ponto P de r os segmentos orientados PA e PB, perpendiculares à reta r e contidos nos

planos α e β, respectivamente. O ângulo (α, β), entre o plano α e o plano β é definido como sendo o menor ângulo positivo cujo co-seno é igual a

$$|\cos (PA, PB)|.$$

Sejam

$$a_1x + a_2y + a_3z + d = 0$$

e

$$b_1x + b_2y + b_3z + e = 0$$

as equações dos planos α e β, respectivamente. Queremos achar o ângulo entre êsses planos. Observemos que (§2.2) os vetores

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

e

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

são perpendiculares aos planos α e β, respectivamente. Tracemos por A a perpendicular ao plano α e por B a perpendicular ao plano β. Essas perpendiculares se encontram em um ponto C. Assim, os ângulos (PA, PB) e (CA, CB) são suplementares e, portanto,

$$\cos (\alpha, \beta) = |\cos (PA, PB)| = |\cos (CA, CB)|. \qquad (1)$$

Além disso, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ possuem representantes nas retas que passam por CA e CB, respectivamente, pois $\vec{a}$ e $\overline{CA}$ são ambos perpendiculares ao plano α; $\vec{b}$ e $\overline{CB}$ são ambos perpendiculares ao plano β. Portanto, os ângulos (CA, CB) e $(\vec{a}, \vec{b})$ ou são iguais ou são suplementares. Vemos assim, que

$$|\cos (CA, CB)| = |\cos (\vec{a}, \vec{b})|. \qquad (2)$$

Lembrando que

$$\cos (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

as igualdades (1) e (2) nos permitem concluir que

$$\cos (\alpha, \beta) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

$$= \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Observemos que essa fórmula é válida mesmo no caso em que os planos α e β são paralelos, pois nesse caso $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares, isto é, $\vec{b} = x\vec{a}$; portanto

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |x|\ \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|, \quad \text{e} \quad \cos(\alpha, \beta) = 1.$$

EXEMPLO 2.8 – Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad x - y - z = 0.$$

Sabemos que os vetores normais a êsses planos são

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

Assim, o ângulo procurado, θ, é dado por

$$\cos\theta = |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

EXERCÍCIOS

1. Ache o ângulo entre os planos $-y + 1 = 0$ e $y + z + 2 = 0$.
2. Seja α o plano que passa pelos pontos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 1, 0)$ e β o plano que passa pelos pontos $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, 0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{i} + \vec{j}$. Ache o ângulo entre α e β.
3. Encontrar o ângulo entre o plano $2x - y + z = 0$ e o plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
4. Calcule o ângulo entre os planos $2x + y - 3z + 1 = 0$ e $3x - y - 2z - 3 = 0$.
5. Encontrar o ângulo entre os planos $3x + 4y = 0$ e $x - 4y + 5z - 2 = 0$.
6. Calcule os ângulos entre os planos diagonais (planos determinados pelas arestas opostas) do paralelogramo em que quatro vértices consecutivos são $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ e $C(0, 1, 1)$.

§ 2.4 – *Equação de uma Reta*

Um dos axiomas da geometria euclidiana diz que dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ determinam uma reta r. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, e sòmente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são linearmente dependentes. Portanto (veja a Fig. 2.6), o ponto P pertence a r se, e sòmente se, existe um escalar t tal que $\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$. Observando que $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, obtemos a equação vetorial de r:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2}. \qquad (1)$$

Em têrmos dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, a equação acima se escreve como

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = [x_1 + t(x_2 - x_1)]\vec{i} + [y_1 + t(y_2 - y_1)]\vec{j} + [z_1 + t(z_2 - z_1)]\vec{k}$$

e daí obtemos as *equações paramétricas* de r

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1). \end{aligned} \qquad (2)$$

O leitor deve observar que a cada escalar t corresponde um ponto da reta r e, reciprocamente, a cada ponto P de r, corresponde um número real t. Por exemplo, se $t = 0$, então $P = P_1$. Se $0 < t < 1$ então o ponto P está entre P_1 e P_2. Se $t < 0$ então P_1 está entre P e P_2 e se $t > 1$ então o ponto P_2 está entre P_1 e P.

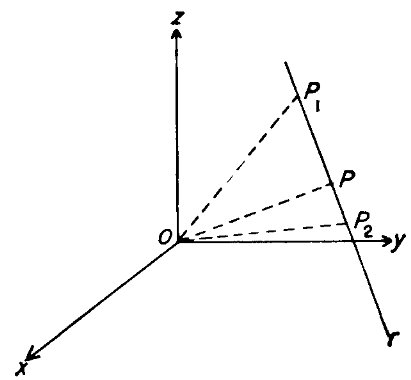


Figura 2.6

Observe que o segmento P_1P_2 é paralelo ao plano yz se, e sòmente se, $x_1 = x_2$; é paralelo ao plano xz se, e sòmente se, $y_1 = y_2$; é paralelo ao plano xy se, e sòmente se, $z_1 = z_2$. Assim, se a reta r não é paralela a nenhum dos planos acima, sua equação pode ser posta na *forma simétrica:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3)$$

EXEMPLO 2.9 – Encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(2, 3, 4)$.

Como P_1P_2 não é paralelo a nenhum dos planos xy, xz e yz, obtemos as equações simétricas

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{z - 3}{4 - 3}$$

isto é

$$x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

EXEMPLO 2.10 – Achar as equações da reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(1, 2, 3)$.

Essa reta é paralela ao plano yz, portanto, suas equações não podem ser postas na forma simétrica. Suas equações paramétricas são

$$x = 1 + t(1 - 1) = 1$$
$$y = 0 + t(2 - 0) = 2t$$
$$z = 1 + t(3 - 1) = 1 + 2t.$$

Observe que essa reta situa-se no plano $x = 1$.

Se uma reta r está situada sôbre o plano xy e passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1, 0)$ e $P_2(x_2, y_2, 0)$, suas equações paramétricas são

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$
$$z = 0.$$

Desde que r não pode (estando sôbre xy) ser paralela simultâneamente aos planos xz e yz, podemos sempre eliminar t nas equações acima. Por exemplo, se $x_2 - x_1 \neq 0$, então a primeira equação nos dá

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

e, substituindo na segunda equação, obtemos

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

isto é,

$$y = ax + b$$

em que

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \; b = y_1 - x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Assim, a equação de uma reta do plano xy é da forma

$$y = ax + b,$$
$$z = 0.$$

O leitor, possìvelmente, aprendeu em geometria analítica plana que a equação da reta é da forma $y = ax + b$. Devemos chamar porém sua atenção para o seguinte fato: em geometria analítica no espaço, a equação $y = ax + b$ é a equação do plano que passa pela reta $y = ax + b$, $z = 0$ e é paralela ao eixo dos z. Resumindo: a geometria analítica plana que o leitor aprendeu é a geometria dos objetos situados no plano $z = 0$.

EXEMPLO 2.11 – Encontrar a equação da reta que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e é paralela ao vetor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a essa reta se, e sòmente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\vec{a}$ são paralelos. Assim, a equação é $\overrightarrow{P_1P} = t\vec{a}$ ou seja

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + t\vec{a}$$

e as equações paramétricas são

$$x = x_1 + ta_1$$
$$y = y_1 + ta_2$$
$$z = z_1 + ta_3$$

Portanto, as equações paramétricas da reta que passa por $P_1(1, 0, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ são

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 0 - 1t = -t$$
$$z = 2 + 1t = 2 + t.$$

EXEMPLO 2.12 – Achar a equação da reta que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e é perpendicular ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

O vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é perpendicular ao plano $ax + by + cz + d = 0$. Portanto, a reta em questão é paralela ao vetor $\vec{v}$. As equações paramétricas dessa reta são (veja o exemplo 2.11)

$$x = x_1 + ta$$
$$y = y_1 + tb$$
$$z = z_1 + tc.$$

Uma reta r pode também ser obtida como a interseção de dois planos não paralelos (nem iguais) α e β.

Se o plano α é dado pela equação

$$a_1x + a_2y + a_3z + c = 0$$

e o plano β pela equação

$$b_1x + b_2y + b_3z + d = 0$$

então os vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ são normais aos planos α e β, respectivamente. Portanto, os planos α e β são paralelos (ou iguais) se, e sòmente se, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos (veja Fig. 2.7). Assim, α e β são iguais ou paralelos se, e sòmente se, existir um escalar s tal que $\vec{a} = s\vec{b}$. Em têrmos das coordenadas, a condição $\vec{a} = s\vec{b}$ pode ser expressa como

$$a_1 = sb_1, \quad a_2 = sb_2 \quad \text{e} \quad a_3 = sb_3.$$

Observe que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são paralelos, então $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vetor não nulo perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Note, também, que a reta r, interseção dos planos α e β, é também perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Assim, a reta r é paralela ao vetor $\vec{a} \times \vec{b}$.

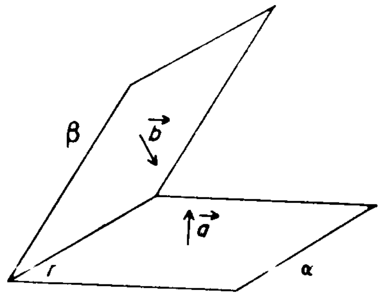


Figura 2.7

No Cap. 5, estudaremos um método para resolver sistemas de equações lineares. Em particular, poderemos encontrar as equações paramétricas da reta interseção dos planos α e β.

Observe que, se conhecermos um ponto de r, podemos obter suas equações paramétricas pelo método do Exemplo 2.11 desde que já sabemos que $\vec{a} \times \vec{b}$ é paralelo à reta r.

EXEMPLO 2.13 – Encontrar as equações paramétricas da reta r, dada como a interseção dos planos:

$$3x - y + z = 0$$
$$x + 2y - z = 0.$$

Os vetores normais a êsses planos são

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

então

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right\| = (1-2)\vec{i} - (-3-1)\vec{j} + (6+1)\vec{k}$$

$$= -i + 4\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Assim, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ e portanto os planos se interceptam segundo uma reta r, paralela ao vetor $\vec{a} \times \vec{b}$. Além disso, os dois planos passam pela origem (pois $x = y = z = 0$ é solução do sistema acima). Portanto, r passa pela origem. Vemos então (Exemplo 2.11) que as equações paramétricas de r são

$$x = 0 - 1t = -t$$
$$y = 0 + 4t = 4t$$
$$z = 0 + 7t = 7t.$$

EXEMPLO 2.14 – Encontrar a equação do plano que contém a reta r dada pelas equações

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

e passa pelo ponto $A(1, 2, 1)$.

Para cada escalar t,

$$(2x - y + z) + t(x + 2y - z) = 0 \qquad (2)$$

é a equação de um plano que passa por r, pois, tôda solução de (1) é também solução de (2). Observe, entretanto, que nem tôda solução de (2) é solução de (1) [exemplo: se $t = -1$, resulta que $x = 2$, $y = 0$ e $z = -1$ é solução de (2) mas não é solução de (1)]. Desde que o ponto $A(1, 2, 1)$ não pertence à reta r, existe um único plano que passa por A e contém r. Queremos determinar um escalar t, tal que o plano (2) passe por $A(1, 2, 1)$, isto é,

$$(2 - 2 + 1) + t(1 + 4 - 1) = 0$$

ou seja

$$1 + 4t = 0.$$

Portanto $t = -1/4$ e a equação do plano procurado é

$$7x - 6y + 5z = 0.$$

EXERCÍCIOS

1. Qual dos seguintes pares de planos se corta segundo uma reta?

   a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$
   $x - 4y + 2z + 1 = 0$
   b) $2x - y + 4z + 3 = 0$
   $4x - 2y + 8z = 0.$

2. Qual dos seguintes pares de equações representa uma reta?

   a) $x - y = 0$, $y - z = 0$ *b)* $x + y - 2z = 1$, $x + y - 2z = 2$ *c)* $2x - y + z = 2$, $6x - 3y + 3z = 6.$

3. Seja $A(1, 0, 2)$ e $B(2, 1, 0)$. Qual é o ponto que divide o segmento AB na razão de 3 para 4?

4. Ache as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelos pontos $A(0, 1, 2)$ e $B(1, 2, 1)$.

5. Quais são as equações da reta que passa pelos pontos $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(2, 3, 4)$?

6. Ache as equações da reta que passa pelo ponto $A(0, 1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

7. Encontre as equações da reta que passa pelo ponto $Q(1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 2z - 1 = 0$.

8. Ache a equação da reta que passa pelo ponto $A(1, 0, 1)$ e é paralela aos plan s $2x + 3y + z + 1 = 0$ e $x - y + z = 0$.

9. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z - 1 = 0$.

   Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A(1, 0, -1)$ e contém a reta r.

§ 2.5 - *Ângulo Entre Duas Retas*

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer do espaço. Pode ocorrer um dos três casos:

1. As retas r_1 e r_2 se interceptam em um ponto.
2. As retas r_1 e r_2 são paralelas ou (iguais).
3. As retas r_1 e r_2 não são paralelas nem se interceptam em um ponto; nesse caso, diremos que essas retas são *reversas*.

No primeiro caso (veja a Fig. 2.8), as retas r_1 e r_2 determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre r_1 e r_2, indicado por (r_1, r_2), é, por definição, o menor dêsses ângulos.

Se as retas r_1 e r_2 são paralelas ou iguais, então diremos que o ângulo entre elas é zero.

Se as retas r_1 e r_2 são reversas, escolha um ponto qualquer P de r_1 e trace por P a reta r_2', paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 será, por definição, o ângulo entre as retas r_1 e r_2'. Vê-se fàcilmente que êsse ângulo não depende da escolha do ponto P (veja a Fig. 2.9).

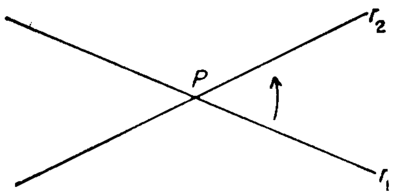


Figura 2.8

Observe que se os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos às retas r_1 e r_2, respectivamente, então em qualquer dos três casos acima, temos

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|$$

$$= \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\|}.$$

EXEMPLO 2.15 - Achar o ângulo entre a reta r_1 determinada pela interseção dos planos

$$x + y - z + 1 = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

e a reta r_2 cujas equações paramétricas são

$$x = 2t$$

$$y = 1 - t$$

$$z = 2 + 3t.$$

Devemos encontrar vetores paralelos a essas retas. O vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ é normal ao plano $x + y - z + 1 = 0$ e o vetor $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ é normal ao plano $2x - y + z = 0$. Portanto, o vetor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(\vec{j} + \vec{k})$$

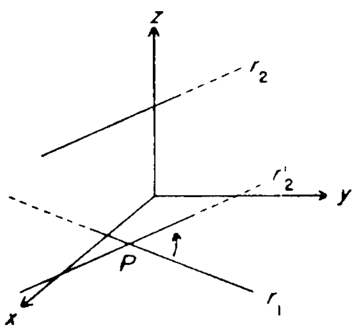


Figura 2.9

é paralelo à reta r_1. Assim, o vetor $\vec{v}_1 = \vec{j} + \vec{k}$ é paralelo à reta r_1. O vetor $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ é paralelo à reta r_2 (veja o Exemplo 2.11). Portanto,

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|$$

$$= \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\|}$$

$$= \frac{|0 \cdot 2 + 1(-1) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \, \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

§ 2.6 - *Distância de um Ponto a um Plano*

Sejam $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e α um plano (veja a Fig. 2.10). Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano α. Trace por P_0 a reta perpendicular ao plano α. Seja P_1 o ponto de interseção dessa perpendicular com o plano α. Se $\vec{u}$ é o vetor unitário de P_0P_1, temos $\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = |\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{u}|$ e a desigualdade de Schwarz nos dá $|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{u}| < \|\vec{u}\|\,\|\overrightarrow{P_0P}\|$. Assim $\|\overrightarrow{P_0P_1}\| \leq \|\overrightarrow{P_0P}\|$ ou seja $d(P_0, P_1) \leq d(P_0, P)$.

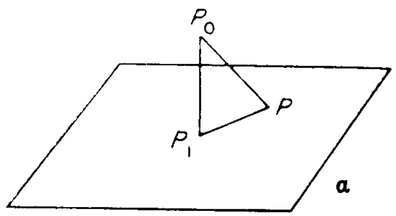


Figura 2.10

Portanto, P_1 é o ponto de α mais próximo de P_0. Assim, é natural dizer que a *distância de* P_0 *a* α, indicada por $d(P_0, \alpha)$, é a distância de P_0 a P_1.

Já sabemos que se a equação de α é $ax + by + cz + d = 0$ então o vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é perpendicular ao plano α. Portanto, os vetores $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Assim $\overrightarrow{P_0P_1} = t\vec{v}$, para algum escalar t. Além disso, como $\overrightarrow{P_0P_1}$ é perpendicular a $\overrightarrow{P_1P}$, e $P_0 \neq P_1$, então

$$\begin{aligned}
d(P_0, \alpha) &= \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \\
&= \|\overrightarrow{P_0P}\|\, |\cos(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P})| \\
&= \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\,\|\overrightarrow{P_0P}\|\,|\cos(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P})|}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\|} \qquad (1) \\
&= \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P}|}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\|}.
\end{aligned}$$

Observando que $\overrightarrow{P_0P_1} = t\vec{v}$, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, e que $d = -(ax + by + cz)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P} &= t(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)) \\
&= -t(d + ax_0 + by_0 + cz_0)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{P_0P_1}\| &= |t|\,\|\vec{v}\| \\
&= |t|\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões de (2) em (1), obtemos

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

EXEMPLO 2.16 - Calcular a distância do ponto $P_0(1, 2, 3)$ ao plano α cuja equação é $x - 2y + z - 1 = 0$.

A fórmula acima nos dá

$$\begin{aligned}
d(P_0, \alpha) &= \frac{|1 - 4 + 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

§ 2.7 - *Distância de um Ponto a uma Reta*

Sejam $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e r uma reta (veja a Fig. 2.11).

Baixemos por P_0 a perpendicular à reta r. Seja P o ponto onde essa perpendicular intercepta r. A distância entre o ponto P_0 e a reta r, indicada por $d(P_0, r)$, é, por definição, o comprimento do segmento $\overrightarrow{P_0P}$. Assim,

$$d(P_0, r) = \|\overrightarrow{P_0P}\|.$$

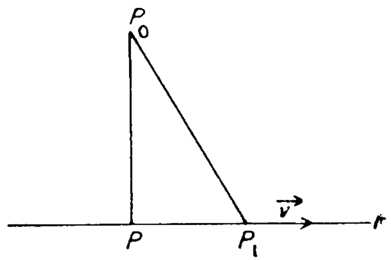


Figura 2.11

Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de r e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é um vetor paralelo à reta r, então

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{P_0P}\|^2 &= \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 - \|\overrightarrow{PP_1}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 - \left|\frac{\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right|^2 \\
&= \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 - \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{v}|^2}{\|\vec{v}\|^2} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

EXEMPLO 2.17 – Calcular a distância do ponto $P_0(1, -1, 2)$ à reta r cujas equações paramétricas são

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -t$$
$$z = 2 - 3t.$$

A reta r passa pelo ponto $P_1(1, 0, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ (veja o Exemplo 2.11). Assim,

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (1-1)\vec{i} + (0+1)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = \vec{j}$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v} = -3\vec{i} - 2\vec{k}$$
$$\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}\| = \sqrt{13}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{14}.$$

Portanto,

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

§ 2.8 – *Distância Entre Duas Retas*

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. Mostraremos que existe sempre uma reta r, perpendicular às retas r_1 e r_2 e que as intercepta nos pontos A_1 e A_2, respectivamente. A_1 é o ponto de r_1 mais próximo do ponto A_2, e, recìprocamente, A_2 é o ponto de r_2 mais próximo do ponto A_1. É natural portanto dizer que a *distância entre as retas r_1 e r_2*, indicada por $d(r_1, r_2)$, é a distância entre os pontos A_1 e A_2.

Mostraremos, agora, a existência da reta r. Se as retas r_1 e r_2 são paralelas, escolha um ponto qualquer $A_1(x_1, y_1, z_1)$ de r_1 e trace por A_1 a reta r perpendicular à reta r_2 (veja a Fig. 2.12).

