Modelagem I

1. (**R**) Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.

   Sejam as variáveis:

   $$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade do produto P1 produzido por mês.} \\ x_2 : \text{Quantidade do produto P2 produzido por mês.} \end{cases}$$

   Temos o modelo:

   $$\begin{array}{lrl} \max & Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 150x_2 & \\ \text{Sujeito à} & 2x_1 + 3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 \qquad & \leq 40 \\ & x_2 & \leq 30 \\ & x_1, x_2 & \in R^+ \end{array}$$

2. (**R**) Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade. Formular o modelo matemático de modo a determinar a quantidade a ser produzida de A e B a fim de se ter um lucro máximo. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias)

   Sejam as variáveis:

   $$\begin{cases} x_a : \text{Quantidade produzida do produto A.} \\ x_b : \text{Quantidade produzida do produto B.} \end{cases}$$

   Temos o modelo:

   $$\begin{array}{lrl} \max & Z(x_1, x_2) = 60x_a + 70x_b & \\ \text{Sujeito à} & 2x_a + 3x_b & \leq 12 \\ & 2x_a + x_b & \leq 5 \\ & x_a, x_b & \in R^+ \end{array}$$

3. (**R**) Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade

de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades e o do cinto é de 2 unidades, formular o modelo que maximize lucro por hora.

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{array}{ll} \max & Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito à} & 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{array}$$

4. (**R**) Sabe-se que uma pessoa necessita, em sua alimentação diária, de um mínimo de 15 unidades de proteínas e 20 unidades de carboidratos. Suponhamos que, para satisfazer esta necessidade, ela disponha dos produtos A e B. Um Kg do produto A contém 3 unidades de proteínas, 10 unidades de carboidrato e custa R$ 2,00. Um Kg do produto B contém 6 unidades de proteínas, 5 unidades de carboidrato e custa R$ 3,00. Formule o modelo matemático das quantidade que deverão ser compradas de cada produto de modo que as exigências da alimentação sejam satisfeitas a custo mínimo?

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_a : \text{Quantidade do produto A em kg.} \\ x_b : \text{ Quantidade do produto B em kg.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{array}{ll} \min & Z(x_a, x_b) = 2x_a + 3x_b \\ \text{Sujeito à} & 3x_a + 6x_2 \geq 15 \\ & 10x_a + 5x_b \geq 20 \\ & x_a, x_b \in R^+ \end{array}$$

5. (**R**) *Bolos e pães* é uma fábrica de processamento de alimentos que produz salsichas e pães para cachorro-quente. A empresa mói sua própria farinha para fazer os pães em uma taxa máxima de 200 libras (peso) por semana. Cada pãozinho para cachorro-quente requer 0,1 libra de farinha. Atualmente A a empresa possui um contrato com a *Pigland, Inc.*, que especifica que uma entrega de 800 libras de carne suína é entregue toda segunda feira. Cada salsicha precisa de $\frac{1}{4}$ de libra de carne suína. Todos os demais ingredientes para fabricação de salsicha e pães se encontram em estoque pleno. Finalmente, a força de trabalho da empresa é formada por 5 empregados em período integral (40 horas/semana cada). Cada salsicha requer 3 minutos de trabalho e cada pãozinho, dois minutos. Cada salsicha gera um lucro US$0,80

e cada pãozinho, US$0,30. A empresa quer saber quantas salsichas e quantos pães devem ser produzidos na próxima semana, para se obter o maior lucro possível. Formule um modelo de programação linear para este problema.

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} S: \text{Quantidade produzida de salsicha.} \\ P: \text{Quantidade produzida de pão.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z(P,S) = 0.3P + 0.8S \\ \text{Sujeito à} \quad & 0.25S \leq 800 \\ & 0.1P \leq 200 \\ & 2P + 3S \leq 5 \times 50 \times 60 \\ & P, S \in R^+ \end{aligned}$$

6. (**R**) Uma empresa de aço tem um rede de distribuição conforme a Figura 1. Duas minas M1 e M2 produzem 40t e 60t de mineral de ferro, respectivamente, que são distribuídos para dois estoques intermediários S1 e S2. A planta de produção P tem uma demanda de 100t de mineral de ferro. As vias de transporte têm limites de toneladas de mineral de ferro que podem ser transportadas e custos de transporte por toneladas de mineral de ferro (veja Figura 1). A direção da empresa quer determinar os planos de transporte que minimizam os custos totais. Formule o modelo de programação linear para o problema.

