1 A inversa da base

A inversa

A matriz inversa possui importantes propriedades, que a tornam muito útil na resolução de sistemas lineares. Como o método Simplex nada mais é do que um sistema de equações lineares, a inversa também desempenha um importante papel no algoritmo. Mas **onde ela está**? **Como a encontramos**? Primeiro veremos algumas propriedades da inversa e como ela se relaciona com sistemas de equações lineares.

1. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada $_{mxm}$. A matriz dita inversa de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^{-1}$) é tal que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

2. Em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade (matriz $_{mxm}$), sendo os elementos da diagonal principal $= 1$ e todos os outros 0.

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Pois

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 & = 60 \\ 2x_1 & = 6 \end{cases}$$

Podemos escreve-lo em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dando nome aos dados, ficamos com:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Podemos trabalhar com o novo sistema em notação matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} :$$

Ficamos então com:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} :$$

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ou seja: se encontrarmos a inversa da matriz de coeficientes de um sistema de equações lineares, podemos usá-la para encontrar a solução do mesmo.

Considerando o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Encontramos $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a solução do sistema por meio de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Com solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a inversa da matriz $\mathbf{A}$, criamos uma matriz identidade de mesma dimensão de $\mathbf{A}$ e as colocamos uma ao lado da outra. Em seguida aplicamos todas as operações para transformar $\mathbf{A}$ em $\mathbf{I}$. Ao final, a matriz $\mathbf{I}$ se transforma na $\mathbf{A}^{-1}$. Ou seja:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}$$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Adicionando a identidade:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left[\begin{array}{cccc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Agora aplicamos as operações para transformar $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$

- $L_1 \rightarrow L_1/10$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & -2/10 & -2/10 & 1 \end{array} \right]$$

- $L_2 \to L_2/(-2/10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- $L_1 \to L_1 - 1/10L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ou seja, encontramos a inversa:

$$\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

De forma que que inversa fica:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

E o que tudo isso tem a ver com o método **Simplex**?

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$\begin{array}{lllllll} \text{min z} = -x_1 & -2x_2 & & & & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Colocando os dados em forma tabular:

Note que temos uma matriz identidade ($\mathbf{I}$) logo no inicio do quadro (isso **sempre** vai ocorrer, seja com variáveis normais ou artificias).

Note também que x_3, x_4 e x_5 são as variáveis básicas da solução inicial.

Seja $\mathbf{B}$ a submatriz composta pelas colunas das variáveis básicas (da tabela original) percebemos que a submatriz referente às colunas das variáveis de folga na tabela atualizada é de fato a inversa dessa submatriz (nesse caso isso é óbvio, pois $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, de forma que $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Variáveis básicas

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações para chegar na inversa: -

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

Continuando com o Simplex, selecionamos a variável x_2 para entrar na base, e x_5 para sair, ou seja, fazemos o pivoteamento no elemento $a_{4,2} = 1$.

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

3. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

A nova tabela fica então:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Com variáveis básicas x_3, x_4 e x_2:

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações para chegar na inversa:
1. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

Continuando com o Simplex, selecionamos a variável x_1 para entrar na base e x_3 para sair, com elemento pivô $a_{2,1} = 2$.

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$
3. $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

A nova tabela fica então (tabela ótima):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Com variáveis básicas x_1, x_4 e x_2:

Tabela original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Colunas das vb

Variáveis básicas

Tabela atual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Operações para chegar na inversa:

1. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$
3. $L_4 \leftarrow L_4/2$
4. $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
5. $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$

Conclusão

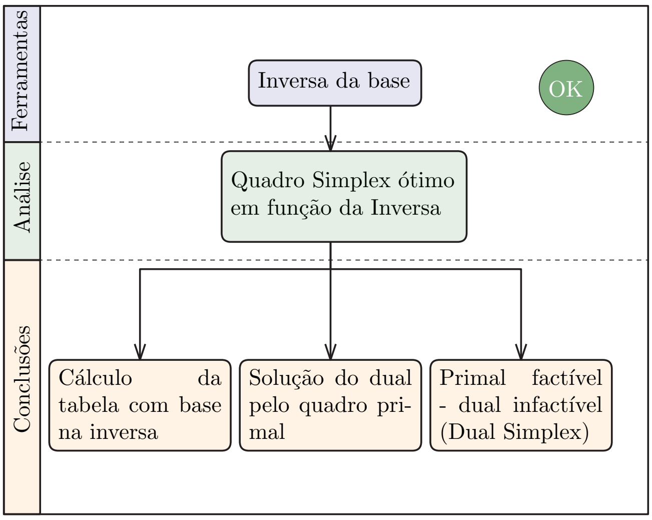
As operações realizadas na tabela Simplex (pivoteamento), são exatamente as mesmas que realizamos para transformar uma matriz (no caso do Simplex, uma coluna por vez) na identidade. Ainda, como iniciamos a tabela com uma matriz identidade (**I**), *sempre* teremos a inversa da matriz composta pelas colunas das variáveis básicas (no problema original), na tabela atualizada, representada nas colunas que na primeira iteração formavam a identidade.