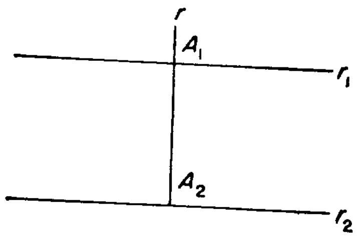


Figura 2.12

Como as retas r_1 e r_2 são paralelas, a reta r é também perpendicular à reta r_1. Assim,

$$d(r_1, r_2) = d(A_1, A_2)$$

que aprendemos calcular em § 2.7.

EXEMPLO 2.18 – Calcular a distância entre as retas r_1 e r_2 cujas equações são

$$r_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$$

e

$$r_2 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Ambas essas retas são paralelas ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ (veja § 2.4). Portanto r_1 é paralela a r_2. O ponto $A_1(1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Assim,

$$d(r_1, r_2) = d(A_1, r_2)$$

que pode ser calculada como no Exemplo 2.17.

Se as retas r_1 e r_2 não são paralelas, escolha pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ em r_1 e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ em r_2.

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores (não nulos) paralelos às retas r_1 e r_2, respectivamente (veja a Fig. 2.13).

O vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, sendo perpendicular aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, é também perpendicular às retas r_1 e r_2. Queremos encontrar uma reta r, paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ e que intercepta as retas r_1 e r_2. Seja π o plano que passa por P_2 e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ e v_2. É claro, então, que a reta r_2 está situada nesse plano. Queremos mostrar que π contém uma reta r perpendicular às retas r_1 e r_2 e interceptando ambas. A reta r_1 intercepta π. Realmente, se r_1 não intercepta π, então r_1 é paralela a π e, portanto, existe uma r_1' no plano π, paralela à reta r_1. Como as retas r_1 e r_2 não são paralelas, então r_1' intercepta r_2 em um ponto Q. Assim, r_1' e r_2 retas distintas do plano π, passando pelo ponto Q e ambas perpendiculares ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, o que é impossível. Portanto r_1 não é paralela a π e intercepta êsse plano em um ponto A_1. Seja r a reta que passa por A_1 e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Assim, r é perpendicular a r_1 e r_2, interceptando ambas essas retas nos pontos A_1 e A_2, respectivamente.

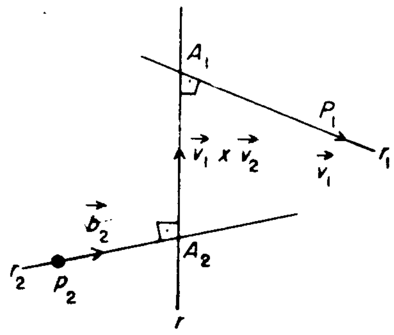


Figura 2.13

EXEMPLO 2.19 – Achar as equações da reta r que intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas essas retas. As equações de r_1 e r_2 são

$$r_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = \phantom{2+{}} 4t \end{cases}$$

$$r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}.$$

As retas r_1 e r_2 passam pelos pontos $P_1(1, 2, 0)$ e $P_2(-1, 1, -2)$ e são paralelas aos vetores $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, respectivamente. Considere o vetor

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\| = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

O plano π que passa pelo ponto P_2 e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2$ tem a equação (veja §2.2)

$$\left\| \begin{matrix} x+1, & y-1, & z+2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\| = 5(x+1) - 4(y-1) + 1(z+2) = 0,$$

isto é,

$$5x - 4y + z + 11 = 0.$$

Para achar a interseção da reta r_1 com o plano π, substituímos as equações de r_1 na equação de π e encontramos

$$5(1+t) - 4(2+3t) + 4t + 11 = 0,$$

isto é,

$$t = 8/3.$$

Assim o ponto de interseção de r_1 com π é

$$A_1(11/3,\ 10,\ 32/3).$$

A reta r passa por A_1 e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Portanto, as equações simétricas de r são

$$x - 11/3 = y - 10 = -z + 32/3$$

ou

$$3x - 11 = 3y - 30 = -3z + 32.$$

Para calcular a distância entre as retas r_1 e r_2 não é necessário achar as equações da reta r. Essa distância pode ser expressa em têrmos dos pontos P_1 e P_2 e dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Realmente, se r_1 e r_2 não são paralelas, considere o plano π_2 que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1 (veja a Fig. 2.14).

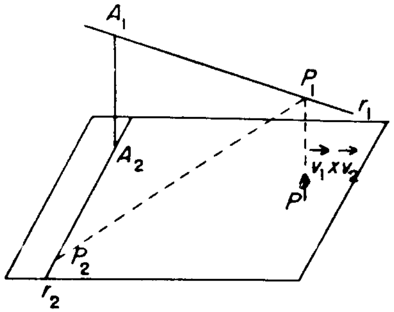


Figura 2.14

Baixe por P_1 a perpendicular ao plano π_2. Seja P o ponto onde ela encontra π_2. Observe que o segmento P_1P é eqüipolente ao segmento A_1A_2 e portanto paralelo ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Além disso, $\|\overrightarrow{P_1P}\|$ é a projeção ortogonal de P_1P_2 sôbre a reta que passa por P_1 e P. Assim,

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= \|\overrightarrow{A_1A_2}\| \\ &= \|\overrightarrow{P_1P}\| \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.20 – Calcular a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z$$

e

$$r_2 \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

As retas r_1 e r_2 passam pelos pontos $P_1(-1, 1, 0)$ e $P_2(0, 0, 1)$ e são paralelas aos vetores $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, respectivamente. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix} \right| = 4(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = 4\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 4\sqrt{3}$$

e

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 4(-1 - 1 + 1) = -4.$$

Portanto,

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 2.9 – *Interseção de Planos*

Consideremos três planos, α_1, α_2, α_3, dados pelas equações

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

respectivamente.

Já sabemos que o vetor $\vec{v}_s = a_s\vec{i} + b_s\vec{j} + c_s\vec{k}$ é normal ao plano α_s, $s = 1, 2, 3$. Sabemos, ainda, que dois planos podem coincidir, ser paralelos ou interceptarem-se segundo uma reta. Além disso, vimos que a condição necessária e suficiente para que α_1 e α_2 se interceptem segundo uma reta é que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq 0$. Procuramos a condição para que os planos α_1, α_2 e α_3 se interceptem segundo um ponto; então α_1 e α_2 se interceptam segundo uma reta r paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, e êste vetor é não nulo. Além disso, a reta r intercepta α_3 em um ponto (isto é, r não é paralela nem está contido em α_3). Portanto $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 \neq 0$. Reciprocamente, se $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 \neq 0$, então $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ e portanto α_1 e α_2 se interceptam segundo uma reta r, a qual não é paralela a α_3. Assim, *a condição necessária e suficiente para que os planos α_1, α_2 e α_3 se interceptem em um ponto é que*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| \neq 0 \qquad (2)$$

Se $[\vec{v}_1, \vec{v}_2\ \vec{v}_3] = 0$, existem três possibilidades:

1.ª) Não existe ponto comum aos três planos.

2.ª) Existe uma reta comum aos três planos.

3.ª) Os três planos coincidem.

No Cap. 5, quando estudarmos os sistemas de equações lineares, estaremos em condições de dizer se três planos se interceptam ou não e, em caso afirmativo, obter a equação dessa interseção. Se os três planos se interceptam em um ponto, podemos fàcilmente achar as coordenadas dêsse ponto, utilizando nossos conhecimentos sôbre vetores. Realmente, defina, a partir dos coeficientes do sistema (1), os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{c} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \\ \vec{d} &= d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}. \end{aligned}$$

Observe que o sistema (1) pode ser escrito sob a forma vetorial

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}. \qquad (3)$$

Para resolver essa equação vetorial em relação a x, multipliquemos ambos os membros de (3) pelo vetor $\vec{b} \times \vec{c}$,

$$x\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + y\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + z\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Lembrando que

$$\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0,$$

obtemos

$$x\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

e, desde que o valor de um determinante não se altera quando trocamos as linhas pelas colunas, a condição (2) nos diz que

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| \neq 0$$

e, portanto,

$$x = \frac{\begin{Vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}}$$

Multiplicando os membros de (3) por $\vec{a} \times \vec{c}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$, obtemos, analogamente,

$$y = \frac{\begin{Vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}}$$

Para lembrar as fórmulas acima, observe que o denominador é o determinante dos coeficientes do sistema. O numerador de x é o determinante obtido a partir do denominador, substituindo os coeficientes de x pelos têrmos constantes, do segundo membro. Regra análoga se aplica para y e z.

EXEMPLO 2.21 – Encontrar a interseção dos planos

$$x + y + z = 0$$
$$x + 2y + z = 1$$
$$x + y + 3z = 2.$$

O determinante do sistema é

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} = 2.$$

Portanto êsses três planos se interceptam segundo um ponto. As coordenadas dêsse ponto são

$$x = \frac{\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}}{2} = -2 \qquad y = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}}{2} = 1$$

e

$$z = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}}{2} = 1.$$

EXERCÍCIOS

(§2.5 a §2.9)

1. Mostre que os planos $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r.

   Ache a equação da reta que passa pelo ponto $A(1, 0, 1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.

2. Calcule o ângulo entre as retas

$$r_1 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{e } r_2\text{: } x - 1 = y - 1 = \sqrt{2}\, z.$$

3. Encontrar o ângulo e a distância entre as retas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

4. Repetir o exercício 3 para as retas

$$r_1 \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

5. Calcule a distância do ponto $P(1, 0, 2)$ ao plano $x + y - z = 0$.

6. Seja r a reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(0, 1, 1)$. Calcule a distância do ponto $C(2, 1, 2)$ à reta r.

7. Seja α o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 1, 0)$. Encontre a distância do ponto $C(0, 0, 1)$ ao plano α.

8. Seja r_1 a reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 2, 0)$, e r_2 a reta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$$

a) Encontre as equações da reta perpendicular às retas r_1 e r_2.

b) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

9. Considere os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$ e $D(2, 2, 1)$.

a) Ache as equações dos planos α e β que passam pelos pontos A, B, C e A, B, D respectivamente.

b) Calcule $\cos(\alpha, \beta)$

c) Calcule $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

d) Qual é a distância entre as retas que passam por A, B e C, D, respectivamente?

e) Encontrar as equações da reta que passa por A e é perpendicular à interseção do plano α com o plano xy.

10. Verifique se os seguintes ternos de planos se interceptam segundo um ponto. Em caso afirmativo, ache as coordenadas dêsse ponto.

a) $2x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 2$, $x + y + 4z = 3$

b) $x - 2y + z = 0$, $2x - 4y + 2z = 1$, $x + y = 0$

c) $2x - y + z = 3$, $3x - 2y - z = -1$, $2x - y + 3z = 7$

d) $3x + 2y - z = 8$, $2x - 5y + 2z = -3$, $x - y + z = 1$.

Cônicas e Quádricas

Capítulo 3

§ 3.1 – *Cônicas*

Tôdas as equações que obtivemos até agora foram lineares, isto é, equações que envolvem apenas têrmos do primeiro grau em x, y e z. Nessa seção estudaremos as curvas planas que podem ser representadas pelas equações do segundo grau em x e y. Elas são o círculo, a elipse, a parábola e a hipérbole. Essas curvas podem ser obtidas como a interseção de um cone circular com um plano. Por essa razão elas são tradicionalmente chamadas *seções cônicas*. Tôdas as curvas que considerarmos nesta seção estarão situadas no plano xy.

Elipse

Uma elipse é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, situados no mesmo plano é constante. Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse. Esta curva é obtida interceptando o cone por um plano que corte o eixo do cone.

Seja $2c$ a distância entre F_1 e F_2 (distância focal). Se P é um ponto qualquer, então a desigualdade triangular, § 1.7, exercício 19*b*, nos dá

$$||\overrightarrow{F_1F_2}|| \leq ||\overrightarrow{F_1P}|| + ||\overrightarrow{F_2P}||.$$

Portanto, se a é um número real maior que c, a equação

$$||\overrightarrow{F_1P}|| + ||\overrightarrow{F_2P}|| = 2a \qquad (1)$$

é a equação de uma elipse com focos F_1 e F_2 (se $a = c$, (1) é a equação do segmento F_1F_2). O ponto médio do segmento F_1F_2 é o *centro* da elipse. Se $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ (veja a Fig. 3.1), a equação (1) pode ser escrita como

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou, racionalizando-a,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Pondo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (pois $a^2 - c^2 > 0$), a equação pode ainda ser escrita como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

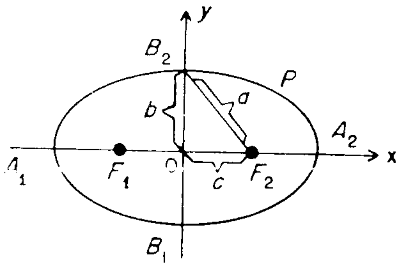


Figura 3.1

Essa equação nos mostra que $\|\overrightarrow{OA_1}\| = \|\overrightarrow{OA_2}\| = a$ e $\|\overrightarrow{OB_1}\| = \|\overrightarrow{OB_2}\| = b$, pois os eixos OX e OY interceptam a elipse nos pontos $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ e $B_1(0, -b)$, $B_2(0,b)$, respectivamente. Êstes pontos são os *vértices* da elipse e os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são os *eixos*. Os números $\|\overrightarrow{F_1P}\|$ e $\|\overrightarrow{F_2P}\|$ são os *raios focais* do ponto P; a *excentricidade* da elipse é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Desde que $c < a$, a *excentricidade* de uma elipse é um número real não-negativo menor que 1.

O *círculo* (ou circunferência) de raio r e centro $C(c_1, c_2)$ é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem à equação

$$\|\overrightarrow{PC}\| = r, \tag{3}$$

isto é,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + d = 0 \tag{4}$$

em que $d = c_1^2 + c_2^2 - r^2$.

Observe que se $F_1 = F_2 = C$, então a elipse (1) reduz-se ao círculo de centro C e raio a. Além disso, $e = 0$ (pois $c = 0$). Assim, um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

Hipérbole

Uma hipérbole com focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que

$$\left|\|\overrightarrow{F_1P}\| - \|\overrightarrow{F_2P}\|\right| \text{ é constante.}$$

A hipérbole é a curva obtida interceptando o cone por um plano paralelo ao eixo do cone.

Observe que $\overrightarrow{F_1P} - \overrightarrow{F_2P} = \overrightarrow{F_1F_2}$. Assim (exercício 19*c*, § 1.7), obtemos a desigualdade

$$\left|\|\overrightarrow{F_1P}\| - \|\overrightarrow{F_2P}\|\right| \leq \|\overrightarrow{F_1F_2}\|.$$

Pondo $\|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2c$, então se $0 < a < c$, resulta a equação

$$\left|\|\overrightarrow{F_1P}\| - \|\overrightarrow{F_2P}\|\right| = 2a \tag{5}$$

de uma hipérbole com focos F_1 e F_2. Os números $\|\overrightarrow{F_1P}\|$ e $\|\overrightarrow{F_2P}\|$ são os *raios focais* do ponto P.

Observe que, se $a = c$, a equação (5) descreve os pontos P, situados sôbre a reta que passa por F_1 e F_2 e não interiores ao segmento F_1F_2 (P pode ser F_1 e F_2). Se $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ (veja a Fig. 3.2), a equação (5) nos dá

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou seja

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Desde que $0 < a < c$, pondo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Examinando a equação acima, concluímos que:

a) A hipérbole é simétrica em relação aos eixos OX e OY, isto é, se (x, y) é um ponto da hipérbole, então os pontos $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$ também pertencem à hipérbole.

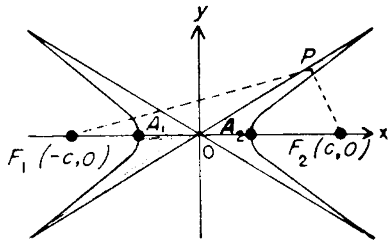


Figura 3.2

b) O eixo OX intercepta a hipérbole nos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$; êstes pontos chamam-se os ***vértices** da* hipérbole. O eixo OY não corta a hipérbole (pois a equação nos mostra que $x^2 \geq a^2$).

c) A equação (6) nos mostra ainda que

$$-\frac{x}{a} < \frac{y}{b} < \frac{x}{a} \text{ se } x > 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x}{a} > \frac{y}{b} > \frac{x}{a} \text{ se } x < 0.$$

Portanto a parte da hipérbole com $x > 0$ está situada abaixo da reta $y = \dfrac{b}{a}x$ e acima da reta $y = -\dfrac{b}{a}x$. A parte da hipérbole com $x < 0$ situa-se acima de $y = \dfrac{b}{a}x$ e abaixo de $y = -\dfrac{b}{a}x$. Essas retas chamam-se as *assíntotas* da hipérbole. Elas gozam da seguinte propriedade: à medida que $|x|$ cresce, a hipérbole se aproxima dessas retas.

Parábola

Sejam r uma reta e F um ponto (não situado sôbre r), ambos no plano xy.

Uma parábola, com *diretriz* r e foco F, é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ eqüidistantes de r e de F.

A parábola é a curva obtida interceptando o cone por um plano paralelo à geratriz do cone.

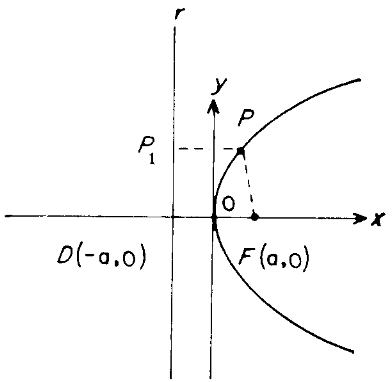


Figura 3.3

A equação mais simples da parábola é obtida quando a diretriz r (veja a Fig. 3.3) é perpendicular ao eixo dos x, o foco está sôbre êsse eixo, e a origem 0 é o ponto médio do segmento DF (D é o ponto onde r corta o eixo dos x). Trace por P a perpendicular à reta r. Seja P_1 o ponto de interseção dessa perpendicular com r. Assim, P pertence à parábola se, e sòmente se,

$$\|\overrightarrow{FP}\|^2 = \|\overrightarrow{PP_1}\|^2. \tag{7}$$

Sejam $F(a, 0)$ e $D(-a, 0)$. Observando que

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DP_1} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{DP_1} = (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{j})\vec{j} = y\vec{j}$$

obtemos

$$\overrightarrow{FP} = (x - a)\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PP_1} = [(-a - x)\vec{i} - y\vec{j}] + y\vec{j}$$
$$= -(x + a)\vec{i}.$$

Assim, (7) nos dá

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

ou seja

$$y^2 = 4ax. \tag{8}$$

Examinando a equação acima, concluímos que:

a) Se o foco está à direita da diretriz, então $a > 0$ e portanto $x \geq 0$; assim, a parábola está situada à direita do eixo dos y.

b) Se o foco está à esquerda da diretriz, $a < 0$ e portanto a parábola está à esquerda do eixo dos y.

c) O eixo dos x corta a parábola em $C(0, 0)$. Êsse ponto chama-se o *vértice* da parábola.

EXERCÍCIOS

1. Ache o centro e o raio dos seguintes círculos:

   a) $x^2 + y^2 = 16$ *c*) $x^2 + y^2 + 5x - 11y = 32$

   b) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ *d*) $x^2 + y^2 - 3y = 0$.

2. Escreva a equação do círculo cujo centro é $C(2, -3)$ e cujo raio é 2.

3. Ache as equações dos círculos que satisfazem às seguintes condições:

   a) passa pelos pontos $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ e tem raio 8;

   b) passa pelos pontos $A(5, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(-2, -6)$;

   c) o diâmetro é o segmento que une os pontos $A(1, 2)$ e $B(2, -1)$;

   d) tem o centro situado sôbre a reta $x - 2y = 6$ e passa pelos pontos $A(1, 4)$ e $B(-2, 3)$.

4. Escreva as equações das seguintes elipses:

   a) os focos são $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ e a soma dos raios focais é $2a$;

   b) os focos são $F_1(-1, 2)$, $F_2(3, 2)$ e a soma dos raios focais é 6;

   c) a soma dos raios focais é 2 e os focos são $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$.

5. Mostre que

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$$

   é a equação de uma elipse com centro $C(p, q)$.

