Simplex fase II

Alexandre Checoli Choueiri

08/08/2023

Introdução e premissas

Premissas

O **Método Simplex** é aplicado em um sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{min z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}x = \mathbf{b} \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

E tem por objetivo encontrar valores de x que satisfaçam as equações, minimizando a função z.

Premissas

O **Método Simplex** é aplicado em um sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{min z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}x = \mathbf{b} \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

E tem por objetivo encontrar valores de x que satisfaçam as equações, minimizando a função z. O Método Simplex é composto de 2 etapas: **Simplex Fase I** e **Simplex Fase II**. Por mais contra-intuitivo que possa parecer, começaremos pelo algoritmo **Simplex Fase II**.

Premissas

Para entendermos como o algoritmo Simplex Fase II funciona, precisamos retomar o conceito de **sistemas canônicos**:

Um sistema:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

Premissas

Para entendermos como o algoritmo Simplex Fase II funciona, precisamos retomar o conceito de **sistemas canônicos**:
Um sistema:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

É dito canônico em relação às variáveis x_B, se o mesmo pode ser reescrito como:

$$\mathbf{I}x_B + \bar{\mathbf{A}}x_N = \mathbf{b}$$

Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓

Já sabemos como transformar um sistema na forma padrão:

1. Função objetivo → minimização
2. Restrições → equações
3. $b \rightarrow \geq 0$
4. $x \rightarrow \geq 0$

Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓

Sabemos que por meio do **pivoteamento** conseguimos deixar o sistema na forma canônica

$$\mathbf{I}x_B + \bar{\mathbf{A}}x_N = \mathbf{b}$$

Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓
3. O sistema deve ter uma **solução básica factível** (???).

Não sabemos o que é uma **solução básica factível**! Para continuarmos, precisamos entender o que é uma **solução básica**, e o que é uma **solução básica factível**.

Premissas

Definição

Solução básica: Uma *solução básica* de um sistema linear de equações, consiste em zerar as variáveis independentes, chamadas de variáveis não básicas ($x_N = 0$), e resolver o sistema pelas variáveis básicas (x_B). Se o sistema está na forma canônica, temos que $x_N = 0$ e $x_B = b$.

Premissas

Definição

Solução básica: Uma *solução básica* de um sistema linear de equações, consiste em zerar as variáveis independentes, chamadas de variáveis não básicas ($x_N = 0$), e resolver o sistema pelas variáveis básicas (x_B). Se o sistema está na forma canônica, temos que $x_N = 0$ e $x_B = b$.

Ou seja, se o sistema já está na forma canônica, uma **solução básica** nada mais é do que o método que já estamos usando para resolver sistemas!

$$\boxed{I \underbrace{x_B}_{b} + \bar{A} \underbrace{x_N}_{0} = b}$$

Premissas

EXEMPLO O sistema abaixo possui uma **solução básica trivial**? Se sim, indique quais são as variáveis básicas (x_B) e as não básicas (x_N), escrevendo o sistema na forma canônica.

$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = & 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = & 30 \end{array}$$

Premissas

EXEMPLO O sistema abaixo possui uma **solução básica trivial**? Se sim, indique quais são as variáveis básicas (x_B) e as não básicas (x_N), escrevendo o sistema na forma canônica.

$$
\begin{array}{llllll}
2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & +x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

se reescrevermos o sistema na forma matricial, temos:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}
$$

Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}}_{b}$$

Portanto temos as variáveis **básicas** $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e as **não básicas** $x_N^T = (x_1, x_2)$.

Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}}_{b}$$

Portanto temos as variáveis **básicas** $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e as **não básicas** $x_N^T = (x_1, x_2)$.
Para termos uma solução básica, fazemos: $x_N = 0$, resultando em $x_B = b$. Assim, a solução básica fica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

Definição

Solução básica factível: Se uma solução básica ($x_B = b$ e $x_N = 0$) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ($x_B = b \geq 0$), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

Definição

Solução básica factível: Se uma solução básica ($x_B = b$ e $x_N = 0$) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ($x_B = b \geq 0$), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

EXEMPLO A solução básica encontrada do sistema anterior é uma SBF?

Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

Definição

Solução básica factível: Se uma solução básica ($x_B = b$ e $x_N = 0$) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ($x_B = b \geq 0$), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

EXEMPLO A solução básica encontrada do sistema anterior é uma SBF?

Obtivemos a seguinte solução básica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

Como $x_B^T \geq 0$, então ela é uma SBF.

Premissas

EXEMPLO Verifique se a solução básica em relação às variáveis $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$ é uma SBF.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = & 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = & 30 \end{array}$$

Premissas

EXEMPLO Verifique se a solução básica em relação às variáveis $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$ é uma SBF.

