

# A inversa: Simplex & Dualidade II

Alexandre Checoli Choueiri

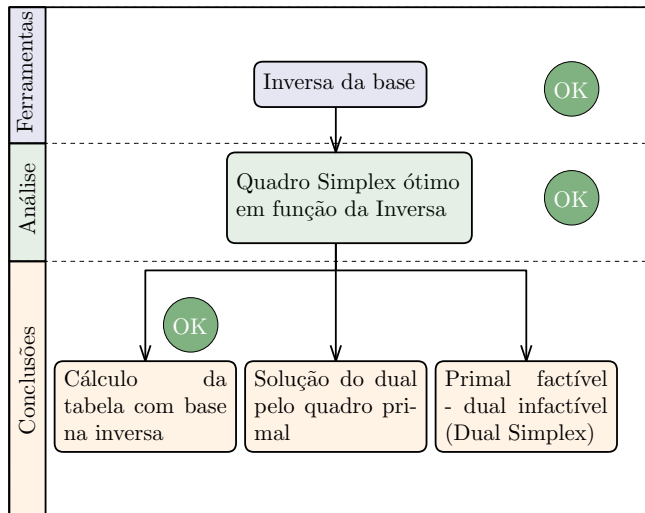
29/01/2023

# Conteúdo

- ➊ Obtendo a solução dual pelo quadro ótimo primal
- ➋ Exemplo
- ➌ Primal factível - dual infactível
- ➍ Conclusão

# Objetivos

## Ferramentas e objetivos



Obtendo a solução dual pelo quadro ótimo primal

## Solução dual pelo quadro primal

Agora possuímos todas as ferramentas para mostrar que **ao encontrarmos a solução ótima do primal, automaticamente encontramos a solução ótima do dual**. Considere o par primal dual, com o primal escrito na forma padrão:

### Primal

$$\begin{aligned}\min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

### Dual

$$\begin{aligned}\max z &= \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \pi &\leq \mathbf{c} \\ \pi &\text{ irrestrito}\end{aligned}$$

## Solução dual pelo quadro primal

Da mesma forma que fizemos antes, podemos particionar os problemas em relação às variáveis básicas e não básicas do problema original:

### Primal

$$\begin{aligned}\min z &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

### Dual

$$\begin{aligned}\max v &= \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\pi} &\leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \boldsymbol{\pi} &\leq \mathbf{c}_N \\ \boldsymbol{\pi} &\text{ irrestrito}\end{aligned}$$

## Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores  $> 0$  no primal ( $x_B$ ) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

## Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores  $> 0$  no primal ( $x_B$ ) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

De forma que:

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}^T \pi = \mathbf{c}_B$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$



## Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores  $> 0$  no primal ( $x_B$ ) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\begin{aligned}\max v &= \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi &\leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N\end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned}\max v &= \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi &= \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N\end{aligned}$$

Aplicando a transposta em ambos os lados (lembre-se que  $(AB)^T = B^T A^T$ ):

## Solução dual pelo quadro primal

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

## Solução dual pelo quadro primal

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

Como podemos derivar uma solução genérica para  $\pi$ ? (como isolar  $\pi$ ).

## Solução dual pelo quadro primal

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

Como podemos derivar uma solução genérica para  $\pi$ ? (como isolar  $\pi$ ). Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\mathbf{B}^{-1}$ :

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

## Solução dual pelo quadro primal

Chegamos então ao modelo equivalente:

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

## Solução dual pelo quadro primal

Chegamos então ao modelo equivalente:

$$\begin{aligned}\max v &= \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N\end{aligned}$$

Que nos fornece uma forma também genérica de calcular os valores duais, em função da inversa da base primal:

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

## Solução dual pelo quadro primal

Se olharmos a tabela genérica do Simplex, percebemos que esse mesmo termo aparece na linha da função objetivo, abaixo das variáveis não básicas. Analisando o termo da tabela com mais cuidado, distinguimos um caso em que o cálculo fica simplificado.

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-Z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

## Solução dual pelo quadro primal

Embora o termo esteja em função dos coeficientes não básicos, podemos usá-lo para analisar quaisquer termos da função objetivo, básicos e não básicos, de forma que  $\mathbf{c}_N^T$  são os coeficientes que queremos atualizar na fo ( $c_i^T$ ), e  $N$  a submatriz composta pelas colunas referentes a esses coeficientes ( $A_i$ ).

