Introdução à Programação Linear

Alexandre Checoli Choueiri

04/05/2022

O conceito da PL

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
    1. Restrições de recursos: tempo.

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
    1. Restrições de recursos: tempo.
    2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
    3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.
  2. Output otimizado: lucro pela venda dos produtos.

O conceito da PL

O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

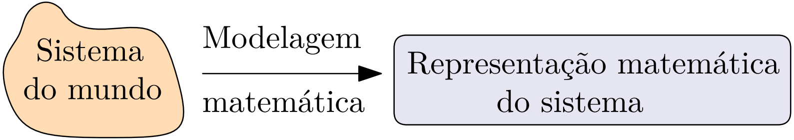
- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.
  2. Output otimizado: lucro pela venda dos produtos.
  3. Exemplo de plano: (2 un., P1), (3 un., P2), (0 un., P3).

O conceito da PL

Se pudermos representar o problema matematicamente, temos um problema de **programação matemática**. Se as funções/equações/inequações usadas na representação forem todas lineares, temos um problema de **programação linear** .

O conceito da PL

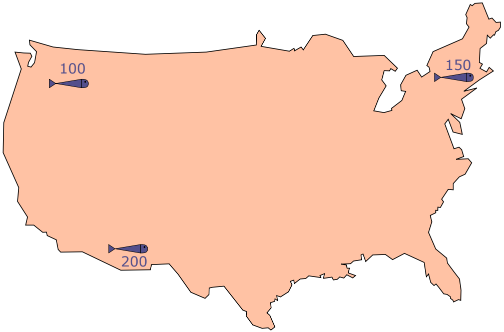
O processo de desdobrar um problema (sistema do mundo real) em um modelo matemático é chamado de **modelagem** matemática.



OBS: Nesta etapa não sabemos qual plano devemos seguir, somente representamos o problema formalmente por meio da matemática

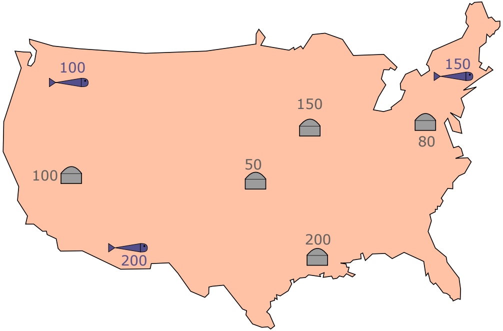
Exemplos

Exemplo I - o problema da distribuição



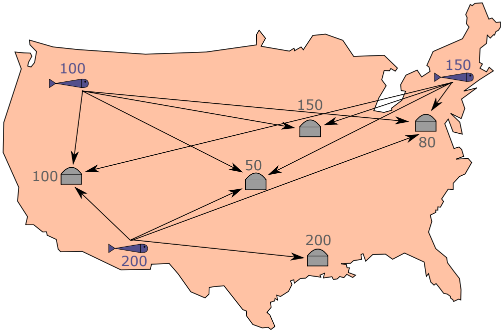
Uma empresa nos EUA possui 3 portos que fazem a pesca e envase de sardinhas (em fábricas). Cada fábrica possui uma **capacidade de fornecimento** (em toneladas).

Exemplo I - o problema da distribuição



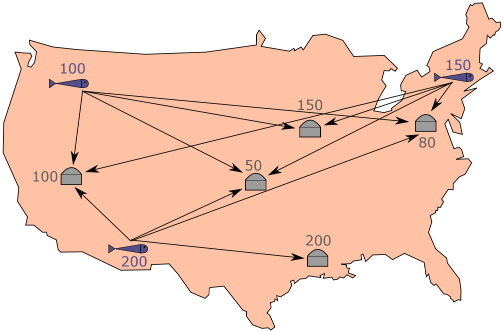
Esses portos devem realizar o transporte das latas de sardinha para **suprir a demanda** de 5 depósitos.

