

# O algoritmo Dual-Simplex

Alexandre Checoli Choueiri

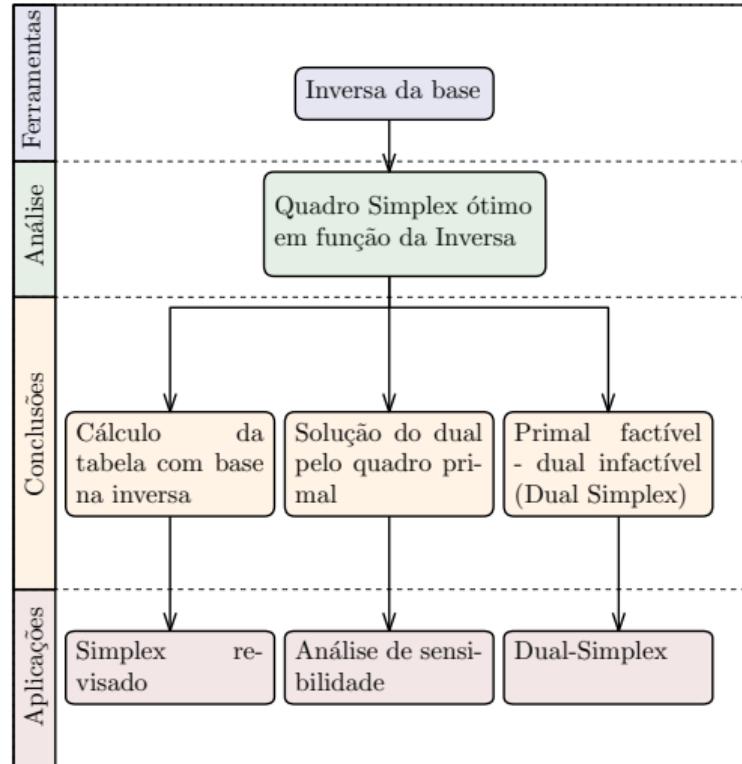
06/11/2022

# Conteúdo

- ① Relembrando
- ② Motivação
- ③ A intuição do método
- ④ Condições para aplicar o Dual-Simplex
- ⑤ O Algoritmo Dual-Simplex
- ⑥ Exemplo

# Objetivos

## Ferramentas e objetivos



## Relembrando

# Dual-Simplex

## Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e dual.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

Como verificamos se a tabela acima é **primal**-factível?

# Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e dual.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade primal está associada ao vetor  $b$ , ou seja:

$$b \geq 0$$

# Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade primal e **dual**.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

E a factibilidade dual? Como verificamos se a tabela é **dual** factível?

# Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade primal e **dual**.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade dual está associada ao vetor de custos da função objetivo, ou seja:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

# Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e **dual**.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	1

Ainda, na optimização a tabela mantém tanto a factibilidade primal quanto dual.

# Motivação

# Dual-Simplex

## Motivação

Na prática, após encontrar a solução de um problema de PL, muitas vezes é necessário fazer pequenas modificações no problema original. Por exemplo a adição de uma **nova restrição**. Essa nova restrição pode **infactibilizar** a solução ótima, o que implicaria em resolver todo o problema novamente.

# Dual-Simplex

## Motivação

Considere o par primal-dual de modelos de PLs:

$$\begin{aligned} \max z = & \quad 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

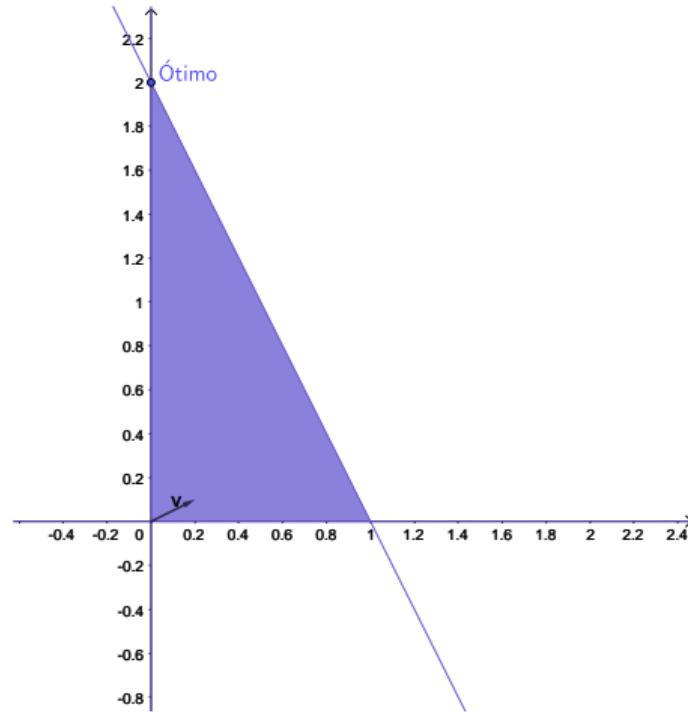
$$\begin{aligned} \min v = & \quad 2\pi_1 \\ & 2\pi_1 \geq 2 \\ & \pi_1 \geq 1 \\ & \pi_1 \geq 0 \end{aligned}$$

# Dual-Simplex

## Motivação

O quadro ótimo para o primal, bem como o gráfico da região factível ficam então:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$-z$
	0	0	1	2
$x_2$	2	1	1	2



# Dual-Simplex

## Motivação

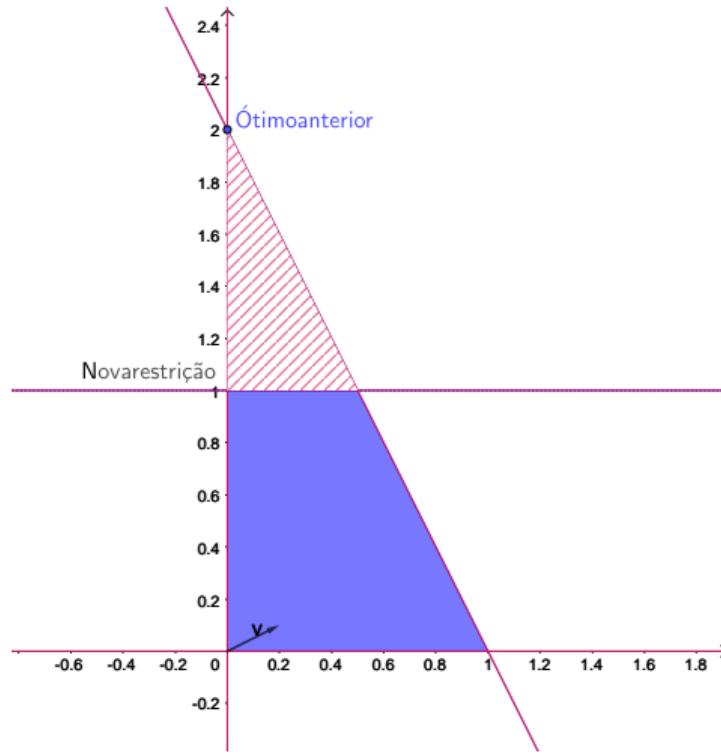
Imagine que por algum motivo, após a otimização, seja necessário inserir a nova restrição ao modelo:

$$x_2 \leq 1$$

# Dual-Simplex

## Motivação

A solução ótima anterior não está mais na região **factível** do problema.