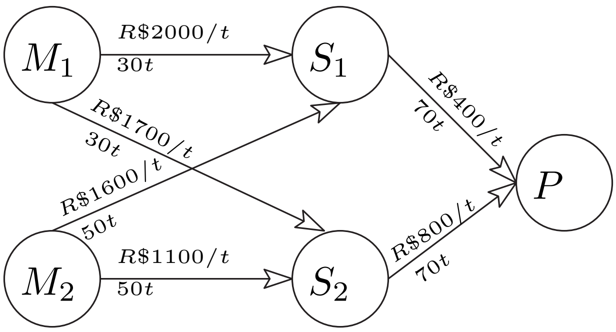

Figure 1: Rede de distribuição de aço

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_{ij}\text{: Quantidade transportada da mina i para o depósito j.} \\ y_j\text{: Quantidade transportada do depósito j para a planta de produção P.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & Z = 2000x_{11} + 1700x_{12} + 1600x_{21} \\
& \quad +1100x_{22} + 400y_1 + 800y_2 \\
\text{Sujeito à} \quad & x_{11} + x_{12} = 40 \\
& x_{21} + x_{22} = 60 \\
& x_{11} \leq 30 \\
& x_{12} \leq 30 \\
& x_{21} \leq 50 \\
& x_{22} \leq 50 \\
& y_1 \leq 70 \\
& y_2 \leq 70 \\
& x_{11} + x_{21} - y_1 = 0 \\
& x_{12} + x_{22} - y_2 = 0 \\
& y_1 + y_2 = 100 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_1, y_2 \in R^+
\end{aligned}$$

7. (**R**) Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a R$20,00 de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a R$10,00 de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a R$30,00 de lucro por caixa. De que forma ele deverá carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade de caixas de pêssegos.} \\ x_2 : \text{Quantidade de caixas de tangerinas.} \\ x_3 : \text{Quantidade de caixas de laranjas} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 30x_2 + 200x_3 \\ \text{Sujeito à} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 800 \\ & x_1 \geq 100 \\ & x_2 \leq 200 \\ & x_3 = 200 \\ & x_1, x_2, x_3 \in R^+ \end{aligned}$$

8. (**R**) Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:
a - Arrendamento : - Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana de açúcar a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R$ 300,00 por alqueire por ano;
b - Pecuária : - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alqueire) e irrigação(100.000 litros de água/alqueire) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$400,00 por alqueire por ano.
c - Plantio de Soja : Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água por alqueire para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$500,00 por alqueire por ano. A disponibilidade de recursos por ano é de 12.750.000 litros de água, 14.000 kg de adubo e 100 alqueires de terra. Quantos alqueires deverão ser destinados a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_a : \text{Área destinada ao arrendamento.} \\ x_p : \text{Área destinada a pecuária.} \\ x_s : \text{Área destinada ao plantio de soja.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x_a, x_p, x_s) = 300x_a + 400x_p + 500x_s \\ \text{Sujeito à} \quad & 100x_p + 200x_s \leq 14000 \\ & 100.000x_p + 200.000x_s \leq 12.750.000 \\ & x_a + x_p + x_s \leq 100 \\ & x_a, x_p, x_s \in R^+ \end{aligned}$$

9. (**R**) Muitas vezes um mesmo modelo consegue representar diferentes conjuntos de dados, se as estruturas lógicas entre restrições e variáveis permanecerem constantes. Dessa forma, criamos *modelos genéricos* que se alteram conforme os dados (parâmetros) são alterados. Para isso, criamos o modelo puramente matemático, usando somatórios e conjuntos, de forma que o mesmo fique em função dos parâmetros de entrada.

   Relembrando alguns termos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i a_i = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq 0 \quad , j = 1, 2, 3.$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 0$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 0$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 0$$

   Nos dois primeiros casos, expandimos o somatório. O terceiro caso têm um somatório que deve ser expandido para cada linha do conjunto j = 1,2,3, assim temos uma variação tanto em i (nos somatórios), quanto em j (cada restrição representa um novo j).