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

Para deixar o sistema na forma canônica em relação a $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$, fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_1 \to L_1/3$
2. $L_3 \to L_3 - L_1$

Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{cccccl} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & = 40 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ -2/3x_1 & & -1/3x_3 & & +x_5 & = -10 \end{array}$$

Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{cccccc} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & = 40 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ \text{-}2/3x_1 & & \text{-}1/3x_3 & & +x_5 & = \text{-}10 \end{array}$$

Reescrevendo na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix}}_{b}$$

Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{cccccc} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & = 40 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ \text{-}2/3x_1 & & \text{-}1/3x_3 & & +x_5 & = \text{-}10 \end{array}$$

Reescrevendo na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix}}_{b}$$

Para ser uma solução básica, $x_N = 0$, o que implica $x_B = b$, com $x_B^T = (40, 40, -10)$.
Como $x_5 < 0$, a solução não é uma SBF.

A ideia geral do método

A ideia geral do método

Já entendemos todas as premissas para a execução do algoritmo (Fase II):

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓
3. O sistema deve ter uma **SBF** ✓.

A ideia geral do método

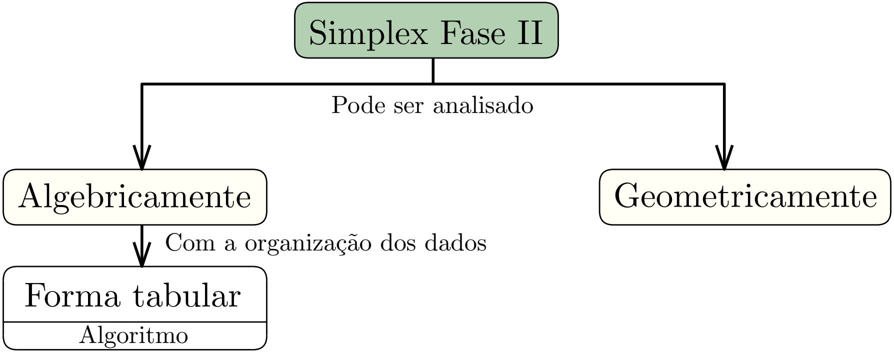
Já entendemos todas as premissas para a execução do algoritmo (Fase II):

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓
3. O sistema deve ter uma **SBF** ✓.

O algoritmo opera no sistema, alterando a SBF de uma iteração a outra, sempre melhorando (ou mantendo constante) o valor da função objetivo, até o momento em que nenhuma melhoria seja possível.

A ideia geral do método

Podemos analisar o Simplex **algébrica** e **geometricamente**. A álgebra nos fornece a intuição do algoritmo, entendida a intuição, veremos a **forma tabular** de organização dos dados, para facilitar o processamento (e o algoritmo é aplicado na tabela). A forma geométrica nos indica como o Simplex "caminha" na região factível até encontrar a solução ótima (diferente do método gráfico).



A intuição algébrica

A intuição algébrica

Considere o seguinte modelo de PL:

$$
\begin{array}{rccl}
\text{max z} = & 100x_1 & +150x_2 & \\
& 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
& x_1 & & \leq 40 \\
& & x_2 & \leq 30 \\
& x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Passando para a forma padrão, temos (sem escrever a não negatividade):

A intuição algébrica

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{rllll}
\text{max z} = & 100x_1 & +150x_2 & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
 & x_1 & & \leq 40 \\
 & & x_2 & \leq 30 \\
 & x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Passando para a forma padrão, temos (sem escrever a não negatividade):

$$\begin{array}{rllllll}
\text{min z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}$$

A intuição algébrica

Por conveniência, tratamos a função objetivo como uma **restrição**. Tratamos z como uma variável:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
z = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

A intuição algébrica

Por conveniência, tratamos a função objetivo como uma **restrição**. Tratamos z como uma variável:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
z = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

E o conjunto de equações fica então:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV}
\end{array}
$$

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{cccccccl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Já temos uma **SBF**?

A intuição algébrica

$$\begin{array}{rrrrrrl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV} \end{array}$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV}
\end{array}
$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. Já x_2 a uma taxa de -150. $\therefore$ é mais vantajoso tentar aumentar o valor de x_2 (deixaria de ser 0).

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV}
\end{array}
$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. Já x_2 a uma taxa de -150. $\therefore$ é mais vantajoso tentar aumentar o valor de x_2 (deixaria de ser 0).

Mas, até que ponto podemos aumentar x_2 ?

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{lllllll}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Uma aumento em x_2 vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de x_2 reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio x_2:

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Uma aumento em x_2 vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de x_2 reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio x_2:

$$
\begin{cases}
(II) : x_3 = 120 - 3x_2 \\
(IV) : x_5 = 30 - x_2
\end{cases}
$$

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{lllllll}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV}
\end{array}
$$

Uma aumento em x_2 vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de x_2 reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio x_2:

$$
\begin{cases}
(II) : x_3 = 120 - 3x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 40 \\
(IV) : x_5 = 30 - x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 30
\end{cases}
$$

Como x_B deve ser $\geq$ 0, impomos a condição na análise. Assim, temos o limitante de x_2 em 30 unidade (com $x_5 = 0$). Se mais for acrescentado, a variável x_5 fica negativa.