### DADOS NÃO BÁSICOS

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

### QUAISQUER VALORES

$$\mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} A_i$$

Lembrando que  $\mathbf{c}_N^T$  e  $\mathbf{N}$  são coletadas da matriz original. O que acontece se usarmos os dados das variáveis de folga para esse cálculo?



## Solução dual pelo quadro primal


$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

**Sempre** os coeficientes das variáveis de folga (no início do quadro) são nulas.

## Solução dual pelo quadro primal

$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

De forma que  $c_N^T = 0$ .

## Solução dual pelo quadro primal

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Ainda, a submatriz composta pelas colunas das variáveis de folga no início do Simplex também sempre será a **identidade (I)** (no Simplex Fase I será a matriz das var. artificiais).

## Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1.  $\mathbf{c}_N^T = 0$
2.  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$

## Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1.  $\mathbf{c}_N^T = 0$
2.  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$

O que faz o termo ficar:

$$\underbrace{\mathbf{c}_N^T}_0 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \underbrace{\mathbf{N}}_I = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = -\pi^T$$

## Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1.  $\mathbf{c}_N^T = 0$
2.  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$

O que faz o termo ficar:

$$\underbrace{\mathbf{c}_N^T}_0 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \underbrace{\mathbf{N}}_I = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = -\pi^T$$

Que é exatamente o negativo da expressão que encontramos para o problema dual:

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

(lembre do negativo)!

# Solução dual pelo quadro primal

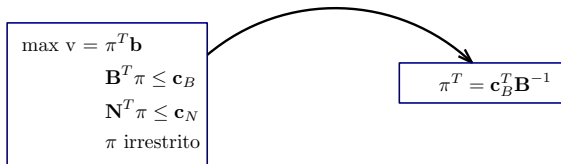
Retomando o caminho da conclusão

$$\begin{aligned}\max v &= \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi &\leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N \\ \pi &\text{ irrestrito}\end{aligned}$$

Partimos da definição do problema dual, considerando os termos separados em básicos e não básicos.

# Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão

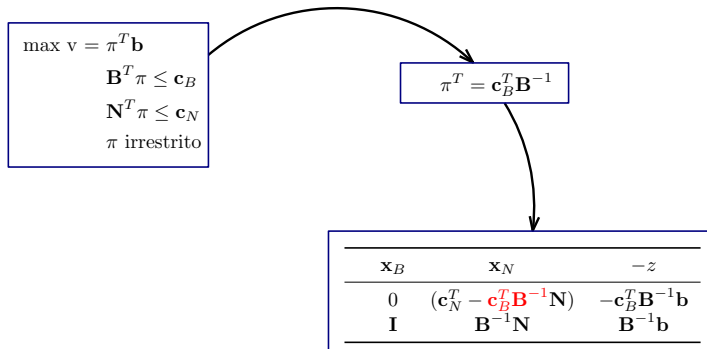

$$\begin{array}{l} \max v = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \\ \pi \text{ irrestrito} \end{array}$$
$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

Com isso chegamos a uma expressão para a solução dual em função de parâmetros do primal.



# Solução dual pelo quadro primal

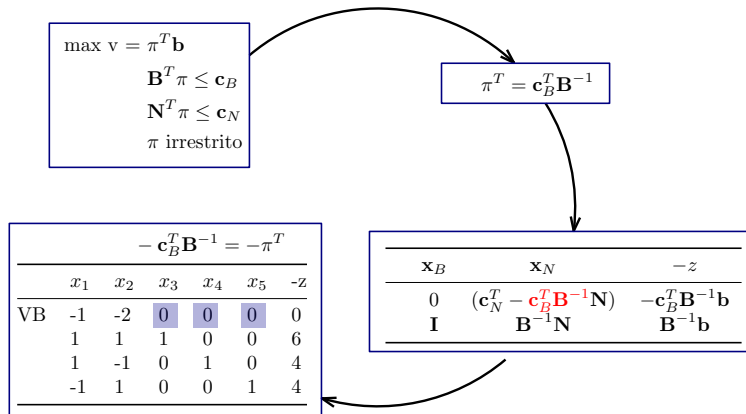
Retomando o caminho da conclusão



Percebemos que a expressão da solução dual está contida na própria tabela genérica do Simplex.

# Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão



E que ao considerarmos somente os termos acima da matriz identidade inicial, os custos atualizados na função objetivo são **exatamente iguais ao negativo da solução dual**.

## Solução dual pelo quadro primal

### Conclusão

Os termos da função objetivo referentes a matriz identidade inicial (ou variáveis de folga ou artificiais), representam o negativo da solução do problema dual, de forma que **ao resolvermos o primal pela tabela Simplex, automaticamente encontramos também a solução do dual (o seu negativo!)**.

# Solução dual pelo quadro primal

## Conclusão

Os termos da função objetivo referentes a matriz identidade inicial (ou variáveis de folga ou artificiais), representam o negativo da solução do problema dual, de forma que **ao resolvermos o primal pela tabela Simplex, automaticamente encontramos também a solução do dual (o seu negativo!)**.

## Atenção

Como no caso da inversa, os valores duais estão acima da matriz identidade original. Se usarmos variáveis artificiais e quisermos coletar o valor dual:

1. **Não remover as colunas artificiais ao final da fase I.**
2. Ao resubstituir a função objetivo original, inicializar os coef. das variáveis artificiais = 0 (não usar esse valores como variáveis para entrar na base).
3. No final da otimização, os valores duais são os coef. das variáveis artificiais.

## Exemplo

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Considere o seguinte par primal-dual de PLs:

$$\begin{aligned}\max z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min v &= 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 2 \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0\end{aligned}$$

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	0	0	$3/2$	0	$1/2$	11
$x_1$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1
$x_4$	0	0	0	1	1	8
$x_2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$	5

O quadro inicial e o quadro ótimo para o problema primal são mostrados acima.

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	0	0	$3/2$	0	$1/2$	11
$x_1$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1
$x_4$	0	0	0	1	1	8
$x_2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$	5

Verificando os elementos acima da identidade no quadro inicial.



# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

							$-\pi_1 \quad -\pi_2 \quad -\pi_3$						
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0	VB	0	0	3/2	0	1/2	11
	1	1	1	0	0	6	$x_1$	1	0	1/2	0	-1/2	1
	1	-1	0	1	0	4	$x_4$	0	0	0	1	1	8
	-1	1	0	0	1	4	$x_2$	0	1	1/2	0	1/2	5

Sabemos que na otimalidade eles são o negativo da solução dual, ou seja,  $-\pi$ .

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Lembrando que para deixar o problema na forma padrão fizemos

$$\max z = -\min z$$

Assim, temos que, para voltar à função original, multiplicamos os termos novamente por -1, o que gera:

1.  $-\pi_1 = -3/2 \rightarrow \pi_1 = 3/2$
2.  $-\pi_2 = -0 \rightarrow \pi_2 = 0$
3.  $-\pi_3 = -1/2 \rightarrow \pi_3 = 1/2$

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Substituindo as soluções primal-dual  $x^T = (x_1, x_2) = (1, 5)$  e  $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1.5, 0, 0.5)$  nos modelos, temos:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min v = 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 \geq 1$$

$$\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 \geq 2$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Substituindo as soluções primal-dual  $x^T = (x_1, x_2) = (1, 5)$  e  $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1.5, 0, 0.5)$  nos modelos, temos:

$$\max z = 1 + 2 \cdot 5 \Rightarrow 11$$

$$1 + 5 \leq 6 \Rightarrow 6 \leq 6$$

$$1 - 5 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 4$$

$$-1 + 5 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \Rightarrow 11$$

$$1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$$

$$1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e  $z = v$ , o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções  $x$  e  $\pi$  são ótimas para seus respectivos problemas.

$$\max z = 1 + 2 \cdot 5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1 + 5 \leq 6 \Rightarrow 6 \leq 6 \checkmark$$

$$1 - 5 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 4 \checkmark$$

$$-1 + 5 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4 \checkmark$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark$$

$$1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e  $z = v$ , o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções  $x$  e  $\pi$  são ótimas para seus respectivos problemas.

$$\max z = 1 + 2 \cdot 5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1 + 5 \leq 6 \Rightarrow 6 \leq 6 \checkmark$$

$$1 - 5 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 4 \checkmark$$

$$-1 + 5 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4 \checkmark$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark$$

$$1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

As soluções **são factíveis**, mas como podemos **garantir que são ótimas**?

