L7 - A Inversa no Simplex & Dual Simplex

1 A inversa no simplex

1. Um modelo de PL na forma padrão pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} \text{min z} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainda, considerando um conjunto de variáveis básica em uma solução qualquer, podemos reescrever esse modelo separando todos os coeficientes referentes às variáveis básicas (B) e não básicas (N), como:

$$\begin{aligned} \text{min z} &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

- $\mathbf{c}_B^T$ e $\mathbf{c}_N^T$ são os vetores dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas na função objetivo.
- $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ são as submatrizes da matriz tecnológica, referentes às colunas das variáveis básicas e não básicas.
- $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Considere o modelo de PL a seguir, e faça o que se pede:

$$\begin{aligned} \text{max } z &= 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Escreva o modelo na forma matricial (encontre os elementos c^T,$\mathbf{x}$,$\mathbf{A}$,$\mathbf{b}$ e reescreva o sistema com eles $\rightarrow$ primeira forma matricial acima).
RESPOSTA:
Para encontrar esses valores o modelo precisa estar na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min } z &= -5x_1 + -2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 + x_3 \quad &= 60 \\ 2x_1 + x_2 + \quad x_4 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o modelo na forma matricial:

$$\mathbf{min\ z =} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b) Considerando a solução básica $x_B^T = (x_1, x_4)$, reescreva o sistema na forma matricial com a separação das variáveis básicas (segunda forma matricial acima).
RESPOSTA:

Assim, temos que:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} c_B^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} c_N^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o modelo na forma matricial:

$$\mathbf{min\ z =} \begin{bmatrix} -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c) A solução básica $x_B^T = (x_1, x_4)$ é factível? (use a inversa de B para verificar os valores atualizados de **b** , e verifique se eles são ≥ 0).
RESPOSTA:
Primeiro calculamos a inversa da base, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora podemos calcular o valor atualizado de b pela tabela genérica (que fornece o valor das variáveis básicas):

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $x_B = (x_1, x_2)^T = (6, -6)$. Como $x_2 \leq 0$ a solução *não é factível*.

(d) Sabe-se que a solução ótima é dada por $x_B^T = (x_3, x_1)$. Reconstrua todo o quadro Simplex com essa informação (use a inversa de B para recuperar todo o quadro).

RESPOSTA:

Com $x_B^T = (x_3, x_1)$, temos os seguintes dados:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} c_B^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} c_N^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos a inversa da base:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Podemos recuperar os valores da tabela final com:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Tabela 1: Quadro Simplex genérico

Como sabemos que $x_B^T = (x_3, x_1)$, inicialmente temos a seguinte Tabela (Tabela 2):

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	??	0	??	??
x_3	0	??	1	??	??
x_1	1	??	0	??	??

Tabela 2: Tabela inicial

Calculando o valor N atualizado:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Atualizando os valores no quadro Simplex (Tabela 3):
Calculando os valores atualizados de c_N^T:

$$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	??	0	??	??
x_3	0	7	1	-5	??
x_1	1	1/2	0	1/2	??

Tabela 3: Inserindo N

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	??
x_3	0	7	1	-5	??
x_1	1	1/2	0	1/2	??

Tabela 4: Inserindo c_N^T

Atualizando a Tabela (Tabela 4)
Calculando os valores atualizados de b:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Atualizando na Tabela temos (Tabela 5): Finalmente calculamos o valor de -z atualizado:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	??
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 5: Inserindo b

$$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = -\begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \end{bmatrix} = 15$$

Assim, o quadro completo fica (Tabela 6):

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	15
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 6: Inserindo -z

2. Uma indústria de móveis produz 4 tipos de mesas. Cada mesa passa pela carpintaria e pela finalização. O número de homens/hora necessários em cada etapa, bem como as suas disponibilidades e lucros pela venda unitária são mostrados na Tabela 7. Considere o quadro

	Mesa 1	Mesa 2	Mesa 3	Mesa 4	Disponibilidade
Carpintaria	4	9	7	10	6000
Finalização	1	1	3	40	4000
Lucro (R$/un.)	12	20	18	40	

Tabela 7: Horas/homem necessárias para produção das mesas em cada operação

Simplex (incompleto) em uma determinada iteração para esse problema de PL como mostrado na Tabela 8, sendo $x_1, ..., x_4$ as quantidades produzidas das mesas 1 a 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$
VB	??	??	??	??	??	??	??
x_2	3/7	1	5/7	0	4/35	-1/35	??
x_4	1/70	0	2/35	1	-1/350	9/350	??