# Dual-Simplex

## Motivação

Podemos perceber essa infactibilidade no quadro Simplex. Inserindo a variável de folga da restrição, ficamos com:

$$x_2 + \textcolor{red}{x_4} = 1$$

# Dual-Simplex

## Motivação

Podemos perceber essa infactibilidade no quadro Simplex. Inserindo a variável de folga da restrição, ficamos com:

$$x_2 + \textcolor{red}{x}_4 = 1$$

Ao inserirmos essa linha no quadro Simplex (no quadro ótimo), ficamos com:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
??	0	1	0	1	1

Note que, como inserimos uma nova restrição, precisamos adicionar uma nova variável à base.

# Dual-Simplex

## Motivação

Via de regra, sempre inserimos a folga da nova restrição como variável básica (nesse caso  $x_4$ ), e mantemos todas as outras iguais.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	0	1	0	1	1

# Dual-Simplex

## Motivação

Via de regra, sempre inserimos a folga da nova restrição como variável básica (nesse caso  $x_4$ ), e mantemos todas as outras iguais.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	0	1	0	1	1

Porém, percebemos que o sistema deixou de estar na forma canônica em relação à variável  $x_2$ , de forma que precisamos realizar a operação  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  para manter  $x_2$  na base.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	0	1	0	1	1

# Dual-Simplex

## Motivação

A nova tabela fica então:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	<b>-1</b>

Note que a **infactibilidade** é apontada pela negatividade da variável ( $b < 0$ ).

# Dual-Simplex

## Motivação

Sabemos também, que associado a todo quadro Simplex temos uma solução para o problema dual equivalente ( $\pi$ ):

		$-\pi_1$	$-\pi_2$		
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Motivação

Sabemos também, que associado a todo quadro Simplex temos uma solução para o problema dual equivalente ( $\pi$ ):

		$-\pi_1$	$-\pi_2$		
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

Note que a inserção da nova restrição, **não afetou a condição de factibilidade dual**, ou seja, o termo:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

ainda é valido (todos os coeficientes da função objetivo  $\geq 0$ ). Mas por quê isso acontece?

# Dual-Simplex

## Motivação

Vejamos como a nova restrição fica no par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min v = & 2\pi_1 + \pi_2 \\ & 2\pi_1 + 0\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 + \pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

# Dual-Simplex

## Motivação

Vejamos como a nova restrição fica no par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \min v = & 2\pi_1 + \pi_2 \\ & 2\pi_1 + 0\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 + \pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

Ou seja, a inserção da nova restrição no primal gera uma nova **variável** no dual; de forma que, se a solução dual anterior já era dual-factível, podemos atribuir o valor de zero a nova variável, e a nova solução continuará sendo **dual factível**.

# Dual-Simplex

## Motivação

Substituindo a solução dual  $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$  (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

VB	$-\pi_1$ $-\pi_2$				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

$\min v = \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \geq 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \geq 1 \\ 1 \cdot 0 \geq 0 \end{array}$

# Dual-Simplex

## Motivação

Substituindo a solução dual  $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$  (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

	$-\pi_1$		$-\pi_2$		
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

$\min v = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \Rightarrow 2$   
 $2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$   
 $1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark$   
 $1 \cdot 0 \geq 0$

Todas as restrições duais ainda são satisfeitas.

## A intuição do método

# Dual-Simplex

## Intuição do método

A ideia geral do método dual-Simplex é, a partir de um quadro Simplex **infactível** para o primal, porém **factível** para o dual, tentar recuperar a **factibilidade** primal mantendo a **factibilidade** dual. Se isso ocorrer, sabemos que atingimos o ótimo (**pois somente na optimidade as soluções para ambos os problemas é factível**).

