

# Introdução à Programação Linear

Alexandre Checoli Choueiri

04/05/2022

① O conceito da PL

② Exemplos

③ História, influências & influenciados

④ Modelando um problema

⑤ Após a programação linear

⑥ O resumo da ópera

⑦ Exercícios

⑧ Sobre o curso

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.
  2. Output otimizado: lucro pela venda dos produtos.

# O conceito da PL

## O problema de programação

Muitas situações exigem a decisão de uma dentre várias ações possíveis, sendo que cada uma usa uma quantidade de recursos finitos. A cada ação (ou programa) está associado um output, o qual se deseja otimizar. Qual o melhor programa?

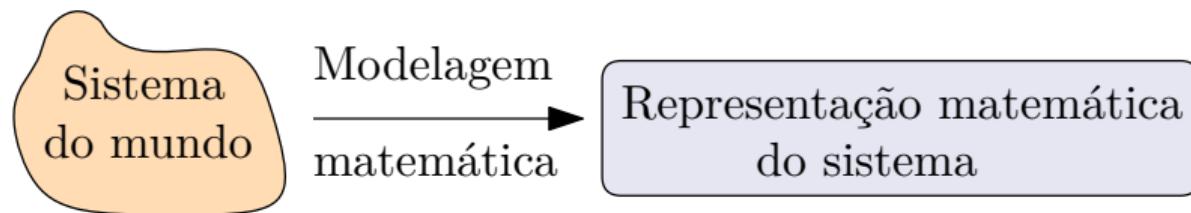
- Você deve estudar para a semana de provas, quanto tempo irá dedicar para cada disciplina?
  1. Restrições de recursos: tempo.
  2. Output otimizado: soma das notas nas provas.
  3. Exemplo de plano: (2H, PO), (0.5H, ERGONOMIA), (3H, CALCULO).
- Você deve decidir quanto produzir dentre 3 produtos, sendo que eles compartilham de MP similares, e são vendidos a preços fixos. Quanto produzir?
  1. Restrições de recursos: quantidades de MP.
  2. Output otimizado: lucro pela venda dos produtos.
  3. Exemplo de plano: (2 un., P1), (3 un., P2), (0 un., P3).

## O conceito da PL

Se pudermos representar o problema matematicamente, temos um problema de **programação matemática**. Se as funções/equações/inequações usadas na representação forem todas lineares, temos um problema de **programação linear**.

# O conceito da PL

Se pudermos representar o problema matematicamente, temos um problema de **programação matemática**. Se as funções/equações/inequações usadas na representação forem todas lineares, temos um problema de **programação linear**.



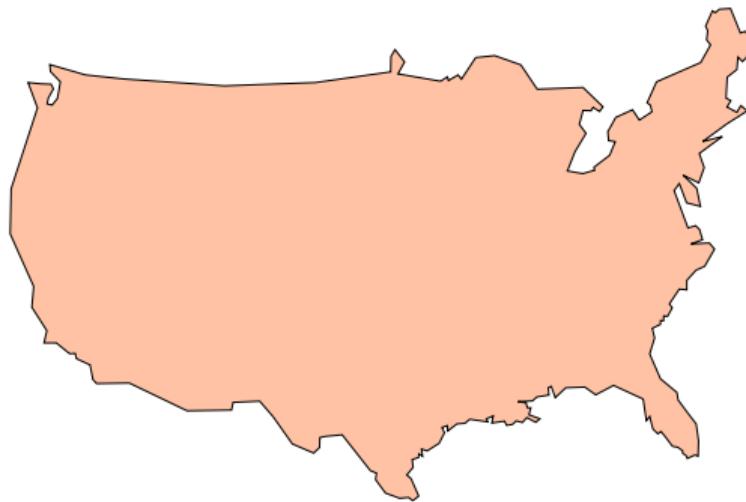
OBS: Nesta etapa não sabemos qual plano devemos seguir, somente representamos o problema formalmente por meio da matemática

## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?