6. Sejam e a excentricidade e $2c$ a distância entre os focos da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   a) Mostre que $c = ae$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$.

   b) As retas $x = -\dfrac{a}{e}$ e $x = \dfrac{a}{e}$ chamam-se *diretrizes* da elipse, relativas aos focos $F_1(-ae, 0)$ e $F_2(ae, 0)$, respectivamente. Seja P um ponto qualquer. Trace por P a perpendicular à diretriz.

Seja D o ponto onde essa perpendicular corta a diretriz e F_i o foco correspondente a essa diretriz. Mostre que P pertence à elipse se, e sòmente se, $\|\overrightarrow{PF_i}\| = e\|\overrightarrow{PD}\|$.

7. Escreva as equações das seguintes hipérboles:

a) os focos são $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ e a diferença dos raios focais é $2a$;

b) a diferença dos raios focais é 3 e os focos são $F_1(3, -1)$, $F_2(3, 4)$.

c) os focos são $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$ e a diferença entre os raios focais é 2.

8. Mostre que

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

é a equação de uma hipérbole com centro $C(p, q)$ e focos $F_1(p-c, q)$, $F_2(p+c, q)$, onde $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

9. A *excentricidade* da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é $e = \dfrac{c}{a}$, onde $c =$ $= \sqrt{a^2+b^2}$; desde que $c > a$, então $e > 1$.

a) Mostre que $c = ae$, $e^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2}$, $\|\overrightarrow{F_1P}\| = |ex + a|$ e $\|\overrightarrow{F_2P}\| =$ $= |ex - a|$, se $P(x, y)$ é um ponto da hipérbole.

b) As retas $x = -\dfrac{a}{e}$ e $x = \dfrac{a}{e}$ são as *diretrizes* relativas aos focos $F_1(-ae, 0)$ e $F_2(ae, 0)$, respectivamente. Trace por um ponto P a perpendicular às diretrizes. Seja D o ponto onde essa perpendicular corta a diretriz correspondente ao foco F_i. Mostre que P pertence à hipérbole se, e sòmente se,

$$\|\overrightarrow{PF_i}\| = e\,\|\overrightarrow{PD}\|.$$

10. Considere as assíntotas $y = -\dfrac{b}{a}x$, $y = \dfrac{b}{a}x$ da hipérbole do exercício anterior. Mostre que, à medida que $|x|$ cresce, a hipérbole se aproxima de suas assíntotas.

11. Escreva as equações das seguintes parábolas:

a) foco $F(0, 2)$ e diretriz $y = -2$
b) foco $F(0, 2)$ e diretriz $y = -4$
c) foco $F(0, -3)$ e diretriz $y = 3$
d) foco $F(0, 0)$ e diretriz $x + y = 2$.

12. Mostre que

$$(y-p)^2 = 4a(x-q)$$

é a equação de uma parábola com vértice $C(p, q)$, foco $F(p+a, q)$ e diretriz $x = p - a$.

13. Sejam r uma reta, F um ponto não pertencente a r e e um número real positivo. Trace por um ponto P a perpendicular a r. Seja D o ponto onde essa perpendicular corta r. Mostre que

$$\|\overrightarrow{PF}\| = e\,\|\overrightarrow{PD}\|$$

é a equação de uma cônica com diretriz r e foco F. Se $0 < e < 1$, a equação é de uma elipse; se $e = 1$, de uma parábola; e se $e > 1$, de uma hipérbole.

§ 3.2 – *Superfícies Quádricas*

As únicas superfícies que consideramos até agora foram os planos: são as superfícies que podem ser representadas pelas equações lineares em x, y e z. Nesta seção, estudaremos as superfícies que podem ser representadas pelas equações do segundo grau nessas variáveis. Chamam-se *quádricas*. Elas são: a esfera, o elipsóide, dois tipos de hiperbolóides, dois tipos de parabolóides, os cilindros e os cones quádricos.

Seja c uma curva situada em um plano π.

O *cilindro* de diretriz c é a superfície descrita por uma reta r que se move ao longo da curva c, perpendicularmente ao plano π(veja a Fig. 3.4). A reta r chama-se a *geratriz* do cilindro.

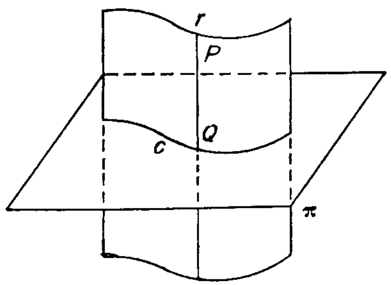


Figura 3.4

Se o plano π é o plano xy e a curva c é dada pela equação $f(x, y) = 0$, então um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro gerado por c se, e sòmente se, o ponto $Q(x, y)$ pertence à curva c. Assim, $f(x, y) = 0$ é a equação, em geometria no espaço, do cilindro gerado por c. Se c é uma cônica, isto é, $f(x, y)$ é um polinômio do segundo grau, o cilindro diz-se *quádrico*. Temos, assim, o cilindro circular, o cilindro elíptico, o cilindro parabólico e o cilindro hiperbólico, conforme c seja um círculo, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

EXEMPLO 3.1 – A equação $x^2 = 4ay$ representa no plano uma parábola e no espaço um cilindro parabólico (veja a Fig. 3.5).

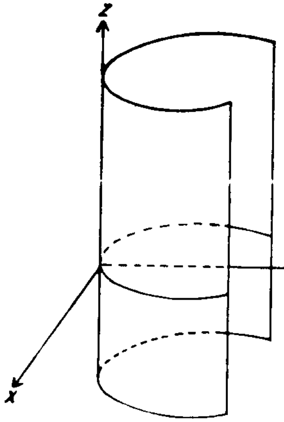


Figura 3.5

Sejam π um plano, c uma curva em π e r uma reta situada em π.

A superfície descrita pela curva c quando o plano π gira ao redor da reta r, chama-se uma *superfície de revolução* (veja a Fig. 3.6, em que o plano π é o yz e a reta r é o eixo dos z).

Seja P um ponto da superfície de revolução. Trace por P o plano perpendicular à reta r. Sejam C e Q os pontos onde o plano corta a reta r e a curva c, respectivamente. Então

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{CQ}\|. \tag{1}$$

Se π é o plano yz, r é o eixo dos z e a curva c é dada pela equação $y = f(z)$, então (1) nos dá a equação

$$x^2 + y^2 = (f(z))^2 \tag{2}$$

da superfície de revolução gerada pela curva c. Se c é uma reta paralela a r, obtemos um cilindro de revolução. Se c é uma reta que intercepta r segundo um ângulo agudo, obtemos um cone circular. Se c é uma cônica (elipse, hipérbole e parábola) e r é um eixo dessa cônica, obtemos o elipsóide, o hiperbolóide e o parabolóide de revolução, respectivamente. Assim, as *quádricas de revolução* são superfícies obtidas quando c é uma reta ou uma cônica.

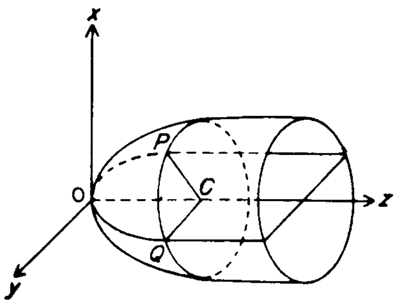


Figura 3.6

EXEMPLO 3.2 – A equação do parabolóide de revolução gerado pela parábola $y^2 = 4az$ (veja a Fig. 3.6) é

$$x^2 + y^2 = 4az.$$

Observe que $y = \pm 2\sqrt{az}$ e, na verdade, há duas escolhas para a função $y = f(z)$ de (2), a saber $y = 2\sqrt{az}$ e $y = -2\sqrt{az}$. Elas descrevem as porções da parábola situadas à esquerda e à direita do eixo dos z, respectivamente. Observe que os planos xz e yz interceptam o parabolóide segundo as parábolas $x^2 = 4az$ e $y^2 = 4az$, respectivamente.

EXEMPLO 3.3 – Se c é um círculo de raio r, situado em um plano π, e l é uma reta de π, que passa pelo centro C do círculo c, a superfície de revolução descrita por c, quando π gira ao redor de l, é a esfera de centro $C(c_1, c_2, c_3)$ e raio r. Esta *esfera* pode ser descrita, mais simplesmente, como o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem à equação

$$\|\overrightarrow{CP}\| = r \tag{3}$$

ou seja, $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$, isto é,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2c_1x - 2c_2y - 2c_3z + d = 0 \tag{4}$$

em que $d = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - r^2$.

Estudaremos agora os tipos mais gerais de quádricas (não necessàriamente cilindros e quádricas de revolução). O método que usaremos é o seguinte: dada a equação da quádrica, procuraremos descrever sua forma, estudando as curvas obtidas interceptando essa quádrica por planos convenientemente escolhidos.

O elipsóide

Consideremos a superfície cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que, se $P(x, y, z)$ é um ponto dessa superfície (veja a Fig. 3.7), então o ponto $Q(-x, -y, -z)$ também pertence a essa superfície. Assim a superfície é simétrica em relação à origem. Além disso, o ponto $P'(-x, y, z)$ também pertence a essa superfície. Portanto essa superfície é simétrica em relação ao plano yz. Ela é igualmente simétrica em relação aos planos xy e xz. A equação (5) nos diz ainda que $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ e $|z| \leq c$.

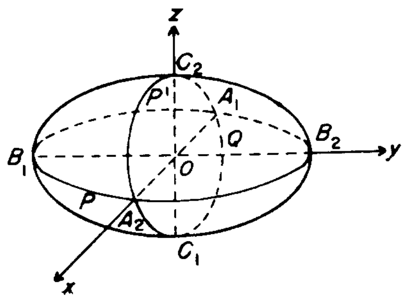


Figura 3.7

Portanto essa superfície está no paralelepípedo determinado pelos planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ e $z = \pm c$ e a superfície toca êsse paralelepípedo nos pontos $A_1(-a, 0, 0)$, $A_2(a, 0, 0)$, $B_1(0, -b, 0)$, $B_2(0, b, 0)$, $C_1(0, 0, -c)$ e $C_2(0, 0, c)$. Êsses pontos são os *vértices*. Os planos xy, xz e yz interceptam a superfície segundo as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente.

Se $|k| < c$, o plano $z = k$ intercepta a superfície segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos dessa elipse diminuem à medida que $|k|$ aumenta. As interseções da superfície com os planos $x = k$, $|k| < a$ e $y = k$, $|k| < b$ são também elipses. A superfície chama-se, por essa razão, um *elipsóide*. Observe que, se dois dos três números a, b e c são iguais, a superfície é um elipsóide de revolução. Se $a = b = c$, a superfície é uma esfera.

O hiperbolóide de uma fôlha

Consideremos a superfície cuja equação é (veja a Fig. 3.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{onde} \quad a, b, c > 0. \tag{6}$$

O plano xy intercepta essa superfície segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

e os planos xz e yz, segundo as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; x = 0,$$

respectivamente.

O plano $z = k$ intercepta essa superfície segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k. \tag{7}$$

Os eixos dessa elipse aumentam à medida que $|k|$ cresce. Essa superfície chama-se *hiperbolóide de uma fôlha*. Observe que, se $a = b$, então (7) é a equação de um círculo com centro $C(0, 0, k)$ e portanto a superfície é um hiperbolóide de revolução.

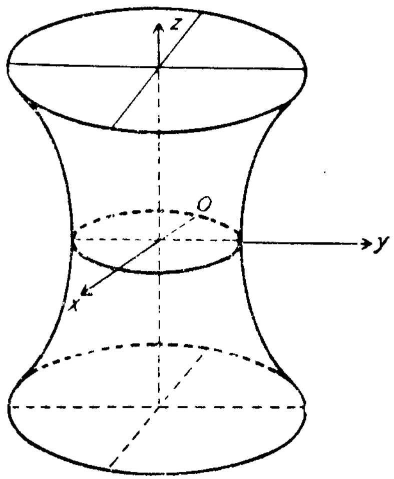


Figura 3.8

O hiperbolóide de duas fôlhas

Consideremos a superfície cuja equação é

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

onde a, b, $c > 0$. Se $|k| < b$, o plano $y = k$ não intercepta essa superfície (veja a Fig. 3.9) pois, para $-b < y < b$, o primeiro membro de (8) é negativo, enquanto o segundo membro é positivo. Se $|k| > b$, o plano $y = k$ intercepta (8) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, \; y = k. \tag{9}$$

Vemos, assim, que essa superfície tem duas *fôlhas*, uma na região $y \geq b$ e outra na região $y \leq -b$.

Os planos xy e yz cortam essa superfície segundo as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \; z = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; x = 0$$

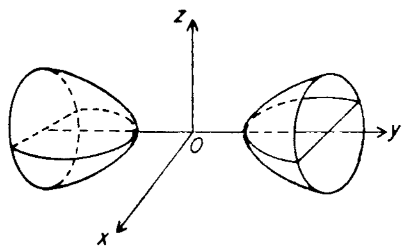


Figura 3.9

respectivamente. Essa superfície é um *hiperbolóide de duas fôlhas*. Observe que se $a = c$, (9) é a equação de um círculo e, portanto, a superfície é, neste caso, um hiperbolóide de revolução.

O parabolóide elíptico

A superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{10}$$

é um *parabolóide elíptico* (veja a Fig. 3.10).

Se $c > 0$, como na figura, o plano $z = k$ intercepta essa superfície segundo a elipse

$$\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, \ z = k \tag{11}$$

se $k > 0$. Se $k < 0$ o plano $z = k$ não intercepta a superfície. Portanto, se $c > 0$, a superfície está contida na região $z \geq 0$. Anàlogamente vemos que, se $c < 0$, a superfície está na região $z \leq 0$. Os planos xz e yz interceptam a superfície segundo as parábolas

$$x^2 = ca^2z, \ y = 0 \quad \text{e} \quad y^2 = cb^2z, \ x = 0$$

respectivamente. Além disso essa superfície é simétrica em relação aos planos xz e yz. Observe que, se $a = b$, as elipses (11) são círculos e portanto a superfície é um parabolóide de revolução.

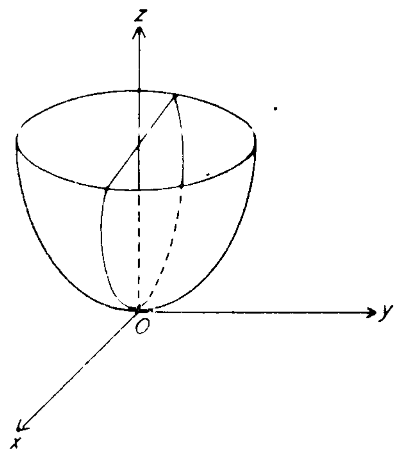


Figura 3.10

O parabolóide hiperbólico

A superfície representada pela equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{12}$$

é um *parabolóide hiperbólico* (veja a Fig. 3.11).

O plano xz corta essa superfície segundo a parábola $x^2 = -ca^2z$, $y = 0$; observe que se $c > 0$, essa parábola se curva para baixo e tem o eixo dos z como eixo focal. A interseção da superfície com o plano yz é a parábola $y^2 = cb^2z$, $x = 0$, a qual se curva para cima e tem também o eixo dos z como eixo focal. Se $k \neq 0$, o plano $z = k$ intercepta a superfície segundo a hipérbole

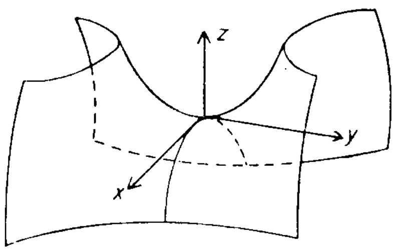


Figura 3.11

$$-\frac{x^2}{a^2ck} + \frac{y^2}{b^2ck} = 1, \ z = k.$$

Se $k > 0$, o eixo focal da hipérbole é paralelo ao eixo dos y (como na figura), mas se $k < 0$ êsse eixo é paralelo ao eixo dos x. Observe que o plano xy corta a superfície segundo as retas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \ z = 0$$

ou seja,

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \ z = 0.$$

O cone quádrico

A superfície cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \tag{13}$$

chama-se um *cone quádrico*. O plano $z = k$, $k \neq 0$ corta a superfície segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1, \ z = k. \tag{14}$$

A interseção dessa superfície com o plano $z = 0$ é apenas a origem 0 (veja a Fig. 3.12). Êsse ponto é o *vértice* do cone. Os planos xz e yz cortam a superfície segundo os pares de retas

$$x = \pm az, \ y = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm bz, \ x = 0,$$

respectivamente. Observe que os eixos das elipses (14) crescem à medida que $|k|$ cresce. Além disso, se $a = b$, então (14) é a equação de um círculo e portanto temos um cone de revolução. Nesse caso, a reta $x = az$ é uma *geratriz* do cone.

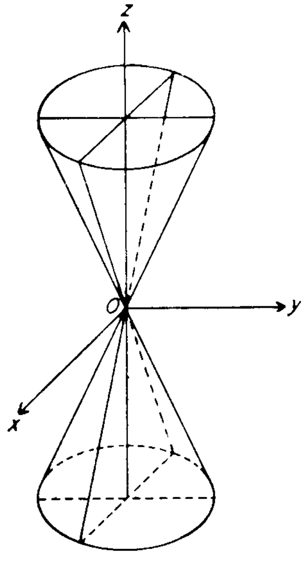


Figura 3.12

§ 3.3 – *Mudanças de Coordenadas*

Em § 2.1 introduzimos o sistema de coordenadas $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Se P é um ponto qualquer do espaço, então as coordenadas de P no sistema acima são os números reais x_1, x_2 e x_3 tais que

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}.$$

Para resolver certos problemas geométricos, é necessário substituir o sistema acima por outro sistema escolhido convenientemente.

Há três maneiras de passar do sistema $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para outro sistema, $0', \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

1. *Translação dos eixos*: consiste em mudar só a origem do sistema de coordenadas, isto é, passar do sistema $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para um sistema do tipo $0', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2. *Rotação dos eixos*: consiste em substituir $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ por outra base ortonormal, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, isto é, substituir o sistema $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ pelo sistema $0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

3. *Rotação seguida de translação dos eixos*: consiste em passar do sistema $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para um sistema $0', \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Nessa seção, responderemos à seguinte questão: se (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) são as coordenadas de um ponto P nos sistemas $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $0', \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, respectivamente, que relação existe entre (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3)?

1. *Translação dos eixos.*

Observe que (Fig. 3.13)

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}. \tag{1}$$

Se

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{O'P} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

então (1) nos dá

$$y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} = (x_1 - c_1)\vec{i} + (x_2 - c_2)\vec{j} + (x_3 - c_3)\vec{k},$$

isto é,

$$y_1 = x_1 - c_1, \; y_2 = x_2 - c_2 \; \text{ e } \; y_3 = x_3 - c_3. \tag{2}$$

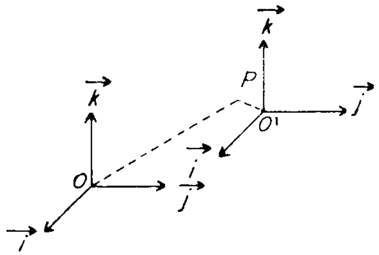


Figura 3.13

EXEMPLO 3.4 – Calcular as coordenadas do ponto $P(1, 2, -1)$ no sistema $O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sendo $O'(2, 1, 3)$.

As coordenadas do ponto P são $y_1 = x_1 - c_1 = 1 - 2 = -1$, $y_2 = x_2 - c_2 = 2 - 1 = 1$ e $y_3 = x_3 - c_3 = -1 - 3 = -4$.

2. *Rotação dos eixos.*

Se P é um ponto qualquer do espaço, o vetor $\overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} \tag{3}$$
$$= y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3.$$

Escrevendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + a_{31}\vec{u}_3 \\ \vec{j} &= a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{32}\vec{u}_3 \\ \vec{k} &= a_{13}\vec{u}_1 + a_{23}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3 \end{aligned} \tag{4}$$

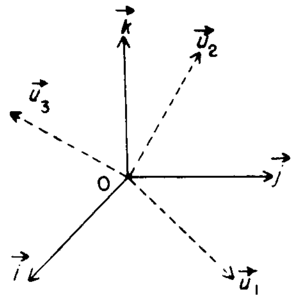


Figura 3.14

sendo

$$a_{r1} = \vec{i}\cdot\vec{u}_r, \quad a_{r2} = \vec{j}\cdot\vec{u}_r \quad \text{e} \quad a_{r3} = \vec{k}\cdot\vec{u}_r, \quad r = 1, 2, 3.$$

Substituindo (4) em (3), obtemos

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\vec{u}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\vec{u}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\vec{u}_3 = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3,$$

ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{5}$$

EXEMPLO 3.5 – Calcular as coordenadas do ponto $P(1, 0, 2)$ no sistema $O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, onde

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{u}_3 = \vec{k}.$$

Observe que

$$\vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + 0\,\vec{u}_3$$

$$\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + 0\,\vec{u}_3$$

$$k = 0\,\vec{u}_1 + 0\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

As equações (5) nos dão

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$y_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 = 2.$$

§ 3.4 – *A Equação Geral do Segundo Grau*

Consideremos em primeiro lugar as equações do segundo grau do tipo.