Exemplo I - o problema da distribuição



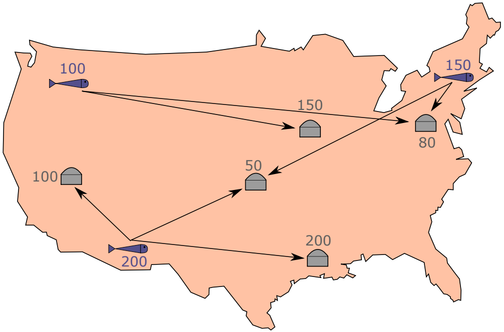
Obviamente existe um **custo unitário** para o transporte das latas de cada fábrica para cada depósito, que é proporcional às distâncias entre os locais.

Exemplo I - o problema da distribuição



Qual deve ser o plano de transporte, para que todas as demandas sejam atendidas, sem exceder às capacidades das fábricas, ao menor custo possível?

Exemplo I - o problema da distribuição



Um possível programa é mostrado acima.

Exemplo I - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo I - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demandas
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo I - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demandas Ofertas
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo I - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demandas Ofertas
Objetivo	Min. custos de transporte
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

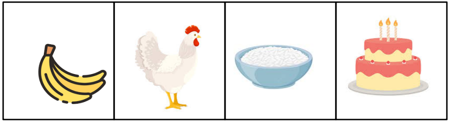
Exemplo I - Análise

Pergunta	**Análise**
Restrições	Demandas Ofertas
Objetivo	Min. custos de transporte
Exemplo de programa	- 50 un. da fábrica 1 ao depósito 1 - 100 un. da fábrica 2 ao depósito 5 - 50 un. da fábrica 2 ao depósito 1
Como mensurar o programa?	

Exemplo I - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demandas Ofertas
Objetivo	Min. custos de transporte
Exemplo de programa	- 50 un. da fábrica 1 ao depósito 1 - 100 un. da fábrica 2 ao depósito 5 - 50 un. da fábrica 2 ao depósito 1
Como mensurar o programa?	$\sum$ itens transportados pelo custo unitário

Exemplo II - um problema de dieta



Uma nutricionista está montando uma dieta para um cliente.

Exemplo II - um problema de dieta

				
Proteina	7	14	2	1
Gordura	2	3	3	10

Cada alimento do cardápio possui uma quantidade de proteína e de gordura por kg ingerido.

Exemplo II - um problema de dieta

				
Proteina	7	14	2	1
Gordura	2	3	3	10
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00

Bem como um custo/kg comprado.

Exemplo II - um problema de dieta

					**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Para que seja equilibrada, a dieta deve possuir quantidades mínimas de proteína e gordura.

Exemplo II - um problema de dieta

					**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Sabendo que, para ser atrativa, a dieta deve ter um **custo mínimo**, qual a dieta ideal que a nutricionista deve passar para o cliente?

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demanda mínima de prot.
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demanda mínima de prot. Demanda mínima de gord.
Objetivo	
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demanda mínima de prot. Demanda mínima de gord.
Objetivo	Min. custo da dieta
Exemplo de programa	
Como mensurar o programa?	

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demanda mínima de prot. Demanda mínima de gord.
Objetivo	Min. custo da dieta
Exemplo de programa	- 0.3kg de banana - 0.3kg de frango - 0.2kg de arroz
Como mensurar o programa?	

Exemplo II - Análise

Pergunta	Análise
Restrições	Demanda mínima de prot. Demanda mínima de gord.
Objetivo	Min. custo da dieta
Exemplo de programa	- 0.3kg de banana - 0.3kg de frango - 0.2kg de arroz
Como mensurar o programa?	$\sum$ Kg de cada item multiplicado pelo preço/kg

História, influências & influenciados

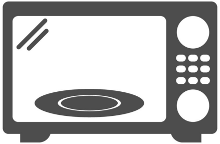
Um pouco de História

Um pouco de História

Um nascimento trágico

Como muitos outros desenvolvimentos científicos e invenções, o nascimento da programação linear como a conhecemos hoje foi impulsionado pela guerra. Mais especificamente pela segunda guerra mundial. O departamento de defesa norte americano usava *planejamentos* para atingir seus objetivos de guerra. [a]

