

# Simplex fase II

Alexandre Checoli Choueiri

08/08/2023

- ① Introdução e premissas
- ② A ideia geral do método
- ③ A intuição algébrica
- ④ Simplex na forma tabular  
O Algoritmo Simplex Fase II
- ⑤ A geometria do Simplex

## Introdução e premissas

## Premissas

O **Método Simplex** é aplicado em um sistema da seguinte forma:

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

$$x \geq 0$$

E tem por objetivo encontrar valores de  $x$  que satisfaçam as equações, minimizando a função  $z$ .

O **Método Simplex** é aplicado em um sistema da seguinte forma:

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

$$x \geq 0$$

E tem por objetivo encontrar valores de  $x$  que satisfaçam as equações, minimizando a função  $z$ . O Método Simplex é composto de 2 etapas: **Simplex Fase I** e **Simplex Fase II**. Por mais **contra-intuitivo** que possa parecer, começaremos pelo algoritmo **Simplex Fase II**.

# Premissas

Para entendermos como o algoritmo Simplex Fase II funciona, precisamos retomar o conceito de **sistemas canônicos**:

Um sistema:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

## Premissas

Para entendermos como o algoritmo Simplex Fase II funciona, precisamos retomar o conceito de **sistemas canônicos**:

Um sistema:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

É dito canônico em relação às variáveis  $x_B$ , se o mesmo pode ser reescrito como:

$$\mathbf{I}x_B + \bar{\mathbf{A}}x_N = \mathbf{b}$$

## Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:



## Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão**. ✓

Já sabemos como transformar um sistema na forma padrão:

1. Função objetivo  $\rightarrow$  minimização
2. Restrições  $\rightarrow$  equações
3.  $b \rightarrow \geq 0$
4.  $x \rightarrow \geq 0$

## Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão**. ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a  $x_B$ . ✓

Sabemos que por meio do **pivoteamento** conseguimos deixar o sistema na forma canônica

$$\mathbf{I}x_B + \bar{\mathbf{A}}x_N = \mathbf{b}$$

## Premissas

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão**. ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a  $x_B$ . ✓
3. O sistema deve ter uma **solução básica factível** (???).

Não sabemos o que é uma **solução básica factível**! Para continuarmos, precisamos entender o que é uma **solução básica**, e o que é uma **solução básica factível**.

### Definição

**Solução básica:** Uma *solução básica* de um sistema linear de equações, consiste em zerar as variáveis independentes, chamadas de variáveis não básicas ( $x_N = 0$ ), e resolver o sistema pelas variáveis básicas ( $x_B$ ). Se o sistema está na forma canônica, temos que  $x_N = 0$  e  $x_B = b$ .

## Definição

**Solução básica:** Uma *solução básica* de um sistema linear de equações, consiste em zerar as variáveis independentes, chamadas de variáveis não básicas ( $x_N = 0$ ), e resolver o sistema pelas variáveis básicas ( $x_B$ ). Se o sistema está na forma canônica, temos que  $x_N = 0$  e  $x_B = b$ .

Ou seja, se o sistema já está na forma canônica, uma **solução básica** nada mais é do que o método que já estamos usando para resolver sistemas!

$$\underbrace{I x_B}_b + \underbrace{\bar{A} x_N}_0 = b$$

## Premissas

**EXEMPLO** O sistema abaixo possui uma **solução básica trivial**? Se sim, indique quais são as variáveis básicas ( $x_B$ ) e as não básicas ( $x_N$ ), escrevendo o sistema na forma canônica.

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

## Premissas

**EXEMPLO** O sistema abaixo possui uma **solução básica trivial**? Se sim, indique quais são as variáveis básicas ( $x_B$ ) e as não básicas ( $x_N$ ), escrevendo o sistema na forma canônica.

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = & 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = & 30 \end{array}$$

se reescrevermos o sistema na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

## Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$



## Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}}_b$$

Portanto temos as variáveis **básicas**  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$  e as **não básicas**  $x_N^T = (x_1, x_2)$ .

## Premissas

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}}_b$$

Portanto temos as variáveis **básicas**  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$  e as **não básicas**  $x_N^T = (x_1, x_2)$ .

Para termos uma **solução básica**, fazemos:  $x_N = 0$ , resultando em  $x_B = b$ . Assim, a solução básica fica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

## Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

### Definição

**Solução básica factível:** Se uma solução básica ( $x_B = b$  e  $x_N = 0$ ) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ( $x_B = b \geq 0$ ), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

## Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

### Definição

**Solução básica factível:** Se uma solução básica ( $x_B = b$  e  $x_N = 0$ ) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ( $x_B = b \geq 0$ ), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

**EXEMPLO** A solução básica encontrada do sistema anterior é uma SBF?

## Premissas

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

### Definição

**Solução básica factível:** Se uma solução básica ( $x_B = b$  e  $x_N = 0$ ) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ( $x_B = b \geq 0$ ), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

**EXEMPLO** A solução básica encontrada do sistema anterior é uma SBF?

Obtivemos a seguinte solução básica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

Como  $x_B^T \geq 0$ , então **ela é uma SBF**.