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1 + ex_2 + fx_3 + g = 0. \qquad (1)$$

1. Se o têrmo do segundo grau em x_i é não nulo, então existe uma translação dos eixos tal que a equação (1) no nôvo sistema de coordenadas não contém o têrmo do primeiro grau na i-ésima coordenada.

Demonstração: Suponha, por exemplo, que $a \neq 0$. Considere o ponto $O'\left(-\dfrac{d}{2a}, 0, 0\right)$ e sejam y_1, y_2 e y_3 as coordenadas de um ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ no sistema O', $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Assim,

$$x_1 = y_1 - \frac{d}{2a}, \quad x_2 = y_2 \quad \text{e} \quad x_3 = y_3.$$

Portanto a equação (1) se escreve no nôvo sistema de coordenadas como

$$a\left(y_1 - \frac{d}{2a}\right)^2 + by_2^2 + cy_3^2 + d\left(y_1 - \frac{d}{2a}\right) + ey_2 + fy_3 + g = ay_1^2 +$$

$$+ by_2^2 + cy_3^2 + ey_2 + fy_3 + \left(g - \frac{d^2}{2a} + \frac{d^2}{4a^2}\right) = 0.$$

EXEMPLO 3.6 – Achar a translação dos eixos que elimina os têrmos do primeiro grau da equação

$$x_1^2 - 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0.$$

O nôvo sistema de coordenadas é O', $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ onde $O'\left(-1, \dfrac{1}{4}, 1\right)$. As novas coordenadas são dadas pelas equações

$$x_1 = y_1 - 1, \quad x_2 = y_2 + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_3 = y_3 + 1.$$

A equação (1) se escreve no nôvo sistema de coordenadas como

$$(y_1 - 1)^2 - 2\left(y_2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}(y_3 + 1)^2 + 2(y_1 - 1) + y_2 + \frac{1}{4} - y_3 -$$

$$- 1 + 1 = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{3}{8} = 0$$

ou seja

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \frac{y_3^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma fôlha.

2. Se a equação (1) possui apenas um têrmo do segundo grau não nulo, então existe um nôvo sistema de coordenadas em relação ao qual a equação se escreve com no máximo um têrmo do primeiro grau não nulo.

Demonstração: Seja ax_1^2 o têrmo do segundo grau não nulo. Em virtude de 1. podemos supor que a equação não possui têrmo do primeiro grau em x_1. Portanto nossa equação é do tipo.

$$ax_1^2 + ex_2 + fx_3 + g = 0. \qquad (1')$$

Se $e, f \neq 0$, podemos ainda supor que $e^2 + f^2 = 1$. Considere os vetores

$$\vec{u}_1 = \vec{i}$$
$$\vec{u}_2 = e\vec{j} + f\vec{k}$$
$$\vec{u}_3 = -f\vec{j} + e\vec{k}.$$

É fácil ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é uma base ortonormal e que

$$\vec{i} = \vec{u}_1$$
$$\vec{j} = e\vec{u}_2 - f\vec{u}_3$$
$$\vec{k} = f\vec{u}_2 + e\vec{u}_3.$$

Sejam (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) as coordenadas de um ponto P nos sistemas O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ e O, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, respectivamente. Assim,

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = ex_2 + fx_3$$
$$y_3 = -fx_2 + ex_3.$$

É claro então que a equação (1′) se escreve como

$$ay_1^2 + y_2 + g = 0.$$

EXEMPLO 3.7 – Identificar a quádrica cuja equação é

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0.$$

Por meio da translação de eixos

$$x_1 = y_1 - 1, \quad x_2 = y_2 \quad \text{e} \quad x_3 = y_3$$

eliminamos o têrmo do primeiro grau em y_1, obtendo

$$y_1^2 + y_2 - y_3 = 0$$

ou seja

$$\frac{1}{\sqrt{2}} y_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 = 0.$$

Por meio da rotação

$$z_1 = y_1$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$$

obtemos a equação do cilindro parabólico

$$\frac{1}{\sqrt{2}} z_1^2 + z_2 = 0.$$

O leitor pode verificar (usando 1. e 2. acima) que o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem uma equação do tipo

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1 + ex_2 + fx_3 + g = 0 \tag{1}$$

pode ser

1) o conjunto vazio, isto é, não existe ponto algum cujas coordenadas satisfazem à equação (exemplo: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$);
2) um único ponto (exemplo: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$);
3) uma reta (exemplo: $(x_1 - 1)^2 + x_3^2 = 0$);
4) um ou dois planos (exemplos: $x_1^2 = 0$ ou $x_1^2 - x_2^2 = 0$);
5) qualquer das quádricas de § 3.2.

Consideremos agora a equação geral do segundo grau:

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + \\ + b_3x_3 + b_0 = 0. \tag{2}$$

Uma rotação dos eixos substitui as coordenadas x_1, x_2, x_3 por polinômios homogêneos do primeiro grau nas novas coordenadas y_1, y_2 e y_3, isto é,

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$$

$$x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$$

$$x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3.$$

Vemos, assim, que uma rotação dos eixos transforma um polinômio homogêneo do segundo grau em x_1, x_2, x_3 em um polinômio homogêneo do segundo grau em y_1, y_2, y_3 e um polinômio do primeiro grau em um polinômio do primeiro grau. Portanto, para mostrar que a equação (2) pode ser transformada por uma rotação dos eixos em uma equação do tipo (1), é necessário apenas mostrar que o polinômio homogêneo

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 \tag{3}$$

pode ser transformado por uma rotação dos eixos em um polinômio do tipo

$$ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2. \tag{4}$$

Isso é feito usando-se métodos de Álgebra Linear (teorema espectral). Mais ainda, a Álgebra Linear fornece o método para achar a rotação que transforma (3) em (4). Resulta então: *o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem uma equação do segundo grau é um dos conjuntos considerados para a equação* (1).

EXERCÍCIOS

1. Ache as equações das seguintes superfícies:

   a) O cilindro com geratriz perpendicular ao plano xy e cuja diretriz é a parábola $y = 2x^2$.

   b) O elipsóide obtido girando a elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ ao redor do eixo maior.

   c) O cone obtido girando a reta $y = ax + b$, $z = 0$ ao redor do eixo dos y.

   d) O cone obtido girando a reta $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ ao redor da reta $x = -t$, $y = t$, $z = 2t$.

2. Identificar as quádricas cujas equações são:

a) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$	*b)* $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
c) $x^2 - y^2 + z^2 = -1$	*d)* $x^2 - 4y^2 = 0$
e) $x^2 - 4y^2 = 4$	*f)* $2x = y^2 + z^2$
g) $9y = x^2$	*h)* $4z = y^2 - x^2$
i) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 25$	*j)* $x^2 - y^2 = z.$

3. Usando translações e rotações dos eixos, identifique as superfícies cujas equações sejam

a) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 2y - 24z + 44 = 1$

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y - z + \dfrac{61}{4} = 0$

c) $4x^2 + y^2 - z^2 + 12x - 2y + 4z = 12$

d) $2x^2 - y^2 + 3z^2 + 1 = 0$

e) $y^2 + 2x - z = 0.$

4. *a)* Mostre que as retas $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = kc,\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{k},\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = kc,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{k}$ (para cada número real $k \neq 0$) estão inteiramente contidas no parabolóide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

b) Mostre que por qualquer ponto dêsse parabolóide passa uma reta do tipo

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = kc, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{k}$$

e uma reta do tipo

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = kc, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{k}.$$

Por essa razão, dizemos que êsse parabolóide é uma *superfície regrada.*

5. Mostre que o hiperbolóide de uma fôlha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regrada.

Espaços Euclidianos

Capítulo 4

É conveniente, em Matemática e suas aplicações, introduzirem-se os espaços euclidianos com um número arbitrário de dimensões. Por exemplo, êsse conceito é muito útil no estudo do cálculo das funções de várias variáveis e no estudo dos sistemas de equações lineares.

§ 4.1 – *Os Espaços Euclidianos R^n*

O espaço usual foi considerado no Cap. 1 sem ter sido formalmente definido. Vimos que uma vez escolhido um sistema $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de coordenadas, então cada ponto X do espaço é perfeitamente determinado por um terno (x_1, x_2, x_3) de números reais, a saber, os números reais x_1, x_2, x_3 tais que

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}.$$

Uma definição precisa de ponto do espaço pode ser obtida da seguinte maneira: em lugar de dizer que ao ponto X *corresponde* o terno (x_1, x_2, x_3), definiremos o ponto X como *sendo* o terno (x_1, x_2, x_3). Assim, o espaço usual é considerado como o conjunto de todos os ternos ordenados $X = (x_1, x_2, x_3)$ de números reais. Ao identificarmos os pontos do espaço tridimensional com ternos ordenados de números reais, não só obtivemos uma definição rigorosa para o espaço usual, como também isso nos sugere a definição de espaços com um número arbitrário de dimensões.

DEFINIÇÃO 4.1 – *O espaço euclidiano* R^n (n inteiro positivo qualquer) é o conjunto de tôdas as n-uplas ordenadas $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ de números reais.

Assim, o R^1 (usualmente indicado por R) é simplesmente o conjunto de todos os números reais. O R^2 é o conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2) de números reais. O R^3 é o conjunto de todos os ternos ordenados (x_1, x_2, x_3) de números reais etc. Ao definirmos o R^n como sendo o conjunto de tôdas as n-uplas ordenadas, queremos dizer que a ordem em que aparecem os números na n-upla é importante. Por exemplo, (1, 2, 0, 3) e (1, 2, 3, 0) são duas n-uplas distintas do R^4.

Há outra maneira de olhar para um terno $X = (x_1, x_2, x_3)$ do R^3: é pensar nesse terno como sendo o vetor $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. Assim, *podemos considerar os ternos $X = (x_1, x_2, x_3)$ do R^3, indiferentemente, ou como pontos do espaço ou como vetores.* Anàlogamente pensaremos nas n-uplas $X = (x_1, \ldots x_n)$ do R^n ou como sendo pontos ou como sendo "vetores". Isso nos sugere definir as operações de adição de n-uplas e o produto de n-uplas por escalares.

Aos ternos $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ correspondem os vetores

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$

e

$$\overrightarrow{OY} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}.$$

Ao vetor soma (veja a Fig. 4.1)

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = (x_1 + y_1)\vec{i} + (x_2 + y_2)\vec{j} + (x_3 + y_3)\vec{k}$$

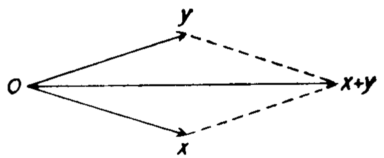


Figura 4.1

corresponde o terno $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Isso nos sugere definir a *soma* do terno X com o terno Y como sendo o terno $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Definimos dessa maneira a adição de ternos do R^3. Anàlogamente definimos a adição de n-uplas do R^n; se

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

então

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n).$$

Por exemplo, se

$$X = (1, 2, 0, 3)$$

e

$$Y = (0, -1, 2, 5),$$

então $X + Y = (1 + 0, 2 - 1, 0 + 2, 3 + 5) = (1, 1, 2, 8)$.

Ao terno $X = (x_1, x_2, x_3)$ corresponde o vetor $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. Se c é um escalar qualquer, ao vetor

$$c\overrightarrow{OX} = (cx_1)\vec{i} + (cx_2)\vec{j} + (cx_3)\vec{k}$$

corresponde o terno (cx_1, cx_2, cx_3). Isso nos sugere definir o *produto* do terno X pelo escalar c como sendo o terno

$$cX = (cx_1, cx_2, cx_3) \quad \text{(veja a Fig. 4.2)}$$

Definimos, mais geralmente, o *produto por escalares no R^n*: se

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

é uma n-upla do R^n e c é um escalar, então

$$cX = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$

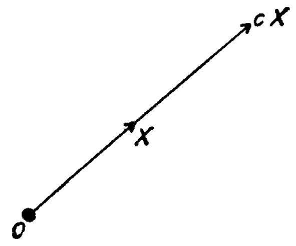


Figura 4.2

Por exemplo, se

$$X = (1, 0, -1, 2, 3)$$

então

$$2X = (2, 0, -2, 4, 6)$$

e

$$(-1)X = (-1, 0, 1, -2, -3).$$

A n-upla $(-1)X$ é usualmente indicada por $-X$.

A adição e o produto por escalares no R^n satisfazem às seguintes propriedades: (compare com § 1.4).

1. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
2. Se $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é a n-upla com tôdas as coordenadas nulas, então
$$0 + X = X + 0 = X$$
3. $X + (-1)X = 0$
4. $X + Y = Y + X$
5. $c(X + Y) = cX + cY$
6. $(c + d)X = cX + dX$
7. $(cd)X = c(dX)$
8. $1X = X$.

Essas propriedades são verificadas quaisquer que sejam X, Y, Z no R^n e c, d escalares. O leitor pode demonstrá-las fàcilmente. Como exemplo, demonstraremos a propriedade 5: sejam

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

então

$$X + Y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots,\ x_n + y_n)$$

e

$$\begin{aligned} c(X + Y) &= (c(x_1 + y_1),\ c(x_2 + y_2), \ldots,\ c(x_n + y_n)) \\ &= (cx_1 + cy_1,\ cx_2 + cy_2, \ldots,\ cx_n + cy_n) \\ &= (cx_1,\ cx_2, \ldots,\ cx_n) + (cy_1,\ cy_2, \ldots,\ cy_n) \\ &= c(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) + c(y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n) \\ &= cX + cY. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule $A + B$, $A - B$ e $2A - 5B$ em cada um dos seguintes casos:

   a) $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$

   b) $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$

   c) $A = (\sqrt{2}, 1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$.

2. Demonstre as oito propriedades da adição e do produto por escalares do R^n enunciadas no final da seção.

§ 4.2 – *Produto Interno*

Aos ternos $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ correspondem os vetores

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$

e

$$\overrightarrow{OY} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}.$$

O produto interno dos vetores $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ pode ser dado pela fórmula (veja o exercício 20 de §1.7)

$$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Isso nos sugere definir o produto interno de X por Y como

$$X\cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Mas geralmente se $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são n-uplas do R^n, o produto interno de X e Y pode ser definido por

$$X\cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Por exemplo, se

$$X = (1, 2, -1, 3)$$

e

$$Y = (0, -1, 2, 1)$$

então

$$X\cdot Y = 1\cdot 0 + 2(-1) + (-1)(2) + 3(1) = -1.$$

O produto interno satisfaz às seguintes propriedades:

1. $X\cdot Y = Y\cdot X$
2. $X\cdot(Y + Z) = X\cdot Y + X\cdot Z$
3. $(cX)\cdot Y = X\cdot(cY) = c(X\cdot Y)$
4. $X\cdot X \geq 0$; e se $X\cdot X = 0$ então $X = 0$

Essas propriedades são verificadas quaisquer que sejam X, Y e Z no R^n e qualquer que seja o número real c. O leitor pode demonstrá-las fàcilmente. Como exemplo, demonstraremos a 2:

$$Y + Z = (y_1 + z_1,\ y_2 + z_2, \ldots,\ y_n + z_n)$$

e

$$\begin{aligned} X\cdot(Y + Z) &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + \ldots + x_n(y_n + z_n) \\ &= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + \ldots + x_ny_n + x_nz_n \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) + (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n) \\ &= X\cdot Y + X\cdot Z. \end{aligned}$$

Em lugar de $X\cdot X$, é conveniente escrever X^2; e é fácil verificar que

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2X\cdot Y + Y^2$$

e

$$(X - Y)^2 = X^2 - 2X\cdot Y + Y^2.$$

Diremos que X é perpendicular (ou ortogonal) a Y se $X\cdot Y = 0$. Observe que a propriedade 4 do produto interno nos diz que o único vetor do R^n que é perpendicular a si mesmo é o vetor zero. No Cap. 5, §5.2 estudaremos produtos internos que não possuem a propriedade 4. Os produtos internos que possuem essa propriedade chamam-se *positivos definidos.*

EXERCÍCIOS

1. Calcule X^2 e $X\cdot Y$ em cada um dos seguintes casos:

   a) $X = (1, 0)$, $Y = (0, 1)$

   b) $X = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $Y = (0, 1, 0)$

   c) $X = (1, 2, 3)$, $Y = (-1, 1, -2)$.

2. Demonstre as quatro propriedades do produto interno enunciadas na seção 4.2.

3. Mostre que

a) $(X + Y)^2 = X^2 + 2X \cdot Y + Y^2$

b) $(X - Y)^2 = X^2 - 2X \cdot Y + Y^2$

c) $(X + Y) \cdot (X - Y) = X^2 - Y^2$.

4. Quais dos seguintes pares de vetores são perpendiculares?

a) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$

b) $(1, -1, 1)$, $(-1, -1, 0)$

c) $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$

d) $(\operatorname{sen} t, \cos t, -1)$, $(\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$.

§ 4.3 - *A Norma de um Vetor*

Vimos em § 1.7 que $\vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, então a norma ou comprimento do vetor v é dada por

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Isso nos sugere definir a *norma* de um vetor $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do R^n por

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sqrt{X \cdot X} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \end{aligned}$$

O teorema abaixo, que é uma generalização do exercício 10 de § 1.7, possui muitas aplicações importantes em matemática.

TEOREMA 4.1 - (Desigualdade de Schwarz). Se X e Y são vetores quaisquer do R^n, então

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \, \|Y\|$$

Demonstração: Sejam $x = Y \cdot Y$ e $y = -X \cdot Y$. Considere o vetor $Z = xX + yY$. Uma das propriedades do produto interno nos diz que

$$0 \leq Z \cdot Z$$

ou seja

$$0 \leq x^2 \|X\|^2 + 2xy(X \cdot Y) + y^2 \|Y\|^2.$$

Substituindo x e y, obtemos

$$0 \leq \|X\|^2 \|Y\|^4 - 2\|Y\|^2(X \cdot Y)^2 + (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

ou seja

$$\|Y\|^2(X \cdot Y)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^4. \tag{4}$$

Se $Y = 0$, então a desigualdade de Schwarz é óbvia. Se $Y \neq 0$, então $\|Y\| \neq 0$ e podemos dividir ambos os membros de (4) por $\|Y\|^2$, obtendo

$$|X \cdot Y|^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$$

o que demonstra o teorema.

Como conseqüência da desigualdade de Schwarz temos o

COROLÁRIO 4.1 - (Desigualdade triangular). Se X e Y são vetores do R^n, então

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y)^2 \\ &= X^2 + 2X \cdot Y + Y^2 \\ &\leq \|X\|^2 + 2|X \cdot Y| + \|Y\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

A desigualdade de Schwarz nos dá

$$\begin{aligned} \|X\|^2 + 2|X \cdot Y| + \|Y\|^2 &\leq \|X\|^2 + 2\|X\| \, \|Y\| + \|Y\|^2 = \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

De (2) e (3) concluímos que

$$\|X + Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2$$

demonstrando a desigualdade triangular.

A norma possui as seguintes propriedades: se X e Y são vetores do R^n e x é um escalar, então

1. $\|xX\| = |x| \, \|X\|$
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
3. $\|X\| \geq 0$, e se $\|X\| = 0$ então $X = 0$.

As propriedades 1 e 3 são conseqüências de propriedades análogas do produto interno. Como exemplo, demonstremos 1:

$$\|xX\|^2 = (xX) \cdot (xX) = x^2(X \cdot X).$$

Assim,

$$\|xX\|^2 = |x|^2 \|X\|^2$$

ou seja

$$\|xX\| = |x| \, \|X\|$$

Se

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{e} \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

são pontos do R^n, a distância entre X e Y, indicada por $d(X,Y)$, é, por definição

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

O exercício 21 de §1.7 nos sugere definir o ângulo (X, Y) entre os vetores, não nulos, X e Y do R^n, por meio da equação

$$\cos (X, Y) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}. \tag{5}$$

A desigualdade de Schwarz nos dá

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} \leq 1$$

e portanto existe um único ângulo (X, Y) entre 0 e π que satisfaz (5).