[a] Nas forças armadas norte-americanas, esse planejamento era chamado de um **programa**



Microondas

Durante o início da Guerra Fria, em 1945, o engenheiro americano Percy Spencer trabalhava com a tecnologia de radares, mais precisamente na construção de peças capazes de gerar ondas eletromagnéticas (magnetrons). Durante as muitas horas dedicadas ao serviço, Spencer percebeu que uma barra de chocolates em seu bolso havia derretido.

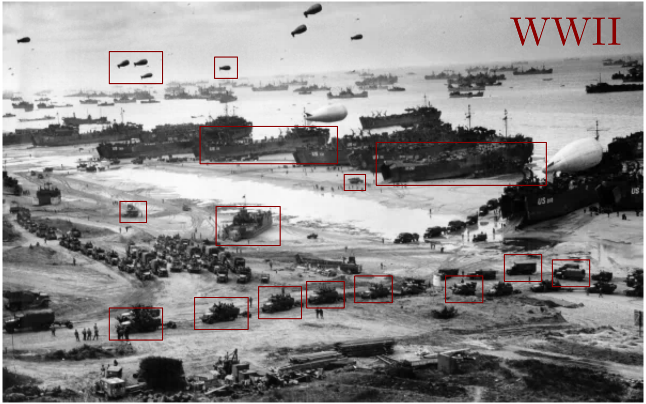
Fanta

Rompendo os laços com os EUA, a Alemanha ficou sem o xarope da famigerada Coca-cola, forçando o governo a criar um substituto: o **Phatastischen**. Para melhor sonoridade seu nome foi reduzido à **Fanta** (inicialmente era de maça e não era laranja).

Um pouco de História

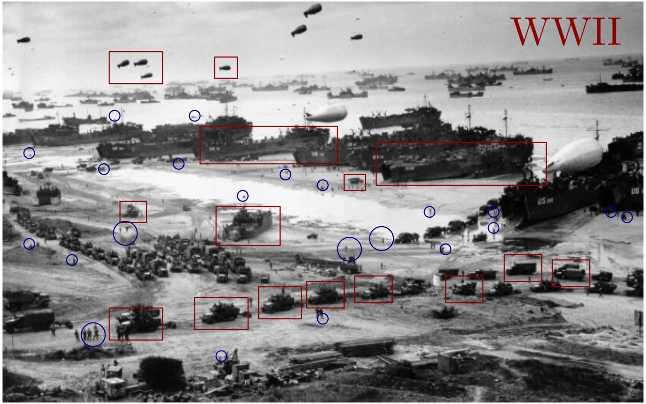
Imagine o poder que um programa (planejamento) usando PL não teria na guerra?

Um pouco de História



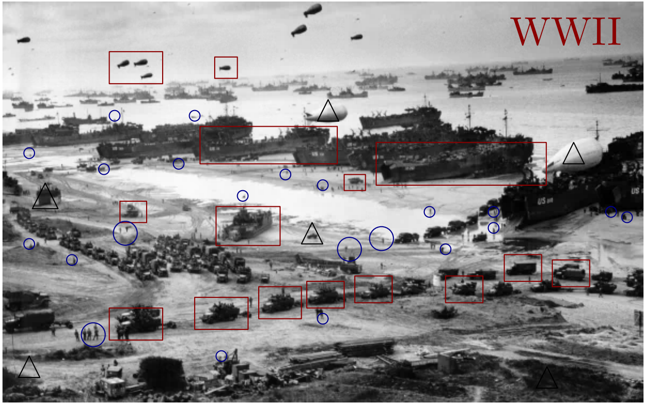
Mapeando todo o maquinário disponível.