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Note que se fizermos $x_2 = 30$, $x_5 = 0$, ou seja, estamos **trocando as variáveis básicas e não básicas** da nossa solução:

A intuição algébrica

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}$$

Note que se fizermos $x_2 = 30$, $x_5 = 0$, ou seja, estamos **trocando as variáveis básicas e não básicas** da nossa solução:

$$\begin{cases} \text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2) \\ \text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \end{cases}$$

Agora, só precisamos atualizar o sistema de equações para que ele fique na **forma canônica** em relação às novas variáveis básicas $x_B^T = (x_3, x_4, x_2)$.

A intuição algébrica

$$\begin{array}{cccccccl}
-z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}$$

Como x_3 e x_4 já estão na forma correta, só precisamos executar o pivoteamento no elemento x_2 (da equação IV). Para isso fazemos as seguintes operações nas linhas:

A intuição algébrica

$$\begin{array}{rrrrrrll}
-z & -100x_1 & \boxed{-150x_2} & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}$$

Como x_3 e x_4 já estão na forma correta, só precisamos executar o pivoteamento no elemento x_2 (da equação IV). Para isso fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$

O sistema atualizado fica:

$$\begin{array}{rrrrrrll}
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}$$

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{cccccccl}
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Temos então uma nova **SBF**. Note também que podemos extrair o valor da função objetivo para essa nova solução simplesmente olhando o valor da variável z em I (não se esqueça que o valor do lado direito é o **negativo de z**!)

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Temos então uma nova **SBF**. Note também que podemos extrair o valor da função objetivo para essa nova solução simplesmente olhando o valor da variável z em I (não se esqueça que o valor do lado direito é o **negativo de z**!)

$$
\begin{cases}
\text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2), z = 0 \\
\text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5), z = -4500
\end{cases}
$$

Essa foi a primeira iteração do algoritmo Simplex Fase II. Agora, continuamos verificando se podemos melhorar a fo (minimizá-la).

A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$				$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$		$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	x_1			$+x_4$		$= 40$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na fo, de forma que escolhemos x_1. Verificando as condições para o limite no aumento de x_1, temos:

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{cccccccl}
\hline
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
& 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
& x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
& & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \\
\hline
\end{array}
$$

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na fo, de forma que escolhemos x_1. Verificando as condições para o limite no aumento de x_1, temos:

$$
\begin{cases}
(II): & x_3 = 30 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 15 \\
(III): & x_4 = 40 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 40
\end{cases}
$$

A intuição algébrica

$$\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 \quad \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 \quad \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV}
\end{array}$$

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na fo, de forma que escolhemos x_1. Verificando as condições para o limite no aumento de x_1, temos:

$$\begin{cases} (II): & x_3 = 30 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 15 \\ (III): & x_4 = 40 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 40 \end{cases}$$

Temos então um limitante para x_1 em 15 unidades. Quando x_1 atingir esse valor, x_3 passa a ser 0. Ou seja, novamente alteramos as variáveis x_B e x_N.

A intuição algébrica

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-z & -100x_1 & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Comparando as variáveis básicas e não básicas temos então:

$$
\begin{cases}
\text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \\
\text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_1, x_4, x_2), x_N^T = (x_3, x_5)
\end{cases}
$$

A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$				$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$		$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	x_1			$+x_4$		$= 40$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

Comparando as variáveis básicas e não básicas temos então:

$$\begin{cases} \text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \\ \text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_1, x_4, x_2), x_N^T = (x_3, x_5) \end{cases}$$

Para deixarmos o sistema na forma canônica em relação ao novo conjunto $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ executamos as seguintes operações:

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

A intuição algébrica

$-z$			$+50x_3$			$= 6000$	I
	x_1		$+x_3/2$		$-3/2x_5$	$= 15$	II
			$-x_3/2$	$+x_4$	$3/2x_5$	$= 25$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

$$\boxed{x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000}$$

A intuição algébrica

$-z$			$+50x_3$			$= 6000$	I
	x_1		$+x_3/2$		$-3/2x_5$	$= 15$	II
			$-x_3/2$	$+x_4$	$3/2x_5$	$= 25$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Se olharmos a equação I, vemos que não existe mais nenhuma variável que ao ser incrementada decrementa o valor de z, **portanto, a solução atual é ótima**!

A intuição algébrica

$-z$			$+50x_3$			$= 6000$	I
	x_1		$+x_3/2$		$-3/2x_5$	$= 15$	II
			$-x_3/2$	$+x_4$	$3/2x_5$	$= 25$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