Um vetor X do R^n chama-se *unitário*, se $\|X\| = 1$. Observe que se X fôr um vetor qualquer não nulo do R^n, então

$$\frac{1}{\|X\|} X$$

é um vetor unitário, pois,

$$\left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\| = \frac{1}{\|X\|} \|X\| = 1.$$

Diremos que dois vetores X e Y do R^n têm a *mesma direção* se $X = cY$, onde c é um número real não nulo. Se $c > 0$, diremos que X e Y têm o *mesmo sentido* e se $c < 0$, diremos que êsses vetores têm *sentidos opostos*. A observação feita acima nos mostra que a cada vetor não nulo X corresponde um único vetor unitário

$$\frac{1}{\|X\|} X$$

de mesma direção e sentido que X. Êle chama-se vetor unitário de X.

EXEMPLO 4.1 - A esfera com centro $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ e raio $r > 0$ no R^n é o conjunto dos pontos X do R^n tais que $d(X, C) = r$. Observemos então que um ponto X pertence a essa esfera se, e sòmente se,

$$\|X - C\|^2 = r^2.$$

Portanto

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 = r^2$$

é a equação da esfera de centro C e raio r, no R^n.

EXEMPLO 4.2 - Sejam $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ funções diferenciáveis (que possuem derivadas até a segunda ordem), definidas no intervalo aberto (a, b). Em física, é usual indicar-se por

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

a trajetória de um ponto P no R^3. A *velocidade* e a *aceleração* do ponto P, no instante t, são

$$P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

e

$$P''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

respectivamente. Suponhamos que o ponto P se desloca sôbre a esfera de centro na origem e raio $r > 0$ com $\|P'(t)\| = 1$, $a < t < b$. Chamaremos *curvatura* da trajetória, no instante t, ao número

$$c(t) = \|P''(t)\|.$$

Mostraremos que

$$c(t) \geq \frac{1}{r}.$$

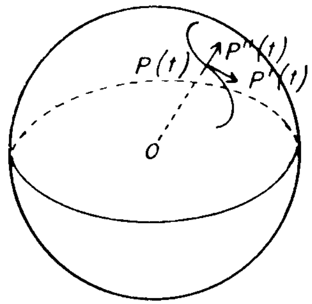


Figura 4.3

Realmente, como $P(t)$ está sempre na esfera, então

$$P(t) \cdot P(t) = r^2. \tag{1}$$

Derivando, obtemos

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t) = 0$$

ou seja

$$P(t) \cdot P'(t) = 0 \tag{2}$$

o que mostra que a velocidade é sempre perpendicular ao raio. Derivando (2), obtemos

$$P(t) \cdot P''(t) + P'(t) \cdot P'(t) = 0$$

e, tendo em conta que $\|P'(t)\| = 1$, obtemos

$$P(t) \cdot P''(t) = -1$$

ou seja

$$|P(t) \cdot P''(t)| = 1. \tag{3}$$

A desigualdade de Schwarz nos diz que

$$|P(t) \cdot P''(t)| \leq \|P(t)\| \, \|P''(t)\| = rc(t). \tag{4}$$

pois, $\|P(t)\| = r$.

De (3) e (4), obtemos, finalmente:

$$c(t) \geq \frac{1}{r}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule a norma dos seguintes vetores:

a) $X = (1, 0, 0, 0)$

b) $X = (1, 2, 0, 2)$

c) $X = (2, 3, 1, 1, 3)$.

2. Calcule a distância entre os seguintes pares de pontos:

a) $A = (1, 2, 3, 4)$
$B = (0, 1, 2, 3)$

b) $A = (0, 1, 0, 2, 3, 0)$
$B = (1, 0, 2, 0, 3, 2)$.

3. Mostre que se A, B e C são pontos quaisquer do R^n, então:

a) $d(A, B) \geq 0$

b) $d(A, B) = 0$ se, e sòmente se, $A = B$

c) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

4. Calcule o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

a) $X = (1, 0, 0, 0)$ e $Y = (1, 1, 0, 0)$

b) $X = (1, 0, 1, 0, 0)$ e $Y = (0, 0, 1, 0, 1)$.

5. Demonstre que, se X e Y são vetores quaisquer do R^n, então $\|X - Y\| \geq |\|X\| - \|Y\||$.

§ 4.4 – *Retas e Hiperplanos*

Seja Q um vetor qualquer, não nulo, do R^n. Em cada ponto P do R^n passa uma reta cuja direção é a do vetor Q: essa *reta* é definida como sendo o conjunto L (Fig. 4.4) dos pontos X do R^n que satisfazem à equação

$$X = P + tQ \tag{1}$$

Se $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ e $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a equação (1) nos dá n equações paramétricas

$$x_1 = p_1 + tq_1$$

$$x_2 = p_2 + tq_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = p_n + tq_n.$$

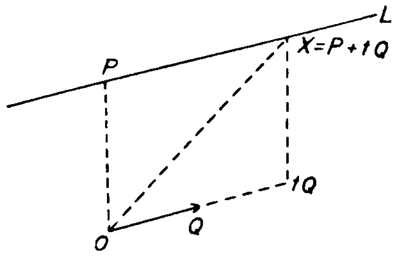


Figura 4.4

Observe que $X = tQ$ é a equação da reta paralela ao vetor Q, passando pela origem.

EXEMPLO 4.3 – A reta do R^4 que passa pelo ponto $P = (1, 0, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $Q = (1, 2, 3, 0)$ é dada pelas equações paramétricas:

$$x_1 = 1 + t$$
$$x_2 = 2t$$
$$x_3 = 2 + 3t$$
$$x_4 = 3.$$

Seja $A \neq 0$ um vetor do R^n. O *hiperplano* que passa pelo ponto P do R^n (Fig. 4.5) e é normal ao vetor A é, por definição, o conjunto H dos pontos X do R^n que satisfazem à equação

$$(X - P) \cdot A = 0. \tag{2}$$

Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $d = -P \cdot A$, a equação (2) nos dá

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + d = 0. \tag{3}$$

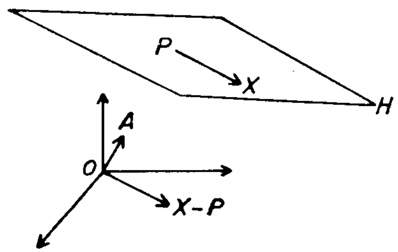


Figura 4.5

Observe que um hiperplano H passa pela origem se, e sòmente se, $d = 0$. No R^2, os hiperplanos são as retas, e no R^3 são os planos. No R^4, além das retas e planos existem também os hiperplanos.

EXEMPLO 4.4 – A equação do hiperplano do R^4 que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1, 0)$ e é normal ao vetor $A = (1, 2, 3, 2)$ é

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2,$$

isto é,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4.$$

EXERCÍCIOS

1. Ache a equação da reta do R^4 que passa pelo ponto $(1, 0, 2, 1)$ e é paralela ao vetor $(1, 2, 2, 3)$.

2. Escreva a equação da reta do R^5 que passa pelos pontos (1, 0, 1, 0, 0) e (0, 1, 0, 1, 0).

3. Ache a equação do hiperplano do R^4 que passa pelo ponto (1, 1, 1, 1) e é normal ao vetor (2, 1, 0, 3).

4. Escreva a equação do hiperplano do R^4 que passa pelos pontos (0, 0, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 3) e (2, 0, 0, −1).

5. Sejam P e Q pontos do R^n. Qual é a equação do segmento de reta com origem em P e extremidade em Q?

§ 4.5 – *Subespaços*

Um conjunto S de pontos do R^n chama-se um *subespaço vetorial* do R^n se

1. S contém o vetor zero.
2. Se X e Y são dois vetores quaisquer de S, então a soma $X + Y$ também pertence a S.
3. Se X é um vetor qualquer de S e c é um escalar, então o vetor cX também pertence a S.

Observe que o conjunto que contém apenas o vetor zero é um subespaço vetorial do R^n. O próprio R^n é também subespaço vetorial do R^n.

EXEMPLO 4.5 – As retas que passam pela origem são subespaços vetoriais do R^n. Realmente, seja S a reta do R^n cuja equação é $X = tQ$. Assim:

1. S contém o vetor zero.
2. Se $X_1 = t_1Q$ e $X_2 = t_2Q$ são pontos de S, então a reta S também contém o ponto $X_1 + X_2$, pois,
$$X_1 + X_2 = t_1Q + t_2Q = (t_1 + t_2)Q.$$
3. Se $X = tQ$ é um ponto qualquer de S e c é um escalar, então cX também é um ponto de S, pois, $cX = c(tQ) = (ct)Q$.

(Observe que as retas que não passam pela origem não são subespaços vetoriais do R^n.)

EXEMPLO 4.6 – Os hiperplanos que passam pela origem são subespaços vetoriais do R^n. Realmente o hiperplano S que passa pela origem e é normal ao vetor A tem por equação $A \cdot X = 0$. Assim:

1. S contém o vetor zero.
2. Se X_1 e X_2 são vetores em S, então $X_1 + X_2$ também está em S, pois,
$$A \cdot (X_1 + X_2) = A \cdot X_1 + A \cdot X_2 = 0 + 0 = 0.$$
3. Se X é um vetor qualquer de S e c é um escalar, então cX também está em S, pois,
$$A \cdot (cX) = c(A \cdot X) = c0 = 0.$$

(Observe que os hiperplanos que não passam pela origem não são subespaços vetoriais do R^n.)

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_r$ vetores do R^n e $c_1, c_2, \ldots, c_r$ escalares quaisquer. A expressão
$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$
chama-se uma *combinação linear* dos vetores $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Seja S o conjunto de tôdas as combinações lineares possíveis dêsses r vetores (veja § 1.5). Então S é um subespaço vetorial do R^n. De fato:

1. O vetor zero pertence a S, pois, $O = 0A_1 + 0A_2 + \ldots + 0A_r$.
2. Se
$$X = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$
e
$$Y = d_1A_1 + d_2A_2 + \ldots + d_rA_r$$
são vetores quaisquer de S, então $X + Y$ também é um vetor de S, pois
$$X + Y = (c_1A_1 + \ldots + c_rA_r) + (d_1A_1 + \ldots + d_rA_r) =$$
$$= (c_1 + d_1)A_1 + \cdots + (c_r + d_r)A_r,$$
que também é uma combinação linear dos vetores $A_1, \ldots, A_r$.
3. Se $X = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$ é um vetor qualquer de S e c é um escalar, então cX também está em S, pois,
$$cX = c(c_1A_1 + \ldots + c_rA_r) = (cc_1)A_1 + \ldots + (cc_r)A_r$$
que também é uma combinação linear dos vetores $A_1, \ldots, A_r$.

O subespaço vetorial S dado acima chama-se o *subespaço vetorial gerado pelos vetores* $A_1, \ldots, A_r$.

EXEMPLO 4.7 – O subespaço vetorial do R^n gerado pelo vetor $A \neq 0$ é a reta S que passa pela origem e é paralela ao vetor A.

EXEMPLO 4.8 – O subespaço do R^3 gerado pelos vetores (1, 0, 1) e (0, 1, 1) é o plano S que passa pela origem e é paralelo a êsses vetores.

§ 4.6 – *Dependência e Independência Linear*

Sugerimos que o leitor releia a Seç. 1.5 antes de iniciar o estudo da presente.

Sejam $A_1, \ldots, A_r$ vetores do R^n. Consideremos a equação $x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_rA_r = O$. Essa equação admite pelo menos a solução trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$. Se a única solução fôr a trivial, então diremos que os vetores $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são *linearmente independentes*. Se a equação acima admitir solução não trivial, diremos que êsses vetores são *linearmente dependentes*.

EXEMPLO 4.9 – Consideremos os vetores $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, E_n = (0, \ldots, 0, 1)$ do R^n, (isto é, E_i é o vetor que possui tôdas as coordenadas nulas, exceto a i-ésima, que é igual a um).

Assim, se $X = (x_1, \ldots, x_n)$ é um vetor qualquer do R^n, então $X = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n$. Isso nos mostra que se $x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n = O$, então $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$. Portanto os vetores $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são linearmente independentes.

EXEMPLO 4.10 – Os vetores $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (0, 1, 2)$, $A_3 = (1, 0, 1)$ do R^3 são linearmente independentes. Realmente, a equação

$$\begin{aligned} x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 &= x_1(1, 1, 1) + x_2(0, 1, 2) + x_3(1, 0, 1) = \\ &= (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3) = \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

nos dá o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

que possui apenas a solução trivial.

Sejam S um subespaço vetorial do R^n e $A_1, A_2, \ldots, A_r$ vetores de S. Se êsses vetores *geram* S e são *linearmente independentes* diremos que êles constituem uma *base* de S.

EXEMPLO 4.11 – Os n vetores $E_1, \ldots, E_n$ do Exemplo 4.9 constituem uma base do R^n. Realmente, como já vimos, se $X = (x_1, \ldots, x_n)$ é um vetor qualquer do R^n, então X pode ser escrito como a combinação linear $X = x_1E_1 + \ldots + x_nE_n$ dos vetores $E_1, \ldots, E_n$; portanto êsses vetores geram o R^n. Além disso, êles são linearmente independentes (veja o Exemplo 4.9). Os vetores $E_1, \ldots, E_n$ constituem a chamada *base natural do* R^n.

EXEMPLO 4.12 – Seja S o conjunto dos vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ do R^3 que satisfazem à equação $x_3 = x_1 + x_2$. O leitor pode verificar fàcilmente que S é um subespaço vetorial do R^3. Os vetores $A_1 = (1, 0, 1)$ e $A_2 = (0, 1, 1)$ constituem uma base de S. Realmente êsses vetores geram S, pois, se $X = (x_1, x_2, x_3)$ é um vetor de S então $X = x_1A_1 + x_2A_2 = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Além disso A_1 e A_2 são linearmente independentes, pois, se

$$x_1A_1 + x_2A_2 = (x_1, x_2, x_1 + x_2) = 0$$

então

$$x_1 = x_2 = 0.$$

EXERCÍCIOS

1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores do R^n são subespaços vetoriais?
   a) o conjunto dos vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_1 \geq 0$;
   b) o conjunto dos vetores $X = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ tais que $x_1 + 2x_2 = x_3$;
   c) o conjunto dos vetores $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_1^2 = x_2$;
   d) o conjunto dos vetores $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_1x_2 = 0$;
   e) o conjunto dos vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_1^2 - x_2 = 1$.
2. Demonstre que, se dois vetores do R^n são linearmente dependentes, então um dêles é igual ao produto do outro por um escalar.
3. Demonstre que os vetores $A_1 = (1, 0, -1)$, $A_2 = (1, 2, 1)$ e $A_3 = (0, -3, 2)$ constituem uma base do R^3.
4. Quais dos seguintes vetores são linearmente independentes?
   a) $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, -1)$
   b) $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 1)$
   c) $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 0)$
   d) $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$ e $(1, -1, 0)$
   e) $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$.
5. Sejam $A_1, \ldots, A_r$ vetores não nulos e mùtuamente ortogonais do R^n (isto é, $A_i \cdot A_j = 0$ se $i \neq j$). Demonstre que êsses vetores são linearmente independentes.
6. Seja S o subespaço gerado pelos vetores do exercício anterior. Mostre que, se X é um vetor de S, então

$$X = \frac{X \cdot A_1}{\|A_1\|^2} A_1 + \dots + \frac{X \cdot A_r}{\|A_r\|^2} A_r.$$

Em particular, se $\|A_i\| = 1$, $i = 1, \dots, r$, então

$$X = (X \cdot A_1)A_1 + \dots + (X \cdot A_r)A_r.$$

7. Sejam $A_1, \dots, A_r$ vetores do R^n. Demonstre que o conjunto S de todos os vetores X do R^n tais que $X \cdot A_i = 0$, $i = 1, \dots, r$ é um subespaço vetorial de R^n.

8. Seja S um conjunto qualquer não vazio de vetores do R^n. Considere o conjunto $S^\perp$ dos vetores X do R^n tais que $X \cdot A = 0$ para todo vetor A de S. Demonstre que $S^\perp$ é um subespaço vetorial do R^n. $S^\perp$ chama-se o *complemento ortogonal* do conjunto S.

9. Seja S um subespaço vetorial do R^n. Considere o conjunto $S^\perp$ como no exercício anterior. Demonstre que:
   a) o vetor zero é o único vetor que está simultâneamente em S e $S^\perp$;
   b) cada vetor X do R^n pode ser decomposto de maneira única como uma soma de um vetor de $S^\perp$ com um vetor de S.

10. Demonstre que qualquer conjunto de vetores do R^2 com mais de dois vetores é linearmente dependente. Qual é a generalização dessa propriedade para o R^n?

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Capítulo 5

Neste capítulo, introduziremos as matrizes e estudaremos as operações elementares sôbre as linhas de uma matriz desenvolvendo uma técnica efetiva para a obtenção das soluções dos sistemas de equações lineares.

§ 5.1 – *Corpos*

Admitiremos que o leitor está familiarizado com os números complexos. O conjunto de todos os números complexos será indicado pela letra $\mathbb{C}$.

Estamos interessados em conjuntos K de números complexos que possuem as seguintes propriedades:

1. Se os números x e y pertencem ao conjunto K, então a soma $x + y$ e o produto xy também pertencem a K.
2. Se o número x pertence a K, então seu simétrico $-x$ também pertence a K. Além disso se x é um número não nulo de K, então seu inverso x^{-1} também pertence a K.
3. O conjunto K contém os números 0 e 1.

Os conjuntos K de números complexos que possuem estas propriedades chamam-se *corpos*. É claro que o próprio conjunto $\mathbb{C}$ de todos os números complexos é um corpo. O conjunto R de todos os números reais é também um corpo. Seja Q o conjunto de todos os números racionais, isto é, o conjunto de tôdas as frações $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros relativos (inteiros positivos, negativos e zero) e $n \neq 0$. O leitor pode verificar fàcilmente que o conjunto Q é um corpo.

O conjunto N de todos os números inteiros positivos e o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros relativos não são corpos. Realmente, o conjunto N não possui as propriedades (2) e (3); o conjunto $\mathbb{Z}$ não possui a propriedade 2.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o conjunto de todos os números da forma $a + b\sqrt{2}$, em que a e b são racionais, é um corpo.
2. Mostre que o conjunto de todos os números complexos da forma $a + bi$, em que a e b são racionais, é um corpo.
3. Seja w um número complexo tal que w^2 é racional. Mostre que o conjunto de todos os números da forma $a + bw$, em que a e b são racionais, é um corpo.
4. Sejam K um corpo e $p(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1t + a_0$, $q(t) = b_mt^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_0$ polinômios cujos coeficientes pertencem todos ao corpo K e $b_m \neq 0$.

   A função $f(t) = \dfrac{a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0}{b_mt^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_0}$

   chama-se uma *função racional*. Mostre que, se o número x pertence ao corpo K e $q(x) \neq 0$, então o número $f(x)$ também pertence ao corpo K.
5. Mostre que o corpo Q dos números racionais é o "menor" corpo, isto é, se K é um corpo qualquer, então K contém todos os números racionais.

§ 5.2 – *Os Espaços* K^n

No Cap. 4 construímos, a partir do corpo R dos números reais, os espaços euclidianos R^n. Se K é um corpo qualquer, podemos, de maneira análoga, definir os espaços K^n como sendo o conjunto de tôdas as n-uplas ordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de números do corpo K.

Definimos a soma das n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de K^n como sendo a n-upla

$$X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Se c é um número de K, então

$$cX = (cx_1, \ldots, cx_n)$$

define o produto por escalar em K^n.

O leitor pode verificar que a soma e o produto por escalares assim definidos em K^n satisfazem as mesmas propriedades algébricas que a soma

e o produto por escalar do R^n, isto é, se X, Y e Z são n-uplas de K^n e c, d são números de K, então:

1. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
2. $O + X = X + O = X$
3. $X + (-1)X = O$
4. $X + Y = Y + X$
5. $c(X + Y) = cX + cY$
6. $(c + d)X = cX + dX$
7. $(cd)X = c(dX)$
8. $1X = X$.

