Programação Inteira I - Introdução

Alexandre Checoli Choueiri

28/01/2024

Motivação

Os programas **lineares**

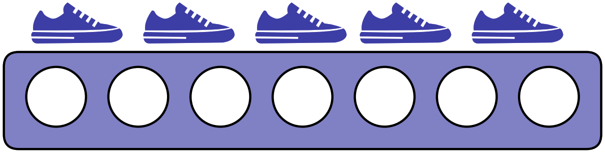
Até o momento trabalhamos com a chamada **programação linear - PL**. Uma das premissas da PL é a de que as variáveis do problema $x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, podem assumir valores fracionários.

Em muitos casos isso não é um problema, por exemplo:

Motivação

1 - Variáveis com números inteiros

Considere uma linha de produção de sapatos:



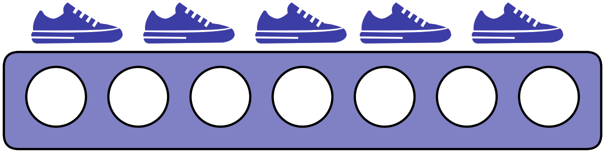
Supondo que a solução ótima de um PL tenha solução para a produção de 480.5 sapatos em um dia, a um custo de R$90. **O custo total desa solução é de:**

$$Z = 480.5 \cdot 90 = R\$43.245,00$$

Motivação

1 - Variáveis com números inteiros

Considere uma linha de produção de sapatos:



Como não podemos produzir 480.5 sapatos, podemos usar uma técnica de **arredondamento**, podemos produzir 481 sapatos, com isso temos o custo:

$$Z = 481 \cdot 90 = R\$43.290,00$$

Motivação

1 - Variáveis com números inteiros

Note que a diferença entre os custos é ínfima, somente

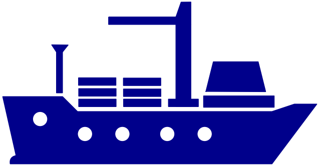
$$\Delta Z = R\$43.290,00 - R\$43.245,00 = 45$$

A diferença é ínfima, apenas 0.103%. Com essa diferença, podemos considerar **aceitável** a técnica de arredondamento.

Motivação

1 - Variáveis com números inteiros

Considere a produção de navios...



Os navios podem levar até 36 meses para serem construídos, com custos altíssimos.

Suponha ainda que a solução de um PL para o planejamento de construção de navios para os próximos 5 anos foi de 7.8 un.

E agora? Arredondamos para cima (8) ou para baixo (7)?

Motivação

1 - Variáveis com números inteiros

Arredondar ou não arredondar?

Nessa caso, como os custos unitários e tempo de produção são muito elevados, qualquer erro, por menor que seja, causa um impacto muito grande no planejamento final. Esse é um exemplo em que não podemos usar o arredondamento! Precisamos saber qual a **solução ótima inteira**.

Motivação

2 - Variáveis binárias

Variáveis binárias

No entanto, a maior vantagem da programação inteira está no **uso de variáveis binárias** (variáveis que só podem assumir valores 0 ou 1). Essas variáveis possibilitam a criação de muitos novos modelos, pois representam decisão do tipo "sim" e "não". Veremos exemplos na parte de modelagem.

Variáveis binárias

No entanto, a maior vantagem da programação inteira está no **uso de variáveis binárias** (variáveis que só podem assumir valores 0 ou 1). Essas variáveis possibilitam a criação de muitos novos modelos, pois representam decisão do tipo "sim"e "não". Veremos exemplos na parte de modelagem.

$$x = \begin{cases} 1: & \text{Se a máquina é utilizada} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Motivação

2 - Variáveis binárias

Variáveis binárias

No entanto, a maior vantagem da programação inteira está no **uso de variáveis binárias** (variáveis que só podem assumir valores 0 ou 1). Essas variáveis possibilitam a criação de muitos novos modelos, pois representam decisão do tipo "sim" e "não". Veremos exemplos na parte de modelagem.

$$x = \begin{cases} 1: & \text{Se a máquina é utilizada} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1: & \text{Se o investimento } i \text{ é feito} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Motivação