## Premissas

**EXEMPLO** Verifique se a solução básica em relação às variáveis  $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$  é uma SBF.

$$\begin{array}{rcccccl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

## Premissas

**EXEMPLO** Verifique se a solução básica em relação às variáveis  $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$  é uma SBF.

$$\begin{array}{rcccccccl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & & = 120 \\ x_1 & & & & +x_4 & & & = 40 \\ & +x_2 & & & & +x_5 & & = 30 \end{array}$$

Para deixar o sistema na forma canônica em relação a  $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$ , fazemos as seguintes operações nas linhas:

1.  $L_1 \rightarrow L_1/3$
2.  $L_3 \rightarrow L_3 - L_1$

## Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{rcccccccl} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & & = & 40 \\ x_1 & & & +x_4 & & & = & 40 \\ -2/3x_1 & & -1/3x_3 & & +x_5 & & = & -10 \end{array}$$



## Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{cccccccl} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & & = 40 \\ & x_1 & & +x_4 & & & = 40 \\ -2/3x_1 & & -1/3x_3 & & +x_5 & & = -10 \end{array}$$

Reescrevendo na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix}}_b$$

## Premissas

O que resulta em:

$$\begin{array}{rrrrrr} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & = 40 \\ & x_1 & & +x_4 & & = 40 \\ -2/3x_1 & & -1/3x_3 & & +x_5 & = -10 \end{array}$$

Reescrevendo na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix}}_b$$

Para ser uma solução básica,  $x_N = 0$ , o que implica  $x_B = b$ , com  $x_B^T = (40, 40, -10)$ . Como  $x_5 < 0$ , a solução **não é uma SBF**.

## A ideia geral do método

## A ideia geral do método

Já entendemos todas as premissas para a execução do algoritmo (Fase II):

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão**. ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a  $x_B$ . ✓
3. O sistema deve ter uma **SBF** ✓.

## A ideia geral do método

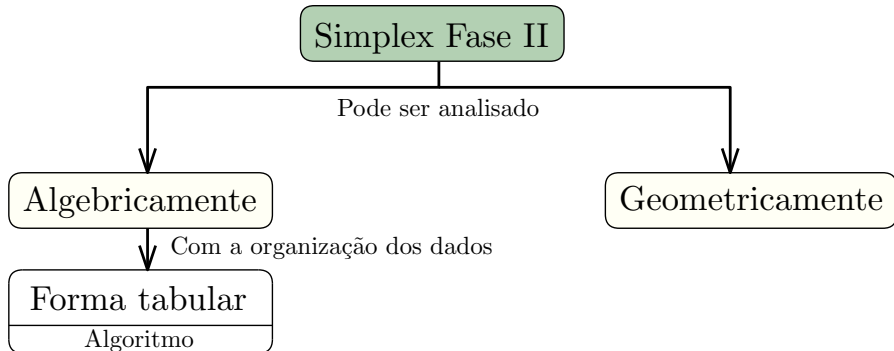
Já entendemos todas as premissas para a execução do algoritmo (Fase II):

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão**. ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a  $x_B$ . ✓
3. O sistema deve ter uma **SBF** ✓.

O algoritmo opera no sistema, alterando a SBF de uma iteração a outra, sempre melhorando (ou mantendo constante) o valor da função objetivo, até o momento em que nenhuma melhoria seja possível.

## A ideia geral do método

Podemos analisar o Simplex **algébrica** e **geometricamente**. A álgebra nos fornece a intuição do algoritmo, entendida a intuição, veremos a **forma tabular** de organização dos dados, para facilitar o processamento (e o algoritmo é aplicado na tabela). A forma geométrica nos indica como o Simplex "caminha" na região factível até encontrar a solução ótima (diferente do método gráfico).



## A intuição algébrica

## A intuição algébrica

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Passando para a forma padrão, temos (sem escrever a não negatividade):



## A intuição algébrica

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Passando para a forma padrão, temos (sem escrever a não negatividade):

$$\begin{array}{rcllcll} \min z = & -100x_1 & -150x_2 & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 = 30 \end{array}$$

## A intuição algébrica

Por conveniência, tratamos a função objetivo como uma **restrição**. Tratamos  $z$  como uma variável:

$$\begin{array}{rcccccccl} \textcircled{z} & \Rightarrow & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\ & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

## A intuição algébrica

Por conveniência, tratamos a função objetivo como uma **restrição**. Tratamos  $z$  como uma variável:

$$\begin{array}{rcccccccl} \textcircled{z} & \Rightarrow & -100x_1 & -150x_2 & & & & & \\ & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & = 120 \\ & & x_1 & & & +x_4 & & & = 40 \\ & & & x_2 & & & +x_5 & & = 30 \end{array}$$

E o conjunto de equações fica então:

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & & & = 0 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & & & = 30 \end{array}$$

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Já temos uma **SBF**?

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$  e  $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ .

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$  e  $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos  $x_1$  em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a  $z$  decresce a uma taxa de -100 unidades. Já  $x_2$  a uma taxa de -150.  $\therefore$  é mais vantajoso tentar aumentar o valor de  $x_2$  (deixaria de ser 0).

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Já temos uma **SBF**? Sim! com  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$  e  $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos  $x_1$  em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a  $z$  decresce a uma taxa de -100 unidades. Já  $x_2$  a uma taxa de -150.  $\therefore$  é mais vantajoso tentar aumentar o valor de  $x_2$  (deixaria de ser 0).

**Mas, até que ponto podemos aumentar  $x_2$  ?**



## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rrrrrrr} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Uma aumento em  $x_2$  vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de  $x_2$  reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio  $x_2$ :

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Uma aumento em  $x_2$  vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de  $x_2$  reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio  $x_2$ :

$$\begin{cases} \text{(II)} : x_3 = 120 - 3x_2 \\ \text{(IV)} : x_5 = 30 - x_2 \end{cases}$$

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Uma aumento em  $x_2$  vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de  $x_2$  reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio  $x_2$ :

$$\begin{cases} \text{(II)} : x_3 = 120 - 3x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 40 \\ \text{(IV)} : x_5 = 30 - x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Como  $x_B$  deve ser  $\geq 0$ , impomos a condição na análise. Assim, temos o limitante de  $x_2$  em 30 unidade (com  $x_5 = 0$ ). Se mais for acrescentado, a variável  $x_5$  fica negativa.