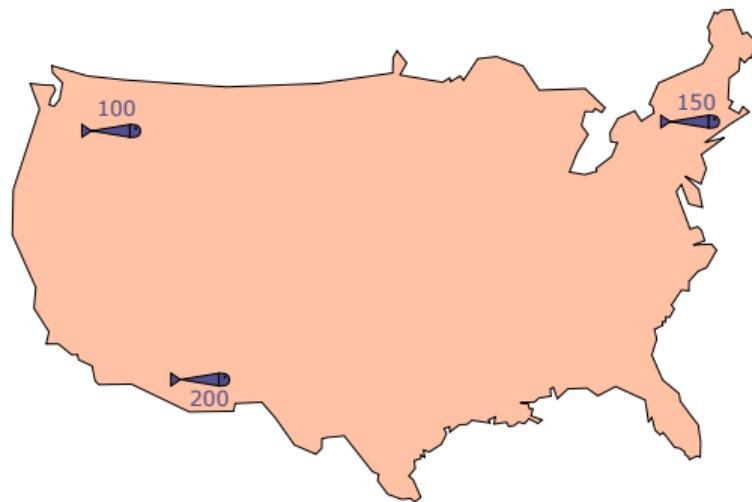
## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?



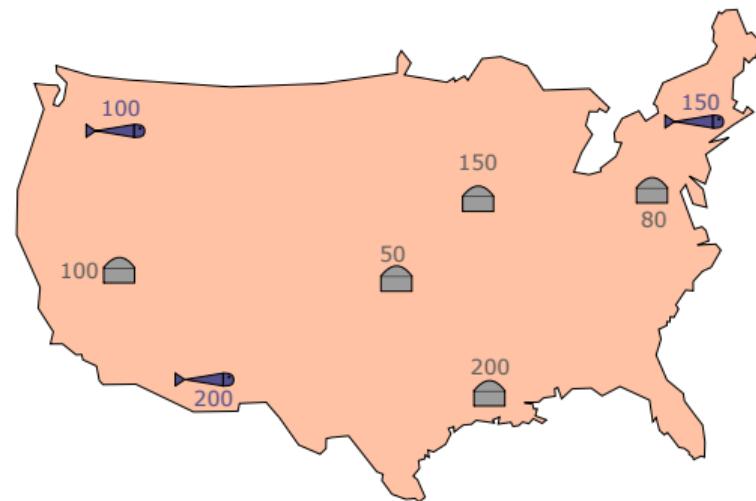
## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?



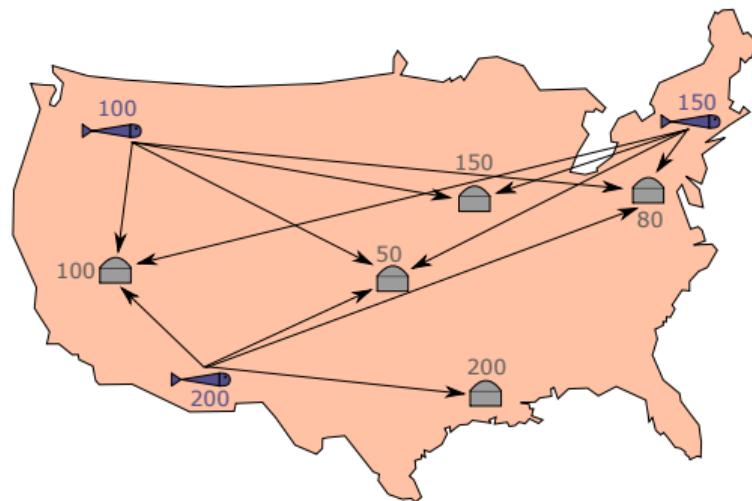
## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?



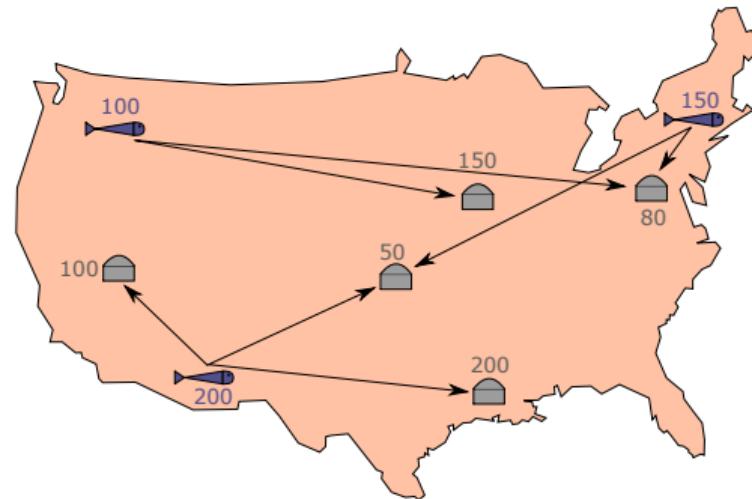
## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?



