Análise de Carteiras usando o R - Parte 3

Bibliografia – BKM, cap. 7

Claudio Lucinda

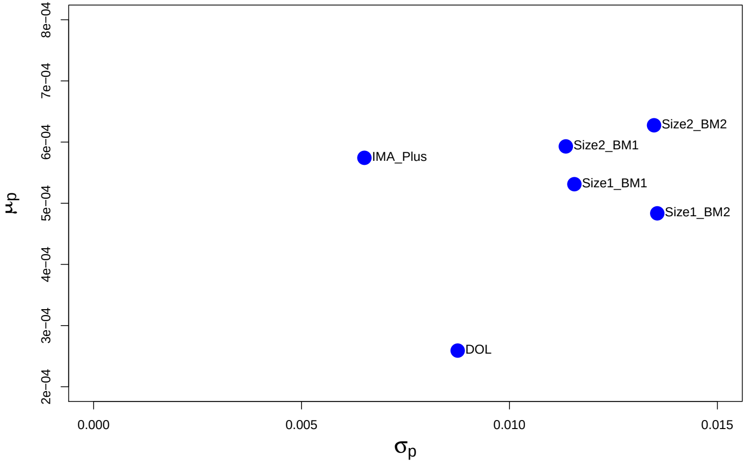
FEA/USP

Alocação de Portifólio – Álgebra Matricial

Alocação de Portifólio – Álgebra Matricial no R

- Nesta apresentação, iremos mostrar a apresentação matricial do problema de alocação de carteiras usando o R.
- O código correspondente é o `Portfolio_Theory_Matrix.R`, e vamos usar uma base de dados chamada `Style_Data.RDS`, com os retornos para seis tipos de ativos, em uma base diária entre 01 de junho de 2009 e 30 de abril de 2018:
  - `IMA_Plus`: Índice do Mercado Aberto - Retornos de títulos de Renda Fixa privados.
  - `DOL`: Retorno para o Dólar.
  - `Size1_BM1`: Retorno de Ações de Baixa Capitalização e Baixa Razão *Book-to-Market Value*
  - `Size1_BM2`: Retorno de Ações de Baixa Capitalização e Alta Razão *Book-to-Market Value*
  - `Size2_BM1`: Retorno de Ações de Alta Capitalização e Baixa Razão *Book-to-Market Value*
  - `Size2_BM2`: Retorno de Ações de Alta Capitalização e Alta Razão *Book-to-Market Value*