Anàlogamente, definimos o produto interno das n-uplas $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ de K^n por

$$X \cdot Y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Vê-se, fàcilmente, que êsse produto interno possui as três primeiras propriedades do produto interno do R^n, isto é, se X, Y e Z são n-uplas de K^n e c é um número de K, então:

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$
2. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
3. $X \cdot (cY) = (cX) \cdot Y = c(X \cdot Y)$.

Observe que, como estamos usando números complexos, $X \cdot X$ pode não ser um número real. Além disso, mesmo se $Y \cdot Y$ e $Z \cdot Z$ fôrem reais, podemos ter $Y \cdot Y < 0$ e $Z \cdot Z = 0$ com $Z \neq 0$.

EXEMPLO 5.1 – Sejam $X = (0, 1 + i)$, $Y = (1, 2i)$ e $Z = (1, i)$. Então,

$$X \cdot X = (1 + i)^2 = 2i, \quad Y \cdot Y = 1^2 + (2i)^2 = -3 < 0 \quad \text{e}$$
$$Z \cdot Z = 1^2 + i^2 = 0.$$

Assim, o produto interno de K^n não é, em geral, positivo definido. Êle é, porém, *não degenerado*, isto é, possui a seguinte propriedade:

4. Se $X \cdot Y = 0$ para tôda n-upla Y de K^n, então $X = 0$.

Para demonstrar esta propriedade, considere as n-uplas $E_1, \ldots, E_n$ de K^n, definidas como no R^n: E_i é a n-upla que possui tôdas as coordenadas nulas, com exceção da i-ésima, que é igual a 1. Observe que

$$X \cdot E_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Assim, como por hipótese $X \cdot Y = 0$ qualquer que seja Y em K^n, então, em particular,

$$0 = X \cdot E_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Portanto $X = O$.

Combinação linear, dependência e independência linear, subespaços e bases são definidos para K^n da mesma maneira como definimos para R^n. Chamaremos as n-uplas de K^n, indiferentemente, de pontos ou vetores. O conjunto dos vetores $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é a *base natural* de K^n.

§ 5.3 – *Matrizes*

As matrizes são generalizações naturais das n-uplas. Sejam K um corpo e m, n inteiros positivos. Uma matriz $m \times n$, com elementos no corpo K, é um quadro A da forma

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{vmatrix}$$

em que os números A_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ pertencem ao corpo K. O número A_{ij} chama-se o elemento de ordem ij de A. A *i-ésima linha* da matriz A é a n-upla

$$A_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in})$$

portanto um vetor de K^n. A *j-ésima coluna* de A é a m-upla

$$A^j = \begin{vmatrix} A_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{mj} \end{vmatrix}$$

Assim, as colunas de A são vetores de K^m (a notação vertical é para sugerir a disposição da m-upla A^j na matriz A). Portanto, uma matriz $m \times n$ possui m linhas e n colunas.

EXEMPLO 5.2 – *a*) O quadro $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ é uma matriz real 2×3.

Suas linhas são os vetores $(2, 1, 1)$ e $(3, -1, 5)$ do R^3. Os vetores $\binom{2}{3}$, $\binom{1}{-1}$, $\binom{1}{5}$ do R^2 são as colunas dessa matriz.

b) Uma n-upla (linha) $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de K^n é uma matriz $1 \times n$. Suas colunas são

$$(x_1), \ldots, (x_n)$$

c) Uma m-upla (coluna)

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{vmatrix}$$

de K^m é uma matriz $m \times 1$. Suas linhas são

$$(y_1), \ldots, (y_m)$$

d) Um número x do corpo K pode ser considerado como uma matriz (x), 1×1.

Uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas chama-se quadrada. A matriz

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

é quadrada, 2×2.

A matriz $m \times n$ que possui todos os elementos nulos chama-se a *matriz zero*, $m \times n$, e é indicada por O. Assim,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

é a matriz zero 3×3.

O conjunto de tôdas as matrizes $m \times n$ com elementos em um corpo K será indicado por $M_{mn}(K)$. Definiremos adição e produto por escalares em $M_{mn}(K)$ de maneira análoga ao que foi feito para K^n.

Sejam A e B matrizes $m \times n$. A matriz soma $A + B$ é definida por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Em outras palavras, $A + B$ é a matriz $m \times n$ cujo elemento de ordem ij é a soma dos elementos de ordem ij de A e B.

EXEMPLO 5.3 – Se

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

então

$$A + B = \begin{vmatrix} 1 + 0, & -1 - 2, & 5 + 1 \\ 3 + 1, & 2 + 3, & 1 + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Observe que, se A e B são matrizes $1 \times n$, isto é, n-uplas, então $A + B$ coincide com a soma de n-uplas definida em §5.2. Portanto, a soma de matrizes é uma generalização natural da soma de n-uplas.

A matriz zero $m \times n$ comporta-se em $M_{mn}(K)$ da mesma maneira que o vetor zero em K^n: se A é uma matriz qualquer em $M_{mn}(K)$, então

$$O + A = A + O = A.$$

Se A é uma matriz em $M_{mn}(K)$ e c é um número qualquer em K, a matriz cA é definida por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

isto é, o elemento de ordem ij da matriz cA é c vêzes o elemento de ordem ij de A. O produto por escalares assim definido em $M_{mn}(K)$ possui as propriedades usuais, isto é, se A, B são matrizes em $M_{mn}(K)$ e c, d são escalares em K, então

$$c(A + B) = cA + cB$$
$$(c + d)A = cA + dA$$
$$(cd)A = c(dA).$$

EXEMPLO 5.4 - Se

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

então

$$2A = \begin{vmatrix} 2 \times 2, & 2 \times 0, & 2 \times 1 \\ 2 \times 1, & 2(-1), & 2 \times 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Observe que se A é uma matriz qualquer, então

$$A + (-1)A = O.$$

A matriz $(-1)A$ é usualmente indicada por $-A$.

A adição e o produto por escalares definidos em $M_{mn}(K)$ possuem as mesmas propriedades que as referidas operações possuem em K^n, isto é, se A, B e C são matrizes $m \times n$ e c, d são escalares, então

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$

2. $O + A = A + O = A$
3. $A + (-1)A = O$
4. $A + B = B + A$
5. $c(A + B) = cA + cB$
6. $(c + d)A = cA + dA$
7. $(cd)A = c(dA)$
8. $1A = A$.

A *matriz transposta* de uma A, $m \times n$, é a matriz $n \times m$, indicada por ${}^tA$, definida por

$${}^tA_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Em outras palavras, a matriz ${}^tA$ é obtida a partir da matriz A trocando-se as linhas pelas colunas.

EXEMPLO 5.5 - *a)* Se

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{então} \quad {}^tA = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Se $A = |1, 2, 3|$, então ${}^tA = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$

O leitor pode verificar fàcilmente que, se A e B são matrizes $m \times n$ e c é um escalar em K, então

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t(cA) = c\,{}^tA$
3. ${}^t({}^tA) = A$.

Uma matriz quadrada A chama-se *simétrica* se ${}^tA = A$ e *anti-simétrica* se ${}^tA = -A$. A *diagonal* de uma matriz quadrada A, $n \times n$, é a n-upla

$$(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}).$$

Observe que a diagonal de uma matriz anti-simétrica A é o vetor zero, pois, ${}^tA = -A$ acarreta $A_{ii} = -A_{ii}$, donde $A_{ii} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

EXEMPLO 5.6 - *a)* A matriz 3×3

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{é simétrica.}$$

b) A matriz 3×3

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{é anti-simétrica.}$$

c) A diagonal da matriz

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

é o vetor (1, 2, 3).

Uma matriz D, quadrada, $n \times n$, é diagonal se $D_{ij} = 0$ quando $i \neq j$. A matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{é diagonal.}$$

EXERCÍCIOS

1. Sejam

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

a) Calcule $A + {}^tB$, ${}^tA + B$, $A + {}^tA$ e $B - {}^tB$.

b) Calcule $A + B$, $A - B$, $2A - 3B$ e $2A - 3B$.

2. Se A, B e C são matrizes $m \times n$ e x é um escalar, demonstre que:

a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

b) ${}^t(xA) = x{}^tA$

c) ${}^t({}^tA) = A$.

3. Demonstre que a única matriz quadrada $n \times n$ que é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica é a matriz zero.

4. *a*) Seja A uma matriz quadrada. Mostre que $A + {}^tA$ é simétrica e $A - {}^tA$ é anti-simétrica.

b) Demonstre que tôda matriz quadrada pode ser escrita de maneira única como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

§ 5.4 – *Produto de Matrizes*

Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. O produto de A por B é a matriz AB, $m \times p$, cujo elemento de ordem ij é o produto interno da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B, isto é,

$$(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j = A_{i1} B_{1j} + \ldots + A_{in} B_{nj} \qquad (1)$$

para $1 \leq i \leq m$ e $1 < j \leq p$. Assim,

$$AB = \begin{vmatrix} A_1 \cdot B^1 & \ldots\ldots & A_1 \cdot B^p \\ \vdots & & \\ A_m \cdot B^1 & \ldots\ldots & A_m \cdot B^p \end{vmatrix}.$$

É conveniente usar a notação de somatório. Nessa notação, (1) acima se escreve como

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

EXEMPLO 5.7 – *a*) Sejam

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

A sendo uma matriz real 2×3 e B uma matriz real 3×2, então AB é a matriz real 2×2

$$AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times 0, & 1 \times 2 + 0 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 0, & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

b) Se $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, então

$$AB = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Portanto $AB \neq BA$, o que mostra que o produto de matrizes não é, em geral, comutativo.

TEOREMA 5.1 - Se A é uma matriz $m \times n$, B e C são matrizes $n \times p$ e x é um escalar qualquer, então:

(1) $A(B + C) = AB + AC$

(2) $(B + C)A = BA + CA$ $\quad (B,\ C$ são $m \times n$ e A é $n \times p)$

(3) $A(xB) = (xA)B = x(AB)$.

Demonstração: Desde que $B + C$ é uma matriz $n \times p$, podemos multiplicar A por $B + C$. Além disso, AB e AC podem ser somadas, pois ambas são matrizes $m \times p$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ij} &= A_i \cdot (B + C)^j \\
&= A_i \cdot (B^j + C^j) \\
&= A_i \cdot B^j + A_i \cdot C^j \\
&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\
&= (AB + AC)_{ij}
\end{aligned}$$

demonstrando (1). A demonstração de (2) é análoga. Quanto a (3), observemos que

$$\begin{aligned}
[A(xB)]_{ij} &= A_i \cdot (xB)^j = A_i \cdot (xB^j) \\
&= (xA_i) \cdot B^j = (xA)_i \cdot B^j \\
&= [(xA)B]_{ij}
\end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}
[A(xB)]_{ij} &= x(A_i \cdot B^j) \\
&= x(AB)_{ij} \\
&= [x(AB)]_{ij}.
\end{aligned}$$

O leitor deve ter observado que as propriedades demonstradas acima são conseqüências de propriedades análogas do produto interno de n-uplas.

TEOREMA 5.2 - Se A, B e C são matrizes $m \times n$, $n \times p$ e $p \times q$, respectivamente, então

$$(AB)C = A(BC).$$

Demonstração: Desde que AB é uma matriz $m \times p$ e BC é $n \times q$, podemos multiplicar AB por C e multiplicar A por BC. Observemos, agora, que

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rk} \Big) C_{kj} \\
&= \sum_{r=1}^{n} A_{ir} \Big(\sum_{k=1}^{p} B_{rk} C_{kj} \Big) \\
&= \sum_{r=1}^{n} A_{ir} (BC)_{rj} \\
&= [A(BC)]_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq q.
\end{aligned}$$

Portanto $(AB)C = A(BC)$, isto é, o produto de matrizes é associativo.

TEOREMA 5.3 - Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Então ${}^tA$ é $n \times m$ e ${}^tB$ é $p \times n$ e, além disso,

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Demonstração: Observemos, primeiramente, que $({}^tA)^j = A_j$ e $({}^tB)_i = B^i$. Assim,

$$\begin{aligned}
[{}^t(AB)]_{ij} &= (AB)_{ji} \\
&= A_j \cdot B^i \\
&= ({}^tA)^j \cdot ({}^tB)_i \\
&= ({}^tB)_i \cdot ({}^tA)^j \\
&= ({}^tB\,{}^tA)_{ij} \text{ para } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq m.
\end{aligned}$$

Portanto ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

A *matriz identidade* $n \times n$ é a matriz I tal que $I_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $I_{ii} = 1$ para $1 \leq i, j \leq n$.

EXEMPLO 5.8 - As matrizes identidade 2×2 e 3×3 são, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observe que, se A é uma matriz $m \times n$ e I é a matriz identidade $m \times m$, então $IA = A$. Se I é a matriz identidade $n \times n$, então $AI = A$.

Portanto, se A fôr uma matriz quadrada $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, então

$$AI = IA = A$$

justificando o nome identidade dado à matriz I.

Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$. Se $BA = I$, diremos que B é uma *inversa à esquerda* de A; e se $AC = I$, diremos que C é uma *inversa à direita* de A. Observemos que se A possui uma inversa à direita, B, e uma inversa à esquerda, C, então $B = C$. Realmente,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Assim, se A possui inversas à direita e à esquerda, diremos que A é *inversível* e indicaremos sua inversa por A^{-1}. Portanto, uma matriz A é inversível se existir uma matriz A^{-1}, chamada *inversa de* A, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Mostraremos em §5.10 que, se uma matriz A possui uma inversa à direita (ou à esquerda), então A é inversível.

Observe que se A é inversível, então A^{-1} é também inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$; e que, se A e B são matrizes $n \times n$, inversíveis, então AB é também inversível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Portanto um produto de matrizes inversíveis é uma matriz inversível.

O traço de uma matriz quadrada A, $n \times n$, indicado por $\mathrm{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal de A, isto é

$$\mathrm{tr}(A) = A_{11} + \ldots + A_{nn} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

É fácil ver que, se A e B são matrizes $n \times n$ e x é um escalar qualquer, então

(1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(2) $\mathrm{tr}(xA) = x\,\mathrm{tr}(A)$

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, I é a matriz identidade $n \times n$ e m é um inteiro não negativo, definimos: $A^0 = I$ e $A^m = A \ldots A$ (produto de m fatôres iguais a A).

Mais geralmente, se $p(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$ é um polinômio qualquer, então definimos $p(A)$ como sendo a matriz quadrada $n \times n$

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_0 I.$$

Observemos que, se K é um corpo, A é uma matriz em $M_{nn}(K)$ e todos os coeficientes de $p(t)$ estão em K, então a matriz $p(A)$ também está em $M_{nn}(K)$. Se m é um inteiro positivo e A é uma matriz inversível $n \times n$, definimos $A^{-m} = (A^{-1})^m$.

EXERCÍCIOS

1. Em cada um dos casos abaixo, calcule $(AB)C$ e $A(BC)$

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

b) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

c) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Sejam A, B e C matrizes 2×2. Demonstre, sem usar somatórios, que $(AB)C = A(BC)$.

3. Sejam A e B matrizes $n \times n$ tais que $AB = BA$. Demonstre a fórmula do binômio

$$(A + B)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

sendo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4. Se $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, calcule AB e BA.

5. Se $E_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$ e $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, calcule E_1A.

6. Sejam A uma matriz $n \times n$ e E_i a n-upla que possui todas as coordenadas nulas, com exceção da i-ésima, que é 1. Mostre que $E_iA = A_i$ e $A^tE_i = A^i$.

7. Sejam A, B e C matrizes $m \times n$, $n \times p$ e $p \times q$, respectivamente. Mostre que ${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$.

8. Seja S uma matriz simétrica $n \times n$, com elementos em um corpo K. Se X e Y são vetores de K^n, defina

$$< X, Y > = XS\,{}^tY.$$

Mostre que $< , >$ possui as propriedades de um produto interno. Êsse produto interno é não degenerado? (veja §5.2).

9. Seja $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Calcule A^2 e A^3. Generalize para matrizes 4×4.

10. Se $A = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, calcule A^2 e A^3 e, em geral A^n, se n é um inteiro positivo.

11. Sejam A e B matrizes inversíveis $n \times n$.
   a) Mostre que A^{-1} é inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
   b) Mostre que AB é inversível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   c) Mostre que ${}^tA$ é inversível e $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

12. Se A é uma matriz, seja A^* a matriz definida por $A^*_{ij} = \bar{A}_{ji}$ (isto é, o elemento de ordem ij de A^* é o conjugado complexo do elemento de ordem ji de A). Mostre que
   a) Se A e B são matrizes $m \times n$; então $(A + B)^* = A^* + B^*$
   b) Se A é $m \times n$ e B é $n \times p$, então $(AB)^* = B^*A^*$
   c) Se A é uma matriz qualquer, então $(A^*)^* = A$.

13. Seja D uma matriz diagonal tal que $D_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Mostre que D é inversível. Qual é a inversa de D?

14. Uma matriz A, $n \times n$, chama-se *superiormente triangular* (estritamente) quando $A_{ij} = 0$ se $i \geq j$. Mostre que $A^n = 0$ (Sugestão: indução sôbre n).

15. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que $A^n = I$ para algum $n > 0$. Mostre que A é inversível. Qual é a inversa de A?

16. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^{n+1} = 0$ para algum inteiro $n > 0$. Mostre que a matriz $I - A$ é inversível e que $(I - A)^{-1} = I + A + \ldots + A^n$.

17. Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ e x um escalar qualquer. Mostre que
   a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
   b) $\mathrm{tr}(xA) = x\,\mathrm{tr}(A)$
   c) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
   d) se B é inversível, então $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$.

18. Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ e x um escalar qualquer. Defina $[A, B] = AB - BA$ (colchête de Lie de matrizes). Mostre que:
   a) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
   b) $[A, B] = -[B, A]$
   c) $[xA, B] = [A, xB] = x[A, B]$
   d) $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$ (identidade de Jacobi).

19. Mostre que não existem matrizes quadradas A e B tais que $AB - BA = I$. (Sugestão: utilize o exercício 17.)

20. Uma matriz quadrada A chama-se *nilpotente* se existir um inteiro $r > 0$ tal que $A^r = 0$. Sejam A e B matrizes nilpotentes $n \times n$ tais que $AB = BA$. Mostre que AB e $A + B$ são também nilpotentes. (Sugestão: utilize o exercício 3.)

§ 5.5 – *Sistemas de Equações Lineares*

Se K é um corpo, vamos considerar o seguinte problema: determinar o conjunto S das n-uplas $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de K^n cujas coordenadas satisfazem às equações

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \ldots + A_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

em que b_i e A_{ij}, $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$ são escalares em K. O conjunto de equações (1) chama-se um *sistema de m equações lineares com n incógnitas*. Os vetores de S são as *soluções* do sistema (1) e o conjunto S chama-se o *espaço das soluções* dêsse sistema. O sistema (1) chama-se *homogêneo* se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Observe que o sistema acima pode também ser escrito como

$$\begin{aligned} A_1 \cdot X &= b_1 \\ A_2 \cdot X &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ A_m \cdot X &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

em que $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im})$, $i = 1, \ldots, m$, e $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Como $A_i \cdot X = b_i$ é a equação de um hiperplano normal ao vetor A_i, então o conjunto S é a interseção de m hiperplanos. Portanto, estamos considerando o problema geométrico de achar a interseção de m hiperplanos de K^n.

O sistema (1) pode ainda ser escrito como

$$AX = B \tag{3}$$

com

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{vmatrix}.$$

A matriz A, $m \times n$, é a *matriz dos coeficientes* do sistema.

TEOREMA 5.4 – Seja A uma matriz $m \times n$, com elementos no corpo K. O conjunto S das n-uplas X de K^n que são soluções do sistema homogêneo $AX = O$ é um subespaço vetorial de K^n.

Demonstração: Realmente,

1. O vetor zero pertence a S, pois, $AO = O$.
2. Se X e Y pertencem a S, então $X + Y$ também pertence a S, pois,

$$\begin{aligned} A(X + Y) &= AX + AY \\ &= O + O \\ &= O. \end{aligned}$$

3. Se X pertence a S e c é um escalar qualquer em K, então cX também pertence a S, pois,

$$A(cX) = cAX = cO = O.$$

Observe que o conjunto das soluções de um sistema não-homogêneo $AX = B$ não é um subespaço vetorial, pois, o vetor zero não é solução.