2 - Variáveis binárias

Variáveis binárias

No entanto, a maior vantagem da programação inteira está no **uso de variáveis binárias** (variáveis que só podem assumir valores 0 ou 1). Essas variáveis possibilitam a criação de muitos novos modelos, pois representam decisão do tipo "sim"e "não". Veremos exemplos na parte de modelagem.

$$x = \begin{cases} 1: & \text{Se a máquina é utilizada} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1: & \text{Se o investimento } i \text{ é feito} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{Se o caminho entre o ponto } i \text{ e } j \text{ é percorrido} \\ 0: & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Formalização e regiões factíveis

Formalização e regiões factíveis

Agora formalizaremos as possibilidades de programas inteiros (PI) que existem (**podemos ter modelos com variáveis inteiras e reais na mesma formulação**). Além disso, precisamos entender como é a região factível dessas novas formulações, pois elas estão diretamente relacionadas ao método de resolução dos problemas (método *Branch and Bound*).

Formalização e regiões factíveis

RELEMBRANDO

Um modelo de **programação linear (PL)** admite valores reais não negativos para as suas variáveis, e assume a forma genérica:

$$\begin{aligned} \text{min z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

1. **A** é uma matriz mxn chamada matriz dos coeficientes.
2. $\mathbf{c}^T$ é o vetor dos custos.
3. $\mathbf{b}^T$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.

Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{max z} = \ & 5x_1 - x_2 \\ & 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x \in \mathbb{R}^2_+ \end{aligned}$$

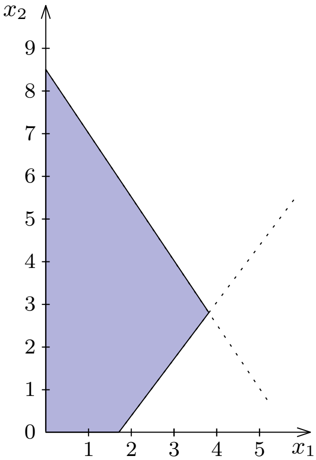
Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}_{+}
\end{aligned}
$$

Note que pelo domínio das variáveis, estamos tratando de um problema de programação linear.

Formalização e regiões factíveis



E a sua **região factível** é dada pela área definida pela intersecção das restrições.

Formalização e regiões factíveis

Já um modelo de **programação inteira (PI)** admite valores inteiros não negativos para as suas variáveis, e assume a forma genérica:

$$\begin{aligned} \text{min } z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n_+ \end{aligned}$$

1. **A** é uma matriz mxn chamada matriz dos coeficientes.
2. $\mathbf{c}^T$ é o vetor dos custos.
3. $\mathbf{b}^T$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.

Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
& x \in \mathbb{Z}_+^2
\end{aligned}
$$

[1] O nome programação inteira "esconde" que a mesma também é linear, o correto seria "programação linear inteira", mas para diferenciar mais do termo PL, convenciona-se usar somente PI

Formalização e regiões factíveis

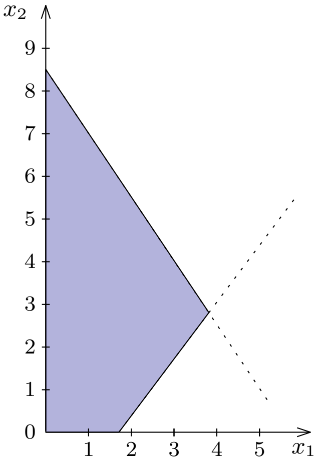
Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\ & 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Note que pelo domínio das variáveis, estamos tratando de um problema de programação inteira[1].

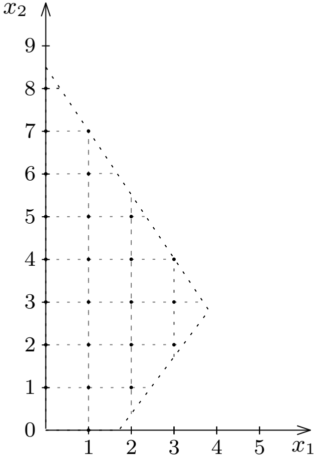
[1] O nome programação inteira "esconde" que a mesma também é linear, o correto seria "programação linear inteira", mas para diferenciar mais do termo PL, convenciona-se usar somente PI

Formalização e regiões factíveis



E agora, qual é a região factível do PI?

Formalização e regiões factíveis



Somente o **conjunto de pontos inteiros** que estão dentro da região delimitada pelas restrições.