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Note que se fizermos  $x_2 = 30$ ,  $x_5 = 0$ , ou seja, estamos **trocando as variáveis básicas e não básicas** da nossa solução:

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Note que se fizermos  $x_2 = 30$ ,  $x_5 = 0$ , ou seja, estamos **trocando as variáveis básicas e não básicas** da nossa solução:

$$\begin{cases} \text{ANTES : } & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2) \\ \text{DEPOIS : } & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \end{cases}$$

Agora, só precisamos atualizar o sistema de equações para que ele fique na **forma canônica** em relação às novas variáveis básicas  $x_B^T = (x_3, x_4, x_2)$ .

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$	$-150x_2$		$= 0$	I
	$2x_1$	$+3x_2$	$+x_3$	$= 120$	II
	$x_1$		$+x_4$	$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5 = 30$	IV

Como  $x_3$  e  $x_4$  já estão na forma correta, só precisamos executar o pivoteamento no elemento  $x_2$  (da equação IV). Para isso fazemos as seguintes operações nas linhas:

## A intuição algébrica

$$\begin{array}{rcccccccl}
 -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & \textcircled{x_2} & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
 \end{array}$$

Como  $x_3$  e  $x_4$  já estão na forma correta, só precisamos executar o pivoteamento no elemento  $x_2$  (da equação *IV*). Para isso fazemos as seguintes operações nas linhas:

1.  $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2.  $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$

O sistema atualizado fica:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 -z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
 \end{array}$$

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$			$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$		$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Temos então uma nova **SBF**. Note também que podemos extrair o valor da função objetivo para essa nova solução simplesmente olhando o valor da variável  $z$  em I (**não se esqueça que o valor do lado direito é o negativo de  $z$ !**)



## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$			$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$		$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Temos então uma nova **SBF**. Note também que podemos extrair o valor da função objetivo para essa nova solução simplesmente olhando o valor da variável  $z$  em I (**não se esqueça que o valor do lado direito é o negativo de  $z$ !**)

$$\begin{cases} \text{ANTES : } & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2), z = 0 \\ \text{DEPOIS : } & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5), z = -4500 \end{cases}$$

Essa foi a primeira iteração do algoritmo Simplex Fase II. Agora, continuamos verificando se podemos melhorar a fo (minimizá-la).

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$			$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$		$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos  $x_1$  em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a  $z$  decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na  $z$ , de forma que escolhemos  $x_1$ . Verificando as condições para o limite no aumento de  $x_1$ , temos:

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$			$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$		$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos  $x_1$  em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a  $z$  decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na  $z$ , de forma que escolhemos  $x_1$ . Verificando as condições para o limite no aumento de  $x_1$ , temos:

$$\begin{cases} (II) : & x_3 = 30 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 15 \\ (III) : & x_4 = 40 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 40 \end{cases}$$

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$			$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$		$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$		$= 40$	III
		$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos  $x_1$  em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a  $z$  decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na  $z$ , de forma que escolhemos  $x_1$ . Verificando as condições para o limite no aumento de  $x_1$ , temos:

$$\begin{cases} (II) : & x_3 = 30 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 15 \\ (III) : & x_4 = 40 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 40 \end{cases}$$

Temos então um limitante para  $x_1$  em 15 unidades. Quando  $x_1$  atingir esse valor,  $x_3$  passa a ser 0. Ou seja, novamente alteramos as variáveis  $x_B$  e  $x_N$ .

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$		$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$	$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$	$= 40$	III
		$x_2$	$+x_5$	$= 30$	IV

Comparando as variáveis básicas e não básicas temos então:

$$\begin{cases} \text{ANTES : } x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \\ \text{DEPOIS : } x_B^T = (x_1, x_4, x_2), x_N^T = (x_3, x_5) \end{cases}$$

## A intuição algébrica

$-z$	$-100x_1$		$150x_5$	$= 4500$	I
	$2x_1$	$+x_3$	$-3x_5$	$= 30$	II
	$x_1$		$+x_4$	$= 40$	III
		$x_2$	$+x_5$	$= 30$	IV

Comparando as variáveis básicas e não básicas temos então:

$$\begin{cases} \text{ANTES : } & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \\ \text{DEPOIS : } & x_B^T = (x_1, x_4, x_2), x_N^T = (x_3, x_5) \end{cases}$$

Para deixarmos o sistema na forma canônica em relação ao novo conjunto  $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$  executamos as seguintes operações:

1.  $L_2 \leftarrow L_2/2$
2.  $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3.  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

## A intuição algébrica

$-z$	$+50x_3$		$= 6000$	I
$x_1$	$+x_3/2$	$-3/2x_5$	$= 15$	II
	$-x_3/2$	$+x_4$	$= 25$	III
$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

## A intuição algébrica

$-z$	$+50x_3$		$= 6000$	I
$x_1$	$+x_3/2$	$-3/2x_5$	$= 15$	II
	$-x_3/2$	$+x_4$	$= 25$	III
$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Se olharmos a equação I, vemos que não existe mais nenhuma variável que ao ser incrementada decremente o valor de  $z$ , **portanto, a solução atual é ótima!**



## A intuição algébrica

$-z$	$+50x_3$		$= 6000$	I
$x_1$	$+x_3/2$	$-3/2x_5$	$= 15$	II
	$-x_3/2$	$+x_4$	$= 25$	III
$x_2$		$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