Um pouco de História



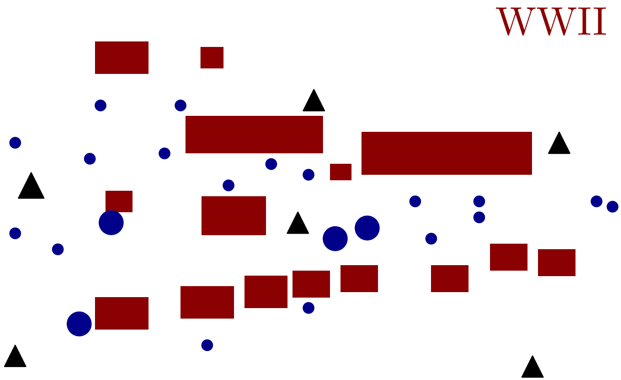
Junto a todo o capital humano, com suas restrições e capacidades.

Um pouco de História



Bem como os recursos naturais disponíveis (ferro, madeira, água, etc...).

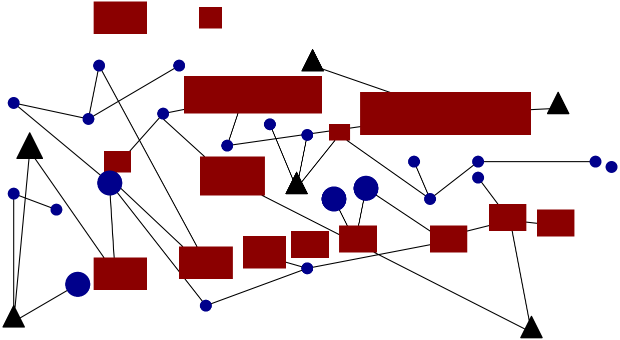
Um pouco de História



Isolando todos os termos em um programa matemático.

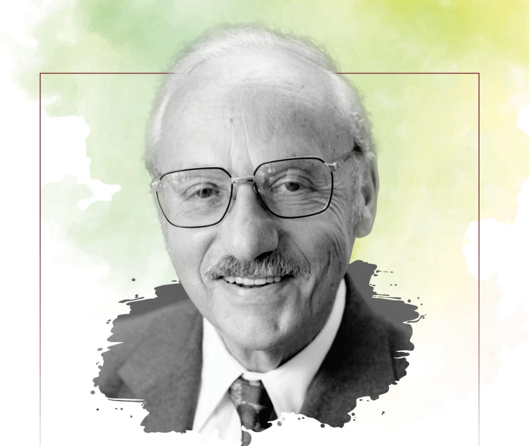
Um pouco de História

WWII



E encontrando as relações entre eles, de forma a otimizar um programa para a melhor utilização de todos os recursos, com o objetivo de **eliminar o inimigo**.

