L9 - Modelagem inteira I

1. Considere a decisão de investimento em 8 projetos. O investimento em cada projeto gera um retorno líquido ao longo do tempo, e também tem um custo de investimento. Os dados são mostrados na Tabela 1.

	Projetos							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Investimento	41	33	14	25	32	32	9	19
Retorno líquido	47	40	17	27	34	23	5	44

Tabela 1: Investimentos e retornos esperados em projetos

O investidor tem um total de 100 unidades disponíveis para investir.

(a) Determine o modelo de PI para o problema.
Sejam as variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o investimento } i \text{ é realizado} \\ 0 : \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 41x_1 + 33x_2 + 14x_3 + 25x_4 + 32x_5 + 32x_6 + 9x_7 + 19x_8 \\ \text{s.a:} \quad & \\ & 47x_1 + 40x_2 + 17x_3 + 27x_4 + 34x_5 + 23x_6 + 5x_7 + 44x_8 \leq 100 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i \in 1..8 \end{aligned}$$

(b) Escreva o modelo genérico (conjuntos, parâmetros, variáveis) para o problema.

Sejam os conjuntos:

- $I = \{1..m\}$: conjunto de investimentos

Sejam os parâmetros:

- a_i: retorno esperado pelo investimento no projeto i, $i \in I$
- r_i: custo de investimento no projeto i, $i \in I$
- b: limite máximo disponível para investimentos

$$x_i \begin{cases} 1 : \text{Se o investimento } i \text{ é realizado} \\ 0 : \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\max \quad z = \sum_{i \in I} a_i x_i$$

$$sa:$$

$$\sum_{i \in I} r_i x_i \leq b$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

2. (*Problema da designação generalizado*) O setor de PCP de uma indústria precisa determinar quais produtos serão produzidos por quais máquinas. Existem 4 produtos (colunas da Tabela 2) que podem ser processados em 2 máquinas (linhas da Tabela 2). A Tabela 2 indica o tempo necessário para processar cada produto em cada máquina, bem como o limite de tempo disponível em cada máquina.

	Produtos				
Máquinas	**1**	**2**	**3**	**4**	**Limite de tempo**
1	9	13	17	18	40
2	15	25	28	18	55

Tabela 2: Tempos de processamento das peças nas máquinas

Cada processamento de produto nas máquinas gera um gasto de energia elétrica, dados pela Tabela 2.

	Produtos			
Máquinas	**1**	**2**	**3**	**4**
1	10	15	17	16
2	20	25	21	19

Tabela 3: Consumo de energia pelo processamento das peças nas máquinas

(a) Determine o modelo de PI que aloca as peças nas máquinas ao menor gasto energético.
Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_{ij} : \text{Se a máquina } i \text{ é alocada para produzir o produto } j \quad i \in 1,2 \quad j \in 1..4 \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 10x_{11} + 15x_{12} + 17x_{13} + 16x_{14} \\
& +20x_{21} + 25x_{22} + 21x_{23} + 19x_{24} \\
\text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} = 1 \\
& 9x_{11} + 13x_{12} + 17x_{13} + 18x_{14} \leq 40 \\
& 15x_{21} + 25x_{22} + 28x_{23} + 18x_{24} \leq 55 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in 1,2 \quad j \in 1..4
\end{aligned}
$$

(b) Escreva o modelo genérico (conjuntos, parâmetros, variáveis) para o problema. Sejam os conjuntos:

- $M = \{1..m\}$: conjunto dos máquinas
- $P = \{1..p\}$: conjunto de produtos

Sejam os parâmetros:

- c_{ij}: gasto energético de alocar a máquina i para produzir o produto j, $i \in M \quad j \in P$
- r_{ij}: tempo que a máquina i leva para produzir o produto j, $i \in M \quad j \in P$
- d_i: disponibilidade de tempo da máquina i, $i \in M$

Sejam as variáveis:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1: \text{ se a máquina } i \text{ é alocada para produzir o produto } j \\ 0: \text{ caso contrário} \end{cases}
$$

Temos o modelo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in P} c_{ij} x_{ij} \\
sa: & \\
& \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad j \in P \\
& \sum_{j \in P} r_{ij} x_{ij} \leq d_i \quad i \in M \\
& x_{ij} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