Seja X_0 uma solução qualquer do sistema $AX = B$. Uma n-upla Y é solução dêsse sistema se, e sòmente se, $Y = X + X_0$, onde X é solução do sistema homogêneo $AX = O$. Realmente, se X é solução de $AX = O$ e se $Y = X + X_0$, então,

$$\begin{aligned} AY = A(X + X_0) &= AX + AX_0 \\ &= O + B \\ &= B, \end{aligned}$$

Recìprocamente, se Y é solução do sistema não homogêneo, então o vetor $X = Y - X_0$ é solução do sistema homogêneo e $Y = X + X_0$, pois,

$$\begin{aligned} AX = A(Y - X_0) &= AY - AX_0 \\ &= B - B \\ &= O. \end{aligned}$$

A técnica básica para achar as soluções de um sistema de equações lineares é a *eliminação*. Ilustraremos o método da eliminação com o seguinte exemplo: considere o sistema de duas equações lineares com três incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Somando as equações dêsse sistema, obtemos

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

donde concluímos que $x_1 = -x_2$. Multiplicando a primeira equação por -2 e somando à segunda, obtemos

$$-3x_2 + 3x_3 = 0$$

donde $x_3 = x_2$. Portanto, se $X = (x_1, x_2, x_3)$ é uma solução de (4), então $x_1 = -x_2 = -x_3$. Recìprocamente, se $x_1 = -x_2 = -x_3$, então $X = (x_1, x_2, x_3)$ é solução de (4). Assim, o espaço das soluções reais dêsse sistema é a reta $X = t(1, -1, -1)$ de R^3, enquanto o espaço das soluções complexas é a reta

$$X = t(1, -1, -1) \text{ de } \mathbb{C}^3.$$

O método usado para achar as soluções do sistema acima foi o de eliminação de incógnitas, que consiste em multiplicar equações por escalares e então somar equações de maneira a obter equações que não contenham uma dada incógnita. Desejamos formalizar êsse processo, tendo em vista obter um método mais organizado para resolver sistemas. Além disso, desejamos entender a razão pela qual o processo de eliminação funciona.

Sejam $c_1, \ldots, c_m$ escalares quaisquer do corpo K. Multipliquemos a primeira equação do sistema (1) por c_1, a segunda por c_2 etc., a m-ésima por c_m. Somando as equações assim obtidas, o resultado é

$$(c_1A_{11} + \ldots + c_mA_{m1})x_1 + \ldots + (c_1A_{1n} + \ldots + c_mA_{mn})x_n = c_1b_1 + \ldots + c_mb_m$$

que chamaremos de *combinação linear* das equações do sistema (1). Observe que tôda solução do sistema (1) é também solução da equação acima, mas nem tôda solução dessa equação é necessàriamente solução do sistema (1), como nos mostra o seguinte exemplo:

EXEMPLO 5.9 – O espaço das soluções reais do sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

é a reta $X = t(0, 1, -1)$ de R^3, enquanto o espaço das soluções da equação

$$x + y + z = 0$$

é o plano que passa pela origem e é normal ao vetor $A = (1, 1, 1)$. Entretanto essa equação pode ser obtida como a combinação linear

$$1(x + y + z) + 0(x - y - z) = 0$$

das equações do sistema acima.

Considere o sistema

$$\begin{aligned} B_{11}x_1 + \ldots + B_{1n}x_n &= d_1 \\ B_{21}x_1 + \ldots + B_{2n}x_n &= d_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ B_{k1}x_1 + \ldots + B_{kn}x_n &= d_k \end{aligned} \tag{4}$$

de k equações lineares com n incógnitas.

Se tôda equação de (4) é uma combinação linear das equações de (1), então tôda solução de (1) é também solução de (4). Pode acontecer, porém, que algumas soluções de (4) não sejam soluções de (1). Mas isto não acon-

tecerá se, por sua vez, cada equação de (1) fôr também combinação linear das equações de (4). Isto nos sugere a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 5.1 – Dois sistemas de equações lineares chamam-se *equivalentes* se cada equação de um dêles fôr combinação linear das equações do outro, e recìprocamente.

O que foi visto acima nos leva à seguinte conclusão:

TEOREMA 5.5 – Sistemas de equações lineares equivalentes têm exatamente as mesmas soluções.

O método de eliminação consiste em reduzir um dado sistema a um que lhe seja equivalente e cuja solução seja imediata. Êste será o objetivo da próxima seção.

EXERCÍCIOS

1. Determine se os sistemas abaixo são ou não equivalentes. Se fôrem equivalentes, exprima cada equação de cada um dos sistemas como uma combinação linear das equações do outro.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Repita o exercício 1 com os seguintes sistemas:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

3. Repita o exercício 1 com os sistemas:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - ix_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -ix_1 + x_2 - ix_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. Demonstre que, se dois sistemas de equações lineares homogêneas com duas incógnitas possuem as mesmas soluções, então êles são equivalentes.

§ 5.6 – *Operações Elementares*

Nosso objetivo nessa seção é estudar as operações sôbre as linhas de uma matriz A que correspondem a formar combinações lineares das equações do sistema $AX = B$. Consideraremos três tipos de operações elementares:

1) multiplicação de uma linha A_r por um escalar não nulo c do corpo K (K é o menor corpo que contém todos os elementos de A).

2) substituição da linha A_r por $A_r + cA_s$ onde c é um escalar qualquer de K e $r \neq s$.

3) permutação de duas linhas de A, isto é, substituição da linha A_r pela linha A_s e da linha A_s pela linha A_r.

Mais precisamente, uma operação elementar sôbre linhas é uma função (correspondência) e que a cada matriz A faz corresponder uma matriz $e(A)$. Se A é $m \times n$, então a matriz $e(A)$ é também $m \times n$. Podemos descrever cada uma das operações elementares como:

1) $e(A)_i = A_i$ se $i \neq r$; $e(A)_r = cA_r$ onde c é um escalar não nulo de K.

2) $e(A)_i = A_i$ se $i \neq r$; $e(A)_r = A_r + cA_s$ onde $r \neq s$ e c é um escalar qualquer de K.

3) $e(A)_i = A_i$ se $i \neq r, s$; $e(A)_r = A_s$, $e(A)_s = A_r$.

Observemos que, na definição das operações elementares, o número de colunas de A não é importante. Suporemos portanto que uma operação elementar e é definida no conjunto $\mathscr{M}_m(K)$ de tôdas as matrizes, com elementos em K, que possuem m linhas (o número de colunas sendo arbitrário).

TEOREMA 5.6 – A cada operação elementar e corresponde uma operação elementar e_1, do mesmo tipo que e, tal que

$$e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$$

para cada matriz A que possui m linhas. Em outras palavras, a operação inversa e_1 de uma operação elementar e existe e é do mesmo tipo que e.

Demonstração: 1) Se e é a operação que consiste em multiplicar a r-ésima linha de uma matriz por um escalar $c \neq 0$, então e_1 consiste em multiplicar essa mesma linha por c^{-1}.

2) Se e é a operação que consiste na substituição da r-ésima linha de uma matriz pela soma da r-ésima linha com c vêzes a s-ésima linha, então e_1 consiste em somar $(-c)$ vêzes a s-ésima linha à r-ésima linha.

3) Se e consiste em permutar a r-ésima linha com a s-ésima linha, então $e_1 = e$.

Nos três casos acima, temos

$$e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$$

qualquer que seja a matriz A que possui m linhas.

A operação elementar e_1 será indicada por e^{-1}.

DEFINIÇÃO 5.2 – Sejam A e B matrizes $m \times n$ com elementos em um corpo K. Diremos que A é *equivalente por linhas* a B se B pode ser obtida de A após um número finito de operações elementares.

Utilizando o teorema anterior, verificamos que:

a) cada matriz é equivalente por linhas a si mesma (reflexividade);

b) se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);

c) se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

Devido a essas propriedades, diremos que a equivalência por linhas é uma relação de equivalência no conjunto das matrizes com elementos em um corpo K.

LEMA 5.1 – Seja e uma operação elementar no conjunto das matrizes que possuem p linhas. Se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $p \times m$, então

$$e(BA) = e(B)A.$$

Demonstração: 1) Se e consiste na multiplicação da r-ésima linha por $c \neq 0$, então

$$e(BA)_{rj} = c(BA)_{rj} = c(B_r \cdot A^j) = (cB_r) \cdot A^j = e(B)_r \cdot A^j = [e(B)A]_{rj}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Se $i \neq r$ e $1 \leq j \leq n$, então

$$e(BA)_{ij} = (BA)_{ij} = B_i \cdot A^j = e(B)_i \cdot A^j = [e(B)A]_{ij}.$$

2) Se e consiste em somar à r-ésima linha c-vêzes a s-ésima linha, então:

$$e(BA)_{rj} = (BA)_{rj} + c(BA)_{sj} = B_r \cdot A^j + c(B_s \cdot A^j) = (B_r + cB_s) \cdot A^j$$
$$= e(B)_r \cdot A^j = [e(B)A]_{rj}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Se $i \neq r$ e $1 \leq j \leq n$, então

$$e(BA)_{ij} = (BA)_{ij} = B_i \cdot A^j = e(B)_i A^j = [e(B) \cdot A]_{ij}$$

3) Se e consiste em permutar as linhas de ordem r e s entre si, então

$$e(BA)_{rj} = (BA)_{sj} = B_s \cdot A^j = e(B)_r \cdot A^j = [e(B)A]_{rj}$$

e

$$e(BA)_{sj} = (BA)_{rj} = B_r \cdot A^j = e(B)_s \cdot A^j = [e(B)A]_{sj}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Se $i \neq r, s$, então

$$e(BA)_{ij} = (BA)_{ij} = B_i \cdot A^j = e(B)_i \cdot A^j = [e(B)A]_{ij}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Vemos assim, nos tres casos acima que

$$e(BA) = e(B)A.$$

TEOREMA 5.7 – Se A é uma matriz $m \times n$ e e é uma operação elementar sôbre as matrizes que possuem m linhas, então os sistêmas homogêneos $AX = O$ e $e(A)X = O$ possuem as mesmas soluções.

Demonstração: Realmente, se X é tal que $AX = O$, então pelo lema acima,

$$e(A)X = e(AX) = e(O) = O.$$

Recìprocamente, se $e(A)X = O$, e e^{-1} é operação elementar inversa de e (veja Teorema 5.6), então:

$$AX = e^{-1}\,(e(A))X = e^{-1}\,(e(A)X) = e^{-1}\,(O) = O.$$

COROLÁRIO 5.1 – Se A e B são matrizes equivalentes por linhas, então os sistemas homogêneos $AX = O$ e $BX = O$ possuem as mesmas soluções.

Demonstração: De fato, se A é equivalente por linhas a B, então existe uma seqüência finita $e_1, \ldots, e_k$ de operações elementares tais que

$$B = e_k(e_{k-1}(\ldots e_1(A)).$$

Pelo teorema anterior, $AX = O$ e $e_1(A)X = O$ possuem as mesmas soluções; $e_1(A)X = O$ e $e_2(e_1(A))X = O$ possuem as mesmas soluções etc., $e_{k-1}(\ldots e_1(A))X = O$ e $BX = O$ possuem as mesmas soluções. Portanto $AX = O$ e $BX = O$ possuem as mesmas soluções.

EXEMPLO 5.10 – Considere o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes dêste sistema é a matriz racional

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Efetuaremos uma seqüência de operações elementares sôbre as linhas de A a fim de obter uma matriz B tal que o sistema $BX = O$ seja de solução imediata. Indicaremos por números entre parênteses os tipos de operações efetuadas.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = B.$$

Portanto, pelo corolário anterior, o sistema $AX = O$ possui as mesmas soluções que o sistema $BX = O$, isto é,

$$\begin{aligned} x_1 - 1/5\,x_3 &= 0 \\ x_2 - 3/5\,x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o sistema $AX = O$ só admite a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

EXEMPLO 5.11 – Considere o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

de três equações a quatro incógnitas. A matriz dêste sistema é a matriz racional

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao tentar obter uma matriz mais simples B, equivalente por linhas à matriz A, é conveniente efetuarmos ao mesmo tempo várias operações do tipo (2). Tendo isso em mente, podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

O sistema $BX = 0$ se escreve como

$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\,x_4 &= 0 \\ x_3 + 1/2\,x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

cujas soluções são obtidas atribuindo-se valôres arbitrários a x_4 e calculando os valôres correspondentes para x_1, x_2 e x_3. Assim, as soluções do sistema $AX = O$ são

$$X = c(1/2,\ -1,\ -1/2,\ 1)$$

onde c é um escalar qualquer.

EXEMPLO 5.12 - Considere o sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + ix_2 &= 0 \\ -ix_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

de três equações lineares homogêneas com duas incógnitas e coeficientes complexos. A matriz dêste sistema é a matriz complexa 3×2,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga ao que fizemos nos dois exemplos acima, temos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

É claro que o sistema $BX = O$ possui apenas a solução trivial. Portanto o mesmo é verdade em relação ao sistema $AX = O$.

DEFINIÇÃO 5.3 - Uma matriz L chama-se *reduzida por linhas* se:

a) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de L é igual a 1;

b) cada coluna de L que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha de L tem todos os outros elementos iguais a zero.

EXEMPLO 5.13 - *a*) A matriz identidade I, $n \times n$, é reduzida por linhas.

b) As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtidas nos exemplos 5.11 e 5.12, respectivamente, são reduzidas por linhas.

c) A matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

obtida no Exemplo 5.10 *não é* reduzida por linhas.

Demonstraremos a seguir que é sempre possível obter uma matriz L, reduzida por linhas, após um número finito de operações elementares sôbre as linhas de uma matriz qualquer A. Desde que os sistemas $AX = O$ e $LX = O$ possuem as mesmas soluções e $LX = O$ é de solução imediata, estaremos, assim, de posse de um método efetivo para achar as soluções de qualquer sistema de equações lineares homogêneas.

TEOREMA 5.8 – Tôda matriz $m \times n$ com elementos em um corpo K é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linhas com elementos no mesmo corpo.

Demonstração: Seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em K. Se todos os elementos da primeira linha de A são nulos, então essa linha já satisfaz à condição *a*) da definição de matriz reduzida por linhas. Se a primeira linha de A não fôr nula, existe um primeiro elemento não nulo A_{1k} nesta linha. Multiplique esta linha por A_{1k}^{-1}. A primeira linha da matriz B, assim obtida, satisfará à condição *a*). Agora substitua cada linha B_i, $i > 2$ por $B_i - A_{ik}B_1$. Seja C a matriz assim obtida. Observe que o único elemento não nulo da coluna C^k é $C_{1k} = 1$.

Considere agora a segunda linha de C. Se todos os elementos dessa linha são nulos, não a modificaremos. Caso contrário, seja C_{2l} o primeiro elemento não nulo dessa linha. Multiplique a segunda linha de C por C_{2l}^{-1}. Observe que $k \neq l$. Seja D a matriz assim obtida. Substitua a linha D_i, $i > 3$, por $D_i - C_{il}D_2$. Seja E a matriz assim obtida. Observe que $E_{il} = 0$ se $i \neq 2$ e $E_{2l} = 1$. Além disso $C_{1i} = E_{1i}$ para $i = 1, \ldots, k$.

Procedendo com uma linha de cada vez, como fizemos para a primeira e segunda linhas, obteremos, após um número finito de operações elementares, uma matriz reduzida por linhas.

EXERCÍCIOS

1. Ache tôdas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

2. Qual é o espaço das soluções do sistema

$$\begin{aligned} -ix_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - ix_2 &= 0\,? \end{aligned}$$

3. Ache as soluções dos sistemas $AX = 0$, $AX = 2X$ e $AX = 3X$, sendo

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Encontre uma matriz reduzida por linhas que seja equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{vmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{vmatrix}.$$

5. Demonstre que as matrizes

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

não são equivalentes por linhas.

6. Mostre que existem apenas três tipos de matrizes reduzidas por linhas $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tais que $a + b + c + d = 0$.

7. Demonstre que a permutação de duas linhas de uma matriz pode ser obtida por um número finito de operações elementares dos outros tipos.

8. Considere o sistema homogêneo $AX = O$, em que $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Demonstre que:

i) se $a = b = c = d$, então todo vetor $X = (x_1, x_2)$ de R^2 é solução de $AX = O$;

ii) se $ad - bc \neq 0$, então o sistema $AX = O$ só possui a solução tivial $x_1 = x_2 = 0$;

iii) se $A \neq O$ e $ad - bc = 0$, então o espaço das soluções reais de $AX = O$ é uma reta que passa pela origem de R^2.

9. Ache uma base para o espaço das soluções reais do sistema homogêneo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

10. Encontre tôdas as soluções do sistema

$$x + 3y - z + w = 0$$
$$2x + y + 3z - w = 0$$
$$x - y + 4z - 2w = 0.$$

11. Seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em um corpo K. Demonstre que, se existir um vetor não nulo X em $\mathbf{C}^n$ tal que $AX = O$, então também existe um vetor não nulo X_0 em K^n tal que $AX_0 = O$.

§ 5.7 – *Matrizes Escalonadas*

Para obtermos mais informações sôbre as soluções dos sistemas de equações lineares, introduziremos as matrizes escalonadas.

DEFINIÇÃO 5.4 – Uma matriz E, $m \times n$, com elementos em um corpo K, reduzida por linhas, chama-se *escalonada* se:

a) as linhas nulas de E ocorrem abaixo de tôdas as linhas não nulas de E;

b) se $E_1, \ldots, E_k$ são as linhas não nulas de E e se E_{ik_i} é o primeiro elemento não nulo da linha E_i, $1 \leq i \leq r$, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Em outras palavras, a matriz E é escalonada se:

1. $E_i = 0$ para $i > r$; $E_{ij} = 0$ se $j < k_i$.
2. $E_{ik_j} = 0$ se $i \neq j$; $E_{ik_i} = 1$ para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq r$.
3. $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

EXEMPLO 5.14 – *a)* A matriz zero, $m \times n$, é escalonada. A matriz identidade, $n \times n$, é escalonada.

b) A matriz

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{é escalonada.}$$

c) As seguintes matrizes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

são reduzidas por linhas, mas não são escalonadas.

TEOREMA 5.9 – Tôda matriz A, $m \times n$, com elementos em um corpo K é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linhas e escalonada, com elementos no mesmo corpo.

Demonstração: Pelo Teorema 5.8, A é equivalente por linhas a uma matriz B, reduzida por linhas com elementos em K. Agora observe que, efetuando-se um número finito de permutações de linhas em B, obtemos uma matriz escalonada E.

OBSERVAÇÃO: Seja E uma matriz $m \times n$, reduzida por linhas e escalonada, que possui as linhas não nulas $E_1, \ldots, E_r$. Sejam $E_{1k_1} = \ldots = E_{rk_r} = 1$ os primeiros elementos não nulos dessas linhas. É fácil ver que tôdas as soluções do sistema $EX = O$ podem ser obtidas atribuindo-se valôres arbitrários às n-r incógnitas distintas de $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ e então calculando-se os valôres correspondentes para $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$.

EXEMPLO 5.15 – Considere a matriz escalonada

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

As soluções do sistema

$$x_2 - 3x_3 + \tfrac{1}{2}x_5 = 0$$
$$x_4 + 2x_5 = 0$$

podem ser obtidas atribuindo valôres arbitrários $x_1 = a$, $x_3 = b$ e $x_5 = c$ às incógnitas x_1, x_3 e x_5 e calculando os valôres $x_2 = 3b - \frac{c}{2}$ e $x_4 = -2c$ correspondentes a x_2 e x_4. Portanto, as soluções do sistema $EX = O$ são

$$X = (a,\ 3b - \frac{c}{2},\ b,\ -2c,\ c)$$

em que a, b e c são escalares quaisquer.