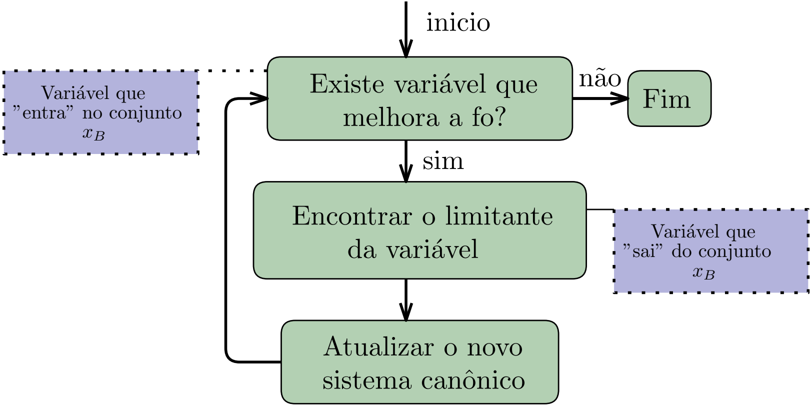
Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Se olharmos a equação I, vemos que não existe mais nenhuma variável que ao ser incrementada decrementa o valor de z, **portanto, a solução atual é ótima**!
OBS: Lembre que, como a função objetivo original era de maximização, precisamos inverter o sinal do custo novamente, sendo que o **valor da função objetivo é de 6000**.

A intuição algébrica

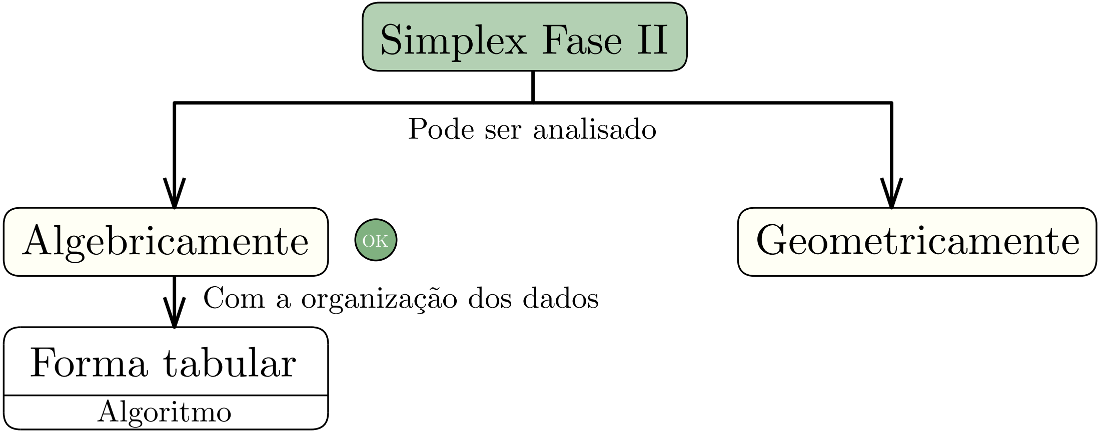
Essa é a **álgebra** por trás do método Simplex Fase II. As etapas que executamos podem ser visualizadas como um fluxograma na imagem abaixo.



A intuição algébrica

Embora esse **já seja o algoritmo Simplex Fase II**, para aplicarmos de forma sistemática e algorítmica (sequência de passos), é conveniente olhar somente para os coeficientes das equações, e escrevê-las de uma forma que fique evidente a cada passo **quais são as variáveis básicas e as não básicas**.

A intuição algébrica



Simplex na forma tabular

Simplex na forma tabular

Por conveniência podemos escrever os dados do sistema canônico inicial (já na forma padrão) em uma tabela com os coeficientes das variáveis. O sistema original é:

$$\begin{aligned} \text{min z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

E a tabela de dados fica na forma:

VB	-z	x_1	x_2	...	x_n	b
	1	c_1	c_2	...	c_n	-z
x_B	0	a_1	a_2	...	a_n	b

Simplex na forma tabular

Por conveniência podemos escrever os dados do sistema canônico inicial (já na forma padrão) em uma tabela com os coeficientes das variáveis. O sistema original é:

$$
\begin{aligned}
\text{min z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

E a tabela de dados fica na forma:

	VB	-z	x_1	x_2	...	x_n	b	← cabeçalho
		1	c_1	c_2	...	c_n	-z	← coef. da fo
variáveis atualmente em x_B →	x_B	0	a_1	a_2	...	a_n	b	← vetor b

↑ colunas da matriz A

Simplex na forma tabular

EXEMPLO Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{min z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}$$

Simplex na forma tabular

EXEMPLO Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\text{min z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
& 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
& x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
& & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

O modelo fica da forma:

VB	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	-100	-150	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	120
x_4	0	1	0	0	1	0	40
x_5	0	0	1	0	0	1	30

Simplex na forma tabular

EXEMPLO Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{min z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

Na prática, não usamos a coluna de -z (pois z **sempre** é uma variável básica).