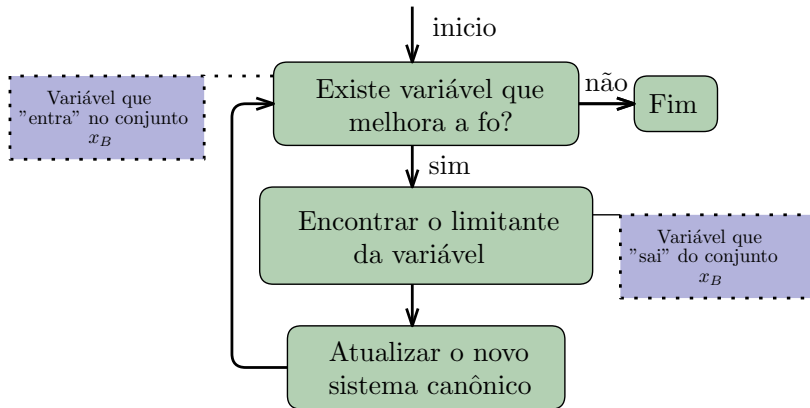
$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Se olharmos a equação I, vemos que não existe mais nenhuma variável que ao ser incrementada decremente o valor de  $z$ , **portanto, a solução atual é ótima!**

**OBS:** Lembre que, como a função objetivo original era de maximização, precisamos inverter o sinal do custo novamente, sendo que o **valor da função objetivo é de 6000**.

## A intuição algébrica

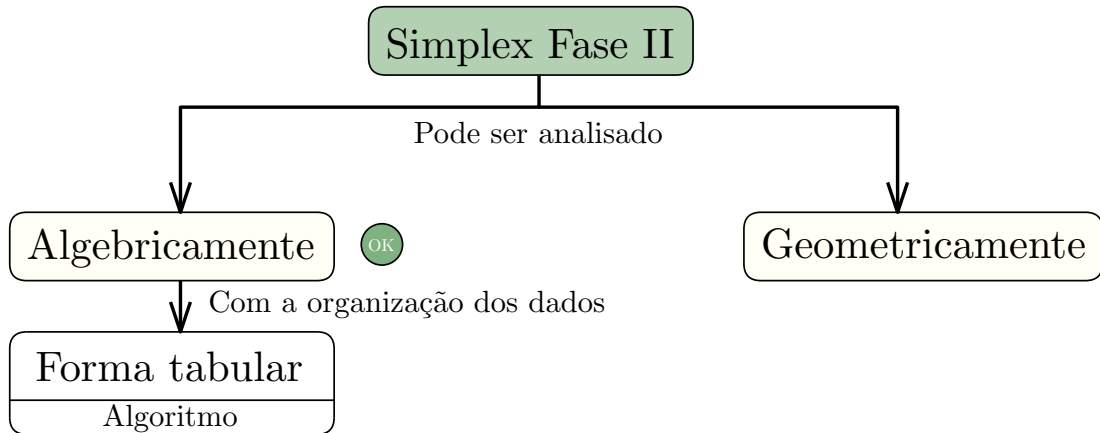
Essa é a **álgebra** por trás do método Simplex Fase II. As etapas que executamos podem ser visualizadas como um fluxograma na imagem abaixo.



## A intuição algébrica

Embora esse **já seja o algoritmo Simplex Fase II**, para aplicarmos de forma sistemática e algorítmica (sequência de passos), é conveniente olhar somente para os coeficientes das equações, e escrevê-las de uma forma que fique evidente a cada passo **quais são as variáveis básicas e as não básicas**.

## A intuição algébrica



## Simplex na forma tabular

## Simplex na forma tabular

Por conveniência podemos escrever os dados do sistema canônico inicial (já na forma padrão) em uma tabela com os coeficientes das variáveis. O sistema original é:

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

E a tabela de dados fica na forma:

VB	-z	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	b
	1	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	-z
$x_B$	0	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$	b

## Simplex na forma tabular

Por conveniência podemos escrever os dados do sistema canônico inicial (já na forma padrão) em uma tabela com os coeficientes das variáveis. O sistema original é:

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

E a tabela de dados fica na forma:

		VB	-z	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	b	← cabeçalho
			1	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	-z	← coef. da fo
variáveis atualmente em $x_B$	→ $x_B$		0	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$	b	← vetor b
				↑					colunas da matriz A

## Simplex na forma tabular

**EXEMPLO** Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{rcllclcl} \min z = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$



## Simplex na forma tabular

**EXEMPLO** Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{rcll} \min z = & -100x_1 & -150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 = 120 \\ & x_1 & & +x_4 = 40 \\ & & x_2 & +x_5 = 30 \end{array}$$

O modelo fica da forma:

VB	-z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	1	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	120
$x_4$	0	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	0	1	0	0	1	30

## Simplex na forma tabular

**EXEMPLO** Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{rcll} \min z = & -100x_1 & -150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 = 120 \\ & x_1 & & +x_4 = 40 \\ & & x_2 & +x_5 = 30 \end{array}$$

Na prática, não usamos a coluna de  $-z$  (pois  $z$  **sempre** é uma variável básica).