OBSERVAÇÃO: Uma maneira de descrever completamente o espaço das soluções de um sistema homogêneo $BX = O$ é achar uma base para êsse espaço. Assim, se $A_1, \ldots, A_s$ é uma base para o espaço das soluções do sistema $BX = O$, então tôdas as soluções podem ser escritas como combinações lineares

$$X = c_1A_1 + \ldots + c_sA_s.$$

No exemplo 5.15, pondo $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, obtemos a solução $A_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, pondo $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 1$, obtemos a solução $A_2 = (0, 3, 1, 0, 0)$ e finalmente pondo $x_1 = x_3 = 0$, $x_5 = 1$, obtemos a solução $A_3 = (0, -\frac{1}{2}, 0, -2, 1)$. É fácil ver que $\{A_1, A_2, A_3\}$ é uma base para o espaço das soluções dêsse sistema.

TEOREMA 5.10 – Todo sistema de equações lineares homogêneas cujo número de equações é menor que o número de incógnitas possui soluções não triviais.

Demonstração: Seja $AX = O$ um sistema de m equações com n incógnitas, com coeficientes em um corpo K. Pelo Teorema 5.9, a matriz A é equivalente por linhas a uma matriz escalonada E. Assim, o número r de equações não nulas do sistema $EX = O$ é menor que o número n de incógnitas (pois $r \leq m < n$). Sejam, como antes, $E_{1k_1} = \ldots = E_{rk_r} = 1$ os primeiros elementos não nulos das linhas não nulas de E. Podemos, então, obter soluções não triviais para o sistema $EX = O$, atribuindo valôres não nulos para as n-r incógnitas distintas de $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$. Pelo Corolário 5.1, $AX = O$ e $EX = O$ possuem as mesmas soluções. Portanto $AX = O$ possui soluções não triviais.

TEOREMA 5.11 – Seja A uma matriz quadrada, $n \times n$. Então o sistema homogêneo $AX = O$ possui apenas a solução trivial se, e sòmente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade $n \times n$.

Demonstração: Pelo Teorema 5.9, A é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linhas e escalonada, E. Além disso, pelo Corolário 5.1, os sistemas $AX = O$ e $EX = O$ possuem as mesmas soluções. Portanto, se $AX = O$ só possui a solução trivial, então $EX = O$ também só possui a solução trivial. Pela demonstração do Teorema 5.10, vemos que a matriz E não possui linhas nulas. É fácil ver que a única matriz $n \times n$, reduzida por linhas e escalonada que não possui linhas nulas, é a matriz identidade $n \times n$. Recìprocamente, se $E = I$, então $EX = O$ só possui a solução trivial.

§ 5.8 *Sistemas não Homogêneos*

Utilizando as operações elementares, podemos achar as soluções de sistemas do tipo $AX = C$ onde $C \neq O$. Há uma diferença essencial entre um sistema homogêneo e um sistema não homogêneo: o primeiro possui sempre pelo menos a solução trivial $X = O$, enquanto o sistema não homogêneo pode não admitir nenhuma solução.

Sejam A uma matriz $m \times n$ e C uma matriz $m \times 1$, ambas com elementos em um corpo K. A *matriz completa* do sistema $AX = C$ é definida como sendo a matriz $m \times (n + 1)$:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & C_1 \\ A_{21} & \ldots & A_{2n} & C_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} & C_m \end{vmatrix} \quad \text{se} \quad C = \begin{vmatrix} C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_m \end{vmatrix}.$$

Mais precisamente, $\hat{A}$ é a matriz $m \times (n + 1)$ cujas colunas são

$$\hat{A}^i = A^i \text{ se } i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \hat{A}^{n+1} = C.$$

Pelo Teorema 5.9, é possível efetuar uma seqüência de operações elementares sôbre as linhas da matriz A, obtendo uma matriz reduzida por linhas e escalonada, E. Após efetuarmos a mesma seqüência de operações elementares sôbre as linhas da matriz completa $\hat{A}$, obtemos uma matriz $\hat{E}$ cujas n primeiras colunas são as colunas de E. Seja

$$D = \begin{vmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m \end{vmatrix} \quad \text{a } (n + 1)\text{-ésima coluna de } \hat{E}.$$

Observe que a matriz D é obtida efetuando-se a mesma seqüência de operações elementares sôbre as linhas da matriz C. Como na demonstração do Corolário 5.1, é fácil ver que os sistemas $AX = C$ e $EX = D$ possuem as mesmas soluções. Podemos, assim, verificar se o sistema $AX = C$ possui solução e, em caso afirmativo, achar as soluções. Realmente, suponha que a matriz E possui r linhas não nulas e que o primeiro elemento não nulo da linha E_i ocorra na coluna de ordem k_i de E, $i = 1, \ldots, r$. As r primeiras equações do sistema $EX = D$ nos dão os valôres das incógnitas $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ em função das n-r incógnitas restantes e dos escalares $d_1, \ldots, d_r$. As últimas m-r equações do sistema são

$$\begin{aligned} 0 &= d_{r+1} \\ 0 &= d_{r+2} \\ &\cdots\cdots \\ 0 &= d_m. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema $AX = C$ possui solução se, e sòmente se, $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$. Se essa condição é satisfeita, as soluções do sistema $AX = C$ podem ser obtidas atribuindo valôres arbitrários às n-r incógnitas distintas de $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ e, então, calculando os valôres correspondentes para $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$.

EXEMPLO 5.16 – Determinaremos os valôres das constantes c_1, c_2, c_3, c_4 para os quais o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 &= c_1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= c_2 \\ x_3 + x_4 &= c_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= c_4 \end{aligned} \qquad (1)$$

possui solução. A matriz completa do sistema é

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & c_1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c_3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & c_4 \end{vmatrix}$$

Efetuando operações elementares sôbre as linhas de $\hat{A}$ obtemos a matriz reduzida por linhas e escalonada

$$\hat{E} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & c_1 + c_2 - 3c_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_1 + 3c_2 - 7c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 - c_2 + 2c_3 + c_4 \end{vmatrix}$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que o sistema (1) possua solução é que:

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 - 7c_3 &= 0 \\ -c_1 - c_2 + 2c_3 + c_4 &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema homogêneo (2), obtemos

$$\begin{aligned} c_1 &= c_3 - 3c_4 \\ c_2 &= -3c_3 + 2c_4. \end{aligned} \qquad (3)$$

Se a condição (3) é satisfeita, as soluções do sistema (1) são

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a + b + c_1 + c_2 - 3c_3 \\ x_2 &= a \\ x_3 &= c_3 - b \\ x_4 &= b \end{aligned}$$

em que a e b são escalares arbitrários.

EXERCÍCIOS

1. Ache tôdas as soluções do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 18x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 13x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

2. *a*) Ache uma matriz reduzida por linhas e escalonada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2i \\ i & i-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Qual é o espaço das soluções complexas do sistema $AX = O$?

3. Ache tôdas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4. Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= b \\ 5x_2 - x_3 &= c. \end{aligned}$$

a) Para que valôres de a, b e c o sistema acima possui solução?

b) Ache tôdas as soluções do sistema.

5. Repita o exercício 4 para o sistema $AX = C$, onde

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$$

6. Repita o exercício 4 para o sistema $AX = C$, em que

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$$

7. Verifique se o sistema $AX = O$ possui solução não trivial, sendo A a matriz do exercício 6.

8. Sejam A e B matrizes 2×3, reduzidas por linhas e escalonadas. Demonstre que se $AX = O$ e $BX = O$ possuem as mesmas soluções, então $A = B$.

9. Considere o sistema

$$\begin{aligned} ix_1 - (1 + i)x_2 + x_4 &= a \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= b \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 - x_4 &= c. \end{aligned}$$

Repita o exercício 4 para êste sistema.

10. Repita o exercício 4 para o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= a \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= b \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= c. \end{aligned}$$

§ 5.9 – *Matrizes Elementares*

Se A é uma matriz $m \times n$ e I é a matriz identidade $m \times m$, então $A = IA$. Seja e uma operação elementar sôbre as matrizes que possuem m linhas. O Lema 5.1 nos diz que

$$e(A) = e(I)A. \tag{1}$$

Isso nos sugere a seguinte

DEFINIÇÃO 5.5 – Uma matriz E, $m \times m$, chama-se *elementar* se existir uma operação elementar e tal que $E = e(I)$, onde I é a matriz identidade $m \times m$.

A igualdade (1) nos diz que

$$e(A) = EA \tag{2}$$

onde $E = e(I)$ é uma matriz elementar.

EXEMPLO 5.17 – Existem cinco tipos de matrizes elementares 2×2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} \quad \text{sendo } c \text{ um escalar}$$

qualquer e

$$\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \quad \text{sendo } c \text{ um escalar qualquer não nulo.}$$

TEOREMA 5.12 – Sejam A e B matrizes $m \times n$, com elementos em um corpo K. Então A é equivalente por linhas a B se, e sòmente se, $B = PA$, em que P é um produto de matrizes elementares $m \times m$.

Demonstração: Se A é equivalente por linhas a B, então existem operações elementares $e_1, \ldots, e_s$ tais que

$$B = e_s(e_{s-1}(\ldots e_1(A))).$$

Portanto, a igualdade (2) nos diz que $B = PA$, em que $P = E_sE_{s-1}\ldots E_1$ e $E_i = e_i(I)$ para $i = 1, \ldots, s$.

Recìprocamente, se $B = PA$, em que $P = E_sE_{s-1}\ldots E_1$ e $E_i = e_i(I)$, então, ainda pela igualdade (2), obtemos

$$B = e_s(e_{s-1}(\ldots e_1(A)))$$

e, portanto, A é equivalente por linhas a B.

TEOREMA 5.13 – Tôda matriz elementar é inversível.

Demonstração: Seja $E = e(I)$ uma matriz elementar. Pelo Teorema 5.6, existe a operação e^{-1}, inversa de e. Afirmo: E é inversível e $E^{-1} = e^{-1}(I)$. Realmente, $E^{-1}E = e^{-1}(I)E = e^{-1}(E) = e^{-1}(e(I)) = I = e(e^{-1}(I)) = e(E^{-1}) = e(I)E^{-1} = EE^{-1}$.

EXEMPLO 5.18 – As inversas das matrizes elementares do Exemplo 5.17 são:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Para os outros dois tipos, temos

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$$

sendo $c \neq 0$.

EXERCÍCIOS

1. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ache as matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que

$$I = E_s \ldots E_2E_1A.$$

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstre que não existe uma matriz C, 2×3, tal que $B = AC$.

3. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ equivalente por linhas à matriz identidade I, $n \times n$. Mostre que A é inversível.

§ 5.10 – *Matrizes Inversíveis*

Sejam A e B matrizes $m \times n$. Considere as proposições:

a) A **é equivalente por linhas a** B,

b) $B = PA$, **sendo P um produto de matrizes elementares** $m \times m$.

O Teorema 5.12 **nos diz que a proposição** *a)* **implica a proposição** *b)*, **isto é, se** *a)* **é verdadeira, então** *b)* **é também verdadeira.** Indicaremos isso escrevendo $(a) \Rightarrow (b)$. O mesmo teorema nos diz também que $(b) \Rightarrow (a)$. Quando $(a) \Rightarrow (b)$ e $(b) \Rightarrow (a)$, dizemos que as proposições *a)* e *b)* são ***equivalentes*** e escrevemos $(a) \Leftrightarrow (b)$, Sejam $(a_1), \ldots, (a_n)$ n proposições. Dizemos que essas proposições são equivalentes se quaisquer duas dessas proposições são equivalentes, isto é, se $(a_i) \Leftrightarrow (a_j)$ para $1 \leq i, j < n$.

TEOREMA 5.14 – Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ com elementos em um corpo K. Então as seguintes proposições são equivalentes:

(1) A é inversível.

(2) A possui uma inversa à esquerda.

(3) O sistema homogêneo $AX = O$ só possui a solução trivial $X_0 = O$.

(4) A é equivalente por linhas à matriz identidade $n \times n$.

(5) A é um produto de matrizes elementares.

6) A possui uma inversa à direita.

(7) O sistema $AX = Y$ possui solução para cada Y em K^n.

Demonstração: Por conveniência, demonstraremos as implicações: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ e depois as implicações $(1) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$. É fácil ver que isso mostra que duas quaisquer das proposições do teorema são equivalentes. Por exemplo, $(2) \Leftrightarrow (7)$, pois a primeira seqüência de implicações mostra que $(1) \Leftrightarrow (2)$ e a segunda seqüência mostra que $(1) \Leftrightarrow (7)$.

(1) $\Rightarrow$ *(2)*. Realmente, se A é inversível, então A^{-1} **é uma inversa à esquerda de** A.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*. Sejam B uma inversa à esquerda de A (isto é, B é uma matriz $n \times n$ tal que $BA = I$) e X_0 uma solução do sistema $AX = O$.

Mostraremos que $X_0 = O$. Realmente:

$$X_0 = IX_0 = (BA)X_0 = B(AX_0) = BO = O.$$

(3) $\Rightarrow$ *(4)*. Suponha que o sistema $AX = O$ só **possui a solução trivial**.

Pelo Teorema 5.9, A é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linhas e escalonada, E. O Corolário 5.1 nos diz que o sistema $EX = O$ só possui a solução trivial. Pela observação que se segue à demonstração do Teorema 5.9, é fácil ver que $E = I$.

(4) $\Rightarrow$ *(5)*. Se A é equivalente por linhas à matriz identidade I, então pela reflexividade da equivalência por linhas, I é também equivalente por linhas a A. Portanto, pelo Teorema 5.12,

$$A = PI = P$$

sendo P um produto de matrizes elementares.

(5) $\Rightarrow$ *(1)*. Seja $A = E_1, \ldots, E_s$, E_i sendo matrizes elementares. O Teorema 5.13 nos diz que as matrizes E_i são inversíveis. Assim, a matriz A é inversível e $A^{-1} = E_s^{-1} \ldots E_1^{-1}$.

Demonstraremos agora que (1) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ *(7)*. Seja A^{-1} a inversa da matriz A. Se Y é um vetor qualquer de K^n, então $X_o = A^{-1}Y$ é uma solução do sistema $AX = Y$, pois,

$$AX_o = A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = IY = Y.$$

(7) $\Rightarrow$ *(6)*. Seja I^j a j-ésima coluna da matriz identidade $n \times n$. Então, por hipótese, para cada $j = 1, \ldots, n$ existe uma solução B^j para o sistema $AX = I^j$. Se B é a matriz cujas colunas são $B^1, \ldots, B^n$, então $AB = I$. Portanto B é uma inversa à direita de A.

(6) $\Rightarrow$ *(1)*. Seja B uma inversa à direita de A. Então $AB = I$ e A é inversa à esquerda de B. Portanto a proposição (2) é verdadeira para a matriz B e, como já demonstramos que (2) $\Rightarrow$ (1), então B é inversível. Como $AB = I$, então $A = B^{-1}$ e portanto A é inversível e $A^{-1} = B$.

COROLÁRIO 5.2 - Sejam A e B matrizes $m \times n$ com elementos em um corpo K. Então A é equivalente por linhas a B se, e sòmente se, $B = PA$ onde P é uma matriz inversível $m \times m$.

Demonstração: O Teorema 5.12 diz que A é equivalente por linhas a B se, e sòmente se, $B = PA$ sendo P um produto de matrizes elementares. O Teorema 5.14 diz que P ser um produto de matrizes elementares é equivalente a P ser inversível.

COROLÁRIO 5.3 - Sejam $P_1, \ldots, P_k$ matrizes quadradas $n \times n$. **Então** a matriz-produto $P = P_1, \ldots, P_k$ é inversível se, e sòmente se, cada matriz P_i é inversível.

Demonstração: Se as matrizes $P_1, \ldots, P_k$ são inversíveis, então P é inversível, pois a matriz produto $P_k^{-1} \ldots P_1^{-1}$ é a inversa de P. Recìprocamente, se P é inversível, usaremos indução sôbre k para mostrar que as matrizes $P_1, \ldots, P_k$ são inversíveis. Se $k = 1$, o teorema é óbvio. Suponha que o teorema é verdadeiro para $k = n$. Mostraremos que o teorema é também verdadeiro para $k = n + 1$. Realmente, se a matriz-produto $P = P_1, \ldots P_n P_{n+1}$ é inversível e X_o é uma solução do sistema $P_{n+1}X = O$, então

$$PX_o = (P_1 \ldots P_n)P_{n+1} \quad X_o = (P_1 \ldots P_n)O = O.$$

Portanto X_o é também solução do sistema $PX = O$. Como, por hipótese, P é inversível, então o Teorema 5.14, nos diz que $X_o = O$. Assim, o sistema $P_{n+1}X = O$ só possui a solução trivial. Portanto, ainda pelo Teorema 5.14, a matriz P_{n+1} é inversível. Logo, $P_1 \ldots P_n = PP_{n+1}^{-1}$ é inversível, como produto de matrizes inversíveis P e P_{n+1}^{-1}. A hipótese de indução nos diz então que $P_1, \ldots, P_n$ são inversíveis.

OBSERVAÇÃO: Podemos utilizar as operações elementares para achar a inversa de matrizes. Seja A uma matriz $n \times n$. Pelo Teorema 5.9, A é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linhas e escalonada E. Como na demonstração de (3) $\Rightarrow$ (4) do Teorema 5.14, vemos que A é inversível se, e sòmente se, $E = I$, I matriz identidade $n \times n$. Portanto, se A é inversível, existe uma seqüência de operações elementares $e_1, \ldots, e_s$ tal que $I = e_s(e_{s-1} \ldots e_1(A))$. Assim, se $E_i = e_i(I)$ para $i = 1, \ldots, s$, então, pelo Lema 5.1, $I = (E_s E_{s-1} \ldots E_1)A$, e o Teorema 5.14 nos diz que $A^{-1} = E_s E_{s-1} \ldots E_1 = e_s(e_{s-1} \ldots e_1(I))$.

EXEMPLO 5.19 - Verifiquemos se a matriz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

é inversível e, em caso afirmativo, calculemos sua inversa. Consideremos a matriz 3×6

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cujas colunas são $\hat{A}^j = A^j$ e $\hat{A}^{j+3} = I^j$ para $j = 1, 2, 3$, sendo I^j a j-ésima coluna da matriz identidade 3×3. Procuremos uma matriz reduzida por linhas e escalonada equivalente por linhas a $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Pela observação feita acima, vemos que A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Ache uma matriz reduzida por linhas e escalonada E, equivalente por linhas a A, e uma matriz inversível P tal que $E = PA$.

2. Repita o exercício **1** para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Verifique se as matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

são inversíveis e, em caso afirmativo, calcule suas inversas.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para que valôres de X existe um número c tal que $AX = cX$?

5. Seja A uma matriz 2×1 e B uma matriz 1×2. Demonstre que a matriz $C = AB$ não pode ser inversível.

6. Seja A uma matriz $n \times n$. Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se A é inversível e existe uma matriz B, $n \times n$, tal que $AB = O$, então $B = O$.

b) Se A não é inversível, então existe uma matriz não nula B, $n \times n$, tal que $AB = O$.

7. Demonstre a seguinte generalização do exercício 5: se A é uma matriz $n \times p$ e B é uma matriz $p \times n$ com $p < n$, então AB não é inversível.

8. Sejam $\{E_1, \ldots, E_n\}$ a base natural do R^n e A uma matriz real, quadrada, $n \times n$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é inversível

b) os vetores $AE_1, \ldots, AE_n$ são linearmente independentes

c) os sistemas $AX = E_i$ possuem solução para $i = 1, \ldots, n$

d) $\{AE_1, \ldots, AE_n\}$ é uma base do R^n.

9. *a)* Sejam K um corpo e S o subespaço de K^n gerado por r vetores

$A_1, \ldots, A_r$. Demonstre que todo conjunto de vetores de S com mais de r vetores é linearmente dependente.

b) Utilize *a*) para mostrar que tôdas as bases de S possuem o mesmo número de vetores (êsse número chama-se a *dimensão* de S).

10. Seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em um corpo K. Sejam S o subespaço gerado pelas linhas de A e E uma matriz reduzida por linhas e escalonada, equivalente por linhas a A. Demonstre que as linhas não nulas de E constituem uma base para o subespaço S (a dimensão de S chama-se o *pôsto* da matriz A).

BIBLIOGRAFIA

[1] – BUSH and OBREANU, Basic Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[2] – MURDOCH, D. C., Analytic Geometry with an Introduction to Vectors and Matrices, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[3] SERGE LANG, Linear Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1966.

[4] – BIRKHOFF, G. and MACLANE, S., A Survey of Modern Algebra, The Macmillan Co., New York, 1941.

[5] – HOFFMAN, K. and KUNZE, R., Linear Algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1961.