Atenção

Sempre teremos uma matriz identidade ao inicio do Simplex (onde a inversa fica armazenada), porém em alguns casos podemos perdê-la ao removê-la da tabela, como no caso da Fase I. A matriz identidade inicial é formada pelas variáveis artificiais, que são removidas após o fim da Fase I. Dessa forma, se a inversa precisar ser usada, **não excluir as colunas das variáveis artificiais ao fim da Fase I**.

Agora que mostramos que a inversa é usada na resolução de sistemas lineares, e que de fato ela também está presente na tabela Simplex, podemos usá-la para encontrar o quadro ótimo Simplex de forma genérica. Com esse quadro podemos **confirmar três hipóteses importantíssimas a respeito da solução ótima do Simplex**:

1. Podemos calcular todos os dados da tabela Simplex somente sabendo quais são as variáveis básicas (usando a inversa).
2. Sempre que encontramos a solução ótima do problema **primal**, também obtemos a solução ótima do **dual**.
3. Durante a resolução do primal, as soluções do dual são infactíveis e as do primal factíveis. Na otimalidade, ambas são factíveis.



2 Quadro Simplex ótimo e a Inversa

Considere o modelo de PL na forma padrão, escrito em notação matricial:

$$\begin{aligned} \min\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

1. $\mathbf{c}^T$ é o vetor dos coeficientes da função objetivo.
2. $\mathbf{A}$ é a matriz tecnológica.
3. $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Por exemplo, para o seguinte modelo na forma padrão, quem seriam os termos A, c^T, b e x^T?

$$\begin{array}{llllll} \min\ z = -x_1 & -2x_2 & & & & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4 \end{array}$$

Temos que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o modelo reescrito na forma matricial fica:

$$\mathbf{min}\ z = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x}$$

Sujeito a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

Podemos reescrever o modelo separando as variáveis e coeficientes básicos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = & \ \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

1. $\mathbf{c}_B^T$ e $\mathbf{c}_N^T$ são os vetores dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas na função objetivo.
2. x_B e x_N são as variáveis básicas e não básicas.
3. $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ são as matrizes dos coeficientes referentes às variáveis básicas e não básicas.
4. $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Quem são então os termos básicos ($\mathbf{c}_B^T$,$\mathbf{B}$, x_B) e não básicos ($\mathbf{c}_N^T$,$\mathbf{N}$, x_B)?

$$\textbf{min } z = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Quem são então os termos básicos ($\mathbf{c}_B^T$,$\mathbf{B}$, x_B) e não básicos ($\mathbf{c}_N^T$,$\mathbf{N}$, x_B)?

$$\textbf{min } z = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o modelo reescrito na forma matricial fica:

$$\textbf{min } z = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}}_{c_N^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N}$$

Sujeito a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

Considerando então o sistema escrito com os termos básicos e não básicos separados:

$$\begin{aligned} \text{min z} = {} & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos reescrever o problema de forma que a função objetivo seja considerada uma restrição do sistema:

$$\begin{aligned} (-z) + {} & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = 0 \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N \;\; = \mathbf{b} \end{aligned}$$

O que devemos fazer para esse sistema ser canônico em relação às variáveis básicas (x_N)?

1. Todas as variáveis básicas devem ter coeficiente 1 em suas linhas e zero em todas as outras.

Isso é o equivalente a termos uma matriz identidade multiplicando as v. básicas, para conseguir isto, basta multiplicar a segunda equação matricial por B^{-1}, obtendo:

$$\begin{aligned} (-z) + {} & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N && = 0 \\ & \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N && = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (-z) + {} & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N && = 0 \\ & \mathbf{I}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N && = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Ainda, para deixarmos o sistema canônico em relação a x_B é necessário que:

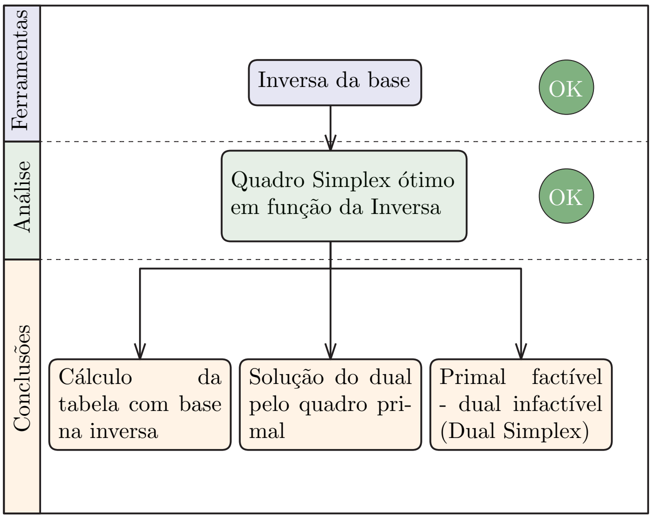
2. Os termos na função objetivo referentes às variáveis básicas ($\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$) sejam zerados.