Tabela 8: Horas/homem necessárias para produção das mesas em cada operação

(a) Considerando a produção das mesas dos tipos 2 e 4, quais deveriam ser as suas quantidades produzidas?
RESPOSTA:
Podemos verificar as quantidades produzidas de x_2 e x_4 calculando os valores atualizados de b com x_2 e x_4 na base. Para isso usamos a fórmula:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{1}$$

De forma que precisamos da matriz B^{-1} referente à base $x_b^T = (x_2, x_4)$. Como temos a tabela Simplex (Tabela 15) com $x_b^T = (x_2, x_4)$, sabemos que B^{-1} é a submatriz abaixo das variáveis de folga no quadro atualizado, ou seja:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/35 & -1/35 \\ -1/350 & 9/350 \end{bmatrix}$$

De forma que os valores de $x_b^T = (x_2, x_4)$ ficam:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4/35 & -1/35 \\ -1/350 & 9/350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000/7 \\ 600/7 \end{bmatrix}$$

(b) (0.7) A solução com a produção das mesas dos Tipos 2 e 4 é ótima? Argumente a sua resposta.
RESPOSTA:
Para verificar se uma solução é ótima, nenhum custo reduzido (valores da função objetivo) atualizado deve ser < 0, de forma que precisamos usar a fórmula:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \tag{2}$$

Sabemos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/35 & -1/35 \\ -1/350 & 9/350 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} c_B^T = [-20, -40], c_N^T = [-12, -18, 0, 0]$$

Portanto, os custos atualizados ficam:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = [-12, -18, 0, 0] - [-20, -40] \begin{bmatrix} 4/35 & -1/35 \\ -1/350 & 9/350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= [-20/7, -10/7, 76/35, 16/35]$$

Assim, como existem custos negativos, sabemos que a solução não é ótima com $x_b^T = (x_2, x_4)$.

2 Dual Simplex

3. Uma empresa produz dois produtos 1 e 2, e ambos são produzidos a partir de duas matérias primas, A e B. Uma unidade do produto 1 demanda 2 unidades da mp A e 4 da B. Já uma unidade do produto 2 demanda 1 unidade da MP A e 5 da B. Existe um estoque de 5 unidades de A e 15 de B. Cada unidade do produto 1 é vendida a 10 reais e cada unidade do produto 2 a 7. Faça o que se pede:

   (a) Encontre a solução ótima do problema pelo método Simplex e mostre a solução na região factível (modelo já resolvido na lista de Simplex Fase 2).
   RESPOSTA:
   Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min\ z = -10x_1 - 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + \quad x_4 = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-10	-7	0	0	0
x_3	2	1	1	0	5
x_4	4	5	0	1	15

Tabela 9: Ex. 3a tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	-2	5	0	25
x_1	1	1/2	1/2	0	5/2
x_4	0	3	-2	1	5

Tabela 10: Ex. 3a iteração 1

   Solução ótima com valores $x_B = (x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$ e $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo -85/3 (voltando ao problema de maximização o custo é de 85/3). O caminho simplex percorrido foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/2, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$, como mostrado na Figura 1.

   (b) A empresa teve o espaço físico reduzido, de forma que consegue armazenar no máximo 1 unidade do produto 1. A solução ótima encontrada anteriormente continua ótima? Mostre

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	0	11/3	2/3	85/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	5/3

Tabela 11: Ex. 3a tabela iteração 2

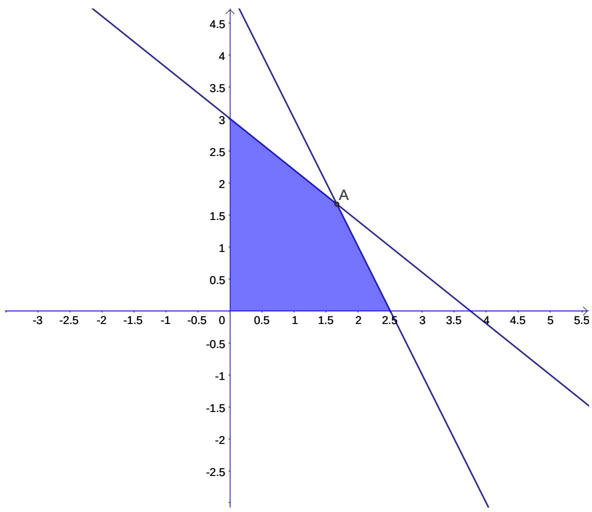

Figura 1: Solução ótima original

graficamente (represente a nova região factível). Se ela não continuar ótima, reotimize o problema usando o método dual Simplex.