VB	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	-100	-150	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	120
x_4	0	1	0	0	1	0	40
x_5	0	0	1	0	0	1	30

Simplex na forma tabular

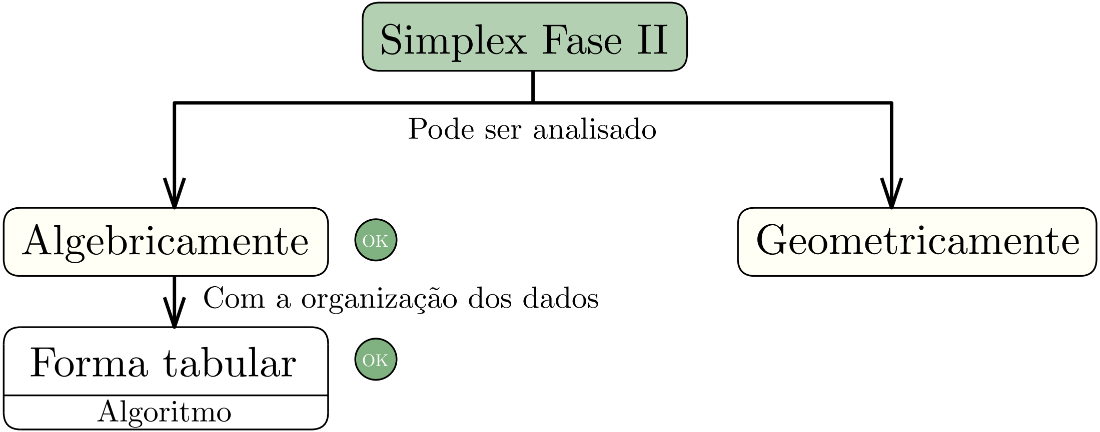
EXEMPLO Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{min z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

De forma que podemos escrever a tabela **sem a coluna**.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Simplex na forma tabular



Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

Com os dados na forma tabular, podemos definir o Algoritmo Simplex Fase II formalmente. Considerando a seguinte notação:

$$\begin{cases} A_{\bullet s:} \text{Todas as linhas da coluna } s \\ a_{rs} : \text{Elemento da linha } r \text{ e coluna } s \end{cases}$$

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\ c_j$$

   em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

O Algoritmo Simplex Fase II descrito de forma "enunciada" ficaria:

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): olhe para a linha dos coeficientes da função objetivo, e selecione o menor de todos.
2. (Teste de otimalidade): se o coeficiente selecionado for positivo ou nulo, o método chegou ao fim, e a solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se o coeficiente for negativo, a variável referente a coluna desse coeficiente é a que vai fazer parte da nova base (entra na base).
4. (Teste da solução ilimitada): olhando para os coeficientes de todas as linhas na coluna da variável que entra na base (somente nas restrições), se nenhum valor for estritamente positivo (> 0), o problema não tem solução limitada (fim).
5. (Variável que sai da base): considerando todos os valores da coluna da variável que entra na base *que são positivos*, e todos os valores do lado direito das equações, faça a divisão dos valores do lado direito (b) pelos coeficientes positivos. Selecione a linha que mantiver a menor razão. Olhando para as variáveis atualmente básicas, essa é a variável que vai sair da base.
6. (Atualização da tabela): atualize a tabela na forma padrão (pivoteamento) substituindo a variável encontrada em 3 pela encontrada em 5 em x_B. Voltar ao passo 1.

EXEMPLO Resolva o modelo abaixo, pelo algoritmo Simplex:

$$\begin{array}{lccr}
\text{max z} = & 100x_1 & +150x_2 & \\
& 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
& x_1 & & \leq 40 \\
& & x_2 & \leq 30 \\
& x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Colocando o modelo na forma padrão e tabular.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\ c_j$$

   em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo $c_s = -100$, e $s = 2$

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin} \; c_j$$

em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo $c_s = -150$, e $s = 2$.

Como $c_s < 0$, a solução atual não é ótima, portanto continuamos com o algoritmo.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\; c_j$$

   em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Sabemos que a variável x_2 vai **entrar para a base** x_B^T (vai deixar de ter valor 0).

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin} \; c_j$$

em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Nesse caso, temos que

$$A_{\bullet s} = A_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

Portanto, o problema **não é ilimitado**[1], e continuamos o algoritmo.

[1] para que $A_{\bullet s} \leq 0$, todos os elementos do vetor devem ser ≤ 0

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\ c_j$$

   em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_2 = \left\{ \frac{120}{3}, \frac{30}{1} \right\} = 30$$

Com $r = 4$. Sabemos então que x_2 vai entrar para a base (x_B) com valor de 30, e x_5 vai deixar de fazer parte da base.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\dots,n\}}{argmin} \; c_j$$

em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\dots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por: ✓

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\dots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Temos o elemento $a_{r,s} = a_{4,2} = 1$ como pivô. Precisamos realizar o pivoteamento para deixar a tabela canônica. Para isso realizamos as seguintes operações (sempre usando a linha do elemento pivô! primeiro transforme o elemento em 1 e depois use a linha para zerar os outros elementos da coluna):

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Temos o elemento $a_{r,s} = a_{4,2} = 1$ como pivô. Precisamos realizar o pivoteamento para deixar a tabela canônica. Para isso realizamos as seguintes operações (sempre usando a linha do elemento pivô! primeiro transforme o elemento em 1 e depois use a linha para zerar os outros elementos da coluna):

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

A tabela atualizada fica da seguinte forma. Note que atualizamos a coluna das variáveis básicas: removemos x_5 e adicionamos x_2. A solução atual é:

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

A tabela atualizada fica da seguinte forma. Note que atualizamos a coluna das variáveis básicas: removemos x_5 e adicionamos x_2. A solução atual é:

$$\boxed{x_B^T = (x_3, x_4, \boldsymbol{x_2}) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, \boldsymbol{x_5}) = (0, 0), z = -4500}$$

OBS: Note que para coletarmos o valor de z da tabela devemos pegar o seu negativo!