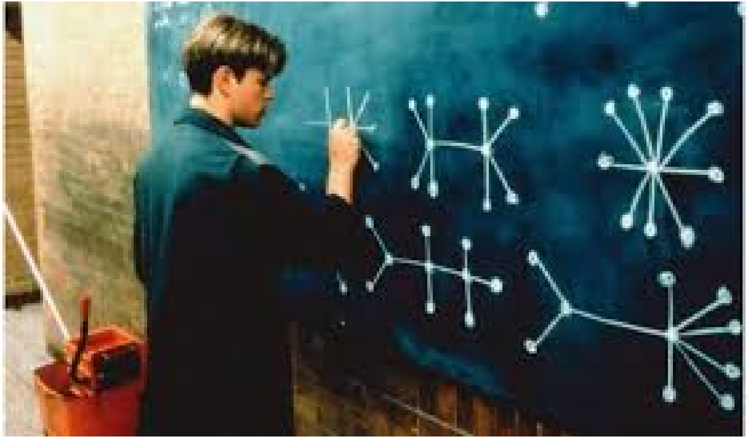
Um pouco de História - o criador



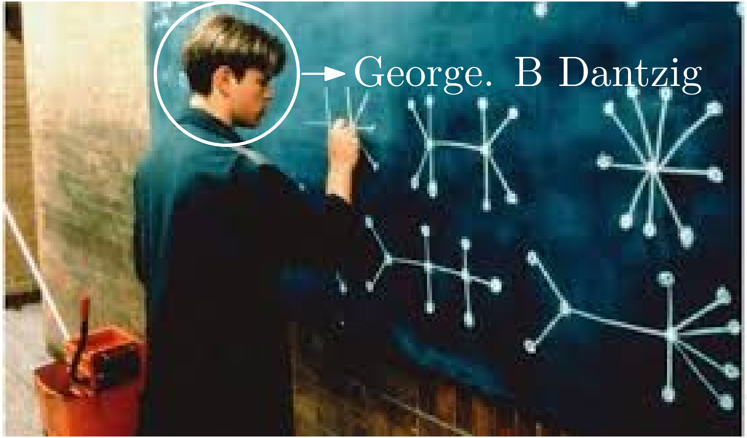
George. B Dantzig

Interrompeu seu doutorado para ajudar as forças armadas com o problema de alocação

Um pouco de História - do que Dantzig era capaz?



Um pouco de História - do que Dantzig era capaz?



Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.

Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).

Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).
- Dantzig chega atrasado em sala e copia os problemas imaginando se tratar de um dever de casa.

Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).
- Dantzig chega atrasado em sala e copia os problemas imaginando se tratar de um dever de casa.
- Pouco tempo depois retorna com os problemas resolvidos para o professor.

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Imagine o problema de alocar 70 soldados à 70 atividades.

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Imagine o problema de alocar 70 soldados à 70 atividades.
- Toda atividade deve ser desempenhada por um soldado, e existe uma aptidão de cada soldado para desempenhar cada atividade.

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	2	3	7
	4	3	3	5
	1	7	3	3
	3	5	1	3

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	 2	3	7
	 4	3	3	5
	1	7	 3	3
	3	5	1	 3

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	2	3	7
	4	3	3	5
	1	7	3	3
	3	5	1	3

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não

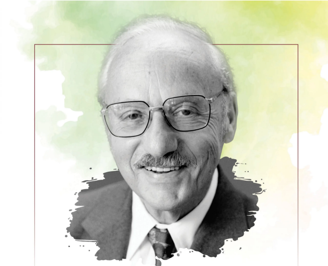
Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não
- E se existissem 10^{40} terras cheias desses computadores funcionando desde o início do big-bang?

Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem 70! possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E se tivéssemos um computador capaz de realizar **um milhão** de cálculos por **segundo**, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não
- E se existissem 10^{40} terras cheias desses computadores funcionando desde o início do big-bang?
  - Talvez!

Um pouco de História - o confronto

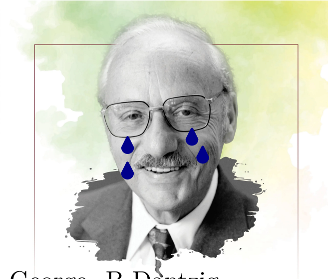


George. B Dantzig

VS

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	2	3	7
	4	3	3	5
	1	7	3	3
	3	5	1	3

Um pouco de História - o confronto



George. B Dantzig

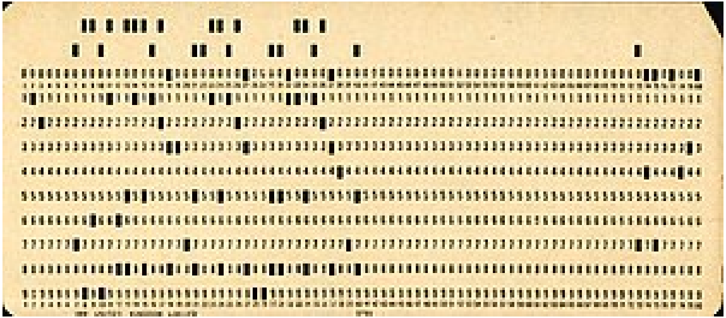
Dantzig virou um especialista em criar planejamentos usando uma calculadora, porém sem otimização...