3. (*Caso BRF*) Uma empresa alimentícia aluga veículos para realizar as suas entregas. O setor de PCP junto ao dep. de logística faz o dimensionamento de toda carga que deve ser alocada a cada veículo, bem como a sua rota. Dessa forma, sabe-se, para cada dia de um horizonte de planejamento, quantos veículos serão necessários. Esse dado é mostrado na Tabela

	Dias				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Demanda	2	3	2	1	3

Tabela 4: Demanda de veículos por dia

Cada contrato por um veículo permite que o mesmo seja utilizado por uma quantidade limitada de dias no horizonte de planejamento, e existe um custo associado ao contrato. O custo do contrato independe do número de dias que o veículo é alocado pela empresa. A Tabela 3 mostra os tipos de contrato existentes:

Contrato	**Cobertura (dias)**	**Custo fixo**
1	3	500
2	1	400

Tabela 5: Demanda de veículos por dia

(a) Determine o modelo de PI para o problema de contratação e alocação de frota da BRF.

Esse problema exige a modelagem de custos fixos: se determinarmos que a contratação de um veículo qualquer, independentemente das alocações nos dias da semana, seu custo deverá ser pago. Ainda, note que como vamos realizar uma contratação externa, podemos usar qualquer número de veículos, porém, para fins de modelagem, precisamos de um valor fixo. Esse problema ocorre em muitos modelos, então temos que estimar uma quantidade de veículos disponíveis de cada tipo, de forma que, com essa quantidade garantimos que todos os dias podem ser cobertos. Por exemplo, considere o veículo do contrato 2 que tem uma cobertura de apenas 1 dia, se fôssemos usar somente veículos deste contrato, quantos precisaríamos? Basta somarmos as demandas de todos os dias, esse seria o nosso limitante superior (*upper bound* - *UB*) para o número de veículos do contrato 2. E do contrato 1? Vamos considerar os seguintes dados para as duas contratações:

- UB_1:4
- UB_2:8

Sejam as variáveis:

$$x_{knt} = \begin{cases} 1: \text{ se o veículo } n \text{ do tipo de contrato } k \text{ é alocado ao dia } t \\ 0: \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{kn} = \begin{cases} 1: \text{ se o veículo } n \text{ do tipo de contrato } k \text{ é alocado em qualquer dia} \\ 0: \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A variável y é a binária auxiliar para modelar os custos fixos.
Temos então o modelo:

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z = 500y_{11} + 500y_{12} + ... + 500y_{14} \\ & +400y_{21} + 400y_{22} + ... + 400y_{28} \\ \text{s.a:} \quad & \\ & x_{111} + x_{121} + ... + x_{141} + x_{211} + x_{221} + ... + x_{281} \geq 2 \\ & x_{112} + x_{122} + ... + x_{142} + x_{212} + x_{222} + ... + x_{282} \geq 3 \\ & x_{113} + x_{123} + ... + x_{143} + x_{213} + x_{223} + ... + x_{283} \geq 2 \\ & x_{114} + x_{124} + ... + x_{144} + x_{214} + x_{224} + ... + x_{284} \geq 1 \\ & x_{115} + x_{125} + ... + x_{145} + x_{215} + x_{225} + ... + x_{285} \geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{114} + x_{115} &\leq 4y_{11} \\ x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{124} + x_{125} &\leq 4y_{12} \\ x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{134} + x_{135} &\leq 4y_{13} \\ x_{141} + x_{142} + x_{143} + x_{144} + x_{145} &\leq 4y_{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{214} + x_{215} &\leq 1y_{21} \\ x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{224} + x_{225} &\leq 1y_{22} \\ x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{234} + x_{235} &\leq 1y_{23} \\ x_{241} + x_{242} + x_{243} + x_{244} + x_{245} &\leq 1y_{24} \\ x_{251} + x_{252} + x_{253} + x_{254} + x_{255} &\leq 1y_{25} \\ x_{261} + x_{262} + x_{263} + x_{264} + x_{265} &\leq 1y_{26} \\ x_{271} + x_{272} + x_{273} + x_{274} + x_{275} &\leq 1y_{27} \\ x_{281} + x_{282} + x_{283} + x_{284} + x_{285} &\leq 1y_{28} \end{aligned}$$

$$x_{knt} \in \{0, 1\} \quad k \in 1, 2 \quad n \in 1..UB_k \quad t \in 1..5$$

O primeiro conjunto de restrições garante que a demanda de veículos para cada dia seja atendida, considerando todos os contratos e veículos que forem utilizados naquele dia. O segundo e terceiro conjuntos de restrições servem para dois propósitos: primeiro, limitar o número de alocações em dias de cada veículo, de acordo com a cobertura do tipo de contrato. Segundo, ativar a condição "se-então"da variável binária y para os custos fixos da função objetivo.