Formalização e regiões factíveis

Um modelo de **programação inteira mista (PIM)** admite tanto valores inteiros quanto reais não negativos para as suas variáveis, e assume a forma genérica:

$$
\begin{aligned}
\text{min z} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\mathbf{y} \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^p_+
\end{aligned}
$$

1. **A** é uma matriz mxn e **D** uma matriz mxp.
2. $\mathbf{c}^T$ é um vetor $1xn$ e $\mathbf{y}^T$ um vetor $1xp$.
3. $\mathbf{b}^T$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.

Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 && \leq 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 && \leq 17 \\
& x_1 \in \mathbb{Z}_+, x_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

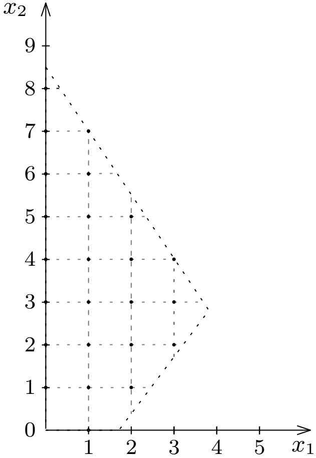
Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 \qquad \leq 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 \qquad \leq 17 \\
& \mathbf{x_1} \in \mathbb{Z}_+, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

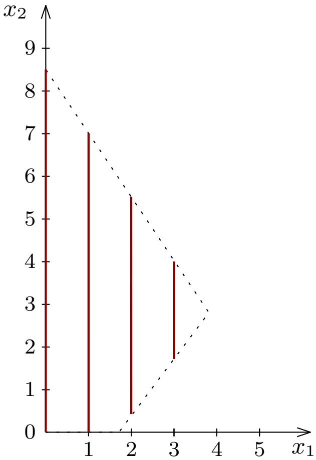
Note que pelo domínio das variáveis, estamos tratando de um problema de programação inteira mista (PIM), pois x_1 é inteiro e x_2 pertence aos reais.

Formalização e regiões factíveis



E agora, qual é a região factível do **PIM**?

Formalização e regiões factíveis



Somente os **segmentos de reta** que estão dentro da região delimitada pelas restrições.

Formalização e regiões factíveis

Um modelo de **programação binaria (PB)** admite somente valores 0 ou 1 para suas variáveis.

$$
\begin{aligned}
\min \mathsf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n_+
\end{aligned}
$$

Em que:

1. $\mathbf{A}$ é uma matriz mxn chamada matriz dos coeficientes.
2. $\mathbf{c}^T$ é o vetor dos custos.
3. $\mathbf{b}^T$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.
4. $\mathbb{B}^n$ representa o espaço dos vetores com n componentes binárias (0,1).

Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
& x \in \mathbb{B}^2
\end{aligned}
$$

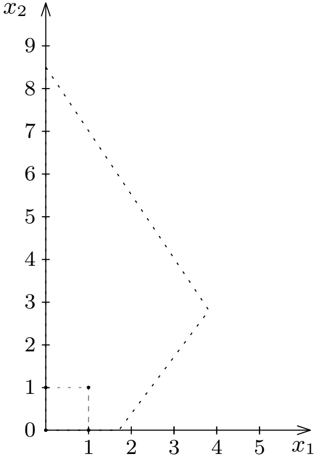
Formalização e regiões factíveis

Exemplo: Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{max z} = {} & 5x_1 - x_2 \\ & 7x_1 - 5x_2 \leq 13 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{B}^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Note que pelo domínio das variáveis, estamos tratando de um problema de programação binária, pois x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{0,1\}$.

Formalização e regiões factíveis



Somente os **pontos 0-1** que estão dentro da região delimitada pelas restrições.

Formalização e regiões factíveis

Conclusão

Quando falamos em programação inteira existem 3 possibilidades de modelos/formulações:

1. **PI: Programação inteira** - todas as variáveis são inteiras.
2. **PIM: Programação inteira mista** - existe uma mistura de variáveis reais e inteiras.
3. **PB: Programação binária** - As variáveis só podem assumir valores 0 ou 1.

Formalização e regiões factíveis

Conclusão

Quando falamos em programação inteira existem 3 possibilidades de modelos/formulações:

1. **PI: Programação inteira** - todas as variáveis são inteiras.
2. **PIM: Programação inteira mista** - existe uma mistura de variáveis reais e inteiras.
3. **PB: Programação binária** - As variáveis só podem assumir valores 0 ou 1.