# Dual-Simplex

## Intuição do método



# Dual-Simplex

## Intuição do método

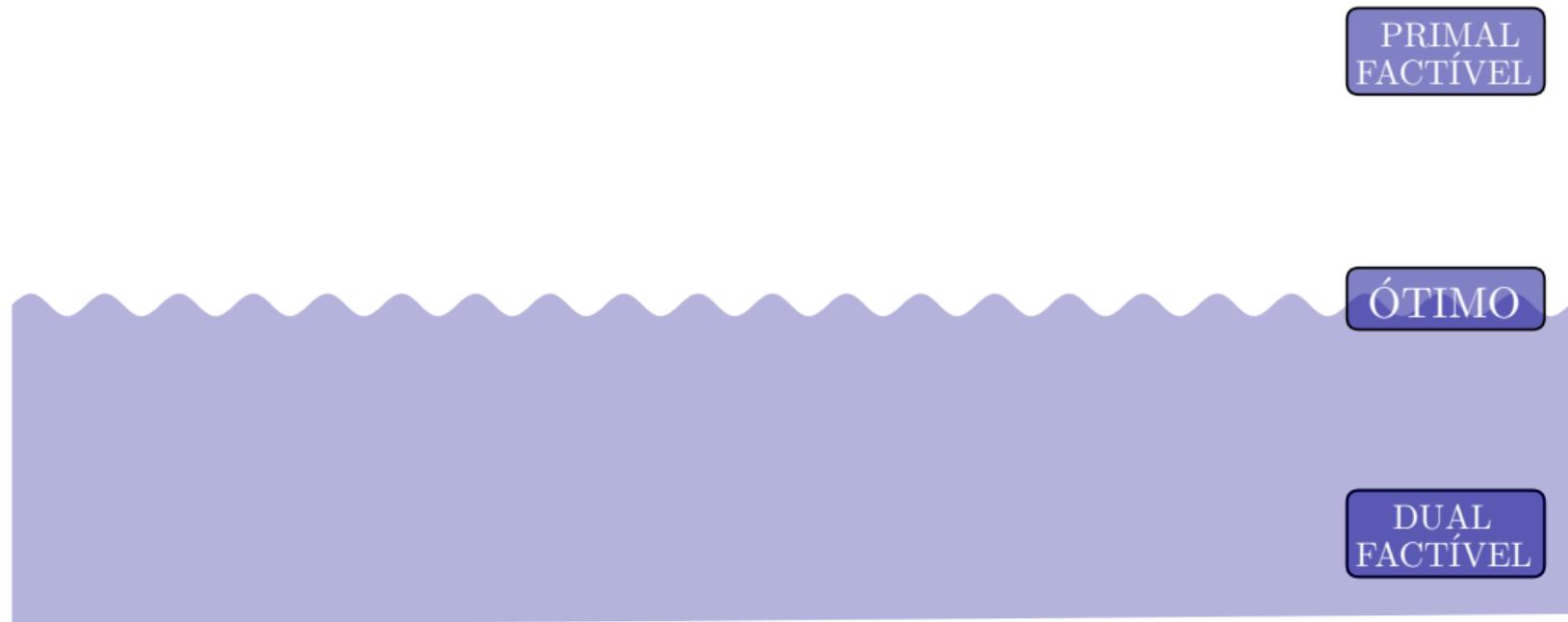
PRIMAL  
FACTÍVEL

ÓTIMO

DUAL  
FACTÍVEL

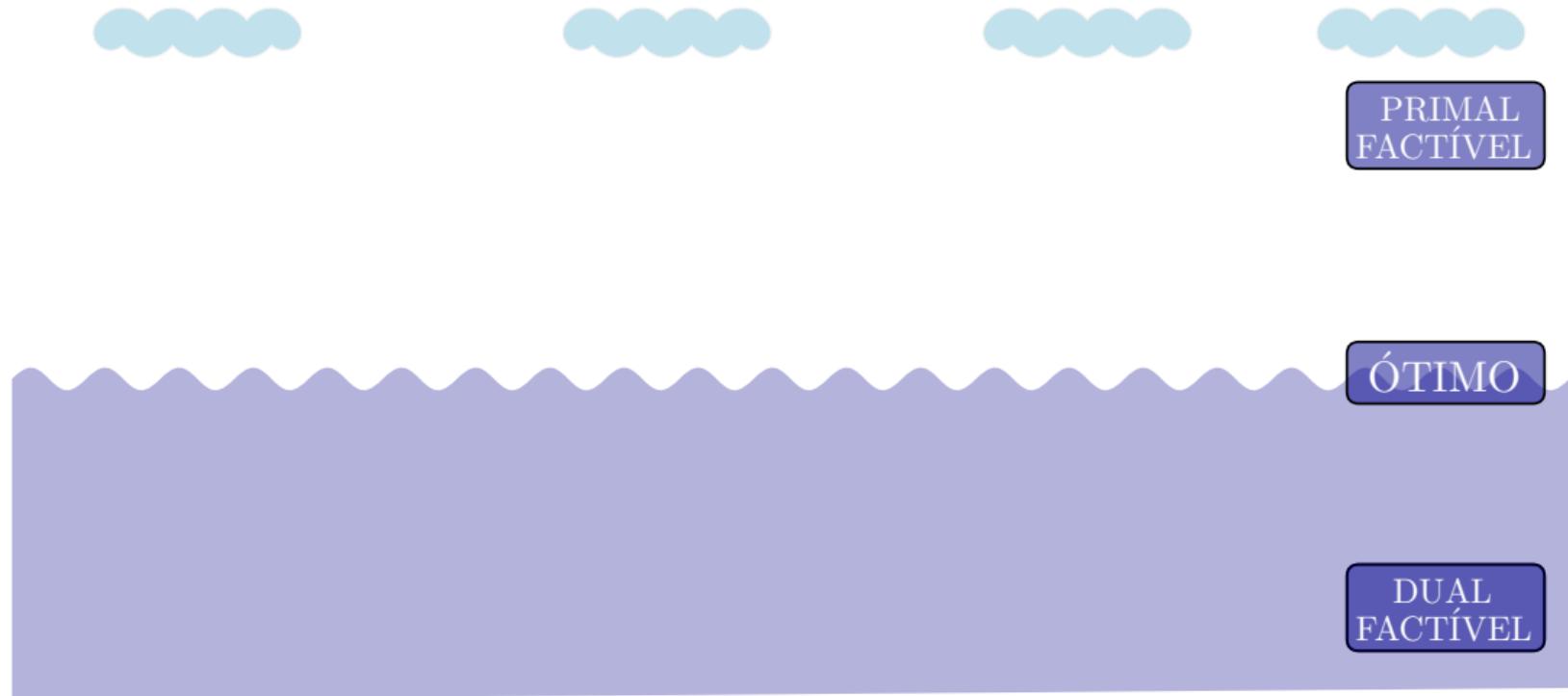
# Dual-Simplex

## Intuição do método



# Dual-Simplex

Intuição do método



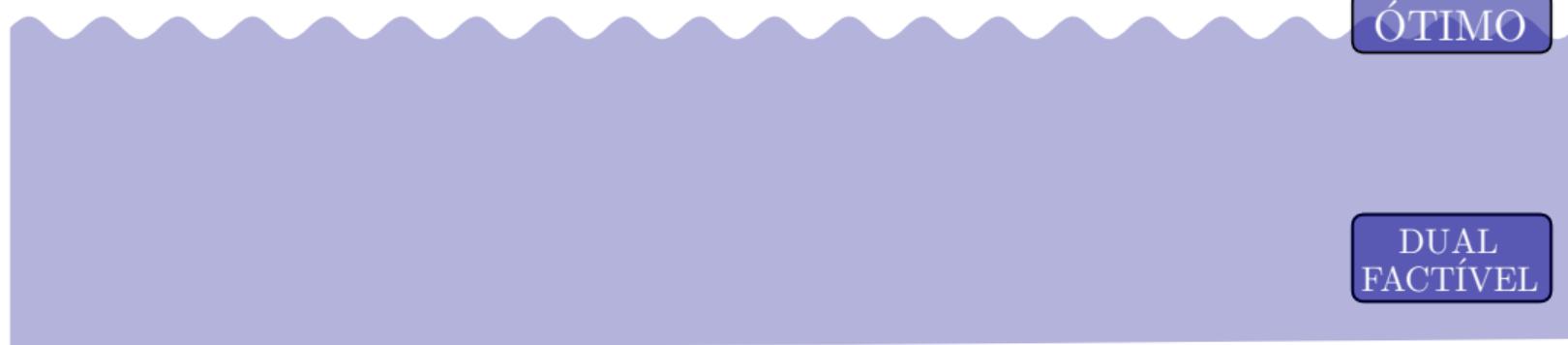
# Dual-Simplex

## Intuição do método

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
$x_2$					



PRIMAL  
FACTÍVEL  
(simplex)



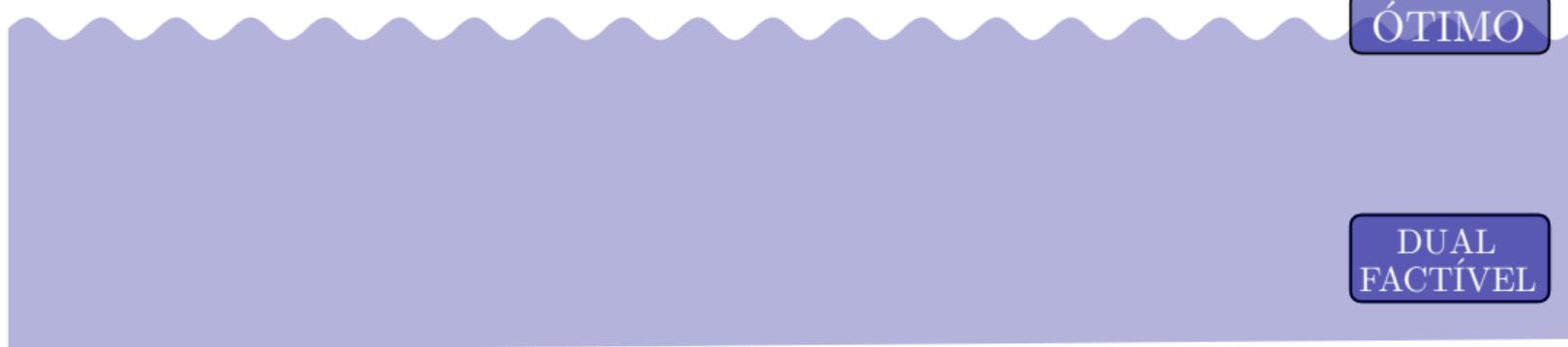
# Dual-Simplex

## Intuição do método

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
$x_2$					



PRIMAL  
FACTÍVEL  
(simplex)