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin} \; c_j$$

   em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \min_{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por: ✓

$$x_s = \min_{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1. ✓

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Essa foi a primeira iteração completa do algoritmo, continuando novamente a partir do primeiro passo.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, 0, 0, 0, 150\}$$

Com mínimo c_s= -100, e s = 1. Como $c_1 < 0$ continuamos.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Novamente temos $A_{\bullet s} > 0 \therefore$ o problema não é ilimitado.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_1 = \left\{ \frac{30}{2}, \frac{40}{1} \right\} = 15$$

Com $r = 2$. Sabemos então que x_1 vai entrar para a base (x_B) com valor de 15, e x_3 vai deixar de fazer parte da base.

Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Temos $a_{2,1} = 2$ o novo elemento pivô, para atualizarmos a tabela fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

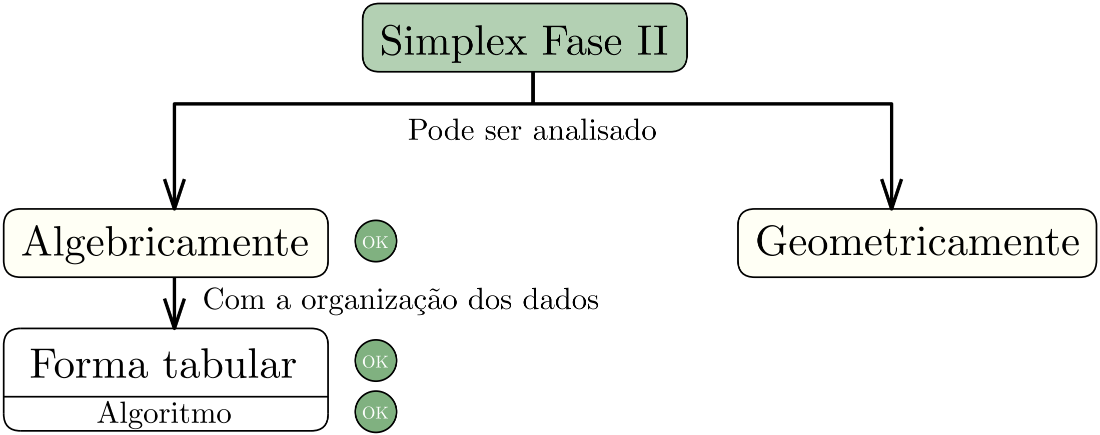
Simplex na forma tabular

O Algoritmo Simplex Fase II

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	50	0	0	6000
x_1	1	0	1/2	0	-3/2	15
x_4	0	0	-1/2	1	3/2	25
x_2	0	1	0	0	1	30

A nova tabela atualizada fica então da seguinte forma.
Como todos os valores de $c^T \geq 0$, podemos parar. A solução atual é a solução **ótima**:

$$\boxed{x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000}$$



Simplex Fase II
Pode ser analisado
Algebricamente
OK
Geometricamente
Com a organização dos dados
Forma tabular
OK
Algoritmo
OK

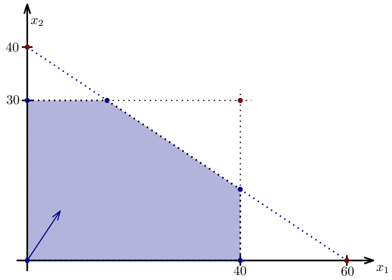
EXERCÍCIO Resolva o seguinte PL (forma tabular), mostrando a cada iteração a relação existente com o método algébrico.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\text{max z} = & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & x_1 & x_2 & & \geq 0
\end{array}
$$

A geometria do Simplex

A geometria do Simplex

Quando aprendemos a resolver PLs pelo **método gráfico**, conseguimos compreender melhor o motivo da solução ótima estar em determinado ponto (visualmente). O algoritmo Simplex também segue uma **lógica geométrica**, e é muito importante que a entendamos para seguir em frente no curso.



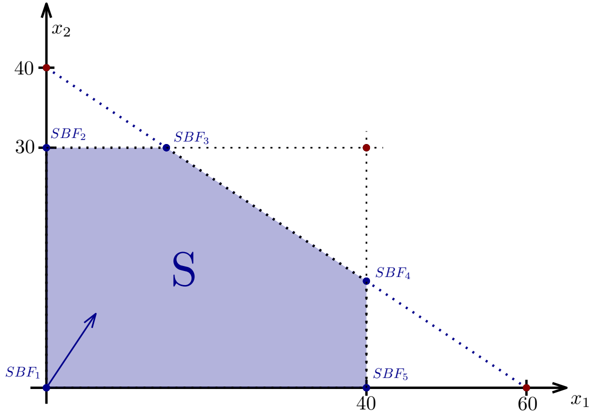
A geometria do Simplex

Considere a propriedade:

Propriedade

PROP1: Considere uma região factível $S = \{x \in R^+ | Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é um vértice de S se e somente se, x **for uma SBF**.