VS

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	2	3	7
	4	3	3	5
	1	7	3	3
	3	5	1	3

Voltando à História

Após a guerra, em 1945, com o fim de seu doutorado e em busca de uma posição acadêmica, Dantzig prefere aceitar a **aposta de seus colegas** do pentágono, de operacionalizar um método **automático** para resolver o problema genérico de alocação de recursos.

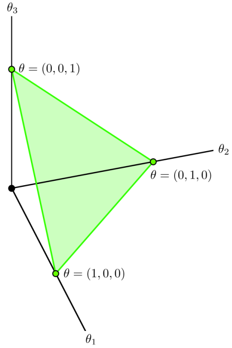


O método Simplex

A salvação

Finalmente, sem as pressões da guerra, em 1947 Dantzig cria um método sistemático para **resolver** problemas modelados pela programação linear, o método **Simplex**[a].

[a] O nome Simplex diz respeito ao conceito matemático de *cones simpliciais*



E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.

E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.

E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.

E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.

E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.
5. Roteamento de mensagens em redes de telecomunicação.

E depois?

Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.
5. Roteamento de mensagens em redes de telecomunicação.
6. Roteirização de aeronaves e navios.

Modelando um problema

Modelando o problema da dieta

Vamos considerar o problema da dieta.

- O primeiro passo para criarmos um modelo de programação linear é a definição do que queremos descobrir, ou seja, quais são as nossas **variáveis**.

					**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	$\geq$60
Gordura	2	3	3	10	$\geq$30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Neste problema temos diversos alimentos disponíveis, e devemos decidir **quanto comprar** de cada um. Dessa forma, podemos criar 4 variáveis para representar essas quantidades:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Qtde. (kg) comprada de banana} \\ x_2 : \text{Qtde. (kg) comprada de frango} \\ x_3 : \text{Qtde. (kg) comprada de arroz} \\ x_4 : \text{Qtde. (kg) comprada de bolo} \end{cases}$$

Modelando o problema da dieta

- Com a definição das variáveis, montamos as sentenças matemáticas que representam as **restrições** e o **objetivo**.

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R\$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Podemos entender melhor as restrições e o objetivo atribuindo valores às variáveis (lembrando que precisamos relacionar as variáveis com as restrições de Proteína e Gordura).
- Por exemplo, se comprarmos 1kg de banana e nada mais, temos a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

- Com essa solução, quanto teremos de Proteína e Gordura na nossa dieta?

Modelando o problema da dieta

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

Modelando o problema da dieta

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

- E se comprássemos 1kg de banana e 0.5 kg de arroz?

Modelando o problema da dieta

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

- E se comprássemos 1kg de banana e 0.5 kg de arroz?

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 2 * (0.5) + 0 = 8 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 3 * (0.5) + 0 = 3.5 \end{cases}$$

Modelando o problema da dieta

- Como podemos definir a relação que descreve as quantidades de proteína e gorduras para quaisquer valores comprados dos alimentos $(x_1,\ldots,x_4)$?

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	$\geq$60
Gordura	2	3	3	10	$\geq$30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Como podemos definir a relação que descreve as quantidades de proteína e gorduras para quaisquer valores comprados dos alimentos $(x_1, \ldots, x_4)$?

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{Gordura} = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 \end{cases}$$

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Agora que conseguimos descrever as quantidades de Proteína e Gorduras para qualquer decisão de compra, podemos impor as duas restrições de demandas mínimas:

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R\$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Agora que conseguimos descrever as quantidades de Proteína e Gorduras para qualquer decisão de compra, podemos impor as duas restrições de demandas mínimas:

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 \geq 30 \end{cases}$$

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	$\geq$60
Gordura	2	3	3	10	$\geq$30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Com essas duas inequações conseguimos criar planejamentos/programas factíveis (que obedecem às restrições) para do problema. Porém ainda não sabemos qual é a melhor dentre duas soluções. Ou seja, falta criarmos o nosso **objetivo**.