# Dual-Simplex

## Intuição do método

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
$x_2$					

$x_4$

$x_2$

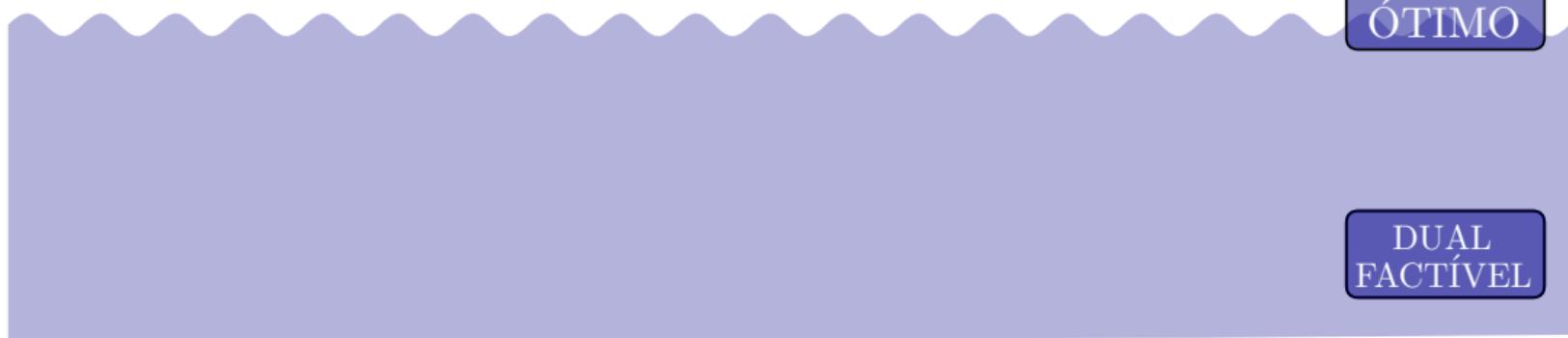
$x_4$

$x_2$

$x_4$

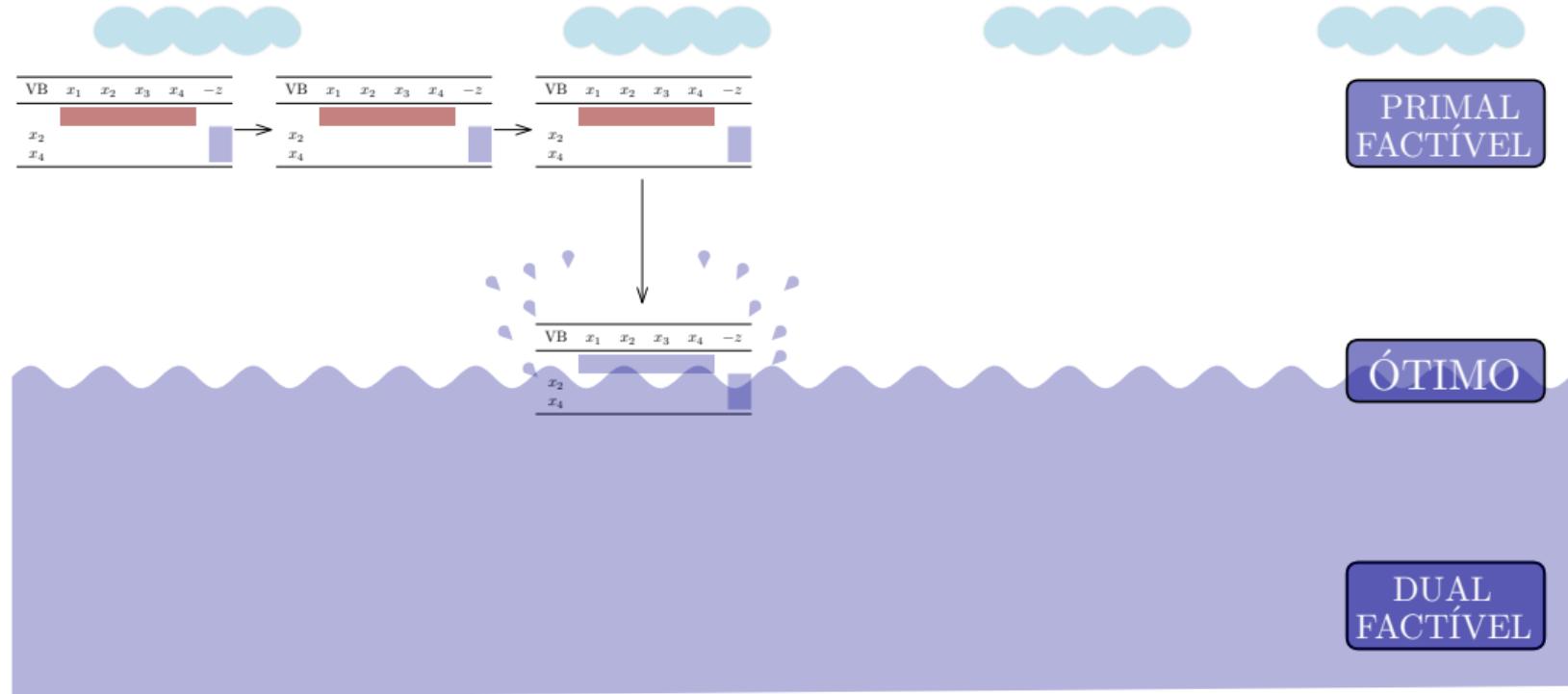


PRIMAL  
FACTÍVEL  
(simplex)