RESPOSTA:

A nova região factível é dada pela Figura 2. Pela Figura percebemos que a solução ótima anterior não é mais factível. Inserindo a nova restrição (com a variável de folga x_5):

$$x_1 + x_5 = 1$$

Adicionando a nova restrição no quadro ótimo anterior, temos a Tabela 12, que não está na forma canônica em relação a x_1. Realizando a operação $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ obtemos a tabela canônica 13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	11/3	2/3	0	85/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	0	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	5/3
x_5	1	0	0	0	1	1

Tabela 12: Ex. 3a inserção da nova restrição

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	11/3	2/3	0	85/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	0	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	5/3
x_5	0	0	-5/6	1/6	1	-2/3

Tabela 13: Ex. 3a forma canônica

Assim, a tabela está canônica, temos $b \leq 0$ e $c \geq 0$, de forma que o método Dual simplex

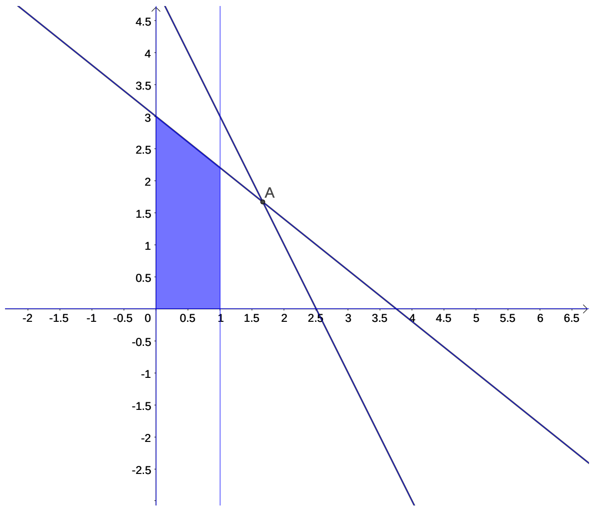

Figura 2: Solução infactível

pode ser aplicado. Selecionando a variável x_5 para sair da base (b = -5) e x_3 para entrar ($\frac{11/3}{-5/6}$), temos o elemento pivô a_43. Realizando o pivoteamento obtém-se a Tabela 14, com a nova solução ótima:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	0	7/5	22/5	127/5
x_1	1	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1/5	-4/5	11/5
x_3	0	0	1	-1/5	-6/5	4/5

Tabela 14: Ex. 3a solução Dual-Simplex ótima

4. Considere o modelo do sapateiro, dado por:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

Cujo quadro Simplex ótimo é dado pela Tabela 15
O sapateiro fechou um contrato com um cliente que exige que a quantidade de sapatos + cintos seja de exatamente 2 unidades.

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	15
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 15: Tabela ótima modelo do sapateiro

(a) A solução ótima atual que o sapateiro possui satisfaz essa nova restrição? Mostre graficamente.

RESPOSTA:

A nova restrição não satisfaz a solução ótima atual, como mostrado na Figura 3. A região factível do problema original é mostrada em azul claro, e a nova região factível é dada pela reta ligando o ponto A e B.

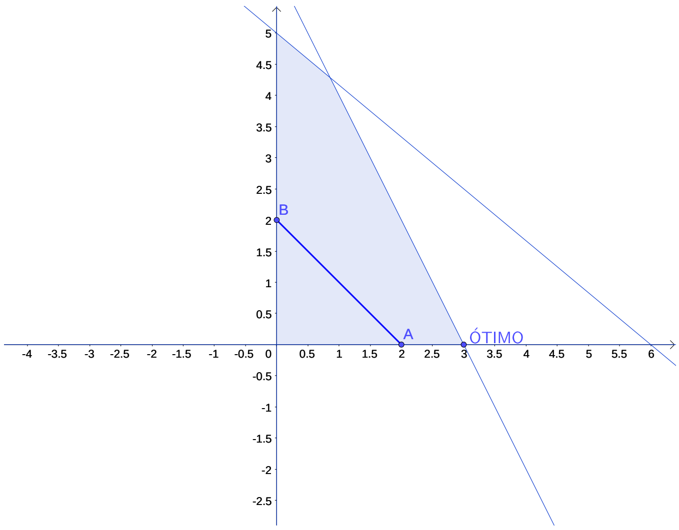

Figura 3: Solução ótima antiga e nova restrição - sapateiro

(b) Encontre a nova solução ótima a partir da antiga usando o método dual Simplex. DICA: Lembre-se que uma equação pode ser escrita como duas inequações, use essas inequações para dar inicio no dual Simplex:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{é equivalente à:} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

RESPOSTA:

Primeiramente adicionamos as duas novas restrições com as suas respectivas variáveis de folga (equivalentes a restrição original) no quadro ótimo, de forma que obtemos o quadro da Tabela 16. Com a inserção das restrições o quadro deixa de estar na forma canônica. Realizamos as seguintes operações $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ e $L_5 \leftarrow L_5 + L_3$ para obter o novo quadro na forma canônica mostrado na Tabela 17.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	0	1/2	0	5/2	0	0	15
x_3	0	7	1	-5	0	0	30
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	3
??	1	1	0	0	1	0	2
??	-1	-1	0	0	0	1	-2