(b) Escreva o modelo genérico (conjuntos, parâmetros, variáveis) para o problema. Sejam os conjuntos:

- $K = \{1..c\}$: conjunto dos tipos de contrato
- $T = \{1..p\}$: conjunto de produtos

Sejam os parâmetros:

- a_k: custo fixo do veículo de contrato do tipo k, $k \in K$
- c_k: cobertura do veículo de contrato do tipo k, $k \in K$
- UB_k: *upper bound* do veículo de contrato do tipo k, $k \in K$
- d_t: demanda de veículos no dia t, $t \in T$

Sejam as variáveis:

$$x_{knt} = \begin{cases} 1\text{: se o veículo } n \text{ do tipo de contrato } k \text{ é alocado ao dia } t \\ 0\text{: caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{kn} = \begin{cases} 1\text{: se o veículo } n \text{ do tipo de contrato } k \text{ é alocado em qualquer dia} \\ 0\text{: caso contrário} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\min \quad z = \sum_{k \in K} \sum_{n=1}^{UB_k} a_k y_{kn}$$

$$sa:$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{n=1}^{UB_k} X_{knt} \geq d_t \quad t \in T$$

$$\sum_{t \in T} x_{nkt} \leq c_k y_{kn} \quad k \in K \quad n \in 1..UB_k$$

$$x_{nkt} \in \{0,1\} \quad k \in K \quad n \in 1..UB_k \quad t \in T$$

$$y_{nk} \in \{0,1\} \quad k \in K \quad n \in 1..UB_k$$

4. (**0.5**) Uma empresa de distribuição de bebidas possui 3 grandes clientes ($i = 1..2$) e dois centros de distribuição ($j = 1..3$). Cada cliente possui uma demanda de bebidas (d_i), dada por $d = [3, 4, 3]$. Ainda, existe um custo variável de entrega das bebidas de cada depósito para cada centro, bem como um **custo fixo** por depósito, **caso o mesmo realize entregas a pelo menos um cliente**. Cada depósito possui uma capacidade máxima de fornecimento. A Tabela 6 mostra os custos variáveis, fixos e as capacidades de entrega:

Depósitos	**Clientes**			**Custo fixo**	**Capacidade**
	1	2	3		
1	2	4	3	100	9
2	1	2	1	150	10

Tabela 6: Demanda dos clientes

Se um depósito é alocado para um cliente, toda a demanda do cliente deve ser atendida por esse depósito. Considere que todos os clientes devem ser atendidos por um depósito. Escreva o modelo que descreve o problema. **Não se esqueça do domínio das variáveis**.

RESPOSTA:

Para esse modelo podemos pensar em variáveis de alocação: se o depósito i é atribuído ao cliente j ou não. Se o depósito é atribuído ao cliente, toda a demanda deve ser atendida, de forma que podemos calcular o custo para o deposito atender o cliente, multiplicando o custo variável pela demanda. Além disso, existe um custo fixo, caso o depósito seja utilizado em qualquer cliente. Esse custo pode ser ativado ou desativo pela variável binária y em conjunção com as restrições do tipo "se-então".

Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{Se o depósito } i \text{ atende o cliente } j \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

$\forall i \in (1, 2) \quad \forall j \in (1, 2, 3)$

$$y_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o depósito } i \text{ atende algum cliente} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

$\forall i \in (1, 2)$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \text{min z} = 2 \cdot 3x_{11} + 4 \cdot 4x_{12} + 3 \cdot 3x_{13} + 100y_1 + \\ 1 \cdot 3x_{21} + 2 \cdot 4x_{22} + 1 \cdot 3x_{23} + 100y_2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 3y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{33} \leq 3y_2 \\ x_{11} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \\ x_{13} + x_{23} = 1 \\ 3x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} \leq 9 \\ 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} \leq 10 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, y_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$