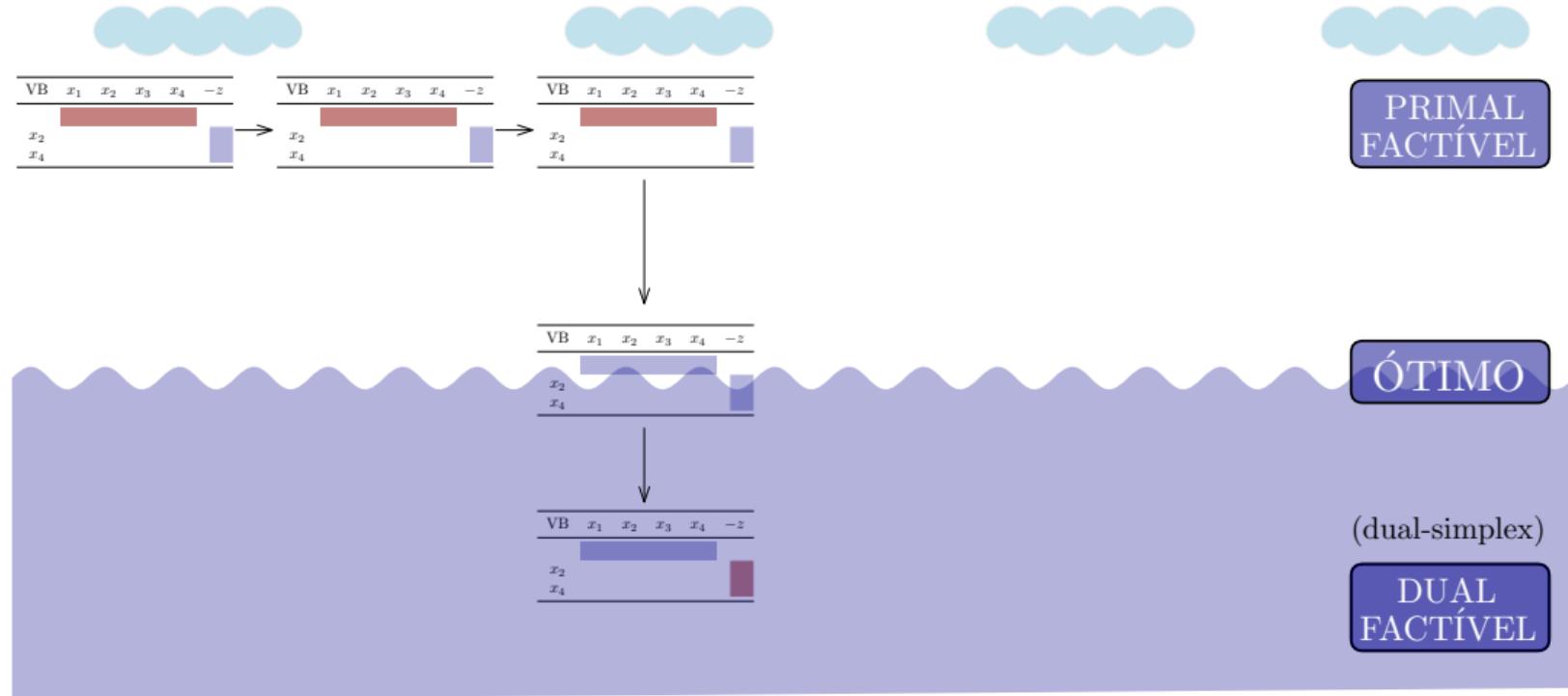
# Dual-Simplex

Intuição do método



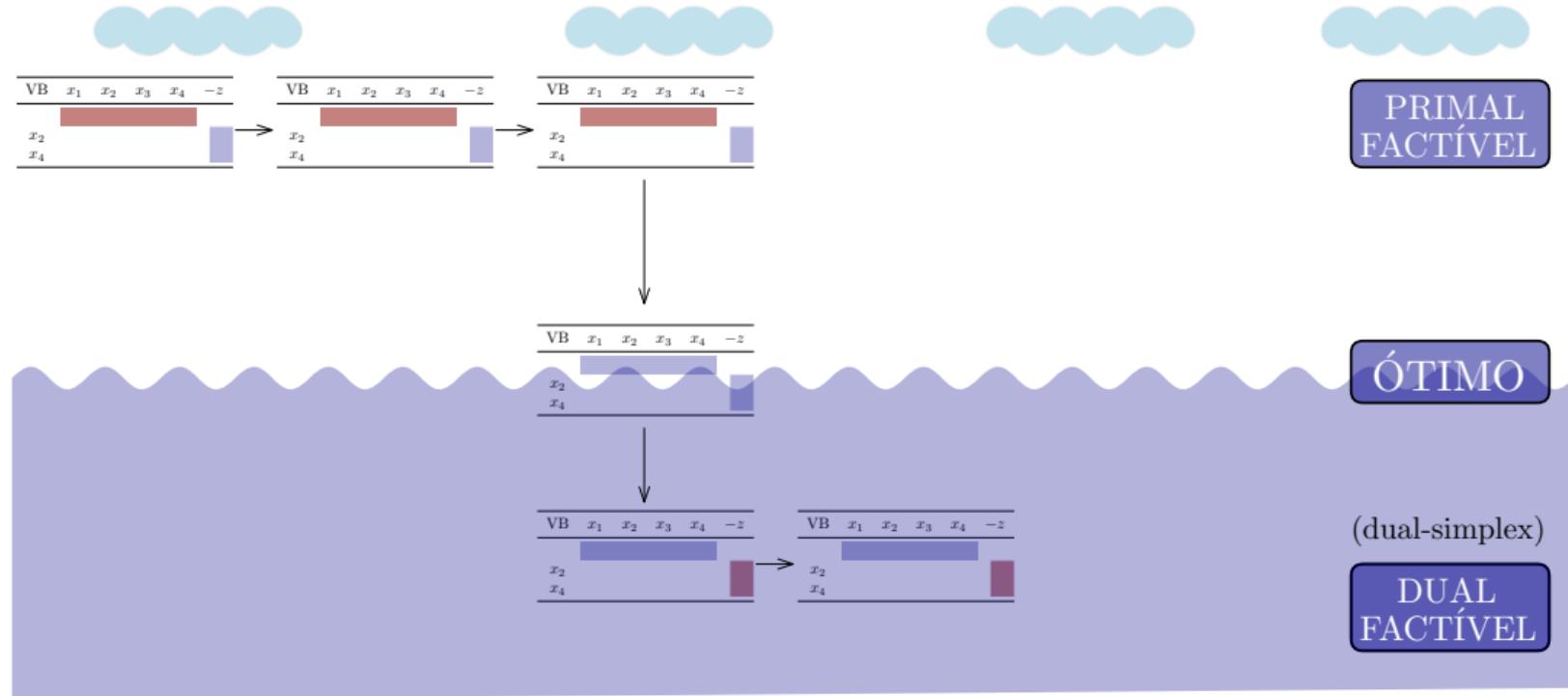
# Dual-Simplex

## Intuição do método



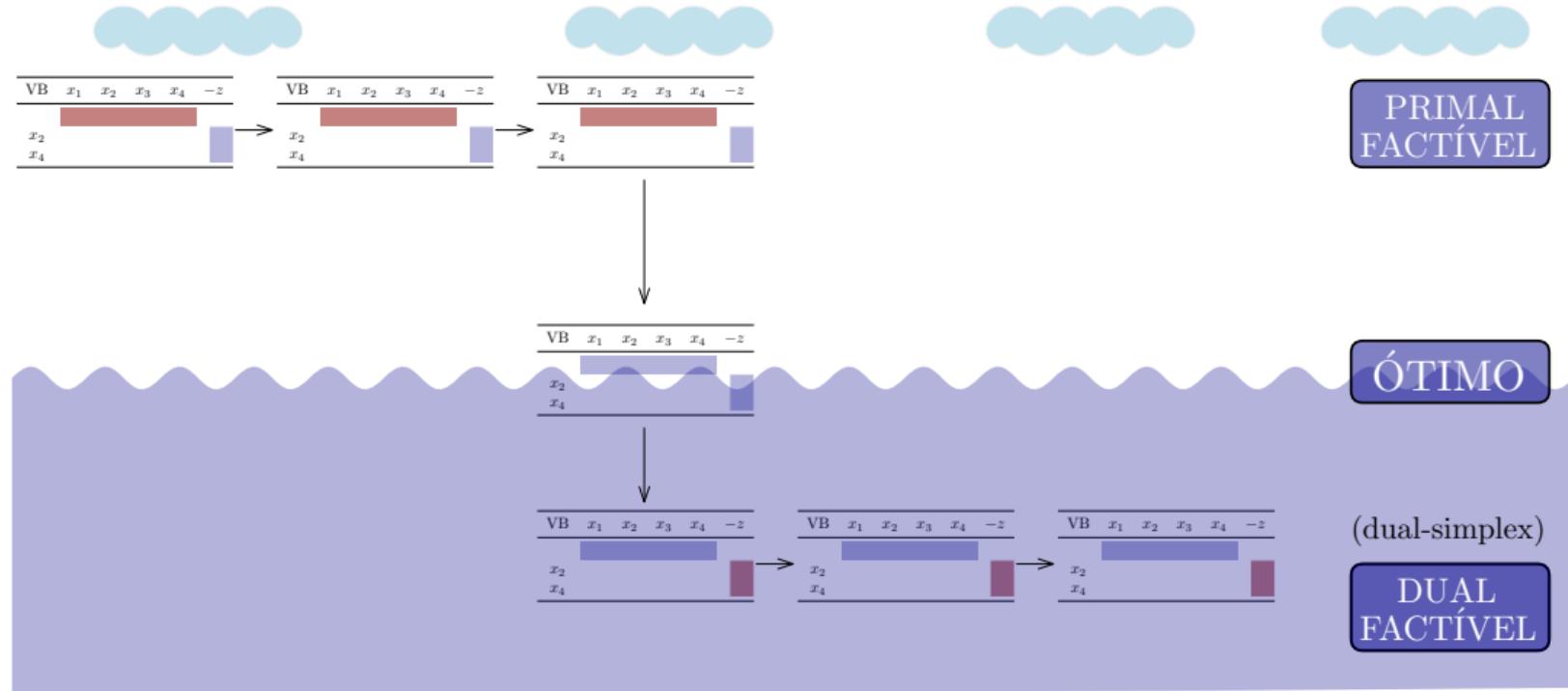
# Dual-Simplex

## Intuição do método



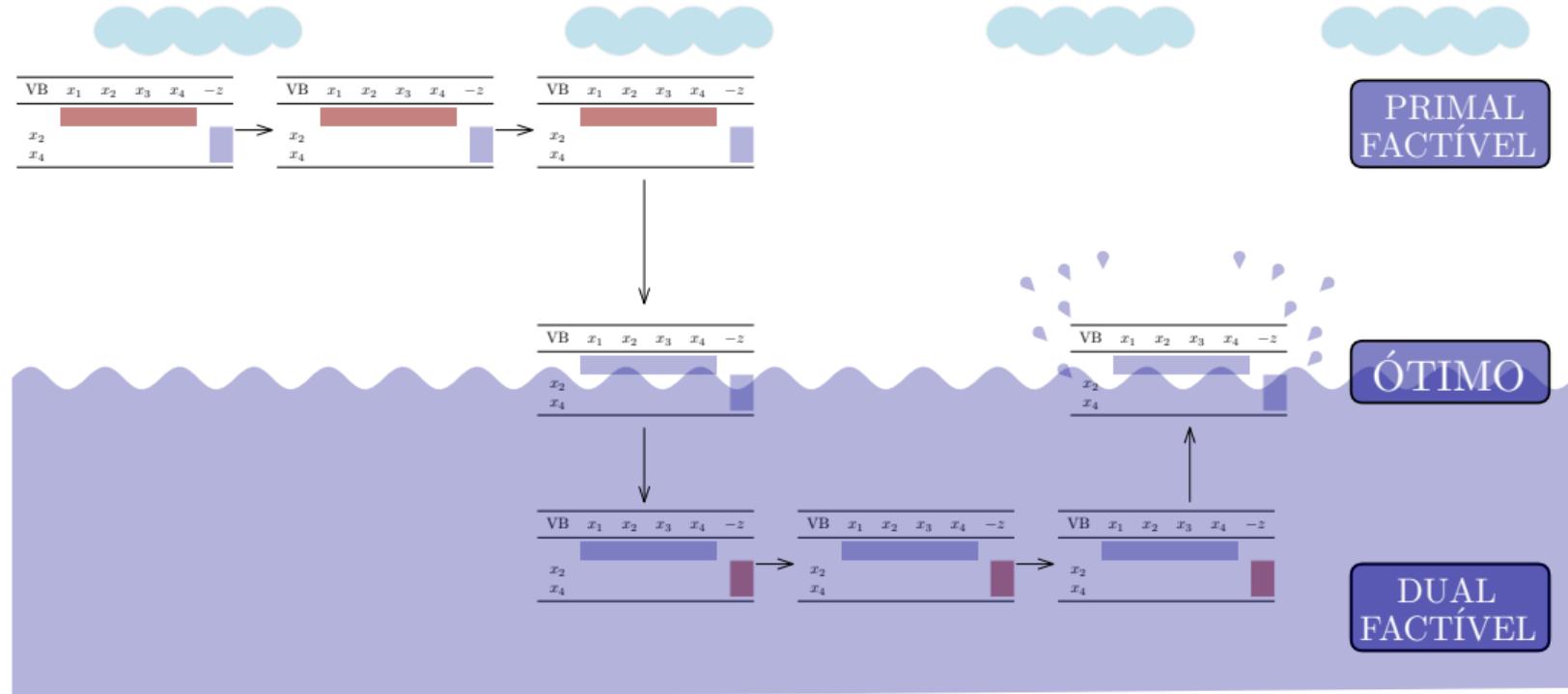
# Dual-Simplex

## Intuição do método



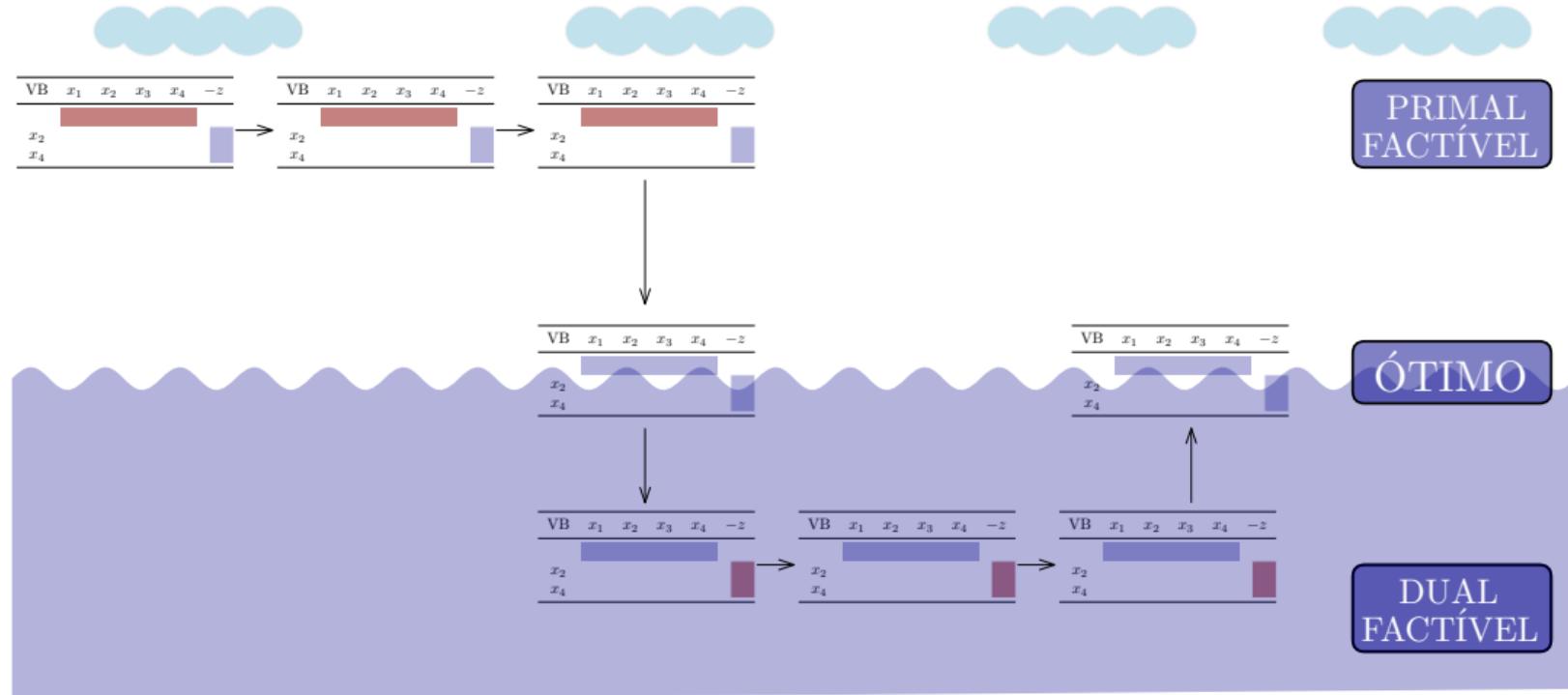
# Dual-Simplex

Intuição do método



# Dual-Simplex

Intuição do método



# Dual-Simplex

Animação (Adobe Acrobat DC)

# Dual-Simplex

## Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual ( $\pi$ ). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual ( $\pi$ ). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

$$b \geq 0$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual ( $\pi$ ). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

$$b \geq 0$$

Ao mesmo tempo em que mantém a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	(0)	(0)	(1)	(0)	2
$x_2$	2	1	1	0	(2)
$x_4$	-2	0	-1	1	(-1)