# Solução dual pelo quadro primal

## Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e  $z = v$ , o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções  $x$  e  $\pi$  são ótimas para seus respectivos problemas.

$$\max z = 1 + 2 \cdot 5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1 + 5 \leq 6 \Rightarrow 6 \leq 6 \checkmark$$

$$1 - 5 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 4 \checkmark$$

$$-1 + 5 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4 \checkmark$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark$$

$$1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$$

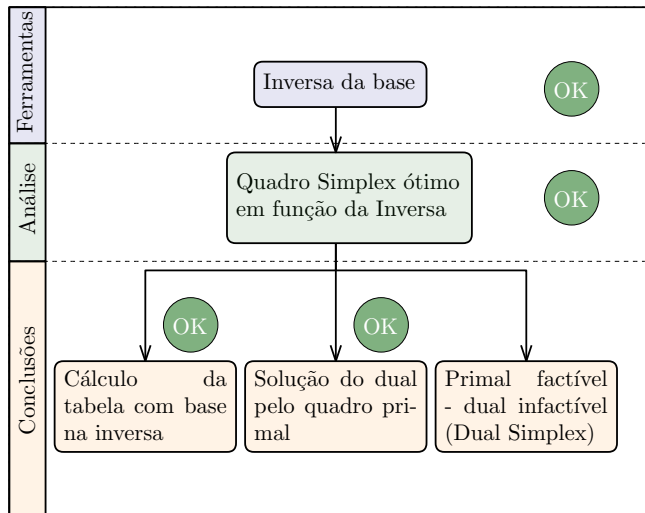
$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

As soluções **são factíveis**, mas como podemos **garantir que são ótimas**?

Pelo teorema fraco da dualidade parte 2, se  $Z = V$  para o par primal dual, então as soluções para ambos os problemas são ótimas.

# Objetivos

## Ferramentas e objetivos





## Primal factível - dual infactível

## Primal factível - dual infactível

Agora que sabemos que ao final do quadro Simplex, além de obtermos a solução ótima do primal, obtemos também a solução ótima do dual, podemos investigar o que ocorre com essa solução iteração a iteração. O que mostramos é que, **no quadro final primal (ótimo)** a solução dual é factível e ótima, **mas não sabemos nas iterações intermediárias**. Seja novamente o par primal-dual:

## Primal factível - dual infactível

Agora que sabemos que ao final do quadro Simplex, além de obtermos a solução ótima do primal, obtemos também a solução ótima do dual, podemos investigar o que ocorre com essa solução iteração a iteração. O que mostramos é que, **no quadro final primal (ótimo)** a solução dual é factível e ótima, **mas não sabemos nas iterações intermediárias**. Seja novamente o par primal-dual:

$$\begin{aligned}\max z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min v &= 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 2 \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0\end{aligned}$$

## Primal factível - dual infactível

Podemos analisar a cada iteração do Simplex, o que ocorre com a solução dual.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-Z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
$x_3$	1	1	1	0	0	6
$x_4$	1	-1	0	1	0	4
$x_5$	-1	1	0	0	1	4

$$\min v = 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 \geq 1$$

$$\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 \geq 2$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Na primeira iteração, a solução dual é factível?

## Primal factível - dual infactível

Solução atual  $\pi = (0, 0, 0)$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-z$
VB	-1	-2	0	0	0	0
$x_3$	1	1	1	0	0	6
$x_4$	1	-1	0	1	0	4
$x_5$	-1	1	0	0	1	4

$$\min v = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \Rightarrow 0$$

$$0 + 0 - 0 \geq 1 \Rightarrow 0 \geq 1 \quad \text{X}$$

$$0 - 0 + 0 \geq 2 \Rightarrow 0 \geq 2 \quad \text{X}$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Não, nenhuma restrição dual é satisfeita.