## Exemplo I - o problema da distribuição

Uma empresa nos EUA possui 3 fábricas de sardinhas enlatadas e 5 depósitos que vendem essas conservas. Existe uma distância entre cada fábrica e cada depósito, portanto um *custo* associado ao transporte. Cada fábrica possui uma *capacidade* e cada depósito uma *demand*a de consumo. Qual deve ser o plano de alocação de conservas das fábricas para os depósitos que *minimiza os custos totais*?



## Exemplo I - Análise

| Pergunta                  | Análise |
|---------------------------|---------|
| Restrições                |         |
| Objetivo                  |         |
| Exemplo de programa       |         |
| Como mensurar o programa? |         |

## Exemplo I - Análise

| Pergunta                  | Análise  |
|---------------------------|----------|
| Restrições                | Demandas |
| Objetivo                  |          |
| Exemplo de programa       |          |
| Como mensurar o programa? |          |

## Exemplo I - Análise

| Pergunta                  | Análise             |
|---------------------------|---------------------|
| Restrições                | Demandas<br>Ofertas |
| Objetivo                  |                     |
| Exemplo de programa       |                     |
| Como mensurar o programa? |                     |

## Exemplo I - Análise

| Pergunta                  | Análise                   |
|---------------------------|---------------------------|
| Restrições                | Demandas<br>Ofertas       |
| Objetivo                  | Min. custos de transporte |
| Exemplo de programa       |                           |
| Como mensurar o programa? |                           |

## Exemplo I - Análise

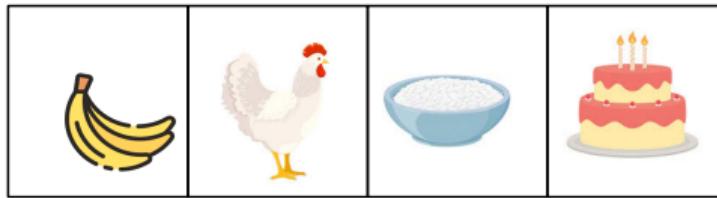
| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demandas<br>Ofertas  |
| <b>Objetivo</b>                  | Min. custos de transporte  |
| <b>Exemplo de programa</b>       | <ul style="list-style-type: none"><li>- 50 un. da fábrica 1 ou depósito 1</li><li>- 100 un. da fábrica 2 ou depósito 5</li><li>- 50 un. da fábrica 2 ou depósito 1</li></ul> |
| <b>Como mensurar o programa?</b> |  |

## Exemplo I - Análise

| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demandas<br>Ofertas  |
| <b>Objetivo</b>                  | Min. custos de transporte  |
| <b>Exemplo de programa</b>       | - 50 un. da fábrica 1 ou depósito 1<br>- 100 un. da fábrica 2 ou depósito 5<br>- 50 un. da fábrica 2 ou depósito 1 |
| <b>Como mensurar o programa?</b> | $\sum$ itens transportados pelo custo unitário   |

## Exemplo II - um problema de dieta

Uma nutricionista está montando uma dieta para um cliente. A dieta deve atingir um mínimo de proteínas e gorduras, extraído de 5 alimentos diferentes. Cada alimento possui um preço/kg e uma contribuição de prot. e gordura. Qual deve ser a dieta para que o custo seja mínimo para o cliente?



## Exemplo II - um problema de dieta

Uma nutricionista está montando uma dieta para um cliente. A dieta deve atingir um mínimo de proteínas e gorduras, extraído de 5 alimentos diferentes. Cada alimento possui um preço/kg e uma contribuição de prot. e gordura. Qual deve ser a dieta para que o custo seja mínimo para o cliente?

|                 |   |   |  |   |
|-----------------|---|---|--|---|
|                 |  |  |  |  |
| <b>Proteína</b> | 7   | 14  | 2  | 1   |
| <b>Gordura</b>  | 2   | 3   | 3  | 10  |

## Exemplo II - um problema de dieta

Uma nutricionista está montando uma dieta para um cliente. A dieta deve atingir um mínimo de proteínas e gorduras, extraído de 5 alimentos diferentes. Cada alimento possui um preço/kg e uma contribuição de prot. e gordura. Qual deve ser a dieta para que o custo seja mínimo para o cliente?

|          |  |  |  |  |
|----------|---|---|--|---|
| Proteina | 7   | 14  | 2  | 1   |
| Gordura  | 2   | 3   | 3  | 10  |
| R\$/kg   | 5.50  | 24.00   | 11.00  | 25.00   |

## Exemplo II - um problema de dieta

Uma nutricionista está montando uma dieta para um cliente. A dieta deve atingir um mínimo de proteínas e gorduras, extraído de 5 alimentos diferentes. Cada alimento possui um preço/kg e uma contribuição de prot. e gordura. Qual deve ser a dieta para que o custo seja mínimo para o cliente?