A geometria do Simplex



Ou seja, essa propriedade mostra o que são as SBF geometricamente, em relação a região factível: **vértices** formados pelas intersecções das restrições.

A geometria do Simplex

E ainda:

Propriedade

PROP2: Se um problema de PL têm solução ótima, então **existe um vértice ótimo**.

A segunda propriedade nos garante que sempre que um problema tiver uma solução ótima, poderemos encontrar um vértice da região factível S com essa solução.

A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.

A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase **II** precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.

A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.

A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase **II** precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.
4. $\therefore$ por 1,2 e 3 sabemos que o método Simplex "caminha"pelos vértices da região factível (**SBF**) até chegar ao vértice ótimo.

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.
4. $\therefore$ por 1,2 e 3 sabemos que o método Simplex "caminha" pelos vértices da região factível (**SBF**) até chegar ao vértice ótimo.

Esse percurso que o algoritmo percorre na região factível até chegar no vértice ótimo é chamado de **caminho Simplex**.

A geometria do Simplex

EXEMPLO Encontre o caminho Simplex para o exemplo resolvido anteriormente.

$$
\begin{array}{rccc}
\text{max z} = & 100x_1 & +150x_2 & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
 & x_1 & & \leq 40 \\
 & & x_2 & \leq 30 \\
 & x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

A geometria do Simplex

Tabela inicial

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Iteração 1

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Iteração 2

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	50	0	0	6000
x_1	1	0	1/2	0	-3/2	15
x_4	0	0	-1/2	1	3/2	25
x_2	0	1	0	0	1	30

As tabelas ao fim de cada iteração são mostradas acima.

A geometria do Simplex

Tabela inicial

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Iteração 1

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Iteração 2

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	50	0	0	6000
x_1	1	0	1/2	0	-3/2	15
x_4	0	0	-1/2	1	3/2	25
x_2	0	1	0	0	1	30

Para encontrar o caminho Simplex, precisamos da **SBF** a cada iteração.

A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

$$\begin{cases} \text{Início:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2:} & x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{cases}$$

A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo (x_1 e x_2).

A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo (x_1 e x_2).

$$\begin{cases} \text{Início:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2:} & x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{cases}$$

A geometria do Simplex

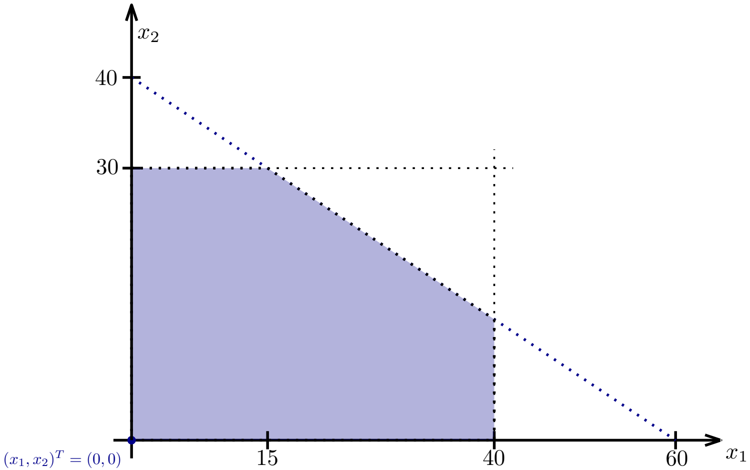
As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo (x_1 e x_2).

$$\begin{cases} \text{Início:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2:} & x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{cases}$$

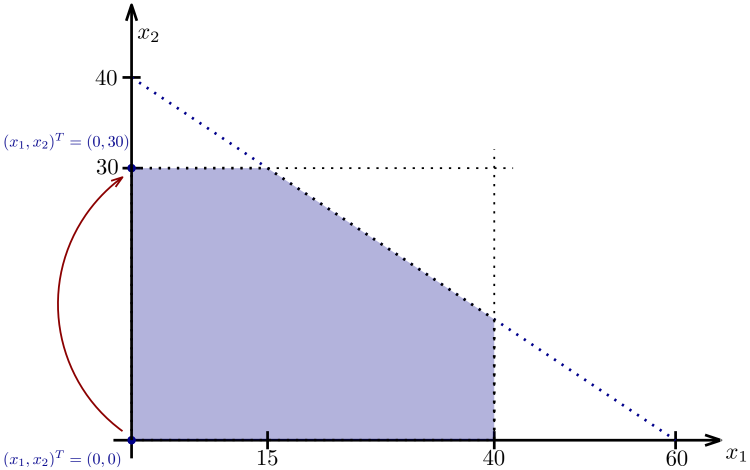
Vamos verificar no gráfico onde estão estas soluções

