A inversa: Simplex & Dualidade

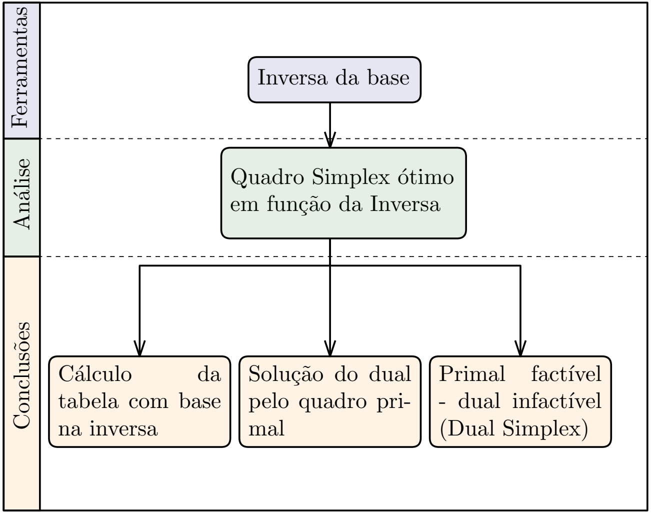
Alexandre Checoli Choueiri

06/11/2022

Conteúdo

Objetivos

Ferramentas e objetivos



A inversa da base

A matriz inversa

Importância

A inversa

A matriz inversa possui importantes propriedades, que a tornam muito útil na resolução de sistemas lineares. Como o método Simplex nada mais é do que um sistema de equações lineares, a inversa também desempenha um importante papel no algoritmo. Mas **onde ela está**? **Como a encontramos**? Primeiro veremos algumas propriedades da inversa e como ela se relaciona com sistemas de equações lineares.

A matriz inversa
Definição

1. Seja **A** uma matriz quadrada $_{mxm}$. A matriz dita inversa de **A** ($\mathbf{A}^{-1}$) é tal que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

2. Em que **I** é a matriz identidade (matriz $_{mxm}$), sendo os elementos da diagonal principal $= 1$ e todos os outros 0.

A matriz inversa

Definição

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Definição

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Definição

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Pois

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 & = 60 \\ 2x_1 & = 6 \end{cases}$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 & = 60 \\ 2x_1 & = 6 \end{cases}$$

Podemos escreve-lo em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 & = 60 \\ 2x_1 & = 6 \end{cases}$$

Podemos escreve-lo em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dando nome aos dados, ficamos com:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Podemos trabalhar com o novo sistema em notação matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Podemos trabalhar com o novo sistema em notação matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Podemos trabalhar com o novo sistema em notação matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \, :$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Podemos trabalhar com o novo sistema em notação matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} :$$

Ficamos então com:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} :$$

A matriz inversa

Seu papel em sistemas lineares

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ou seja: se encontrarmos a inversa da matriz de coeficientes de um sistema de equações lineares, podemos usá-la para encontrar a solução do mesmo.

A matriz inversa

Exemplo

Considerando o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

A matriz inversa

Exemplo

Considerando o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Encontramos $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Exemplo

Considerando o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Encontramos $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a solução do sistema por meio de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Exemplo

Considerando o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Encontramos $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a solução do sistema por meio de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Com solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Como encontrar a inversa?
Método

Para encontrar a inversa da matriz **A**, criamos uma matriz identidade de mesma dimensão de **A** e as colocamos uma ao lado da outra. Em seguida aplicamos todas as operações para transformar **A** em **I**. Ao final, a matriz **I** se transforma na $\mathbf{A}^{-1}$. Ou seja:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}$$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como encontrar a inversa?

Método

Adicionando a identidade:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc:cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como encontrar a inversa?

Método

Adicionando a identidade:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc:cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora aplicamos as operações para transformar $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$

- $L_1 \rightarrow L_1/10$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como encontrar a inversa?

Método

- $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & -2/10 & -2/10 & 1 \end{array}\right]$$

Como encontrar a inversa?

Método

- $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & -2/10 & -2/10 & 1 \end{array}\right]$$

- $L_2 \rightarrow L_2/(-2/10)$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Como encontrar a inversa?

Método

- $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & -2/10 & -2/10 & 1 \end{array}\right]$$

- $L_2 \rightarrow L_2/(-2/10)$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

- $L_1 \rightarrow L_1 - 1/10L_2$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Como encontrar a inversa?
Método

Ou seja, encontramos a inversa:

$$\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

De forma que que inversa fica:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{array}\right]$$

E o que tudo isso tem a ver com o método **Simplex**?

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned} \text{max } z = x_1 + 2x_2 & \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{min z} = -x_1 & -2x_2 & & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\
x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\
-x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Colocando os dados em forma tabular:

Relação com o Simplex
A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Note que temos uma matriz identidade (**I**) logo no inicio do quadro (isso **sempre** vai ocorrer, seja com variáveis normais ou artificias).

