Simplex Fase II

OBS: Diversos exercícios dessa lista podem ter suas soluções verificadas usando o software GUSEK

1. O que é uma solução básica? O que é uma solução básica factível?
   RESPOSTA:
   Uma solução básica é aquela em que $n - m$ variáveis possuem valores $= 0$ (chamadas de x_N, ou *não básicas*), e m variáveis possuem valores diferentes de 0 (x_B, ou básicas). Se todos os valores das variáveis básicas $x_B \geq 0$, a solução é dita *básica factível*.
2. Para cada um dos modelos de PL a seguir, escreva-o na forma padrão.

   (a)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 &\geq -60 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   RESPOSTA:
   Multiplicando a função objetivo por -1 e deixando na forma de minimização. Multiplicando a primeira restrição por -1 para deixar 60 positivo e adicionando a variável de folga x_3, o modelo fica:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{min z} = & -5x_1 & - & 2x_2 & & & \\ & -10x_1 & - & 12x_2 & + & x_3 & = 60 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & = 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 10x_1 + 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5000 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 15000 \\ x_1 \geq 0, & \ x_2 \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

   RESPOSTA:
   Multiplicando a função objetivo por -1 para deixar na forma de minimização. Como x_2 é irrestrito, fazemos a transformação $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Adicionando uma variável de folga na primeira restrição (x_4) e subtraindo uma da segunda (x_5) para deixá-las na forma de igualdade, temos o modelo:

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{min z} = & -10x_1 & - & 7(x_2^+ - x_2^-) & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & (x_2^+ - x_2^-) & + & x_3 & + & x_4 & & & = 5000 \\ & 4x_1 & + & 5(x_2^+ - x_2^-) & & & & & - & x_5 & = 15000 \\ & x_1 & , & x_2^+, x_2^- & , & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + 3x_2 \\
x_1 + 3x_2 \geq 9 \\
-x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
x_1 + x_2 \leq 6 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

RESPOSTA:
Removendo uma variável de folga da primeira inequação (x_3) e adicionando outras duas nas restrições 2 e 3 (x_5 e x_5), temos o modelo:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
\text{min z} = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & \\
& x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & = 9 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = 4 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = 6 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

3. Certo problema de programação linear que envolve 2 variáveis possui a região factível indicada na Figura 1. O objetivo é maximizar o lucro total das duas variáveis. O lucro unitário para

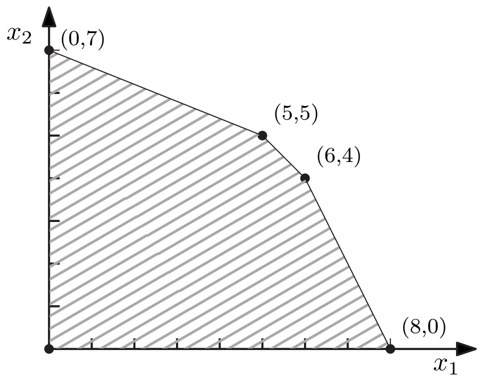

Figura 1: Região factível

cada unidade de x_1 é de R$1.00 e o lucro unitário para cada unidade de x_2 é R$2.00.

(a) (0.5) Calcule o lucro total para cada solução básica factível. Use esta informação para encontrar a solução ótima. **RESPOSTA:**
As soluções básicas factíveis são dadas pelos pontos de interseção na região factível. Os pontos com os custos são dados por:
- (0,0): custo = 0
- (0,7): custo = 14
- (5,5): custo = 15
- (6,4): custo = 14
- (8,0): custo = 8

Temos que a solução ótima é dada por $(x_1, x_2) = (5, 5)$, com lucro de 15.

(b) (0.5) Identifique a sequência de soluções básicas factíveis examinadas pelo método simplex para chegar a uma solução ótima (sem aplicar o método). Por que esse caminho ocorre?
RESPOSTA:
O caminho seguido pelo Simplex é: $(0,0) \rightarrow (0,7) \rightarrow (5,5)$. Esse caminho é seguido pois na primeira iteração a variável x_2 é a mais vantajosa para entrar na base.