Tabela 16: Tabela inicial não canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	0	1/2	0	5/2	0	0	15
x_3	0	7	1	-5	0	0	30
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	3
x_5	0	1/2	0	-1/2	1	0	-1
x_6	0	-1/2	0	1/2	0	1	1

Tabela 17: Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	0	3	0	0	5	0	10
x_3	0	2	1	0	-10	0	40
x_1	1	1	0	0	1	0	2
x_4	0	-1	0	1	-2	0	2
x_6	0	0	0	0	1	1	0

Tabela 18: Iteração 1 (ótima) modelo do sapateiro

Portanto, a nova solução ótima é $(x_1, x_2)^T = (2, 0)$, com lucro de 10, como mostrado no ponto A da Figura 3.

5. O método dual Simplex pode ser utilizado para encontrar a solução de um PL quando não temos uma solução inicial factível, ou seja, aplicamos o Dual-Simplex ao invés do método das variáveis artificiais (nem sempre isso é vantajoso ou possível, cada problema deve ser avaliado isoladamente). Considerando o modelo de PL:

$$\begin{array}{lr} \min & Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito à} & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{array}$$

Encontre a solução ótima por meio do método dual Simplex, e em seguida represente a região factível e a solução ótima graficamente.
RESPOSTA:

O modelo na forma padrão fica:

$$\begin{array}{lr} \min & Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito à} & x_1 + x_2 - x_3 \quad = 10 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{array}$$

As premissas para aplicarmos o Dual-Simplex são:

(a) A tabela está na forma canônica.
(b) Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual.

(c) Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal.

A tabela não está na forma canônica em relação às variáveis x_3 e x_4 (condição a), para isso basta multiplicarmos a restrição 1 por -1. Os coeficientes da fo já são todos positivos (condição b), e ao multiplicarmos a primeira restrição por -1 geramos um valor de $b \leq 0$, de forma que podemos aplicar o método dual Simplex. A tabela canônica após as transformações é mostrada na Tabela 19, após isso o método é aplicado normalmente (Tabela 20, 21 e 22).

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	2	3	0	0	0
x_3	1	1	-1	0	10
x_4	2	1	0	1	16

Tabela 19: Tabela inicial não canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	2	3	0	0	0
x_3	-1	-1	1	0	-10
x_4	2	1	0	1	16

Tabela 20: Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1	2	0	-20
x_1	1	1	-1	0	10
x_4	0	-1	2	1	-4

Tabela 21: Iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	0	4	1	-24
x_1	1	0	1	1	6
x_2	0	1	-2	-1	4

Tabela 22: Iteração 2 (ótimo)

Dessa forma temos a solução ótima com $(x_1, x_2)^T = (6, 4)$ e custo $z = 24$. A região factível junto ao ponto ótimo é mostrado na Figura 4

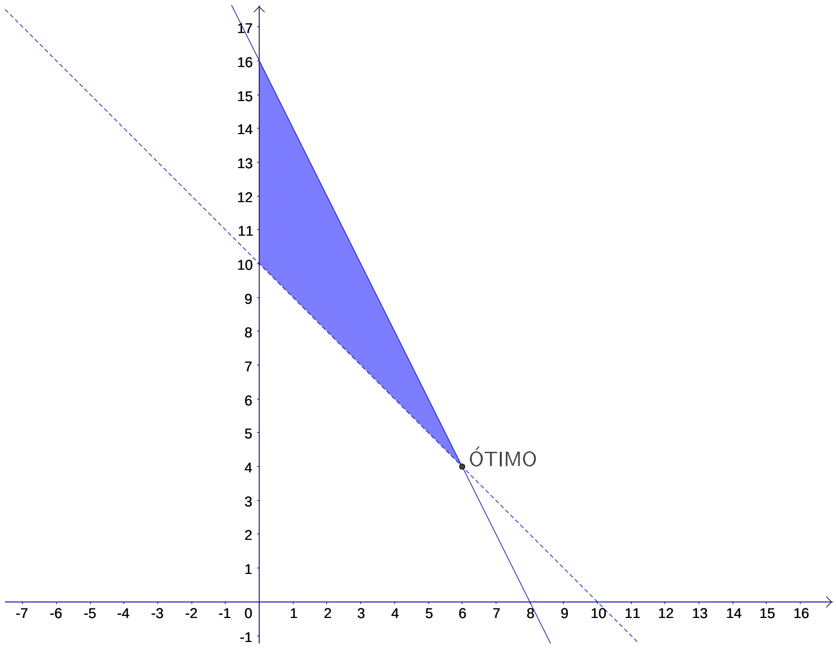

Figura 4: Solução ótima

.