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Note também que x_3, x_4 e x_5 são as variáveis básicas da solução inicial.

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Seja $\mathbf{B}$ a submatriz composta pelas colunas das variáveis básicas (da tabela original) percebemos que a submatriz referente às colunas das variáveis de folga na tabela atualizada é de fato a inversa dessa submatriz (nesse caso isso é óbvio, pois $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, de forma que $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$).

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações
para chegar na
inversa: -

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Continuando com o Simplex, selecionamos a variável x_2 para entrar na base, e x_5 para sair, ou seja, fazemos o pivoteamento no elemento $a_{4,2} = 1$.

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
3. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

A nova tabela fica então:

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Com variáveis básicas x_3, x_4 e x_2:

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações para chegar na inversa:

1. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Continuando com o Simplex, selecionamos a variável x_1 para entrar na base e x_3 para sair, com elemento pivô $a_{2,1} = 2$.

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$
3. $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

A nova tabela fica então (tabela ótima):

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Com variáveis básicas x_1, x_4 e x_2:

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Operações para chegar na inversa:

1. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$
3. $L_4 \leftarrow L_4/2$
4. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
5. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Conclusão

As operações realizadas na tabela Simplex (pivoteamento), são exatamente as mesmas que realizamos para transformar uma matriz (no caso do Simplex, uma coluna por vez) na identidade. Ainda, como iniciamos a tabela com uma matriz identidade ($\mathbf{I}$), **sempre teremos a inversa** da matriz composta pelas colunas das variáveis básicas (no problema original), na tabela atualizada, representada nas colunas que na primeira iteração formavam a identidade.

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Conclusão

As operações realizadas na tabela Simplex (pivoteamento), são exatamente as mesmas que realizamos para transformar uma matriz (no caso do Simplex, uma coluna por vez) na identidade. Ainda, como iniciamos a tabela com uma matriz identidade ($\mathbf{I}$), **sempre teremos a inversa** da matriz composta pelas colunas das variáveis básicas (no problema original), na tabela atualizada, representada nas colunas que na primeira iteração formavam a identidade.

Atenção

Sempre teremos uma matriz identidade ao inicio do Simplex (onde a inversa fica armazenada), porém em alguns casos podemos perdê-la ao removê-la da tabela, como no caso da Fase I. A matriz identidade inicial é formada pelas variáveis artificiais, que são removidas após o fim da Fase I. Dessa forma, se a inversa precisar ser usada, **não excluir as colunas das variáveis artificiais ao fim da Fase I**.

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Agora que mostramos que a inversa é usada na resolução de sistemas lineares, e que de fato ela também está presente na tabela Simplex, podemos usá-la para encontrar o quadro ótimo Simplex de forma genérica. Com esse quadro podemos **confirmar três hipóteses importantíssimas a respeito da solução ótima do Simplex**:

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Agora que mostramos que a inversa é usada na resolução de sistemas lineares, e que de fato ela também está presente na tabela Simplex, podemos usá-la para encontrar o quadro ótimo Simplex de forma genérica. Com esse quadro podemos **confirmar três hipóteses importantíssimas a respeito da solução ótima do Simplex**:

1. Podemos calcular todos os dados da tabela Simplex somente sabendo quais são as variáveis básicas (usando a inversa).

Relação com o Simplex

A inversa no quadro Simplex

Agora que mostramos que a inversa é usada na resolução de sistemas lineares, e que de fato ela também está presente na tabela Simplex, podemos usá-la para encontrar o quadro ótimo Simplex de forma genérica. Com esse quadro podemos **confirmar três hipóteses importantíssimas a respeito da solução ótima do Simplex**:

1. Podemos calcular todos os dados da tabela Simplex somente sabendo quais são as variáveis básicas (usando a inversa).
2. Sempre que encontramos a solução ótima do problema **primal**, também obtemos a solução ótima do **dual**.

Relação com o Simplex

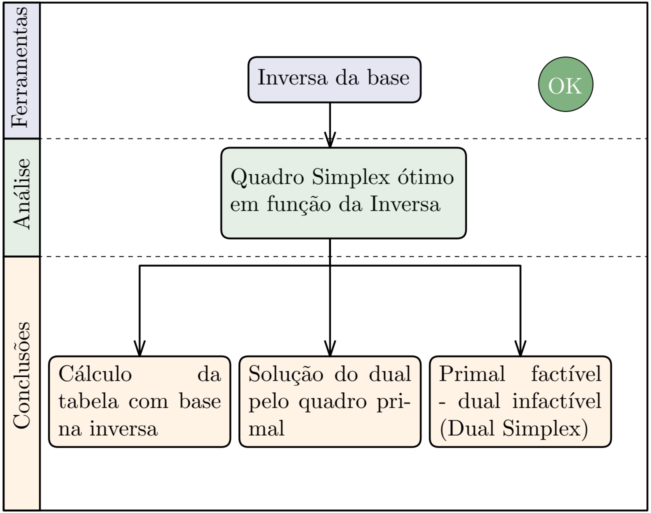
A inversa no quadro Simplex

Agora que mostramos que a inversa é usada na resolução de sistemas lineares, e que de fato ela também está presente na tabela Simplex, podemos usá-la para encontrar o quadro ótimo Simplex de forma genérica. Com esse quadro podemos **confirmar três hipóteses importantíssimas a respeito da solução ótima do Simplex**:

1. Podemos calcular todos os dados da tabela Simplex somente sabendo quais são as variáveis básicas (usando a inversa).
2. Sempre que encontramos a solução ótima do problema **primal**, também obtemos a solução ótima do **dual**.
3. Durante a resolução do primal, as soluções do dual são infactíveis e as do primal factíveis. Na otimalidade, ambas são factíveis.

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Quadro Simplex ótimo e a Inversa

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Considere o modelo de PL na forma padrão, escrito em notação matricial:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

1. $\mathbf{c}^T$ é o vetor dos coeficientes da função objetivo.
2. $\mathbf{A}$ é a matriz tecnológica.
3. $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Por exemplo, para o seguinte modelo na forma padrão, quem seriam os termos A, c^T, b e x^T?

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{min z} = -x_1 & -2x_2 & & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\
x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\
-x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Por exemplo, para o seguinte modelo na forma padrão, quem seriam os termos A, c^T, b e x^T?

$$\begin{array}{llllll} \text{min z} = -x_1 & -2x_2 & & & & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4 \end{array}$$

Temos que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Dessa forma, o modelo reescrito na forma matricial fica:

$$\textbf{min } z = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x}$$

Sujeito a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Podemos reescrever o modelo separando as variáveis e coeficientes básicos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\min z = {} & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0\end{aligned}$$

Em que:

1. $\mathbf{c}_B^T$ e $\mathbf{c}_N^T$ são os vetores dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas na função objetivo.
2. x_B e x_N são as variáveis básicas e não básicas.
3. $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ são as matrizes dos coeficientes referentes às variáveis básicas e não básicas.
4. $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Quem são então os termos básicos ($\mathbf{c}_B^T$,**B**, x_B) e não básicos ($\mathbf{c}_N^T$,**N**, x_N)?

$$\textbf{min } z = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Quem são então os termos básicos ($\mathbf{c}_B^T$,**B**, x_B) e não básicos ($\mathbf{c}_N^T$,**N**, x_B)?

$$\textbf{min } z = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Dessa forma, o modelo reescrito na forma matricial fica:

$$\textbf{min } z = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}}_{c_N^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N}$$

Sujeito a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Considerando então o sistema escrito com os termos básicos e não básicos separados:

$$\begin{aligned} \min\ z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Considerando então o sistema escrito com os termos básicos e não básicos separados:

$$\begin{aligned} \min z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos reescrever o problema de forma que a função objetivo seja considerada uma restrição do sistema:

$$\begin{aligned} (-z) + \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N &= 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Considerando então o sistema escrito com os termos básicos e não básicos separados:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos reescrever o problema de forma que a função objetivo seja considerada uma restrição do sistema:

$$\begin{aligned} (-z) + \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N &= 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

O que devemos fazer para esse sistema ser canônico em relação às variáveis básicas (x_B)?

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

1. Todas as variáveis básicas devem ter coeficiente 1 em suas linhas e zero em todas as outras.

Isso é o equivalente a termos uma matriz identidade multiplicando as v. básicas, para conseguir isto, basta multiplicar a segunda equação matricial por B^{-1}, obtendo:

$$\begin{aligned} (-z) + \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N &= 0 \\ \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{I}} \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

1. Todas as variáveis básicas devem ter coeficiente 1 em suas linhas e zero em todas as outras.

Isso é o equivalente a termos uma matriz identidade multiplicando as v. básicas, para conseguir isto, basta multiplicar a segunda equação matricial por B^{-1}, obtendo:

$$\begin{aligned} (-z) + \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N &= 0 \\ \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (-z) + \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N &= 0 \\ \mathbf{I}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Quadro Simplex ótimo
Em função da inversa

Ainda, para deixarmos o sistema canônico em relação a x_B é necessário que:

2. Os termos na função objetivo referentes às variáveis básicas ($\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$) sejam zerados.

Quadro Simplex ótimo

Em função da inversa

Ainda, para deixarmos o sistema canônico em relação a x_B é necessário que:

2. Os termos na função objetivo referentes às variáveis básicas ($\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$) sejam zerados.

Podemos fazer isso multiplicando a linha 2 por $\mathbf{c}_B^T$ e subtraindo da linha 1, ficamos com:

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} (-z) + & & (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N & = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ & \mathbf{I}\mathbf{x}_B + & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N & = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}}$$

Quadro Simplex ótimo

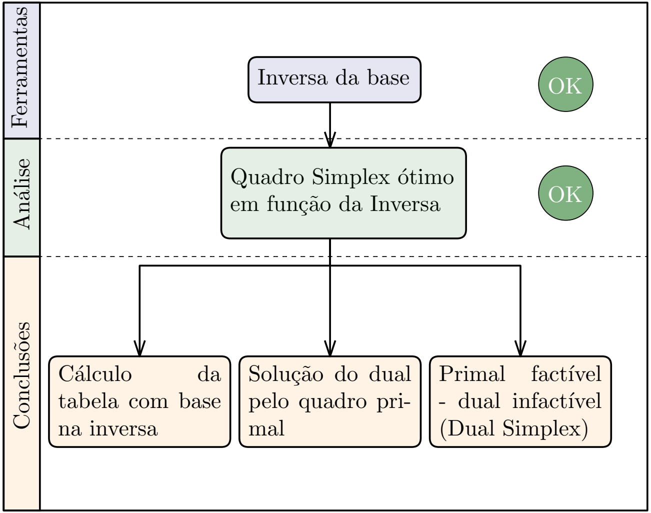
Em função da inversa

Se escrevermos na forma tabular do Simplex, temos que (omitindo a coluna $-z$):

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Retomando o quadro ótimo com a inversa da base

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Com a tabela genérica, temos uma forma de, a partir de uma base, recuperar todos os coeficientes da tabela Simplex para aquela determinada iteração do algoritmo. Considere o seguinte modelo na forma padrão canônica. Sabendo que a solução ótima tem variáveis x_1,x_4 e x_2 na base, quais os valores da tabela Simplex final?

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & & & & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

$$
\begin{array}{rcccccl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$

$$
\begin{array}{lcccccl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$
2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$ e $\mathbf{c}_N^T = [0, 0]$

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$
2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$ e $\mathbf{c}_N^T = [0, 0]$
3. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcccccl} \text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +\color{red}{x_3} & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +\color{red}{x_4} & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +\color{red}{x_5} & = 4 \end{array}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & & \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = & 6 \\
& x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = & 4 \\
& -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = & 4
\end{array}
$$

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$
2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$ e $\mathbf{c}_N^T = [0, 0]$
3. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
4. $$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Coletando os dados necessários do problema original:

$$
\begin{array}{rcccccl}
\text{min z} = & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}
$$

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$
2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$ e $\mathbf{c}_N^T = [0, 0]$
3. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
4. $$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
5. $b^T = [6, 4, 4]$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

O primeiro passo é calcular a matriz inversa de B (base):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

O primeiro passo é calcular a matriz inversa de B (base):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando os coeficientes da função objetivo referentes às variáveis não básicas $x_N = (x_3, x_5)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando os coeficientes da função objetivo referentes às variáveis não básicas $x_N = (x_3, x_5)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

Quadro Simplex ótimo
Exemplo

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_N^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_N^T} - \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix}3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Substituindo no quadro temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	$3/2$	?	$1/2$	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando os coeficientes da matriz **N**.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Substituindo no quadro temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	1/2	?	-1/2	?
x_4	?	?	0	?	1	?
x_2	?	?	1/2	?	1/2	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando a matriz das variáveis básicas e os coeficientes na função objetivo (nenhum cálculo é necessário, 0 na fo e a identidade na matriz).OBS: Lembre-se que as colunas da identidade seguem a ordem das variáveis (x_1, x_4, x_2).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	1/2	?	-1/2	?
x_4	?	?	0	?	1	?
x_2	?	?	1/2	?	1/2	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Substituindo no quadro temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	?
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	?
x_4	0	0	0	1	1	?
x_2	0	1	1/2	0	1/2	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Finalmente, atualizando os valores de $-z$ e b.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	?
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	?
x_4	0	0	0	1	1	?
x_2	0	1	1/2	0	1/2	?

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

$$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = -\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T}\underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}}_{b} = 11$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}$$

Quadro Simplex ótimo

Exemplo

Substituindo no quadro temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1/2	5

Note que conseguimos recuperar todas as informações do quadro final, usando somente os dados iniciais e a inversa da base ótima (compare com o quadro do inicio da apresentação).

Conclusão

Quadro Simplex ótimo

Conclusão

Conclusão

Com as relações matemáticas da tabela, conseguimos reconstruir o quadro Simplex referente a qualquer conjunto de variáveis básicas (com colunas = B), basta encontrarmos a inversa da base (B^{-1}).

Objetivos

Ferramentas e objetivos