|          |  |  |  |  | Demanda   |
|----------|---|---|--|---|-----------|
| Proteina | 7   | 14  | 2  | 1   | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2   | 3   | 3  | 10  | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50  | 24.00   | 11.00  | 25.00   |           |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                  | Análise |
|---------------------------|---------|
| Restrições                |         |
| Objetivo                  |         |
| Exemplo de programa       |         |
| Como mensurar o programa? |         |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                         | Análise                 |
|----------------------------------|-------------------------|
| <b>Restrições</b>                | Demanda mínima de prot. |
| <b>Objetivo</b>                  |                         |
| <b>Exemplo de programa</b>       |                         |
| <b>Como mensurar o programa?</b> |                         |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demanda mínima de prot.<br>Demanda mínima de gord. |
| <b>Objetivo</b>                  |  |
| <b>Exemplo de programa</b>       |  |
| <b>Como mensurar o programa?</b> |  |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demanda mínima de prot.<br>Demanda mínima de gord. |
| <b>Objetivo</b>                  | Min. custo da dieta                                |
| <b>Exemplo de programa</b>       |  |
| <b>Como mensurar o programa?</b> |  |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demandas mínimas de prot.<br>Demandas mínimas de gord.     |
| <b>Objetivo</b>                  | Min. custo da dieta  |
| <b>Exemplo de programa</b>       | - 0.3kg de banana<br>- 0.3kg de frango<br>- 0.2kg de arroz |
| <b>Como mensurar o programa?</b> |  |

## Exemplo II - Análise

| Pergunta                         | Análise  |
|----------------------------------|--|
| <b>Restrições</b>                | Demandas mínimas de prot.<br>Demandas mínimas de gord.     |
| <b>Objetivo</b>                  | Min. custo da dieta  |
| <b>Exemplo de programa</b>       | - 0.3kg de banana<br>- 0.3kg de frango<br>- 0.2kg de arroz |
| <b>Como mensurar o programa?</b> | $\sum$ itens transportados pelo custo unitário             |

# Um pouco de História



## Um nascimento trágico

Como muitos outros desenvolvimentos científicos e invenções, o nascimento da programação linear como a conhecemos hoje foi impulsionado pela guerra. Mais especificamente pela segunda guerra mundial. O departamento de defesa norte americano usava *planejamentos* para atingir seus objetivos de guerra.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Nas forças armadas norte-americanas, esse planejamento era chamado de um **programa**

## Microondas

Durante o início da Guerra Fria, em 1945, o engenheiro americano Percy Spencer trabalhava com a tecnologia de radares, mais precisamente na construção de peças capazes de gerar ondas eletromagnéticas (magnetrons). Durante as muitas horas dedicadas ao serviço, Spencer percebeu que uma barra de chocolates em seu bolso havia derretido.