4. Para facilitar os cálculos, os coeficientes de um modelo de PL são colocados em uma tabela chamada *tabela simplex*. É muito importante entendermos os elementos dessa tabela. Considerando a tabela simplex 1 após um determinado número de iterações do algoritmo, responda o que se pede:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-7/2	0	3/2	0	0	6
???	-1/2	1	1/2	0	0	2
???	2	0	-1	1	0	2
???	5/2	0	-3/2	0	1	3

Tabela 1: Tabela simplex

(a) Quais são e quais os valores das variáveis básicas da tabela (células com ???)? **RESPOSTA:**
As variáveis básicas podem ser encontradas pela submatriz identidade na matriz dos coeficientes. Para cada linha dessa identidade, a variável que possui valor 1 é a variável básica da linha. No caso da tabela, temos as variáveis básica, e seus valores, na seguinte ordem:
- $x_2 = 2$
- $x_4 = 2$
- $x_5 = 3$

(b) Qual o valor da função objetivo nessa iteração?
RESPOSTA:
O valor na última coluna da tabela fornece o valor de -z, de forma que a função objetivo nessa iteração é -6.

(c) Existe alguma variável que pode entrar na base e melhorar a função objetivo? Qual?
RESPOSTA:
As variáveis candidatas a entrar na base são aquelas em que os coeficientes na função objetivo são negativos ($c \leq 0$). No caso temos que c_1, referente a variável x_1 é -7/2, o que a faz uma candidata a entrar na base.

(d) Se existir uma variável candidata a entrar na base, quais serão as candidatas a deixar a base?
RESPOSTA:
Considerando que x_1 é um candidato a entrar na base, os candidatos a sair da base são definidos pela razão entre os coeficientes de b e da coluna referente a variável que entra, **que são** ≥ 0. Nesse caso, x_2 não é um candidato a sair da base, pois seu coeficiente na coluna de x_1 é -1/2. Os candidatos são x_4 e x_5.

5. Considere o seguinte conjunto de restrições de um modelo de programação linear (já na forma

padrão com as variáveis de folga):

$$\begin{aligned}
5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= 20 \\
x_1 \quad - x_2 \quad + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2 &\in R^+
\end{aligned}$$

(a) Nota-se que o sistema não está na forma canônica. Verifique se a solução com variáveis básicas $x_B = (x_5, x_1)$ é uma solução básica factível.
RESPOSTA:
Para que o sistema fique na forma canônica em relação a x_1 e x_5, os elementos destacados abaixo devem ser $= 1$, e os outros das mesmas colunas iguais a zero:

$$\begin{aligned}
5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= 20 \\
x_1 \quad - x_2 \quad + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2 &\in R^+
\end{aligned}$$

Podemos aplicar as seguintes operações nas linhas do sistema para isso:
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2 / -4$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$

Ficamos então com o sistema equivalente:

$$\begin{aligned}
-1/4x_2 + 3x_3 - 3/4x_4 + x_5 &= 5 \\
x_1 - 3/4x_2 \quad + 2x_3 - 1/4x_4 \quad &= 3 \\
x_1, x_2 &\in R^+
\end{aligned}$$

Assim, temos que a solução básica com $x_B = (x_5, x_1) = (5, 3)$ é factível, pois $x_B \geq 0$.

(b) Verifique se a solução com variáveis básicas $x_B = (x_1, x_2)$ é uma solução básica factível.
RESPOSTA:
Para que o sistema fique na forma canônica em relação a x_1 e x_2, os elementos destacados abaixo devem ser $= 1$, e os outros das mesmas colunas iguais a zero:

$$\begin{aligned}
5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= 20 \\
x_1 \quad - x_2 \quad + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2 &\in R^+
\end{aligned}$$

Podemos aplicar as seguintes operações nas linhas do sistema para isso:
- $L_1 \leftarrow L_1/5$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2/(-1/5)$
- $L_1 \leftarrow L_1 + (4/5)L_2$

Ficamos então com o sistema equivalente:

$$x_1 \quad + -7x_3 + 2x_4 + -3x_5 = -12$$
$$x_2 \quad - 12x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -20$$
$$x_1, x_2 \in R^+$$

Assim, temos que a solução básica com $x_B = (x_1, x_2) = (-12, -20)$ é infactível, pois $x_B < 0$.

6. Para cada um dos modelos de PL abaixo, resolva-os usando o método Simplex (usando tabelas), em seguida mostre o caminho Simplex percorrido na região factível (graficamente).

(a) (**R**)

$$\begin{aligned} \max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min\ z = -5x_1 - 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + x4 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Tabela 2: Ex. 6a tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	15
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 3: Ex. 6a iteração 1

Solução ótima com valores $x_B = (x_3, x_1) = (30, 3)$ e $x_N = (x_2, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo -15 (voltando ao problema de maximização o custo é de 15). O caminho simplex percorrido foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(x_1, x_2) = (3, 0)$.

