Simplex fase I: variáveis artificiais

Alexandre Checoli Choueiri

12/09/2023

O que sabemos fazer

O Simplex

O que sabemos fazer

O algoritmo Simplex

O **algoritmo** Simplex requer uma solução básica factível para que possa ser iniciado. Quando temos um modelo somente com restrições do tipo $\leq$, sempre é possível criar uma SBF no início.

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned}
\max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\
10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\
2x_1 + x_2 \leq 6 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\min z = & -5x_1 & -2x_2 & & & \\
& 10x_1 + & 12x_2 + & x_3 & & = 60 \\
& 2x_1 + & x_2 + & & x_4 & = 6
\end{array}
$$

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Colocando os dados em forma tabular:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Como temos 2 restrições, a presença de uma matriz identidade ($\mathbf{I}_{2X2}$) já fornece uma solução básica factível (lembre-se de que os coef. da função objetivo também devem ser zerados nas colunas das variáveis básicas).

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições <=

O que sabemos fazer

Temos a solução $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

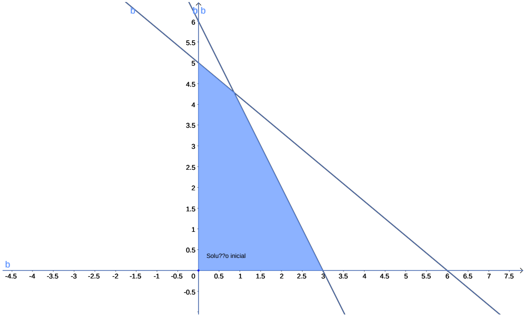
De forma que o sistema é **canônico**, e equivalente ao mostrado abaixo, em que a solução é trivial.

	x_3	x_4	-z
VB	0	0	0
x_3	1	0	60
x_4	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ é factível.



Modelo com restrições $>=$ ou $=$

O que não sabemos fazer

Restrições do tipo $>=$ ou $=$

Mas o que acontece quando temos restrições do tipo "$>=$" ou "$=$" no modelo? Considere o modelo abaixo.

$$
\begin{aligned}
\max z = x_1 + x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 & \geq 20 \\
x_1 & \leq 9 \\
x_2 & \leq 11 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

O que não sabemos fazer

Modelo com restrições >= ou =

O problema

$$
\begin{aligned}
\min\ z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 20 \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 9 \\
x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 11
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Na forma padrão, temos:

Modelo com restrições $>=$ ou $=$
O problema

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Na forma tabular:

Modelo com restrições $>=$ ou $=$

O problema

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Note que com esse modelo, a sol. básica formada pelas variáveis de folgas/excessos **não é factível**, devido a negatividade de x_3 na linha 2.

Modelo com restrições $>=$ ou $=$

O problema

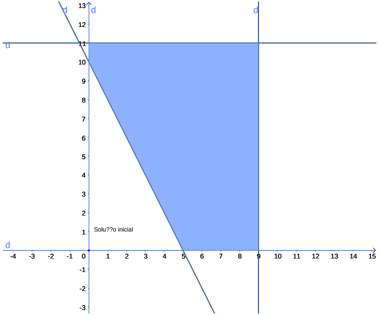
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Essa solução implicaria $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (-20, 9, 11)$, com $x_3 < 0 \rightarrow$ **infactível**

Modelo com restrições $>=$ ou $=$

O problema

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ não está na região factível.



O que não sabemos fazer

Método x Algoritmo Simplex

É por esse motivo que o **método** Simplex é composto por duas fases, chamadas **Fase I** e **Fase II**. Em ambas as fases o **algoritmo** Simplex é usado.

1. Método Simplex:
   1.1 **FASE I:** Verifica se o problema tem uma SBF inicial. Se não, tenta encontrar uma (pelo algoritmo Simplex e um modelo alterado).
   1.2 **FASE II:** Com uma SBF, inicia o algoritmo Simplex no modelo original.

Como operar a Fase I?

A solução

- Existem 2 formas de operarmos a Fase I do método Simplex, a fim de encontrarmos uma SBF. O chamado **método do big-M** e o **método das variáveis artificiais.**
- Como seguimos o material do criador do Simplex (George B. Dantzig), usaremos a sua sugestão: **método das variáveis artificiais**. Porém ambos são equivalentes.

A lógica das variáveis artificiais

Este método insere novas variáveis no modelo para artificialmente gerar uma matriz identidade nos coeficientes da matriz. Como elas não fazem parte do sistema, uma nova função objetivo é inserida, que deve minimizar a soma destas variáveis, levando o simplex a removê-las da base. Quando (se) isso ocorre, uma SBF é encontrada e as variáveis artificiais podem ser retiradas do sistema.

O método das variáveis artificiais

A solução

O **método das variáveis artificiais** consiste dos seguintes passos (considerando o modelo já na forma padrão):

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

O método das variáveis artificiais

A solução

Ao fim da otimização do novo sistema, faça:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

O método das variáveis artificiais

A solução

Vamos executar o método das variáveis artificiais no problema anterior.

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

O modelo na forma padrão não possui nenhum $b < 0$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min z = -x_1 + -x_2 & & & & & & \\
4x_1 & + 2x_2 & -x_3 & & & = & 20 \\
x_1 & & & + x_4 & & = & 9 \\
& x_2 & & & +x_5 & = & 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema
A solução

Adicionamos a cada restrição uma variável artificial.

$$
\begin{aligned}
\min z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 - x3 \quad + \bar{x}_6 &= 20 \\
x_1 \quad + x4 \quad + \bar{x}_7 &= 9 \\
x_2 \quad + x_5 \quad + \bar{x}_8 &= 11
\end{aligned}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Adicionando a nova função objetivo w:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min w = & & & & & + \bar{x}_6 & + \bar{x}_7 & + \bar{x}_8 & \\
 & 4x_1 + 2x_2 & -x3 & & & + \bar{x}_6 & & & = 20 \\
 & x_1 & & + x4 & & & + \bar{x}_7 & & = 9 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & & + \bar{x}_8 & = 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\min \ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Colocando o problema na forma tabular.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Para deixar na forma canônica em relação às variáveis $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8)$ é necessário zerar os coeficientes delas na função objetivo (marcados com 1):

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Após as atualizações temos a tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Com variáveis básicas $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (20, 9, 11)$ e não básicas $x_N^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$. De forma que podemos começar a aplicar o método Simplex.