## Primal factível - dual infactível

Solução atual  $\pi = (0, 0, 2)$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-z$
VB	-3	0	0	0	2	8
$x_3$	2	0	1	0	-1	2
$x_4$	0	0	0	1	1	8
$x_2$	-1	1	0	0	1	4

$$\min v = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \Rightarrow 8$$

$$0 + 0 - 2 \geq 1 \Rightarrow -2 \geq 1 \quad \text{X}$$

$$0 - 0 + 2 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \quad \checkmark$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Na segunda iteração a solução ainda é dual infactível, porém uma restrição é satisfeita.

## Primal factível - dual infactível

Solução atual  $\pi = (1.5, 0, 0.5)$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$-z$
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
$x_1$	1	0	1/2	0	-1/2	1
$x_4$	0	0	0	1	1	8
$x_2$	0	1	1/2	0	1/2	5

$$\min v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \Rightarrow 11 \checkmark$$

$$1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark$$

$$1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Somente na última iteração (ou seja, na otimalidade primal) a solução dual é factível.

## Primal factível - dual infactível

Percebemos que para cada solução básica **factível** do primal, a solução correspondente do dual é **infactível** (exceto na otimalidade primal). Mas **por quê isso ocorre?** Para entender temos que recorrer novamente à tabela genérica Simplex.



## Primal factível - dual infactível

Considere a tabela genérica, bem como o modelo dual com separação de variáveis básicas e não básicas.

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-Z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

$$\pi \text{ irrestrito}$$

## Primal factível - dual infactível

Novamente, pelo **teorema das folgas complementares**, as variáveis com valores  $> 0$  no primal implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade. Multiplicando a primeira inequação pela inversa da base ( $B^{-1}$ ) e aplicando a transposta:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
1	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N$$

$$\pi \text{ irrestrito}$$

## Primal factível - dual infactível

Aplicando a transposta em ambos os lados da inequação, e movendo o termo para a direita.

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-Z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \pi^T \mathbf{N}$$

$$\pi \text{ irrestrito}$$

## Primal factível - dual infactível

Substituindo a solução  $\pi^T$  da primeira equação na inequação, ficamos com:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

$\pi$  irrestrito

## Primal factível - dual infactível

Note que o termo que define a restrição de factibilidade do dual, é exatamente o mesmo que define os custos na função objetivo da tabela Simplex referentes às variáveis não básicas.

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\max v = \pi^T \mathbf{b}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

$$\pi \text{ irrestrito}$$

## Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o custo das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

## Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o custo das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} < 0$$

O método continua,

## Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o custo das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} < 0$$

O método continua, quando

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Estamos na solução ótima.



## Conclusão

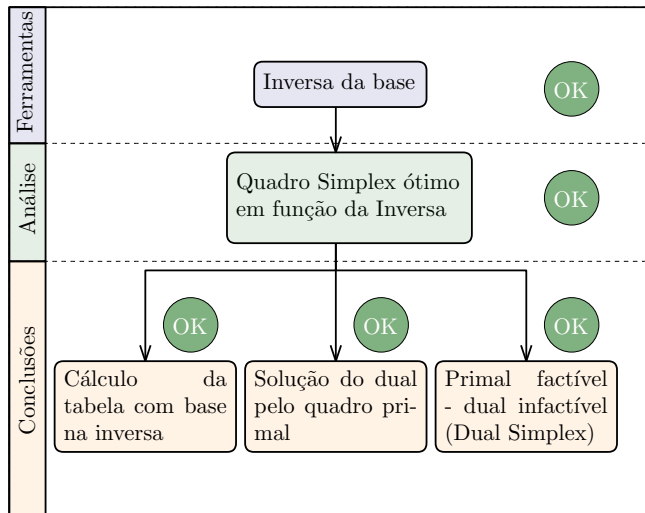
## Primal factível - dual infactível

### Conclusão

O custo das variáveis não básicas na função objetivo é justamente o critério de factibilidade do problema dual. O critério só é atingido quando a solução ótima do primal é encontrada. Ou seja, no método Simplex, a cada iteração temos uma solução primal factível e dual infactível, somente quando chegamos na otimalidade primal a solução dual é factível (e ótima).

# Objetivos

## Ferramentas e objetivos



## Primal factível - dual infactível

### Próximos passos

As três conclusões que chegamos nos possibilitam entender 3 aplicações: o algoritmo **Simplex Revisado** (apresentação disponível no site), a **Análise de sensibilidade** e o algoritmo **Dual-Simplex**.

## Ferramentas e objetivos