VB	-z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	1	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	120
$x_4$	0	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	0	1	0	0	1	30

## Simplex na forma tabular

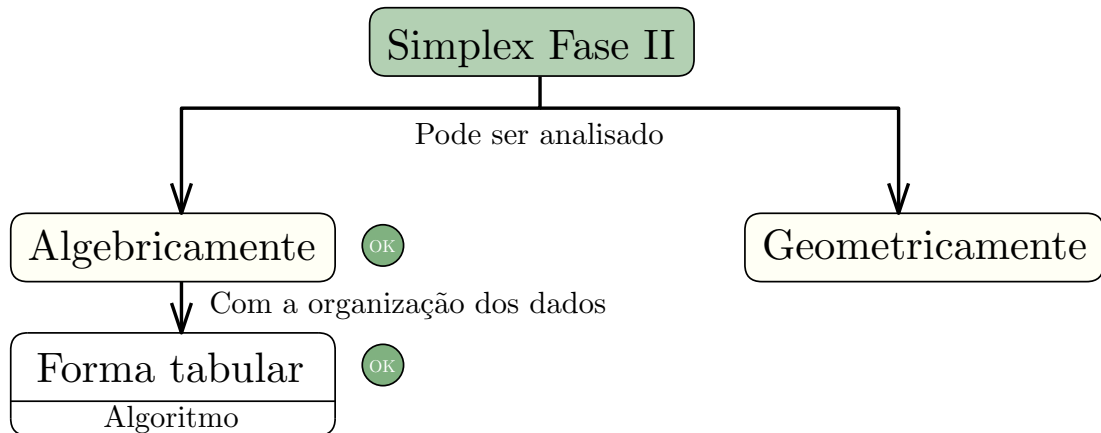
**EXEMPLO** Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$\begin{array}{rcll} \min z = & -100x_1 & -150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 = 120 \\ & x_1 & & +x_4 = 40 \\ & & x_2 & +x_5 = 30 \end{array}$$

De forma que podemos escrever a tabela **sem a coluna**.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

## Simplex na forma tabular



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

Com os dados na forma tabular, podemos definir o Algoritmo Simplex Fase II formalmente. Considerando a seguinte notação:

$$\begin{cases} A_{\bullet s}: \text{Todas as linhas da coluna } s \\ a_{rs} : \text{Elemento da linha } r \text{ e coluna } s \end{cases}$$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre

$$s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  **PARE**. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  **PARE**; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{\forall a_{is} > 0, i=1, \dots, m\}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

O Algoritmo Simplex Fase II descrito de forma "enunciada" ficaria:

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (**Menor custo reduzido**): olhe para a linha dos coeficientes da função objetivo, e selecione o menor de todos.
2. (**Teste de otimalidade**): se o coeficiente selecionado for positivo ou nulo, o método chegou ao **fim**, e a solução atual é ótima.
3. (**Variável que entra na base**): se o coeficiente for negativo, a variável referente a coluna desse coeficiente é a que vai fazer parte da nova base (entra na base).
4. (**Teste da solução ilimitada**): olhando para os coeficientes de todas as linhas na coluna da variável que entra na base (somente nas restrições), se nenhum valor for estritamente positivo ( $> 0$ ), o problema não tem solução limitada (**fim**).
5. (**Variável que sai da base**): considerando todos os valores da coluna da variável que entra na base *que são positivos*, e todos os valores do lado direito das equações, faça a divisão dos valores do lado direito ( $b$ ) pelos coeficientes positivos. Selecione a linha que mantiver a menor razão. Olhando para as variáveis atualmente básicas, essa é a variável que vai sair da base.
6. (**Atualização da tabela**): atualize a tabela na forma padrão (pivoteamento) substituindo a variável encontrada em 3 pela encontrada em 5 em  $x_B$ . Voltar ao passo 1.



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

**EXEMPLO** Resolva o modelo abaixo, pelo algoritmo Simplex:

$$\begin{array}{llll} \max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Colocando o modelo na forma padrão e tabular.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre

$$s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{\forall a_{is} > 0, i=1, \dots, m\}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos  $c_j$ , temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos  $c_j$ , temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo  $c_s = -150$ , e  $s = 2$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{\forall j \in 1, \dots, n\}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{\forall a_{is} > 0, i=1, \dots, m\}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos  $c_j$ , temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo  $c_s = -150$ , e  $s = 2$ .

Como  $c_s < 0$ , a solução atual não é ótima, portanto continuamos com o algoritmo.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{ \forall j \in 1, \dots, n \}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{ \forall j \in 1, \dots, n \}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{ \forall a_{is} > 0, i=1, \dots, m \}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Sabemos que a variável  $x_2$  vai **entrar para a base**  $x_B^T$  (vai deixar de ter valor 0).

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{ \forall j \in 1, \dots, n \}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{ \forall j \in 1, \dots, n \}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  **PARE**. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  **PARE**; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{ \forall a_{is} > 0, i=1, \dots, m \}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Nesse caso, temos que

$$A_{\bullet s} = A_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

Portanto, o problema **não é ilimitado**<sup>1</sup>, e continuamos o algoritmo.

---

<sup>1</sup>para que  $A_{\bullet s} \leq 0$ , todos os elementos do vetor devem ser  $\leq 0$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{j \in 1, \dots, n\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \underset{\{j \in 1, \dots, n\}}{\min} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{i \mid a_{is} > 0, i=1, \dots, m\}}{\min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_2 = \left\{ \frac{120}{3}, \frac{30}{1} \right\} = 30$$

Com  $r = 4$ . Sabemos então que  $x_2$  vai entrar para a base ( $x_B$ ) com valor de 30, e  $x_5$  vai deixar de fazer parte da base.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{j \in \{1, \dots, n\}\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \min_{\{j \in \{1, \dots, n\}\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por: ✓

$$x_s = \min_{\{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_{is} > 0\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Temos o elemento  $a_{r,s} = a_{4,2} = 1$  como pivô. Precisamos realizar o pivoteamento para deixar a tabela canônica. Para isso realizamos as seguintes operações (**sempre usando a linha do elemento pivô! primeiro transforme o elemento em 1 e depois use a linha para zerar os outros elementos da coluna**):

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Temos o elemento  $a_{r,s} = a_{4,2} = 1$  como pivô. Precisamos realizar o pivoteamento para deixar a tabela canônica. Para isso realizamos as seguintes operações (**sempre usando a linha do elemento pivô! primeiro transforme o elemento em 1 e depois use a linha para zerar os outros elementos da coluna**):

1.  $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2.  $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

A tabela atualizada fica da seguinte forma. Note que atualizamos a coluna das variáveis básicas: removemos  $x_5$  e adicionamos  $x_2$ . A solução atual é:

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

A tabela atualizada fica da seguinte forma. Note que atualizamos a coluna das variáveis básicas: removemos  $x_5$  e adicionamos  $x_2$ . A solução atual é:

$$x_B^T = (x_3, x_4, \mathbf{x_2}) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, \mathbf{x_5}) = (0, 0), z = -4500$$

OBS: Note que para coletarmos o valor de  $z$  da tabela devemos pegar o seu negativo!