## Dual-Simplex

### Intuição do método - variável que sai da base

Dessa forma, iniciamos o método escolhendo a **variável que sai da base** (ao contrário do Simplex). Como queremos retomar a factibilidade (deixar  $b \geq 0$ ), escolhemos a variável com o valor de  $b$  **mais negativo**, ou seja, selecionamos o valor de  $b$  da linha  $r$  ( $b_r$ ) de tal forma que:

$$\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i\}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \quad \bar{b}_i < 0$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

## Dual-Simplex

### Intuição do método - variável que sai da base

Dessa forma, iniciamos o método escolhendo a **variável que sai da base** (ao contrário do Simplex). Como queremos retomar a factibilidade (deixar  $b \geq 0$ ), escolhemos a variável com o valor de  $b$  **mais negativo**, ou seja, selecionamos o valor de  $b$  da linha  $r$  ( $b_r$ ) de tal forma que:

$$\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i\}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \quad \bar{b}_i < 0$$

Na nossa tabela temos que:

$$\bar{b}_r = \min \{-1\} \Rightarrow \bar{b}_3 = -1$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Portanto a variável que deixará a base (linha) é  $x_4$ . **Agora devemos escolher a variável que vai entrar na base (coluna)**. Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$	
	0	0	1	0	2	
$x_2$	2	1	1	0	2	
$x_4$	-2	0	-1	1	-1	$\rightarrow$

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Portanto a variável que deixará a base (linha) é  $x_4$ . **Agora devemos escolher a variável que vai entrar na base (coluna)**. Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1 $\rightarrow$

A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha pelo próprio elemento pivô.

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Portanto a variável que deixará a base (linha) é  $x_4$ . **Agora devemos escolher a variável que vai entrar na base (coluna)**. Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1 $\rightarrow$

A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha pelo próprio elemento pivô.  
Quais poderiam ser os candidatos a se tornarem o próximo elemento pivô? (-2,0,-1,1?).

# Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Como queremos deixar  $b \geq 0$ , e  $b_r < 0$ , a divisão:

$$b_r/a_{r,s} \geq 0$$

Só é válida quando  $a_{r,s} < 0$ . Dessa forma, só podemos olhar para os elementos da linha **r que são negativos**.

	??	??	??	??	
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Além de selecionar somente entre os elementos negativos, devemos também manter a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Ou seja, após realizarmos o pivoteamento, os coeficientes da função objetivo devem se manter positivos. Para encontrar o elemento pivô que mantém a relação verdadeira, precisamos determinar de forma genérica o que ocorre com os elementos da função objetivo, de acordo com o pivô escolhido.

# Dual-Simplex

## Intuição do método

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	

Elemento  $a_{r,s} = a_{3,1}$  Linha r = 3

Já selecionamos a linha do elemento pivô, ou seja,  $r = 3$ . Chamando as colunas de  $s$ , temos que o elemento  $a_{r,s} = a_{3,1} = -2$ .

# Dual-Simplex

## Intuição do método

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	(-1)	1	(-1)
	1	2	3	4	
	-2/-1	0/-1	-1/-1	1/-1	-1/-1

Devemos então escolher uma coluna  $s$  para o elemento pivô. Suponha que escolhemos o elemento pivô  $a_{r,s} = a_{3,3} = -1$ . A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha toda pelo elemento.

# Dual-Simplex

## Intuição do método

Coluna s = 3

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	(-1)	1	(-1)
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{-1}$	$\frac{a_{3,2}}{-1}$	$\frac{a_{3,3}}{-1}$	$\frac{a_{3,4}}{-1}$	$-1/-1$

Podemos usar os índices das colunas para generalizar os elementos das operações.

# Dual-Simplex

## Intuição do método

	$c_1$		$c_3$		
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

  
$$\frac{1}{a_{3,1}} \quad \frac{2}{a_{3,2}} \quad \frac{3}{a_{3,3}} \quad \frac{4}{a_{3,3}} \quad -\frac{1}{a_{3,3}}$$

Da mesma forma podemos substituir o elemento  $-1$  pelo elemento pivô  $= a_{3,3}$ . Ainda, se chamarmos os elementos da função objetivo de  $c$ , podemos determinar a operação que deve ser realizada para zerar o elemento  $c_3 = 1$ :

# Dual-Simplex

## Intuição do método

$$c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	$-1/-1$

$$c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$$

# Dual-Simplex

## Intuição do método

$$c_1 - c_3 \frac{a_{3,1}}{a_{3,3}} \quad c_2 - c_3 \frac{a_{3,2}}{a_{3,3}} \quad c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}} \quad c_4 - c_3 \frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	-2	0	0	1	1
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	-1/-1

Essa mesma operação será realizada em todos os elementos da função objetivo, mudando

# Dual-Simplex

## Intuição do método

$$c_1 - c_s \frac{a_{r,1}}{a_{r,s}} \quad c_2 - c_s \frac{a_{r,2}}{a_{r,s}} \quad c_3 - c_s \frac{a_{r,3}}{a_{r,s}} \quad c_4 - c_r \frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	-2	0	0	1	1
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,2}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,3}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$	$-1/-1$

Assim, conseguimos escrever tudo em função do pivô (da linha  $r$  e da coluna  $s$ ).

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Escrevendo os elementos que variam em função do índice  $j$ , temos a expressão genérica para os valores atualizados dos coef. da função objetivo ( $c'_j$ ), em relação ao elemento pivô (linha  $r$  e coluna  $s$ ):

$$c'_j = c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \quad , j = 1, \dots, n$$

## Dual-Simplex

### Intuição do método - variável que entra na base

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser  $\geq 0$ , assim, temos que:

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser  $\geq 0$ , assim, temos que:

$$c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \geq 0$$

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser  $\geq 0$ , assim, temos que:

$$c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \geq 0$$

(lembrando que queremos determinar a coluna  $s$ )

$$c_j \geq c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}}$$

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser  $\geq 0$ , assim, temos que:

$$c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \geq 0$$

(lembrando que queremos determinar a coluna  $s$ )

$$c_j \geq c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}}$$

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

A desigualdade foi invertida na última passagem pois  $a_{r,j} < 0$ .

# Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Temos então que

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

# Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Temos então que

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

Ou seja: precisamos encontrar a razão  $\frac{c_s}{a_{r,s}}$  que seja maior do que todas as outras. Isso pode ser escrito como:

## Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Temos então que

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

Ou seja: precisamos encontrar a razão  $\frac{c_s}{a_{r,s}}$  que seja maior do que todas as outras. Isso pode ser escrito como:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Ou seja, selecionamos a coluna  $s$  como o maior valor de todas as divisões dos coeficientes da função objetivo e os valores da linha da variável que sai da base (todos aqueles negativos).

## Condições para aplicar o Dual-Simplex

# Dual-Simplex

## Condições para aplicar o método

Com a variável que sai da base (linha  $r$ ) e a variável que entra (coluna  $s$ ), basta fazer o pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$ . Em seguida, se ainda existirem valores de  $b < 0$  o procedimento é repetido. Se as seguintes condições forem satisfeitas, o algoritmo Dual-Simplex pode ser aplicado:

1. A tabela está na forma canônica.
2. Todos os coeficientes da função objetivo são  $\geq 0$  factibilidade dual.
3. Pelo menos um valor de  $b < 0$  infactibilidade primal.

# Dual-Simplex

## Condições para aplicar o método

Com a variável que sai da base (linha  $r$ ) e a variável que entra (coluna  $s$ ), basta fazer o pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$ . Em seguida, se ainda existirem valores de  $b < 0$  o procedimento é repetido. Se as seguintes condições forem satisfeitas, o algoritmo Dual-Simplex pode ser aplicado:

1. A tabela está na forma canônica.
2. Todos os coeficientes da função objetivo são  $\geq 0$  factibilidade dual.
3. Pelo menos um valor de  $b < 0$  infactibilidade primal.