Modelando o problema da dieta

- Neste caso, a diferença entre duas soluções factíveis (que atendem às restrições) se dará pelo custo de cada uma, ou seja, uma solução com menor custo **será melhor** do que uma com maior custo.

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Neste caso, a diferença entre duas soluções factíveis (que atendem às restrições) se dará pelo custo de cada uma, ou seja, uma solução com menor custo **será melhor** do que uma com maior custo.
- Dessa forma, precisamos encontrar uma forma de mensurar o custo de uma solução para quaisquer valores de x_i.

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

- Neste caso, a diferença entre duas soluções factíveis (que atendem às restrições) se dará pelo custo de cada uma, ou seja, uma solução com menor custo **será melhor** do que uma com maior custo.
- Dessa forma, precisamos encontrar uma forma de mensurar o custo de uma solução para quaisquer valores de x_i.

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5.5x_1 + 24x_2 + 11x_3 + 25x_4$$

	x_1 	x_2 	x_3 	x_4 	**Demanda**
Proteina	7	14	2	1	≥ 60
Gordura	2	3	3	10	≥ 30
R$/kg	5.50	24.00	11.00	25.00	

Modelando o problema da dieta

Dessa forma, só precisamos definir o que queremos com esse objetivo, **maximizar** ou **minimizar**? O modelo completo para o problema da dieta fica então:

Modelando o problema da dieta

Dessa forma, só precisamos definir o que queremos com esse objetivo, **maximizar** ou **minimizar**? O modelo completo para o problema da dieta fica então:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } Z = 5.5x_1 + 24x_2 + 11x_3 + 25x_4 & \\
\text{Sujeito à} \qquad 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 60 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 &\geq 30 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Por que **linear**?

Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que a_i e b são constantes e x_i são incógnitas (ou variáveis).

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Por que **linear**?

Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que a_i e b são constantes e x_i são incógnitas (ou variáveis).

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 & \text{inequação linear} \\ & \\ & \end{cases}$$

Por que **linear**?

Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que a_i e b são constantes e x_i são incógnitas (ou variáveis).

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 & \text{inequação linear} \\ 2x_1^2 + +3x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 30 & \text{equação não linear} \\ \\ \end{cases}$$

Por que **linear**?

Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que a_i e b são constantes e x_i são incógnitas (ou variáveis).

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 & \text{inequação linear} \\ 2x_1^2 + +3x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 30 & \text{equação não linear} \\ f(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 & \text{função não linear} \\ \end{cases}$$

Por que **linear**?

Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que a_i e b são constantes e x_i são incógnitas (ou variáveis).

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 & \text{inequação linear} \\ 2x_1^2 + +3x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 30 & \text{equação não linear} \\ f(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 & \text{função não linear} \\ \sum_{i=1}^{5} x_i = 5 & \text{equação linear} \end{cases}$$

Após a programação linear

Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.

Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (PO-II)

Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

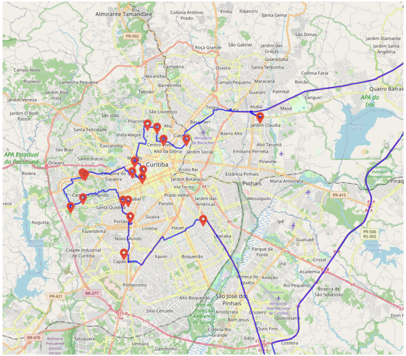
1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (PO-II)
3. Otimização em redes (PO-II)

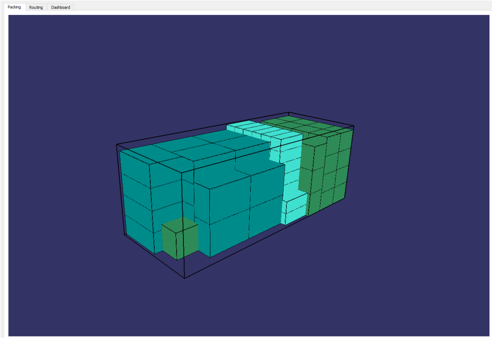
Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (PO-II)
3. Otimização em redes (PO-II)
4. Programação dinâmica (PO-III)

Roteirização e Carregamento - CEDRUS





O resumo da ópera

O resumo da ópera

Teste seus conhecimentos. Você deve conseguir **responder às questões** abaixo após a apresentação:

1. Qual foi o catalisador da programação linear?
2. Qual é o maior expoente da área e a sua maior contribuição?
3. Por que o ramo programação linear têm esse nome?
4. Qual é a diferença entre *modelar* um problema e *resolver* o problema?