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

1. (Menor custo reduzido): encontre ✓

$$s = \underset{\{j \in \{1, \dots, n\}\}}{\operatorname{argmin}} c_j$$

em que  $s$  é o índice da coluna em que  $c_j$  é mínimo:

$$c_s = \min_{\{j \in \{1, \dots, n\}\}} c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se  $c_s \geq 0$  PARE. Solução atual é ótima. ✓
3. (Variável que entra na base): se  $c_s < 0$ ,  $s$  é o índice da variável que entra na base. ✓
4. (Teste da solução ilimitada): se  $A_{\bullet s} \leq 0$  PARE; o problema é ilimitado. ✓
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha  $r$  que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável  $x_s$  que entra na base é dado por: ✓

$$x_s = \min_{\{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_{is} > 0\}} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento  $a_{rs}$  como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1. ✓

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Essa foi a primeira iteração completa do algoritmo, continuando novamente a partir do primeiro passo.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos  $c_j$ , temos o conjunto:

$$\{-100, 0, 0, 0, 150\}$$

Com mínimo  $c_s = -100$ , e  $s = 1$ . Como  $c_1 < 0$  continuamos.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Novamente temos  $A_{\bullet s} > 0 \therefore$  o problema não é ilimitado.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_1 = \left\{ \frac{30}{2}, \frac{40}{1} \right\} = 15$$

Com  $r = 2$ . Sabemos então que  $x_1$  vai entrar para a base ( $x_B$ ) com valor de 15, e  $x_3$  vai deixar de fazer parte da base.

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Temos  $a_{2,1} = 2$  o novo elemento pivô, para atualizarmos a tabela fazemos as seguintes operações nas linhas:

1.  $L_2 \leftarrow L_2/2$
2.  $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3.  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	0	0	50	0	0	6000
$x_1$	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	15
$x_4$	0	0	$-1/2$	1	$3/2$	25
$x_2$	0	1	0	0	1	30

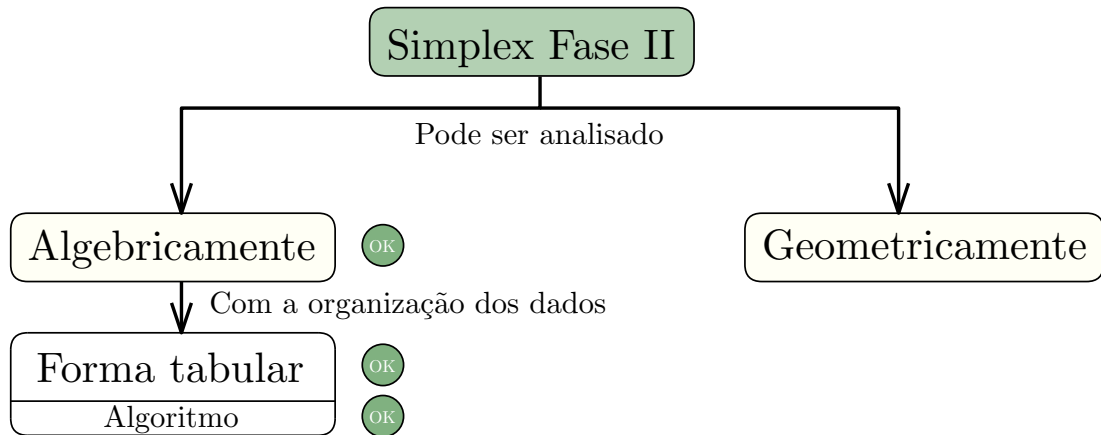
A nova tabela atualizada fica então da seguinte forma.

Como todos os valores de  $c^T \geq 0$ , podemos **parar**. A solução atual é a solução **ótima**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II



# Simplex na forma tabular

## O Algoritmo Simplex Fase II

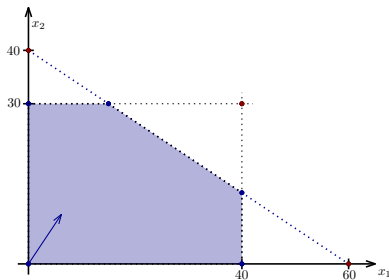
**EXERCÍCIO** Resolva o seguinte PL (forma tabular), mostrando a cada iteração a relação existente com o método algébrico.

$$\begin{array}{rclcl} \max z = & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\ & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\ & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq 6 \\ & x_1 & x_2 & & \geq 0 \end{array}$$

## A geometria do Simplex

# A geometria do Simplex

Quando aprendemos a resolver PLs pelo **método gráfico**, conseguimos compreender melhor o motivo da solução ótima estar em determinado ponto (visualmente). O algoritmo Simplex também segue uma **lógica geométrica**, e é muito importante que a entendamos para seguir em frente no curso.