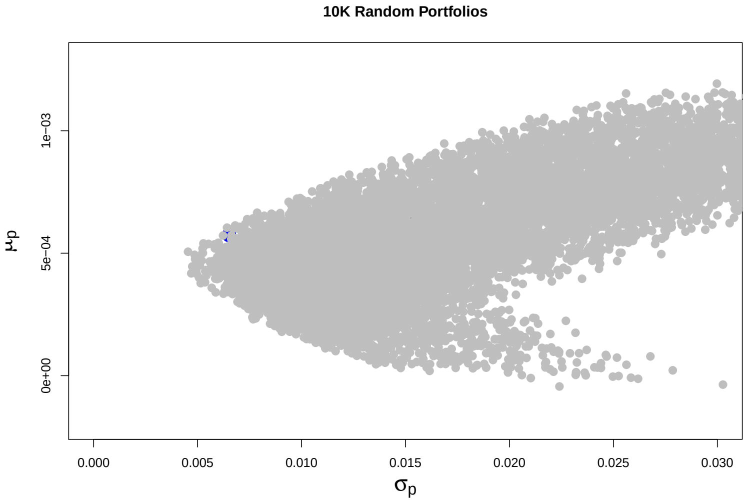
Graficamente



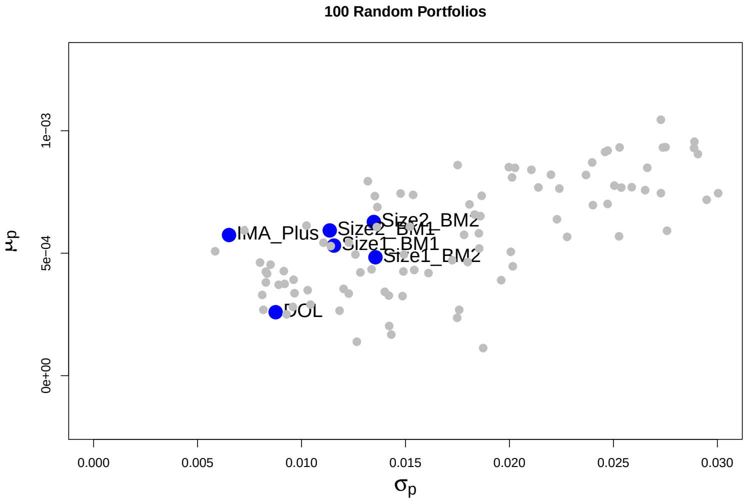
Ativos e Dois Portfolios

- Long-Short: Pesos (30%, 30%, -20%, 40%, 40%, -20%)

10.000 Portfolios Aleatórios



100 Portifólios Aleatórios



Fronteira Eficiente

Portifólio de Mínima Variância Global

- O problema pode ser expresso como

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \Sigma \mathbf{w}$$

- Tal que

$$\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \mathbf{1} = 1$$

- CPOs, com λ sendo o Multiplicador de Lagrange

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Az} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Implementação no R

```
top.mat = cbind(2*sigma.mat, rep(1, n.asset))
bot.vec = c(rep(1, n.asset), 0)
Am.mat = rbind(top.mat, bot.vec)
b.vec = c(rep(0, n.asset), 1)
z.m.mat = solve(Am.mat)%*%b.vec
m.vec = z.m.mat[1:n.asset,1]
mu.gmin = as.numeric(crossprod(m.vec, mu.vec))
sig2.gmin = as.numeric(t(m.vec)%*%sigma.mat%*%m.vec)
sig.gmin = sqrt(sig2.gmin)
m.vec
```

```
##         DOL    IMA_Plus   Size1_BM1   Size1_BM2   Size2_BM1   Size2_BM2
##  0.38657095  0.42023780  0.13590504 -0.01304516  0.11586625 -0.04553488
```

```
mu.gmin
```

```
## [1] 0.0004475064
```

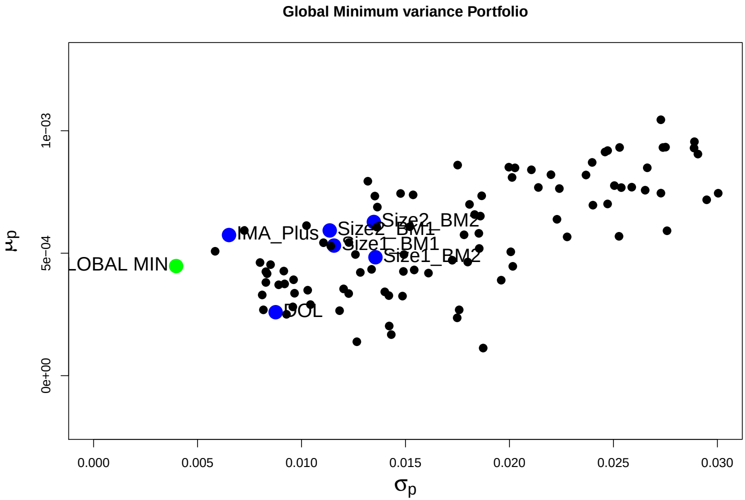
```
sig2.gmin
```

```
## [1] 1.575286e-05
```

```
sig.gmin
```

```
## [1] 0.003968987
```

Graficamente



Fronteira Eficiente – Um ponto

- O problema pode ser expresso como

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \Sigma \mathbf{w}$$

- Tal que

$$\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \mathbf{1} = 1$$

- E também, com $\mathbf{r}$ o vetor de retornos esperados e $\bar{r}$ um nível objetivo de retornos.