## Fanta

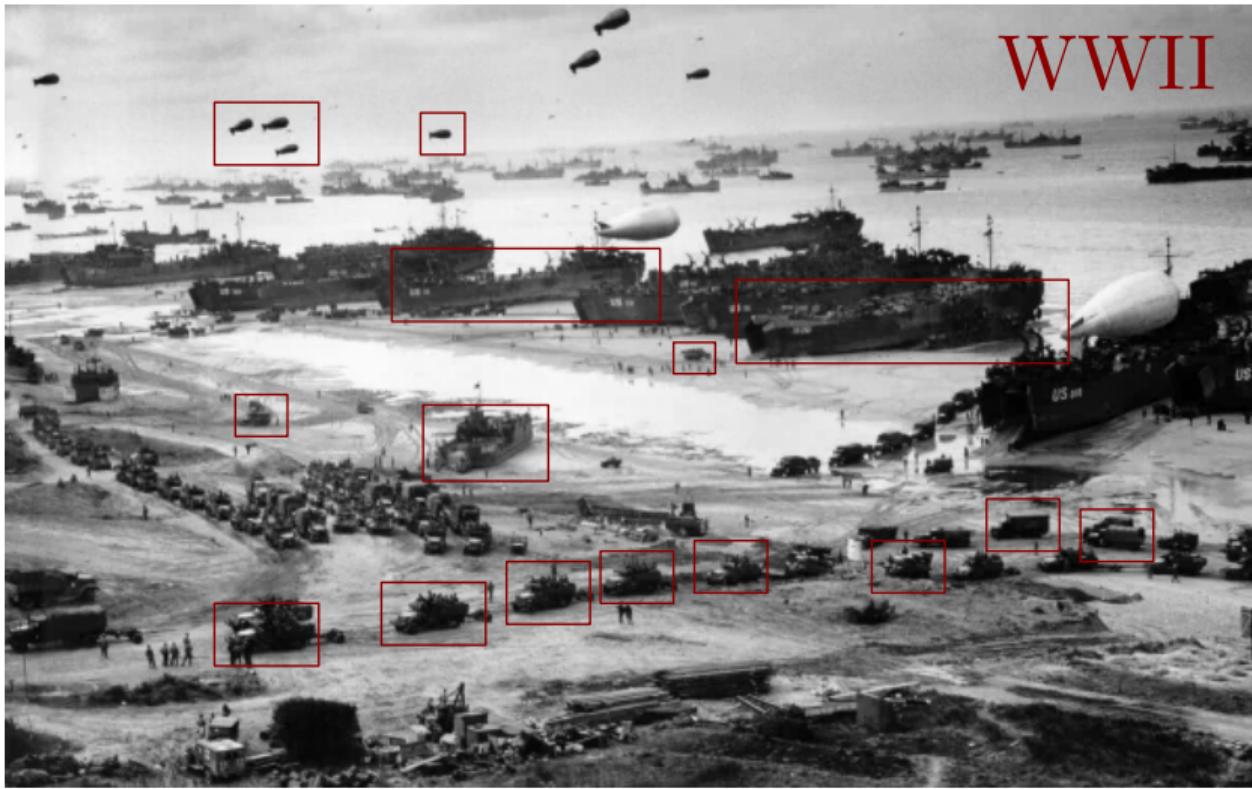
Rompendo os laços com os EUA, a Alemanha ficou sem o xarope da famigerada Coca-cola, forçando o governo a criar um substituto: o **Phatastischen**. Para melhor sonoridade seu nome foi reduzido à **Fanta** (inicialmente era de maçã e não era laranja).