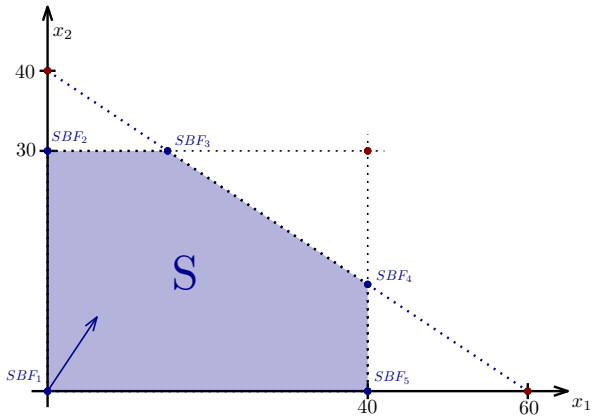
## A geometria do Simplex

Considere a propriedade:

### Propriedade

**PROP1:** Considere uma região factível  $S = \{x \in R^+ | Ax = b, x \geq 0\}$ . Um ponto  $x \in S$  é um vértice de  $S$  se e somente se,  $x$  for uma SBF.

# A geometria do Simplex



Ou seja, essa propriedade mostra o que são as SBF geometricamente, em relação a região factível: **vértices** formados pelas intersecções das restrições.

## A geometria do Simplex

E ainda:

### Propriedade

**PROP2:** Se um problema de PL têm solução ótima, então **existe um vértice ótimo**.

A segunda propriedade nos garante que sempre que um problema tiver uma solução ótima, poderemos encontrar um vértice da região factível  $S$  com essa solução.



# A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.

# A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.

# A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.

# A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.
4.  $\therefore$  por 1,2 e 3 sabemos que o método Simplex "caminha" pelos vértices da região factível (**SBF**) até chegar ao vértice ótimo.

# A geometria do Simplex

Ora...então já entendemos a geometria do Simplex! Vamos juntar todas as informações.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.
4.  $\therefore$  por 1,2 e 3 sabemos que o método Simplex "caminha" pelos vértices da região factível (**SBF**) até chegar ao vértice ótimo.

Esse percurso que o algoritmo percorre na região factível até chegar no vértice ótimo é chamado de **caminho Simplex**.

## A geometria do Simplex

**EXEMPLO** Encontre o caminho Simplex para o exemplo resolvido anteriormente.

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

# A geometria do Simplex

Tabela inicial

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Iteração 1

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Iteração 2

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	0	0	50	0	0	6000
$x_1$	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	15
$x_4$	0	0	$-1/2$	1	$3/2$	25
$x_2$	0	1	0	0	1	30

As tabelas ao fim de cada iteração são mostradas acima.

# A geometria do Simplex

Tabela inicial

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	-150	0	0	0	0
$x_3$	2	3	1	0	0	120
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_5$	0	1	0	0	1	30

Iteração 1

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	-100	0	0	0	150	4500
$x_3$	2	0	1	0	-3	30
$x_4$	1	0	0	1	0	40
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Iteração 2

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
	0	0	50	0	0	6000
$x_1$	1	0	1/2	0	-3/2	15
$x_4$	0	0	-1/2	1	3/2	25
$x_2$	0	1	0	0	1	30

Para encontrar o caminho Simplex, precisamos da **SBF** a cada iteração.



# A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Início: } x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1: } x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2: } x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{array} \right.$$

## A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo ( $x_1$  e  $x_2$ ).

## A geometria do Simplex

As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo ( $x_1$  e  $x_2$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Início: } x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1: } x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2: } x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{array} \right.$$

## A geometria do Simplex

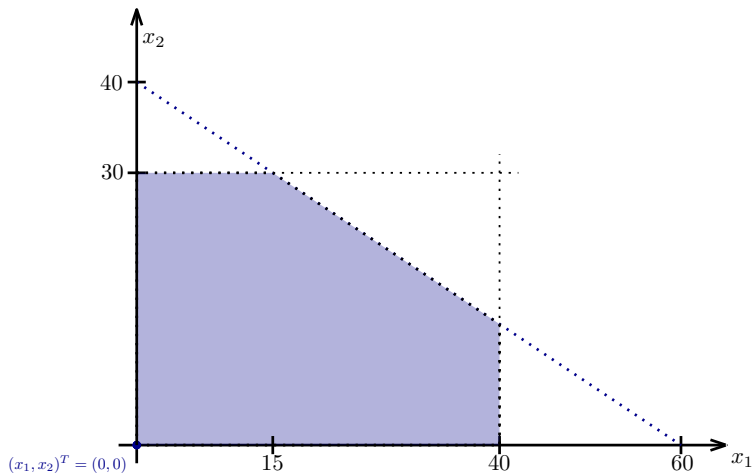
As soluções são mostradas abaixo:

Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo ( $x_1$  e  $x_2$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Início: } x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1: } x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2: } x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{array} \right.$$

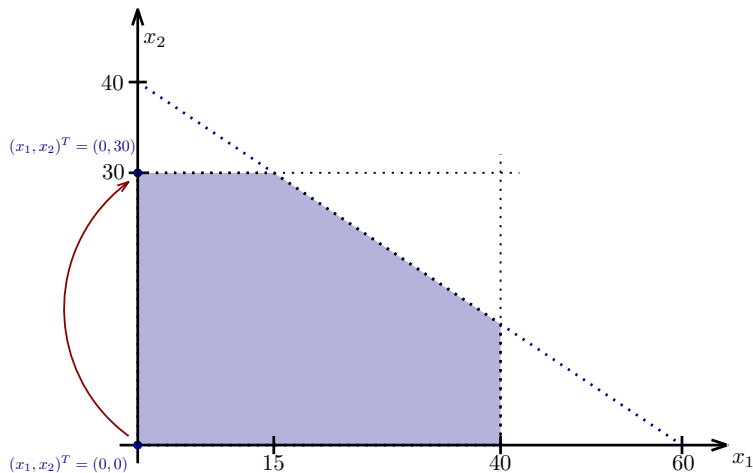
Vamos verificar no gráfico onde estão estas soluções