Ou seja, de forma simplificada: precisamos ter uma **solução básica infactível** (para o primal), e a **solução dual factível (custos atualizados da fo devem ser  $\geq 0$ )**.

# O Algoritmo Dual-Simplex

# Dual-Simplex

## Algoritmo Dual-Simplex

O algoritmo Dual-Simplex fica então, partindo de um quadro Simplex em que as condições acima são satisfeitas:

1. **(critério de otimalidade)**: Se nenhum  $b < 0$ , pare, a solução atual é ótima.
2. **(seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha  $r$ , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m | \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna  $s$  de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo  $a_{r,j} > 0$ , pare, o problema é infactível.

4. **(pivotamento)**: Realize as operações de pivotamento no elemento  $a_{r,s}$  e volte para 1.

# Exemplo

# Dual-Simplex

## Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são  $\geq 0$  factibilidade dual. ✓

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são  $\geq 0$  factibilidade dual. ✓
3. Pelo menos um valor de  $b < 0$  infactibilidade primal. ✓

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são  $\geq 0$  factibilidade dual. ✓
3. Pelo menos um valor de  $b < 0$  infactibilidade primal. ✓

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

Então podemos aplicar o Dual-Simplex!

# Dual-Simplex

## Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum  $b < 0$ , pare, a solução atual é ótima.
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha  $r$ , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m | \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna  $s$  de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo  $a_{r,j} > 0$ , pare, o problema é infactível.

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$  e volte para 1.

# Dual-Simplex

## Exemplo

Vemos que existe  $b < 0$ .

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	(-1)

# Dual-Simplex

## Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum  $b < 0$ , pare, a solução atual é ótima. ✓
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha  $r$ , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m | \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna  $s$  de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo  $a_{r,j} > 0$ , pare, o problema é infactível.

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$  e volte para 1.

# Dual-Simplex

## Exemplo

Selecionamos então a linha de  $b$  com valor mais negativo, ou seja:

$$\bar{b}_r = \min\{-1\} = -1$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	-2	0	-1	1	-1

Portanto  $r = 3$  e a variável que sai da base é  $x_4$ .

# Dual-Simplex

## Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum  $b < 0$ , pare, a solução atual é ótima. ✓
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha  $r$ , de acordo com: ✓

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m | \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna  $s$  de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo  $a_{r,j} > 0$ , pare, o problema é infactível.

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$  e volte para 1.

# Dual-Simplex

## Exemplo

Agora, criamos o conjunto com todos os elementos da divisão dos coeficientes da função objetivo pelo coeficientes da linha da variável que sai  $r = 3$  (somente onde os coeficientes são negativos). Selecionamos o máximo desse conjunto, que se refere a coluna da **variável que entra na base**.

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max \left\{ \frac{0}{-2}, \frac{1}{-1} \right\} = 0$$

Ou seja, a variável que entra na base é  $x_1$  na coluna  $s = 1$ . Dessa forma, o elemento pivô é  $a_{3,1} = -2$ .

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	2	1	1	0	2
$x_4$	(-2)	0	-1	1	-1

# Dual-Simplex

## Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum  $b < 0$ , pare, a solução atual é ótima. ✓
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha  $r$ , de acordo com: ✓

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m | \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna  $s$  de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo  $a_{r,j} > 0$ , pare, o problema é infactível. ✓

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento  $a_{r,s}$  e volte para 1.

# Dual-Simplex

## Exemplo

Para pivotarmos o elemento  $a_{3,1} = -2$ , fazemos as seguintes operações:

1.  $L_3 \leftarrow L_3/2$
2.  $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	0	1	0	1	1
$x_1$	1	0	1/2	-1/2	1/2

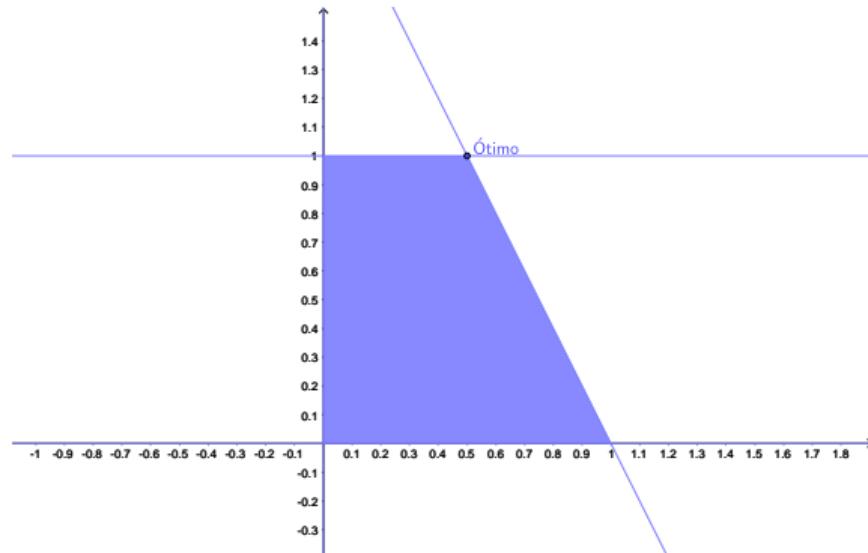
Como nenhum  $b < 0$  a solução é **primal factível**. Ainda, como  $c \geq 0$  ela também é **dual factível**, e portanto ótima.

# Dual-Simplex

## Exemplo

A nova solução ótima é mostrada no gráfico. Compare com o gráfico no inicio da apresentação.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
	0	0	1	0	2
$x_2$	0	1	0	1	1
$x_1$	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$



# Dual-Simplex

## Conclusões

### Conclusões

1. O método Dual-Simplex funciona exatamente como o Simplex, somente **alterando a ordem e o critério** de escolha das variáveis que entram e saem da base.

# Dual-Simplex

## Conclusões

### Conclusões

1. O método Dual-Simplex funciona exatamente como o Simplex, somente **alterando a ordem e o critério** de escolha das variáveis que entram e saem da base.
2. Se após a otimização precisarmos adicionar novas restrições no problema, e o mesmo se tornar infactível, podemos usar o método Dual-Simplex para aproveitar o quadro atual, ao invés recomeçar a otimização do zero.

### Conclusões

1. O método Dual-Simplex funciona exatamente como o Simplex, somente **alterando a ordem e o critério** de escolha das variáveis que entram e saem da base.
2. Se após a otimização precisarmos adicionar novas restrições no problema, e o mesmo se tornar infactível, podemos usar o método Dual-Simplex para aproveitar o quadro atual, ao invés recomeçar a otimização do zero.
3. Antes de aplicar o método, **garantir que as condições são satisfeitas**.

# Dual-Simplex

## Conclusões

### Conclusões

1. O método Dual-Simplex funciona exatamente como o Simplex, somente **alterando a ordem e o critério** de escolha das variáveis que entram e saem da base.
2. Se após a otimização precisarmos adicionar novas restrições no problema, e o mesmo se tornar infactível, podemos usar o método Dual-Simplex para aproveitar o quadro atual, ao invés recomeçar a otimização do zero.
3. Antes de aplicar o método, **garantir que as condições são satisfeitas**.
4. Podemos usar o Dual-Simplex em outras ocasiões (não somente ao adicionar restrições), por exemplo no lugar de aplicar a Fase I para encontrar uma solução inicial viável.