# Um pouco de História

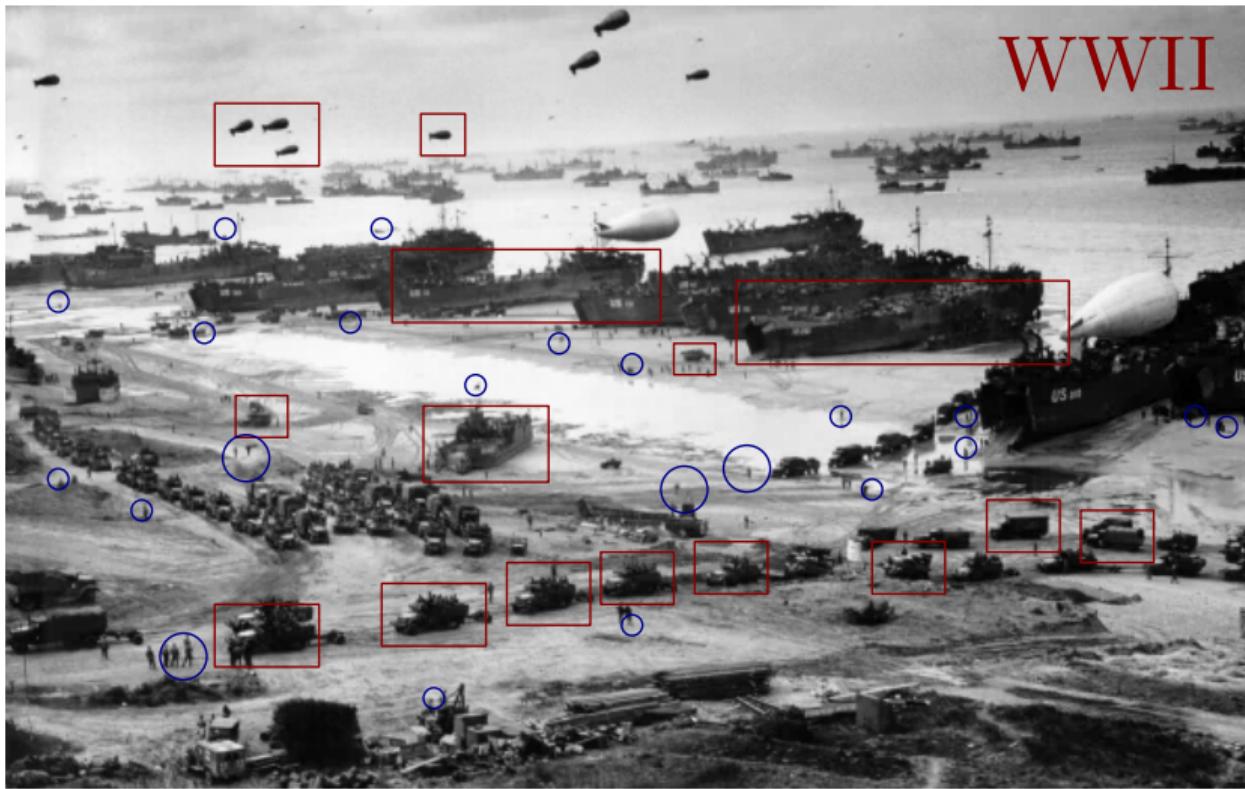


WWII

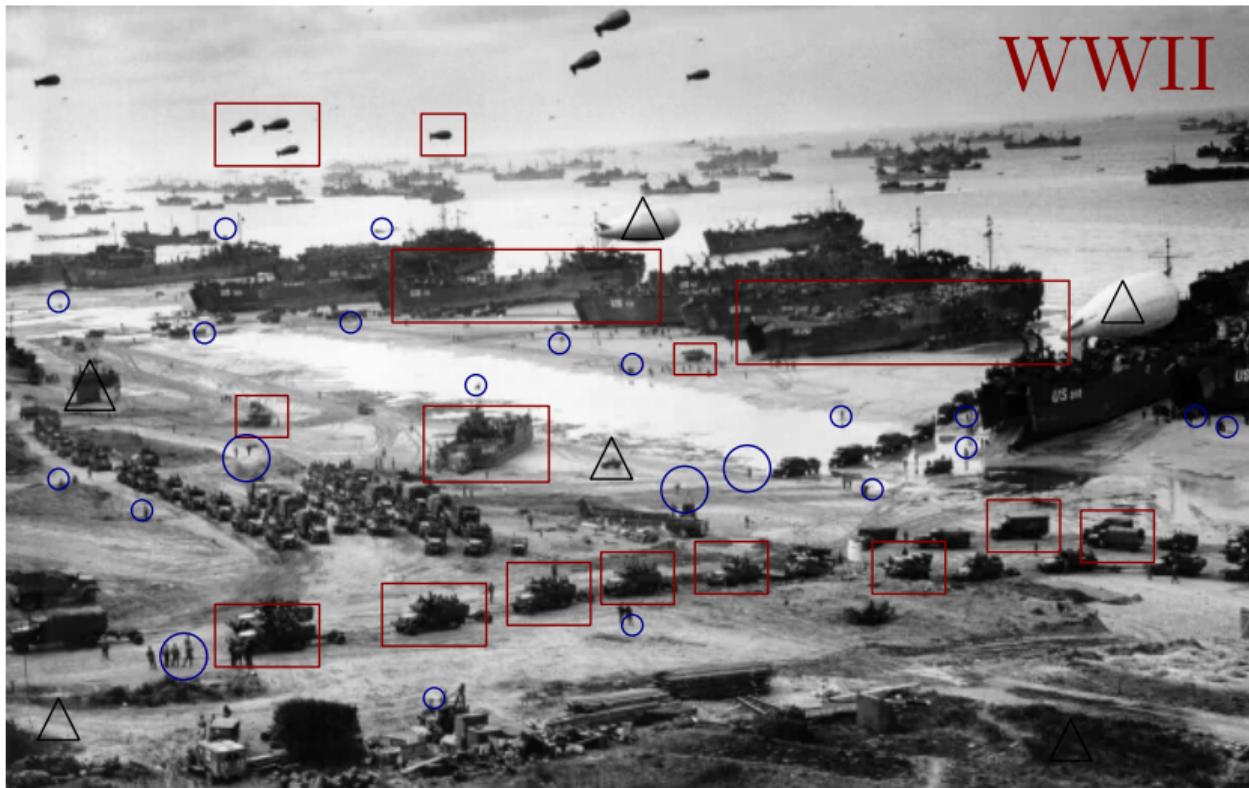
# Um pouco de História



# Um pouco de