## A geometria do Simplex



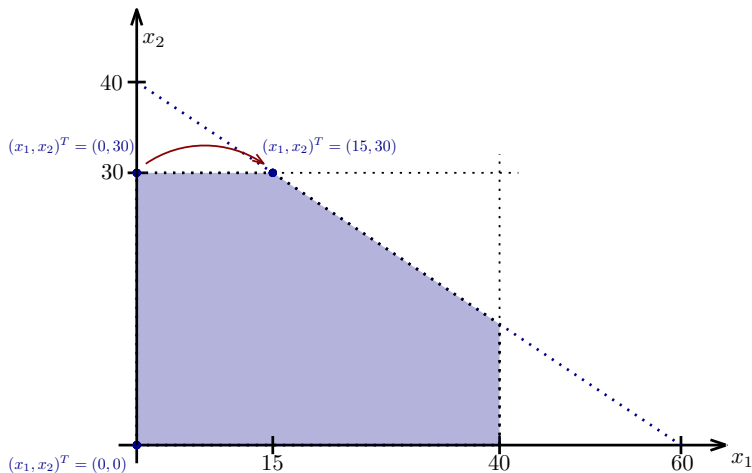
Início:  $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$ ,  $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

# A geometria do Simplex



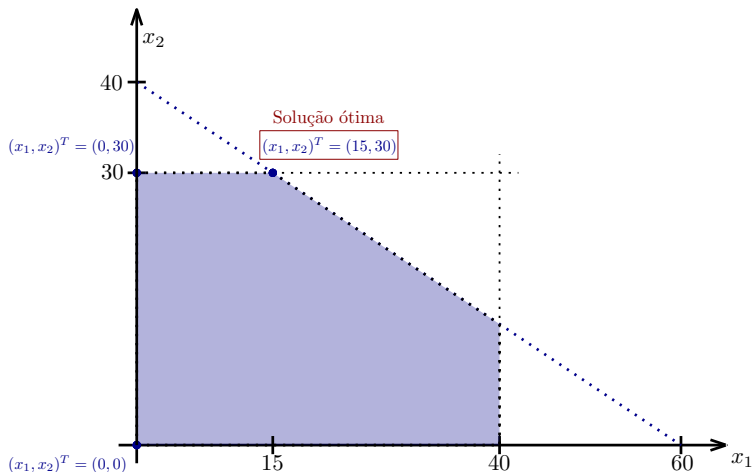
Iter. 1:  $x_B^T = (x_3, x_4, \mathbf{x}_2) = (30, 40, \mathbf{30})$ ,  $x_N^T = (\mathbf{x}_1, x_5) = (\mathbf{0}, 0)$

# A geometria do Simplex



Iter. 2:  $x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30)$ ,  $x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$

# A geometria do Simplex



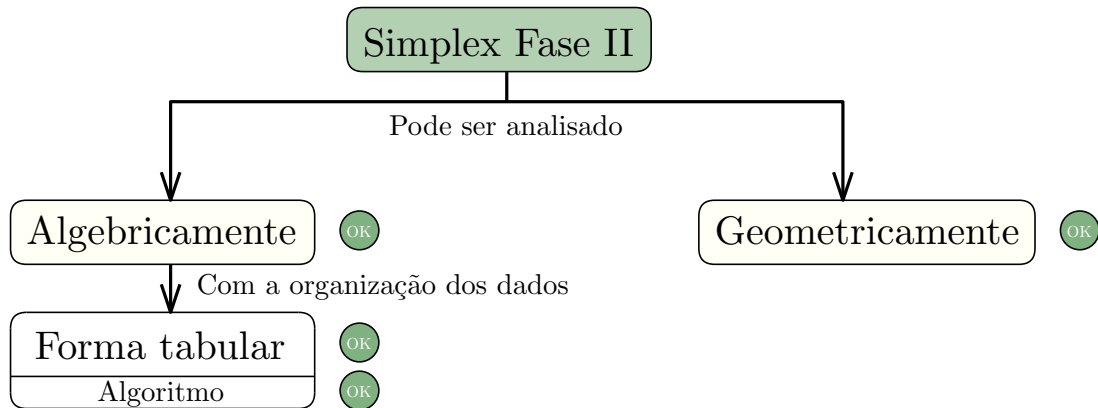
Iter. 2:  $x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30)$ ,  $x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$



## A geometria do Simplex

Com isso finalizamos a análise do algoritmo Simplex. Note que ao determinarmos o caminho Simplex, temos uma forma de validar a nossa solução do quadro. Por exemplo, se em uma determinada iteração você encontra uma solução que não é um vértice, **algo deu errado**.

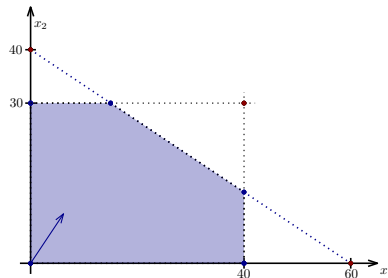
## A geometria do Simplex



# A geometria do Simplex

**EXERCÍCIO** Considerando o seguinte modelo de PL e a representação da sua região factível, responda o que se pede:

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & +2x_2 & +x_3 \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_3 \leq 2 \\ & 4x_1 & +x_2 & +x_3 \leq 6 \\ & -x_1 & -2x_2 & -x_3 \leq 6 \\ & x_1 & & x_2 \geq 0 \end{array}$$



1. É possível determinar o número máximo de soluções básicas do problema? Se sim, como?
2. Qual é a relação dessas soluções com a região representada pelas inequações?