A geometria do Simplex



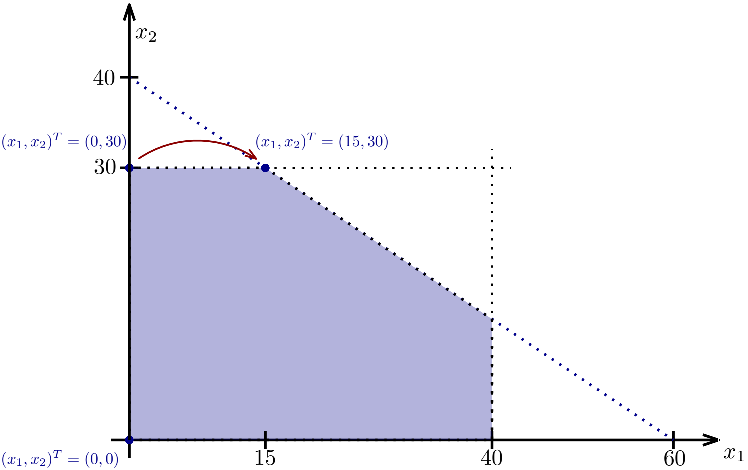
Início:$x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

A geometria do Simplex



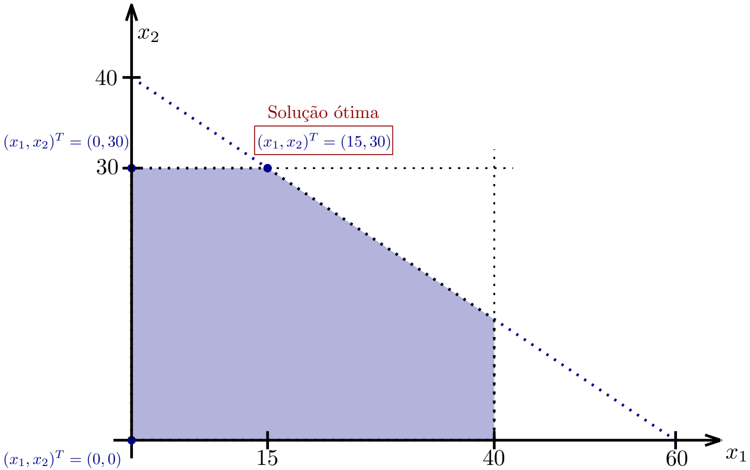
Iter. 1:$x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0)$

A geometria do Simplex



Iter. 2:$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$

A geometria do Simplex

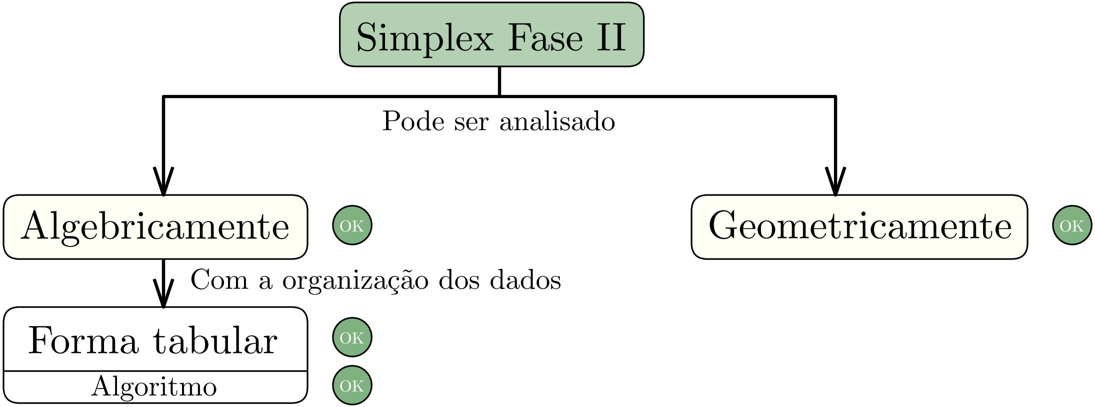


Iter. 2: $x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$

A geometria do Simplex

Com isso finalizamos a análise do algoritmo Simplex. Note que ao determinarmos o caminho Simplex, temos uma forma de validar a nossa solução do quadro. Por exemplo, se em uma determinada iteração você encontra uma solução que não é um vértice, **algo deu errado**.

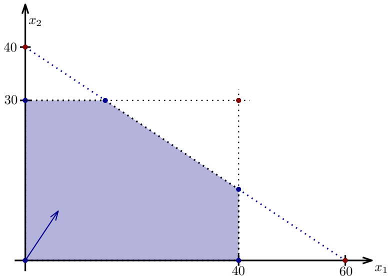
A geometria do Simplex



A geometria do Simplex

EXERCÍCIO Considerando o seguinte modelo de PL e a representação da sua região factível, responda o que se pede:

$$
\begin{array}{lcccl}
\text{max z} = & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & x_1 & x_2 & & \geq 0
\end{array}
$$



1. É possível determinar o número máximo de soluções básicas do problema? Se sim, como?
2. Qual é a relação dessas soluções com a região representada pelas inequações?