História

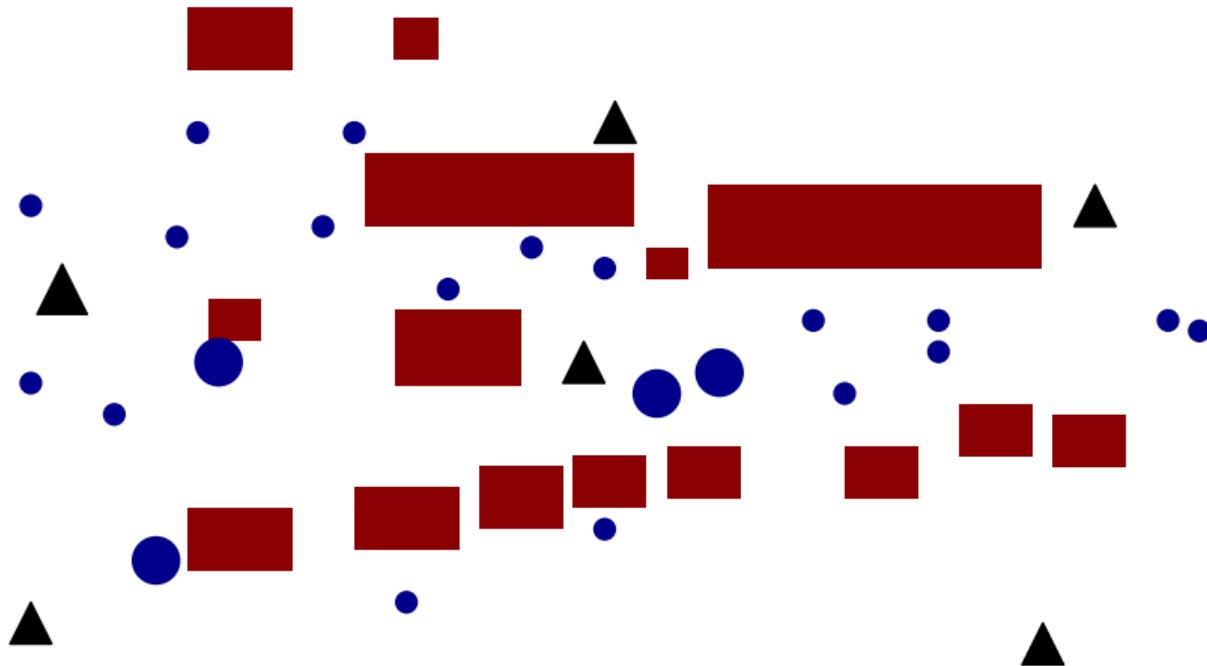


# Um pouco de História



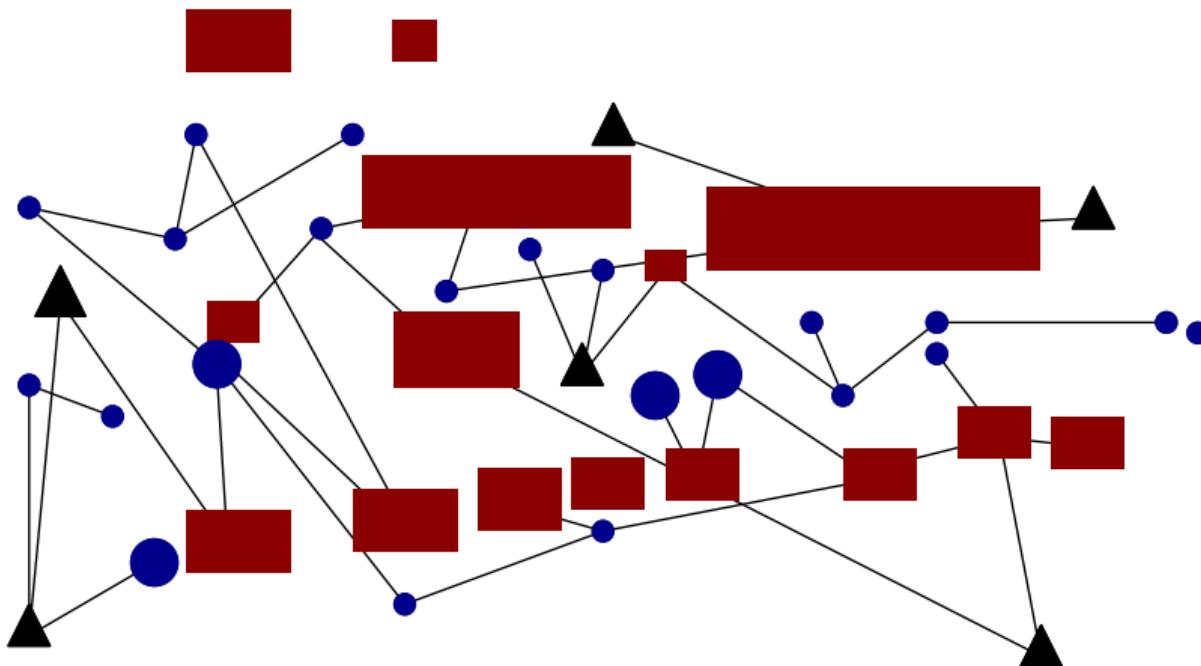
# Um pouco de História

WWII