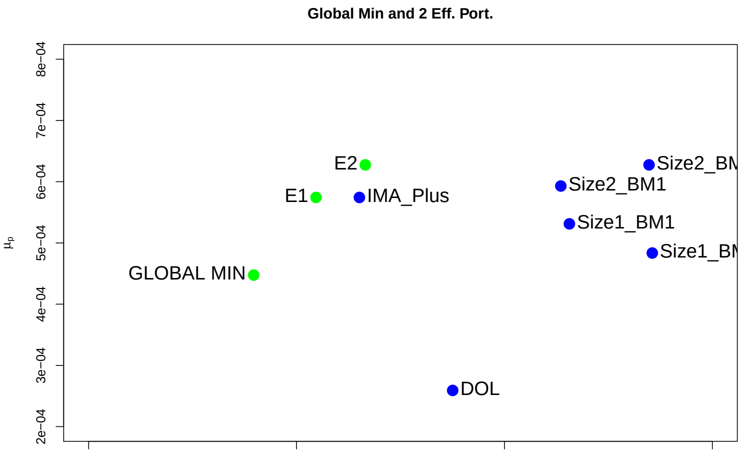
$$\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \mathbf{r} = \bar{r}$$

- CPOs, com λ_1 e λ_2 sendo os Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & \mathbf{r} & \mathbf{1} \\ \mathbf{r}^{\mathbf{T}} & 0 & 0 \\ \mathbf{1}^{\mathbf{T}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{r} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Az} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Graficamente

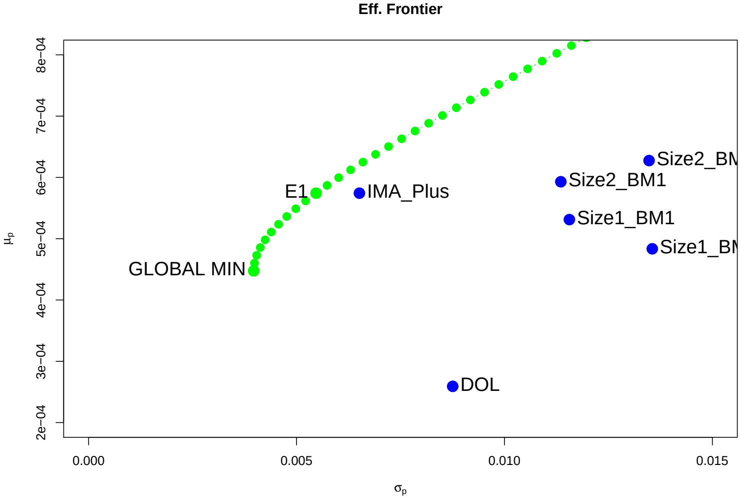
- Duas carteiras na FE
  - Mesmo retorno esperado que `IMA_Plus`
  - Mesmo retorno esperado que `Size2_BM2`



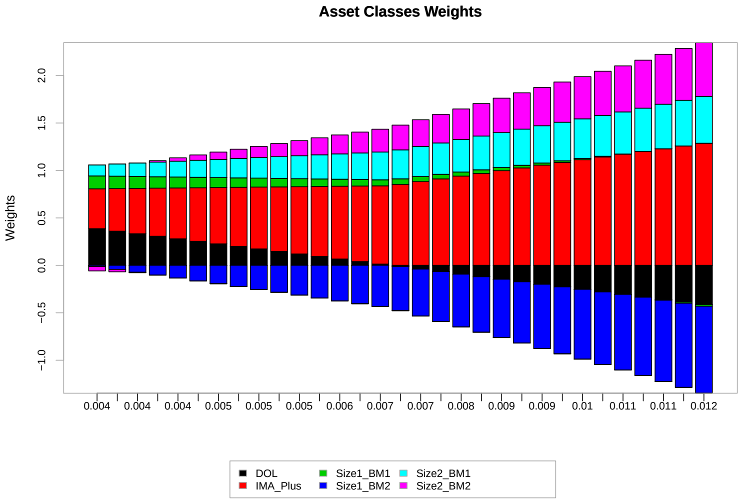
Fronteira Eficiente

- Uma propriedade interessante da Fronteira Eficiente é que qualquer combinação linear de carteiras na Fronteira Eficiente TAMBÉM pertence à Fronteira Eficiente.
- Portanto, aqui vamos desenhar a Fronteira Eficiente como combinações das duas carteiras E1 e a de Variância Mínima.