   Considere o modelo do problema 1. Imagine que um novo produto deve entrar no mix de produção da empresa. Não precisamos criar um novo modelo do zero, se soubermos o lucro, horas de fabricação e limitação unitária do produto, podemos usar o mesmo modelo, acrescentando essas informações. O modelo genérico fica da seguinte forma:

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_i : \text{Quantidade do produto } P_i \text{ produzido por mês}, i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Sejam os parâmetros:

$$\begin{cases} n : \text{Numero de produtos diferentes} \\ l_i : \text{Lucro pela venda de uma un. de } P_i, i = 1, ..., n. \\ h_i : \text{Horas necessárias para fabricação de uma un. de } P_i, i = 1, ..., n. \\ u_i : \text{Limite para produção de } P_i, i = 1, ..., n. \\ H :: \text{Horas disponíveis para produção.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \text{max} \qquad & Z(x_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i \\ \text{Sujeito à} \qquad & \sum_{i=1}^{n} h_i x_i \leq H \\ & x_i \leq u_i \quad , i = 1, ..., n \\ & x_i \in R^+, \forall i \end{aligned}$$

O modelo do exercício 1 é um caso particular do modelo genérico com os parâmetros:

$$\begin{cases} n : 2 \\ l_i : [100, 150] \\ h_i : [2, 3] \\ u_i : [40, 30] \\ H : 120 \end{cases}$$

(a) Escreva o modelo acima com os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} n : 5 \\ l_i : [100, 150, 60, 50, 30] \\ h_i : [2, 3, 4, 3, 6] \\ u_i : [40, 30, 100, 600, 50] \\ H : 300 \end{cases}$$

(b) Escreva o modelo genérico para o problema do sapateiro (exercício 3), considerando que ele pode fabricar diferentes produtos (não só sapatos e cintos). Escreva o conjunto de parâmetros do problema original (considerando a sua definição dos parâmetros).

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_i : \text{Tempo destinado ao produto } i \text{ produzido por mês}, i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Sejam os parâmetros:

$$\begin{cases} n : \text{Numero de produtos diferentes} \\ l_i : \text{Lucro pela venda de uma un. do produto } i, i = 1, ..., n. \\ h_i : \text{Minutos necessários para fabricação do produto } i, i = 1, ..., n. \\ d_i : \text{Demanda de couro do produto } i, i = 1, ..., n. \\ C : \text{Quantidade de couro disponível.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \text{max} \qquad & Z(x_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i \\ \text{Sujeito à} \qquad & \sum_{i=1}^{n} h_i x_i \leq 60 \\ & \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \leq C \\ & x_i \in R^+, \forall i \end{aligned}$$

Os parâmetros do problema original são:

$$\begin{cases} n : 2 \\ l_i : [5, 2] \\ h_i : [10, 12] \\ d_i : [2, 1] \\ C : 6 \end{cases}$$

(c) Escreva o modelo genérico para o problema da dieta (exercício 4), considerando um número variável de alimentos disponíveis. Escreva o conjunto de parâmetros do problema original (considerando a sua definição dos parâmetros).

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_i : \text{Quantidade comprada co alimento } i, i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Sejam os parâmetros:

$$\begin{cases} n : \text{Número de alimentos diferentes} \\ o_i : \text{Preço/kg do alimento } i, i = 1, ..., n. \\ c_i : \text{Qtde. de carboidratos/kg do alimento } i, i = 1, ..., n. \\ p_i : \text{Qtde. de proteínas/kg do alimento } i, i = 1, ..., n. \\ C : \text{Demanda mínima de carboidratos na dieta.} \\ P : \text{Demanda mínima de proteínas na dieta.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \text{min} \qquad & Z(x_i) = \sum_{i=1}^{n} o_i x_i \\ \text{Sujeito à} \qquad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq C \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq P \\ & x_i \in R^+, \forall i \end{aligned}$$

Os parâmetros do problema original são:

$$\begin{cases} n : 2 \\ o_i : [2, 3] \\ c_i : [3, 10]. \\ p_i : [6, 5]. \\ C : 15 \\ P : 20 \end{cases}$$