

Dualidade: Modelos e Teoremas

1. **(R)** Para cada um dos modelos de PL abaixo, escreva o seu dual (*usando a definição de dualidade*) - Exercício extra, **não precisa fazer**.

$$\begin{array}{rcll}
 \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 \\
 & x_1 & & \leq 3 \\
 \text{(a)} & & & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1 & , & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min z = & x_1 & + & 2x_2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 \leq 3 \\
 \text{(b)} & 3x_1 & + & 4x_2 \leq 5 \\
 & x_1 & - & x_2 \leq 2 \\
 & x_1 & , & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 \\
 & x_1 & & \leq 3 \\
 \text{(c)} & & & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1 \geq 0 & , & x_2 \text{ irrestrito}
 \end{array}$$

2. **(R)** Para cada um dos modelos do exercício anterior, encontre o dual **usando a tabela de conversão**.
3. **(R)** Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R\$ 60,00 por unidade e o de B, R\$ 70,00 por unidade. Você trabalha em uma empresa que aluga máquinas do tipo M1 e M2, e ficou sabendo dos dados de produção dos produtos A e B da empresa. Você tem interesse em alugar as suas máquinas para a empresa, de forma a gerar lucro, e deseja usar as informações que obteve da empresa para criar um modelo de PL que te auxilie nesse tarefa. Com base nisso, faça o que se pede:
- Escreva o modelo de PL para o problema da empresa.
 - Escreva o modelo de PL para o seu problema.
 - Por algum motivo qualquer, nesse momento nem você e nem a empresa possuem um solver para encontrar as soluções ótimas, de forma que devem tentar encontrar as melhores soluções manualmente (sem o método gráfico também!). Você fica sabendo que a empresa conseguiu encontrar uma solução factível para o problema com lucro total de $z = 240$. Da mesma forma você está tentando encontrar soluções para o seu problema antes de ir fazer uma proposta para a empresa, e a sua melhor solução tem um custo de $v = 310$. O seu chefe afirma que você não deve parar de buscar soluções até encontrar uma em que o custo é de $v = 230$ (pois ele imagina que com esse valor a oferta será irrecusável). O que você pode afirmar sobre a intuição do seu chefe? Se baseie nos teoremas da dualidade para compor o seu argumento.
 - Agora você têm acesso a um solver muito potente (GUSEK), e consegue utilizá-lo para encontrar uma solução. Encontre a solução ótima pelo solver.
 - Seu chefe é um homem muito desconfiado, e não acredita que a resposta que você encontrou é a ótima (embora ele conheça os teoremas de dualidade e acredite neles). Como

you can prove that your solution is indeed optimal? (DICA: convince-o pela utilização dos teoremas).

4. **(R)** Considerando os modelos primal-dual encontrados no exercício 1a, adicione as folgas aos modelos e crie os relacionamentos entre as variáveis de um e as folgas do outro (relação dada pelo teorema das folgas complementares). Em seguida resolva o modelo primal pelo método gráfico, e use os relacionamentos para encontrar a solução do problema dual. Verifique se as soluções são de fato ótimas (também usando os teoremas).
5. **(R)** Uma nutricionista deseja montar uma dieta a custo mínimo, com base em 6 alimentos diferentes (chamados 1,2,3,4,5,6). A dieta deve atingir as quantidades mínimas de vitamina C e A de 19 e 9 unidades. Cada kg de alimento contribui com uma quantidade de vitamina A e C, e tem um custo, como mostrados na Tabela 1:

Vitaminas	Número de unidades de nutriente por kg de comida						Demanda mínima de vitaminas
	1	2	3	4	5	6	
Vitamina A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamina C	0	1	3	1	3	2	19
Custo/kg do alimento	35	30	60	50	27	22	

Table 1: Tabela de alimentos e componentes nutricionais

- (a) Escreva o modelo de PL referente ao problema da dieta.
- (b) Um vendedor de suplementos deseja convencer a nutricionista a comprar as suas pílulas de vitamina A e vitamina C, ao invés de atingir os valores por uma dieta alimentícia. No entanto, ele sabe que os valores cobrados pelas pílulas (π_1 e π_2) devem compensar para a nutricionista, ao mesmo tempo que devem gerar lucro para ele. Crie o modelo para o vendedor de pílulas.
- (c) O vendedor conseguiu descobrir a solução ótima referente ao modelo da nutricionista, com valores $\bar{x}^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2)$. Com base nessa solução, encontre os preços ótimos para o problema do vendedor, bem como o seu lucro total (usando a resposta encontrada).
6. **(R)** Pelas relações existentes entre os problemas primal-dual, podemos escolher a maneira mais fácil de se obter uma resposta, seja resolvendo o dual ou o primal. Considere o modelo abaixo:

$$\begin{aligned}
 \max z = & \quad 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & \leq 6 \\
 & 4x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & \leq 15 \\
 x_i \geq 0 & \quad i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

Encontre a solução do modelo usando o dual e o teorema das folgas complementares (confirme a sua resposta encontrando a solução pelo solver GUSEK).

7. **(R)** Uma empresa pode produzir 2 tipos de fertilizante (HIGH e LOW) a partir de 3 MP's (1,2 e 3). Cada kg de fertilizante produzido consome uma quantidade de MP, e gera um determinado lucro pela sua venda. A empresa possui estoques limitados das MP. Os dados são resumidos na Tabela 2.
- (a) Encontre o modelo de PL para o problema de fabricação dos fertilizantes.

Qtde necessária			
MP	HIGH	LOW	Estoque de MP
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Lucro	1	12	

Table 2: Dados para produção de fertilizantes

- (b) Devido a uma instabilidade global, o mercado está com falta no suprimento de MPs dos tipos 1, 2 e 3. Um investidor deseja comprar os estoques de MPs da empresa dos fertilizantes. Escreva o modelo de PL que representa o quanto ele deve oferecer por kg de MPs para a fabricante de fertilizantes.
- (c) A fabricante de fertilizantes está disposta a realizar a venda, se os custos oferecidos pelas MPs pelo menos se equipararem ao lucro que eles teriam pela venda dos fertilizantes, pois vendendo as MPs não seria necessário gastar com produção, mão de obra, etc... Quais devem ser os valores oferecidos por kg das MPs 1,2 e 3 pelo investidor, para que a empresa venda seus estoques? Use a PL para determinar a sua resposta.