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})\checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). ✓
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-5, -3, -1, -1\} = -5$ com x_1 entrando na base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{20}{4}, \frac{9}{1}\} = \frac{20}{4} = \bar{x}_6$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com variáveis básicas $x_B^T = (x_1, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que já conseguimos remover uma variável artificial da base (removemos $\bar{x}_6$ e inserimos x_1).

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. **OBS:** Aqui seria possível escolher outra variável para entrar na base (x_5). Teria alguma diferença?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. O nosso objetivo é **remover as variáveis artificiais da base.** Selecionando tanto x_4 quanto x_5 para entrar, forçaria uma artificial a sair ($\bar{x}_7$ ou $\bar{x}_8$), de forma que podemos escolher arbitrariamente.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando $\min \left\{ \frac{4}{1} \right\} = 4$ com $\bar{x}_7$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com a nova base $x_B^T = (x_1, x_4, \bar{x}_8,) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, \bar{x}_7, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que já conseguimos remover duas variáveis artificiais da base (agora inserimos x_4).

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença?

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença? Nesse caso sim! Se escolhermos x_2, a variável que sairia da base é x_1 (uma não artificial). Já escolhendo x_5 quem sai é $\bar{x}_8$ (uma artificial), de forma que devemos dar preferencia a escolha de x_5.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{1}{1}\} = 1$ com $\bar{x}_8$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivô $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivô $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$

Resolvendo o problema

A solução

A tabela atualizada fica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})\checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). ✓
5. Aplique o método Simplex na tabela atual. ✓

Fim da otimização Fase I

A solução

A lógica das variáveis artificiais

Com isso chegamos ao fim da otimização na Fase I. Agora verificamos se podemos continuar (se o problema original é factível), adaptando a tabela novamente (removendo colunas extras e trocando a função objetivo).

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   - 2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   - 2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   - 2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Vemos que o valor $w = 0$, ou seja, o problema original é **factível**.

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
    2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
    2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
    2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Das variáveis não-artificiais, não básicas (x_2, x_3), nenhuma tem valor > 0, portanto não eliminamos nenhuma.

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Todas as variáveis artificiais são não básicas, de forma que podemos remover todas essas colunas da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w
VB	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

- Ficamos com:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**. ✓
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

- Ao substituirmos novamente a função objetivo original (min $z = -x_1 - x_2$), nota-se que o sistema não se mantém na forma canônica.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

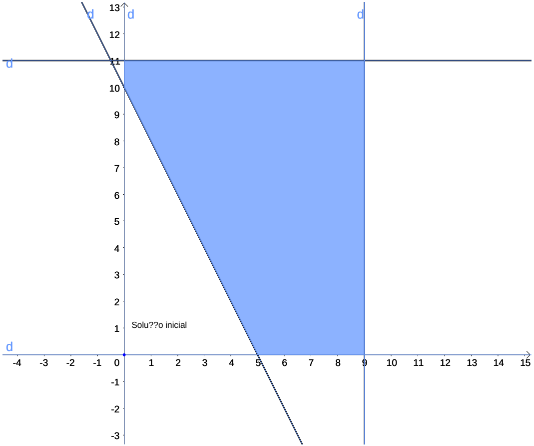
A nova tabela atualizada fica:

OBS: Note que conseguimos uma solução básica factível (**SBF**) somente com as variáveis originais.

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_1, x_4, x_5) = (5, 4, 11)$



O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**. ✓
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
3. $L_2 \leftarrow 2L_2$
4. $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	1	0	-1/2	0	0	10
x_2	2	1	-1/2	0	0	10
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	-2	0	1/2	0	1	1

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$
3. $L_4 \leftarrow 2L_4$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	0	0	0	1	11
x_2	0	1	0	0	1	11
x_4	1	0	0	1	0	9
x_3	-4	0	1	0	2	2

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	0	1	1	20
x_2	0	1	0	0	1	11
x_1	1	0	0	1	0	9
x_3	0	0	1	4	2	38

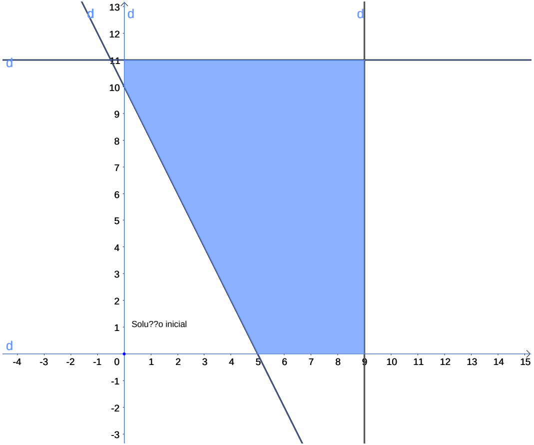
Solução ótima

Solução ótima com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$.



Conclusões

Conclusões

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).
4. Após o fim da Fase 1 existem duas possibilidades:
   4.1 $w > 0 \rightarrow$ problema original **infactível**.
   4.2 $w = 0 \rightarrow$ problema original **factível**, base atual é factível para o problema original.