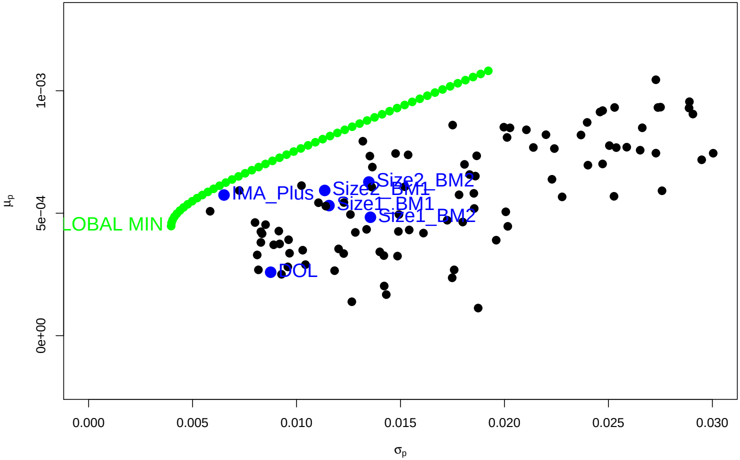
Fronteira Eficiente – Graficamente



Pesos dos Ativos na Carteira



Fronteira Eficiente e Portfólios Aleatórios



Adicionando um Ativo Livre de Risco

- Supondo $r_f = 0.0004$, essa carteira pode ser calculada como:

$$\mathbf{t} = \frac{\Sigma^{-1}(\mathbf{w} - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{w} - r_f \mathbf{1})}$$

```
rf = 0.0004
sigma.inv.mat = solve(sigma.mat)
one.vec = rep(1, n.asset)
mu.minus.rf = mu.vec - rf*one.vec
top.mat = sigma.inv.mat%*%mu.minus.rf
bot.val = as.numeric(t(one.vec)%*%top.mat)
t.vec = top.mat[,1]/bot.val
t.vec
```

```
##         DOL    IMA_Plus   Size1_BM1   Size1_BM2   Size2_BM1   Size2_BM2
## -0.40490165  1.27809707 -0.01683614 -0.90724797  0.49003224  0.56085645
```

Média, Variância e Sharpe do Portifólio de Tangência

```
mu.t = as.numeric(crossprod(t.vec, mu.vec))
sig2.t = as.numeric(t(t.vec)%*%sigma.mat%*%t.vec)
sig.t = sqrt(sig2.t)
sr.t = (mu.t - rf)/sig.t

mu.t
```

```
## [1] 0.0008239205
```

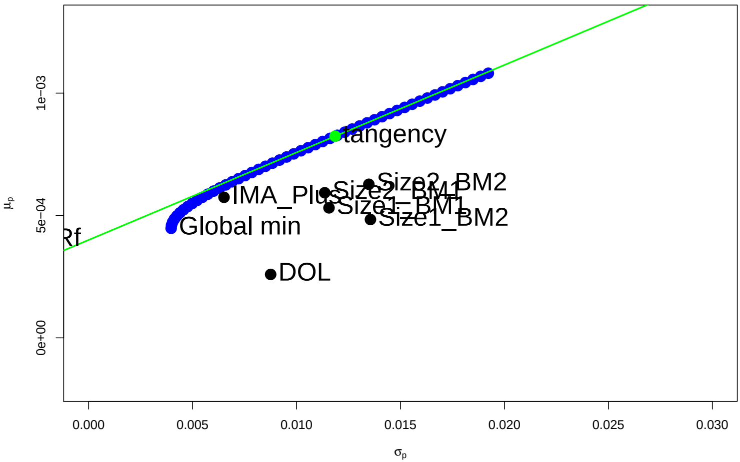
```
sig.t
```

```
## [1] 0.0118562
```

```
sr.t
```

```
## [1] 0.03575516
```

Composição da Carteira Eficiente + Risk-Free



Pesos dos Ativos