(b) (**R**)

$$\begin{aligned} \max\ z = 10x_1 + 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min z = -10x_1 - 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + \quad x_4 &= 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-10	-7	0	0	0
x_3	2	1	1	0	5
x_4	4	5	0	1	15

Tabela 4: Ex. 6b tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	-2	5	0	25
x_1	1	1/2	1/2	0	5/2
x_4	0	3	-2	1	5

Tabela 5: Ex. 6b iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	0	11/3	2/3	85/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	5/3

Tabela 6: Ex. 6b tabela iteração 2

Solução ótima com valores $x_B = (x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$ e $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo -85/3 (voltando ao problema de maximização o custo é de 85/3). O caminho simplex percorrido foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/2, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$.

(c) (**R**)

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min z = -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Solução ótima com valores $x_B = (x_1, x_2, x_4) = (9/2, 3/2, 11/2)$ e $x_N = (x_3, x_5) = (0, 0)$ e função objetivo com custo de -27/2 (voltando ao problema de maximização o custo é de

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	3	1	0	0	9
x_4	-1	2	0	1	0	4
x_5	1	1	0	0	1	6

Tabela 7: Ex. 6c tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-7/2	0	0	3/2	0	6
x_3	5/2	0	1	-3/2	0	3
x_2	-1/2	1	0	1/2	0	2
x_5	3/2	0	0	-1/2	1	4

Tabela 8: Ex. 6c iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	7/5	-3/5	0	51/5
x_1	1	0	2/5	-3/5	0	6/5
x_2	0	1	1/5	1/5	0	13/5
x_5	0	0	-3/5	-2/5	1	11/5

Tabela 9: Ex. 6c iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	1/2	0	3/2	27/2
x_1	1	0	-1/2	0	3/2	9/2
x_2	0	1	1/2	0	-1/2	3/2
x_4	0	0	-3/2	1	5/2	11/2

Tabela 10: Ex. 6c iteração 3

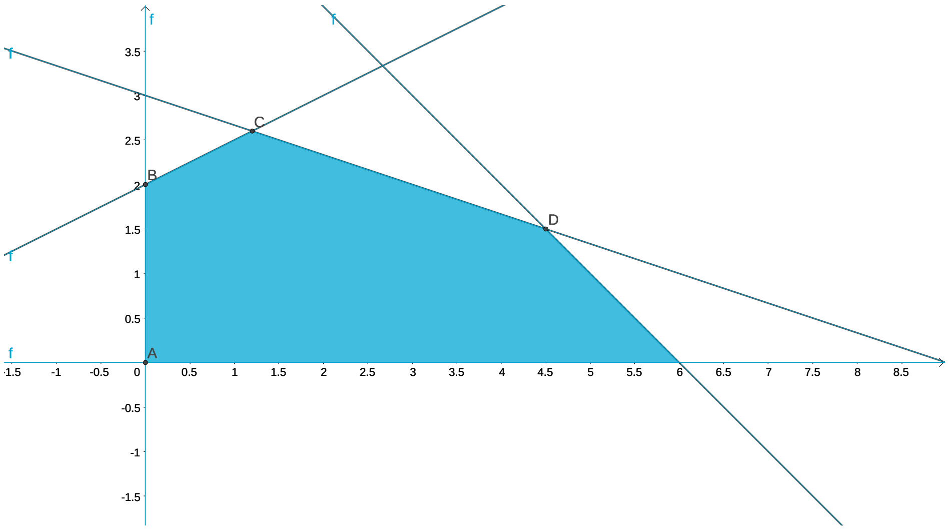

Figura 2: Caminho Simplex

27/2). O caminho percorrido pelo Simplex foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(0, 2)$,$(6/5, 13/5)$,$(9/2, 3/2)$. O caminho é mostrado na Figura 2 (caminho A,B,C,D).

7. Encontre a solução do problema a seguir, utilizando o método Simplex.

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 210 \\ x_1 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 210 \\ x_1 + x_6 = 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	-2	-3	-4	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	0	0	100
x_5	2	1	0	0	1	0	210
x_6	1	0	0	0	0	1	80

Tabela 11: Ex. 7 tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	2	1	0	4	0	0	400
x_3	1	1	1	1	0	0	100
x_5	2	1	0	0	1	0	210
x_6	1	0	0	0	0	1	80

Tabela 12: Ex. 7 tabela iteração 1

Solução ótima com valores $x_B = (x_3, x_5, x_6) = (100, 210, 80)$ e $x_N = (x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$ e função objetivo com custo -400 (voltando ao problema de maximização o custo é de 400).

8. Modele e encontre a solução do seguinte problema (lista 1). Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades e o do cinto é de 2 unidades, formular o modelo que maximize lucro por hora.
RESPOSTA:

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \qquad Z = -5x_1 + -2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R^+ \end{aligned}$$

Exercício resolvido em 6a.