ATENÇÃO: Embora os termos programação **linear** e programação **inteira** possam dar a entender que os programas inteiros não são lineares, isso não é verdade! Poderíamos chamá-los de **programas inteiros lineares**. É só uma questão de convenção.

Modelagem inteira e binária

Modelagem inteira e binária

Agora podemos entender alguns problemas que **só podem ser modelados usando a programação inteira** (a maioria dos problemas reais entram nesta categoria). Outros modelos serão vistos na continuação da disciplina (Pesquisa Operacional II).

Algumas das aplicações incluem:

1. Roteirização de veículos
2. Sequenciamento de ordens de produção
3. Carregamento de contêineres/paletes
4. Determinação de escalas de horários
5. Dimensionamento de frota

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

Considere que você irá acampar em uma montanha. Você vai levar uma mochila de capacidade 150kg, e deve escolher um subconjunto de itens para levar na viagem, de forma que o peso total da mochila não seja excedido. Sabendo ainda que cada item possui uma pontuação, valorando o quão útil ele é para a viagem, o seu objetivo é maximizar a soma da pontuação dos itens levados. Considere os itens abaixo, com a relação de pontuação e peso para cada um:

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

Considere que você irá acampar em uma montanha. Você vai levar uma mochila de capacidade 150kg, e deve escolher um subconjunto de itens para levar na viagem, de forma que o peso total da mochila não seja excedido. Sabendo ainda que cada item possui uma pontuação, valorando o quão útil ele é para a viagem, o seu objetivo é maximizar a soma da pontuação dos itens levados. Considere os itens abaixo, com a relação de pontuação e peso para cada um:

	Ipod	**Abobrinha**	$\mathbf{H_2O}$	**Canivete**	**Carne**	**Arroz**	**Aveia**	**PS4**
Valor	10	8	5	15	25	17	8	30
Peso	50	55	60	45	15	25	35	25

Como fica o modelo matemático para o **problema da mochila**?

Sejam as variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o item } i \text{ é levado na mochila} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

Sejam as variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o item } i \text{ é levado na mochila} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{max z} = \quad & 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 15x_4 + 25x_5 + 17x_6 + 8x_7 + 30x_8 \\ \text{Sujeito à} \quad & 50x_1 + 55x_2 + 60x_3 + 45x_4 + 15x_5 + 25x_6 + 35x_7 + 25x_8 \leq 150 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, ..., 8\} \end{aligned}$$

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

Importante

Precisamos conseguir escrever os modelos matemáticos de forma genérica, para qualquer conjunto de dados. Por exemplo, se existirem mais 2 itens a serem escolhidos, a **natureza** da função objetivo e das restrições **permanece a mesma** (pois o problema continua sendo o mesmo!). Para escrever os modelos de forma genérica usamos parâmetros, conjuntos e a notação de somatório.

Relembrando alguns termos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i a_i =$$

Relembrando alguns termos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i a_i =$$

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

Relembrando alguns termos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i a_i = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5$$

ATENÇÃO: Quando temos um somatório, basta expandirmos ele horizontalmente.

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq 0 \quad , j = 1, 2, 3.$$

Modelagem inteira e binária

O problema da mochila

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq 0 \quad , j = 1, 2, 3.$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 0$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 0$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 0$$

ATENÇÃO: Neste caso existe um somatório que deve ser expandido para cada linha do conjunto $j = 1, 2, 3$, assim temos uma variação tanto em i (nos somatórios), quanto em j (cada restrição representa um novo j).

Voltando para o **modelo genérico da mochila**, temos:

Conjuntos:

I: Conjunto de itens.

Parâmetros:

w_i: Peso do item $i, \forall i \in I$.

v_i: Valor do item $i, \forall i \in I$.

C : Capacidade da mochila.

Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o item } i \text{ é levado na mochila} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

$x_i \; in\{0,1\} \forall i \in I$

O modelo fica então:

$$\max \text{ z } = \sum_{i \in I} x_i v_i$$

sa:

$$\sum_{i \in I} x_i w_i \leq C$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I$$

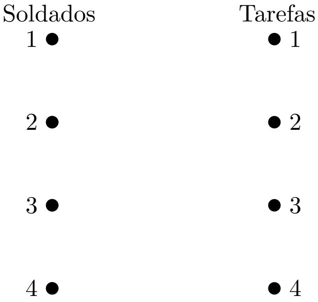
A função objetivo maximiza a soma dos valores de todos os itens que são levados. A única restrição do modelo garante que a capacidade da mochila não é excedida pelo peso dos itens levados.

Considere agora que você é responsável pela designação de 4 tarefas à 4 soldados de um exército. Você possui o histórico de notas de cada um desses soldados para cada uma das tarefas (notas de 0 a 10). Sabendo que cada soldado deve executar somente uma tarefa, e todas as tarefas devem ser executadas, bem como a tabela de notas ao lado. Qual é o modelo de programação inteira para o **problema de designação**?

	AT1	AT2	AT3	AT4
	3	2	3	7
	4	3	3	5
	1	7	3	3
	3	5	1	3

Modelagem inteira e binária

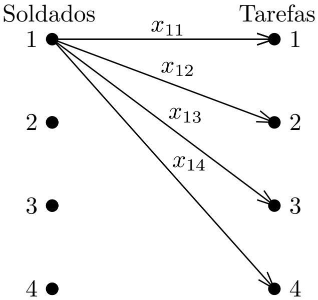
O problema de designação



Como no problema do transporte, podemos entender o problema da designação por um grafo. **Quais devem ser as variáveis para esse problema**?

Modelagem inteira e binária

O problema de designação

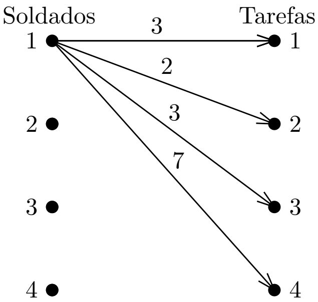


Podemos criar uma variável para cada combinação soldado-atividade, gerando 16 variáveis.

Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{Se o soldado } i \text{ executa a atividade } j \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

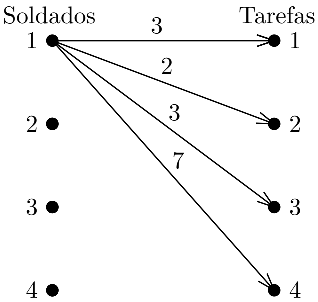
$\forall i, j \in (1, ..., 4)$



A função objetivo deve maximizar a soma das aptidões dos soldados i que desempenham as tarefas j.

Modelagem inteira e binária

O problema de designação

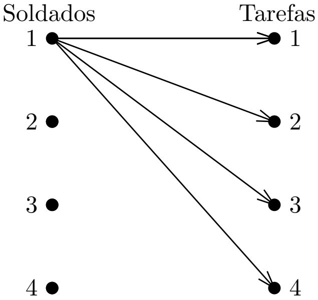


A função objetivo deve maximizar a soma das aptidões dos soldados i que desempenham as tarefas j.

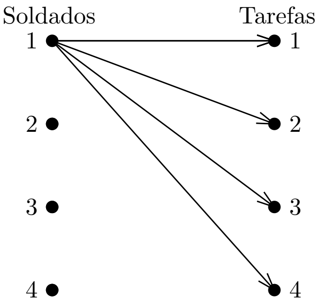
$$\boxed{\text{max z} = 3x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + ... + 1x_{43} + 3x_{44}}$$

Modelagem inteira e binária

O problema de designação



A primeira restrição diz todo **soldado deve executar uma única tarefa**. Para o soldado $i = 1$ temos:

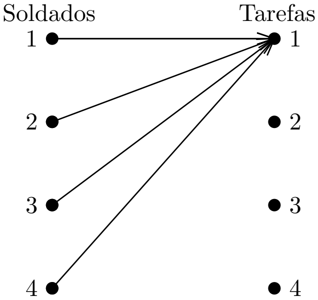


A primeira restrição diz todo **soldado deve executar uma única tarefa**. Para o soldado $i = 1$ temos:

$$\boxed{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1}$$

Modelagem inteira e binária

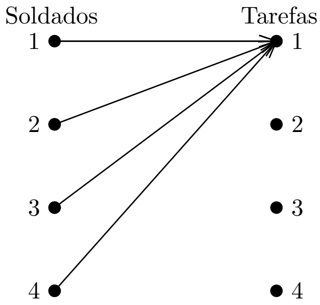
O problema de designação



Ainda, **toda tarefa deve ser executada por um soldado**. Para a tarefa $j = 1$ temos:

Modelagem inteira e binária

O problema de designação



Ainda, **toda tarefa deve ser executada por um soldado**. Para a tarefa $j = 1$ temos:

$$\boxed{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1}$$

Modelagem inteira e binária

O problema de designação

$$
\begin{aligned}
\text{max z} = 3x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + \ldots + 1x_{43} + 3x_{44} \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, \forall j \in (1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

O modelo genérico **para o problema da designação**, fica então:

Conjuntos:

I: Conjunto de recursos (soldados) e atividades (tarefas).

Parâmetros:

a_{ij}: Valor do recurso i para a tarefa j $\forall i, j \in I$.

Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{Se o soldado } i \text{ executa a atividade } j \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

O modelo fica então:

$$\text{max z} = \sum_{i,j \in I} x_{ij} a_{ij}$$

sa:

$$\sum_{j \in I} x_{ij} = 1, \forall i \in I$$

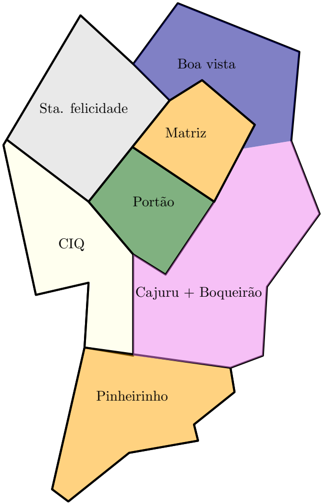
$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \forall j \in I$$

$$x_{ij}, \forall i, \forall j \in I$$

Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

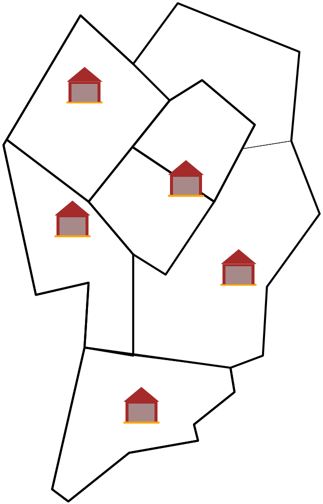
Considere o conjunto de bairros de Curitiba (não todos).



Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

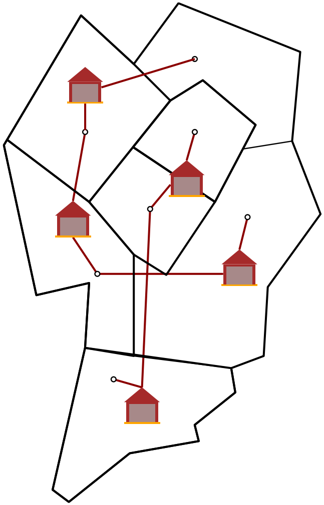
A prefeitura vai construir **novas estações contra-incêndios**. Existem locais possíveis para a construção dessa estações. Existe um **custo** para a construção de cada estação (*se a mesma for utilizada*).



Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

E pelas localizações das estações, sabemos **quais bairros que ela pode atender**. A restrição é de que o tempo-resposta de chegada ao local deve ser inferior a 8 minutos. A imagem ao lado mostra **quais estações podem atender quais bairros**.



A informação de quais estações podem atender quais bairros pode ser resumida por uma **matriz de adjacências**, com valores iguais a 1, se a estação da linha atende o bairro da coluna, e 0 caso contrário. Considere a matriz de adjacência abaixo, bem como os custos de instalação de cada estação (não é uma representação das imagens anteriores).

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

A informação de quais estações podem atender quais bairros pode ser resumida por uma **matriz de adjacências**, com valores iguais a 1, se a estação da linha atende o bairro da coluna, e 0 caso contrário. Considere a matriz de adjacência abaixo, bem como os custos de instalação de cada estação (não é uma representação das imagens anteriores).

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

Quais estações devem ser construídas de forma que **todos os bairros sejam atendidos por pelo menos uma delas**, e os **custos** totais de construção sejam **minimizados**?

Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se a estação } i \text{ é construída} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases}$$

$\forall i \in (1, ..., 4)$

Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

A função objetivo deve minimizar os custos de construção, portanto:

Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

A função objetivo deve minimizar os custos de construção, portanto:

$$\text{min z} = 500x_1 + 600x_2 + 450x_3 + 800x_4$$

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

As únicas restrições são de cobertura, ou seja, considerando o bairro 1: **pelo menos** uma das 2 estações capazes de atendê-lo deve ser construída, assim, temos:

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

As únicas restrições são de cobertura, ou seja, considerando o bairro 1: **pelo menos** uma das 2 estações capazes de atendê-lo deve ser construída, assim, temos:

$$\boxed{x_1 + x_4 \geq 1}$$

Fazendo isso para **todos os bairros**, temos:

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

	Bairros						
Estações	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Custo**
1	1	0	0	0	1	0	500
2	0	1	0	0	0	1	600
3	0	0	0	1	0	1	450
4	1	0	1	0	0	0	800

Fazendo isso para **todos os bairros**, temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_4 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

O modelo genérico para o **problema da cobertura de conjuntos** fica então:

Conjuntos:

I: Conjunto de estações.

J: Conjunto de bairros.

Parâmetros:

c_i: Custo de abrir a estação i, $\forall i \in I$.

a_{ij}: 1 se a estação i atende o bairro j, 0 c.c, $\forall j \in J, \forall i \in I$.

Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se a estação } i \text{ é construída} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases} \qquad \forall i \in I$$

Modelagem inteira e binária

O problema da cobertura de conjuntos

O modelo fica então:

$$\text{min z} = \sum_{i \in I} x_i c_i$$

sa:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \forall j \in J$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in I$$

OBS: Se a restrição for de igualdade (ou seja, cada região deve ser atendida **exatamente** por uma estação), o problema é chamado de **partição de conjuntos**.

$$\text{min z} = \sum_{i \in I} x_i c_i$$

sa:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i = 1, \forall j \in J$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in I$$

Possibilidades da modelagem binária

Possibilidades da modelagem binária

Modelagem de situações complexas

Vimos alguns modelos simples que usam variáveis inteiras/binárias, são eles:

1. Problema da mochila
2. Problema da designação
3. Problema de cobertura/partição de conjuntos

No entanto, as variáveis binárias podem ser usadas para modelar situações mais complexas, tais como:

1. Implicações "se então"
2. Restrição ativa ou inativa
3. Relações lógicas

Dentre outras

Veremos algumas dessas possibilidades por meio de um exemplo.

Possibilidades da modelagem binária

Considere que você está interessado em escolher um conjunto de investimentos dentre 7 possibilidades $\{1, ..., 7\}$. Sem considerar a função objetivo, ou mesmo os retornos esperados para os investimentos, e sabendo que as variáveis de decisão são:

Possibilidades da modelagem binária

Considere que você está interessado em escolher um conjunto de investimentos dentre 7 possibilidades $\{1, ..., 7\}$. Sem considerar a função objetivo, ou mesmo os retornos esperados para os investimentos, e sabendo que as variáveis de decisão são:

Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1 : \text{Se o investimento } i \text{ é escolhido} \\ 0 : \text{c.c} \end{cases} \qquad x_i \in \{0, 1\} \forall i \in (1, ..., 7)$$

Modele as seguintes restrições.

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

II - Você deve investir em pelo menos um deles

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 3$$

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 3$$

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 3$$

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

$$x_4 \leq x_2$$

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

Possibilidades da modelagem binária

I - Você não pode investir em todos eles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 7$$

II - Você deve investir em pelo menos um deles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

III - Você pode realizar no máximo 3 investimentos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 3$$

IV - O investimento 1 ou (incluso) o investimento 2 deve ser selecionado

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

V - O investimento 4 só pode ser escolhido se o 2 também for

$$x_4 \leq x_2$$

VI - Se o investimento 2 ou 3 ou 4 forem escolhidos, o 1 também deve ser

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3x_1$$

Implementação no GUSEK

Implementação no GUSEK

Podemos implementar facilmente modelos com variáveis inteiras/binárias nos arquivos .lp do GUSEK. O vídeo *1.1 Solver GUSEK* da página de treinamentos mostra todas as possibilidades (a partir do modelo 2).