Podemos fazer isso multiplicando a linha 2 por $\mathbf{c}_B^T$ e subtraindo da linha 1, ficamos com:

$$\boxed{\begin{aligned} (-z) + {} & & (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N & = -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ & \mathbf{I}\mathbf{x}_B + & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N & = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}}$$

Se escrevermos na forma tabular do Simplex, temos que (omitindo a coluna $-z$):

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$



Com a tabela genérica, temos uma forma de, a partir de uma base, recuperar todos os coeficientes da tabela Simplex para aquela determinada iteração do algoritmo. Considere o seguinte modelo na forma padrão canônica. Sabendo que a solução ótima tem variáveis x_1,x_4 e x_2 na base, quais os valores da tabela Simplex final?

$$\begin{array}{llllll}
\min -x_1 & -2x_2 & & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 6 \\
x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 4 \\
-x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
-x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Coletando os dados necessários do problema original:

$$\begin{array}{llllll}
\min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\
x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\
-x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4
\end{array}$$

1. $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ e $x_N^T = (x_3, x_5)$

2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$ e $\mathbf{c}_N^T = [0, 0]$

3. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $b^T = [6, 4, 4]$

O primeiro passo é calcular a matriz inversa de B (base):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando os coeficientes da função objetivo referentes às variáveis não básicas ($x_N = (x_3, x_5)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	?	?	?	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Atualizando os coeficientes da função objetivo referentes às variáveis não básicas ($x_N = (x_3, x_5)$:

$$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_N^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando os coeficientes da matriz **N**.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	?	?	?	?
x_4	?	?	?	?	?	?
x_2	?	?	?	?	?	?

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Substituindo no quadro temos:
Pela tabela, temos que:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	1/2	?	-1/2	?
x_4	?	?	0	?	1	?
x_2	?	?	1/2	?	1/2	?

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Atualizando a matriz das variáveis básicas e os coeficientes na função objetivo (nenhum cálculo é necessário, 0 na fo e a identidade na matriz).OBS: Lembre-se que as colunas da identidade seguem a ordem das variáveis (x_1, x_4, x_2).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	?	?	3/2	?	1/2	?
x_1	?	?	1/2	?	-1/2	?
x_4	?	?	0	?	1	?
x_2	?	?	1/2	?	1/2	?

Substituindo no quadro temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	?
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	?
x_4	0	0	0	1	1	?
x_2	0	1	1/2	0	1/2	?

Pela tabela, temos que:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Finalmente, atualizando os valores de $-z$ e b.

$$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = -\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T}\underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}}_{b} = 11$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	?
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	?
x_4	0	0	0	1	1	?
x_2	0	1	1/2	0	1/2	?

$$\mathbf{B^{-1}b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

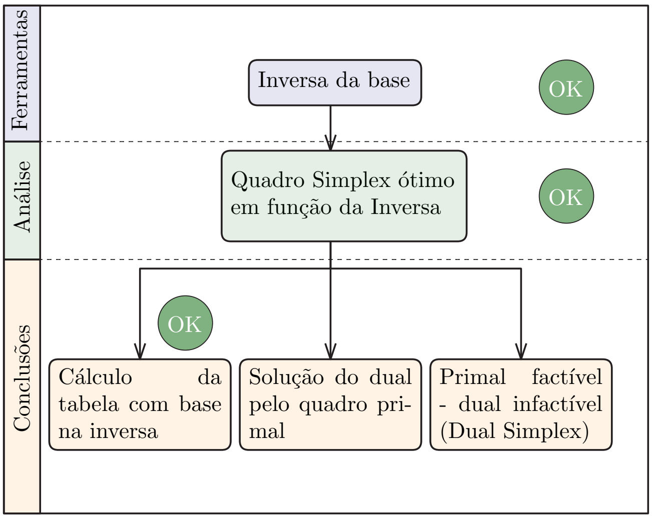
Substituindo no quadro temos: Note que conseguimos recuperar todas as informações do quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1/2	5

final, usando somente os dados iniciais e a inversa da base ótima (compare com o quadro do inicio da apresentação).

3 Conclusão

Com as relações matemáticas da tabela, conseguimos reconstruir o quadro Simplex referente a qualquer conjunto de variáveis básicas (com colunas = B), basta encontrarmos a inversa da base (B^{-1}).


Ferramentas
Análise
Conclusões
Inversa da base
OK
Quadro Simplex ótimo em função da Inversa
OK
OK
Cálculo da tabela com base na inversa
Solução do dual pelo quadro primal
Primal factível - dual infactível (Dual Simplex)