Extra

Existem diversos softwares comerciais e gratuitos que implementam os algoritmos que resolvem problemas modelados como programas lineares. Um deles é o GLPK General Linear Programming Kit. O GLPK não possui interface, e na maioria das vezes é usado como uma biblioteca em linguagens de programação.

No entanto, o professor **Leandro Magatão** (UTFPR - Curitiba) implementou uma solução com interface gráfica utilizando o glpk, chamada GUSEK. Com ele podemos escrever modelos de PL em arquivos de texto e encontrar a solução em um mesmo ambiente.

Usar o programa

Baixe o programa e encontre as soluções ótimas para os problemas da dieta e os dois problemas de produção.

Sobre o curso

Sobre o curso - Aulas

Metodologia

Devido a natureza matemática dos conteúdos, a maioria das aulas será realizada no **quadro**, salvo algumas exceções (como essa), ou para apresentação de algum **software**.

Notas

As notas serão compostas pelos seguintes termos:

- PROVA 1 (3.0 pts)
- PROVA 2 (3.0 pts)
- PROVA 3 (3.0 pts)
- LISTAS (1.0 pts) (talvez divididas em todas as listas e um trabalho em sala).

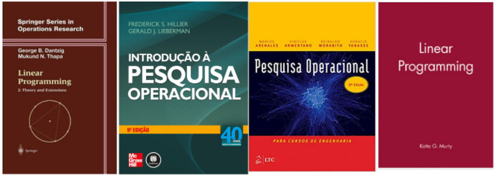
Sobre o curso - Ementa

Semanas	Conteúdo
1-2	Modelagem
3	Álgebra
4-5	Solução modelos com 2 variáveis
5	PROVA 1
6-9	Simplex
9	PROVA 2
10-11	Dualidade
11-13	Dual simplex
13-14	Análise de sensibilidade
15	PROVA 3

Sobre o curso - Bibliografia

O curso é fortemente pautado no livro do próprio Dantzig, e outras 3 referências são usadas para apoio (das 4 referências 2 são em PT-BR e 2 em EN).

Referencia
Dantzig, George Bernard, and Mukund N. Thapa. Linear programming: Theory and extensions. Vol. . New York: Springer, 2003.
Hillier, Frederick S., and Gerald J. Lieberman. Introdução à pesquisa operacional. McGraw Hill Brasil, 2013.
ARENALES, Marcos. "Pesquisa operacional: para os cursos de engenharia." Rio de Janeiro: Campus (2007).
Murty, Katta. Linear Programming. Wiley, 1991.



Sobre o curso - Contato/Materiais/Monitoria

1. **Contato 1:** email: alexandrechecoli@ufpr.br
2. **Contato 2:** *Teams* (chat).
3. **Contato 3:** Reuniões presenciais.
4. **Materiais no site:** alexandrechecoli.github.io (aba programação linear).
5. **Monitoria:** Nome e horários do monitor ficarão disponíveis na página da disciplina.

Exercícios

Exercícios

Resolva os seguintes exercícios para fixar o conteúdo.

1. Considerando o modelo da dieta desenvolvido, crie pelo menos 3 soluções **factíveis** para o problema, calcule seus custos e selecione a melhor.
2. Para cada um dos problemas abaixo, determine as variáveis, as restrições e o objetivo do problema. Traduza tudo isso matematicamente como um modelo de programação linear.
   - 2.1 Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês.
   - 2.2 Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade.