

Dualidade: Modelos e Teoremas

1. **(R)** Para cada um dos modelos de PL abaixo, escreva o seu dual (*usando a definição de dualidade*).

$$(a) \quad \begin{array}{rclcl} \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 & \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rclcl} \min z = & x_1 & + & 2x_2 & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rclcl} \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 & \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 & , & x_2 & \text{irrestrito} \end{array}$$

2. **(R)** Para cada um dos modelos do exercício anterior, encontre o dual usando a tabela de conversão.
3. **(R)** Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R\$ 60,00 por unidade e o de B, R\$ 70,00 por unidade. Você trabalha em uma empresa que aluga máquinas do tipo M1 e M2, e ficou sabendo dos dados de produção dos produtos A e B da empresa. Você tem interesse em alugar as suas máquinas para a empresa, de forma a gerar lucro, e deseja usar as informações que obteve da empresa para criar um modelo de PL que te auxilie nesse tarefa. Com base nisso, faça o que se pede:
- Escreva o modelo de PL para o problema da empresa.
 - Escreva o modelo de PL para o seu problema.
 - Por algum motivo qualquer, nesse momento nem você e nem a empresa possuem um solver para encontrar as soluções ótimas, de forma que devem tentar encontrar as melhores soluções manualmente (sem o método gráfico também!). Você fica sabendo que a empresa conseguiu encontrar uma solução factível para o problema com lucro total de $z = 240$. Da mesma forma você está tentando encontrar soluções para o seu problema antes de ir fazer uma proposta para a empresa, e a sua melhor solução tem um custo de $v = 310$. O seu chefe afirma que você não deve parar de buscar soluções até encontrar uma em que o custo é de $v = 230$ (pois ele imagina que com esse valor a oferta será irrecusável). O que você pode afirmar sobre a intuição do seu chefe? Se baseie nos teoremas da dualidade para compor o seu argumento.
 - Agora você têm acesso a um solver muito potente (GUSEK), e consegue utilizá-lo para encontrar uma solução. Encontre a solução ótima pelo solver.
 - Seu chefe é um homem muito desconfiado, e não acredita que a resposta que você encontrou é a ótima (embora ele conheça os teoremas de dualidade e acredite neles). Como

you can prove that your solution is indeed optimal? (DICA: convince-o pela utilização dos teoremas).

4. (R) Considerando os modelos primal-dual encontrados no exercício 1a, adicione as folgas aos modelos e crie os relacionamentos entre as variáveis de um e as folgas do outro (relação dada pelo teorema das folgas complementares). Em seguida resolva o modelo primal pelo método gráfico, e use os relacionamentos para encontrar a solução do problema dual. Verifique se as soluções são de fato ótimas (também usando os teoremas).
5. (R) Uma nutricionista deseja montar uma dieta a custo mínimo, com base em 6 alimentos diferentes (chamados 1,2,3,4,5,6). A dieta deve atingir as quantidades mínimas de vitamina C e A de 19 e 9 unidades. Cada kg de alimento contribui com uma quantidade de vitamina A e C, e tem um custo, como mostrados na Tabela 1:

Vitaminas	Número de unidades de nutriente por kg de comida						Demanda mínima de vitaminas
	1	2	3	4	5	6	
Vitamina A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamina C	0	1	3	1	3	2	19
Custo/kg do alimento	35	30	60	50	27	22	

Table 1: Tabela de alimentos e componentes nutricionais

- (a) Escreva o modelo de PL referente ao problema da dieta.
- (b) Um vendedor de suplementos deseja convencer a nutricionista a comprar as suas pílulas de vitamina A e vitamina C, ao invés de atingir os valores por uma dieta alimentícia. No entanto, ele sabe que os valores cobrados pelas pílulas (π_1 e π_2) devem compensar para a nutricionista, ao mesmo tempo que devem gerar lucro para ele. Crie o modelo para o vendedor de pílulas.
- (c) O vendedor conseguiu descobrir a solução ótima referente ao modelo da nutricionista, com valores $\bar{x}^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2)$. Com base nessa solução, encontre os preços ótimos para o problema do vendedor, bem como o seu lucro total (usando a resposta encontrada).
6. (R) Pelas relações existentes entre os problemas primal-dual, podemos escolher a maneira mais fácil de se obter uma resposta, seja resolvendo o dual ou o primal. Considere o modelo abaixo:

$$\begin{aligned}
 \max z = & \quad 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 \\
 & \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 6 \\
 & \quad 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \leq 15 \\
 & \quad x_1 \geq 0
 \end{aligned}$$

Encontre a solução do modelo usando o dual e o teorema das folgas complementares (confirme a sua resposta encontrando a solução pelo solver GUSEK).