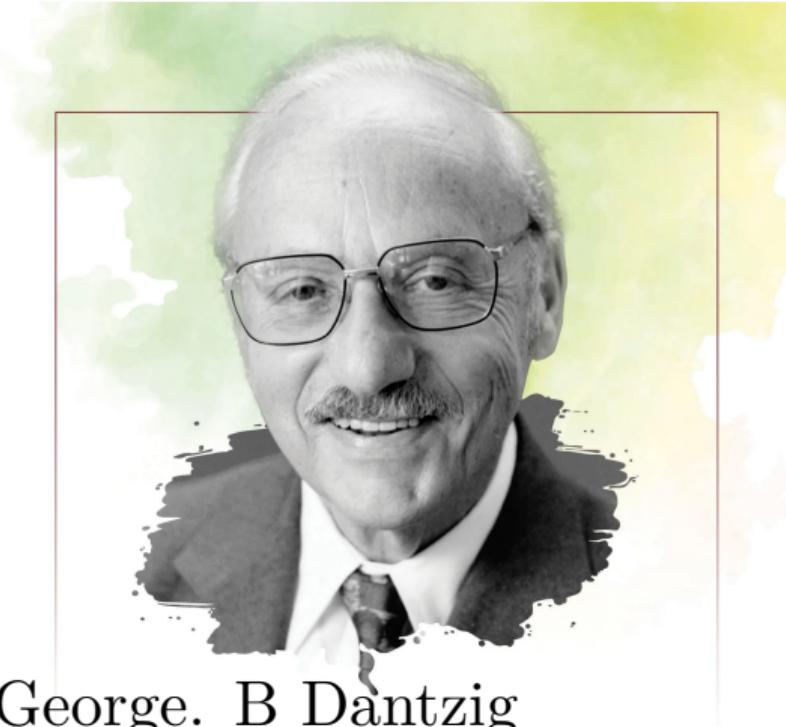


# Um pouco de História

WWII



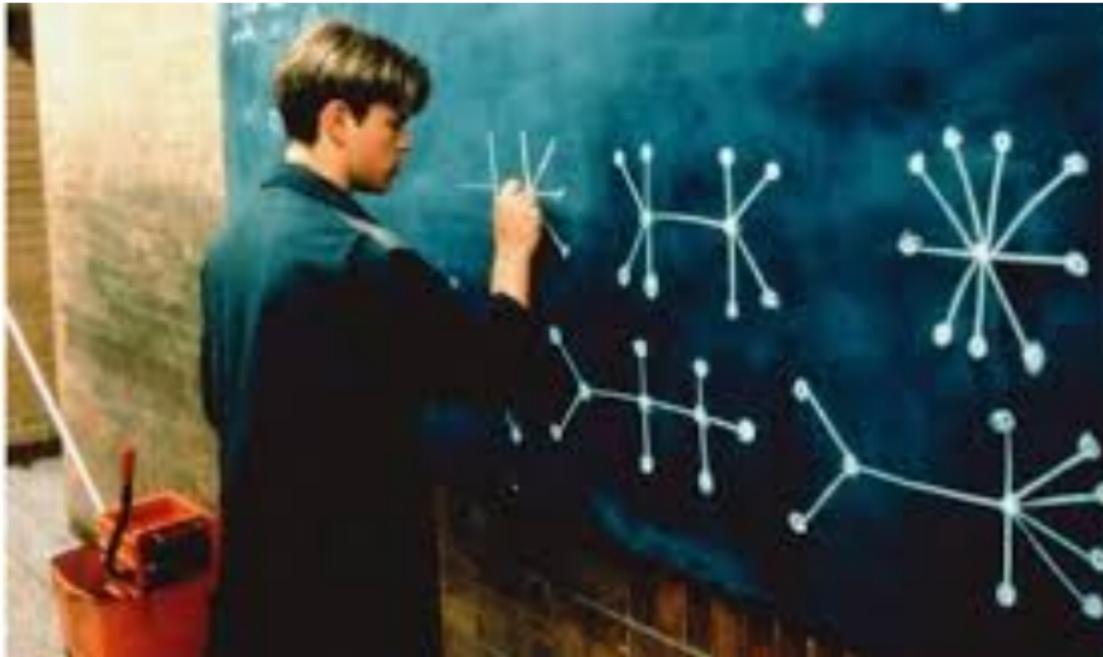
## Um pouco de História - o criador



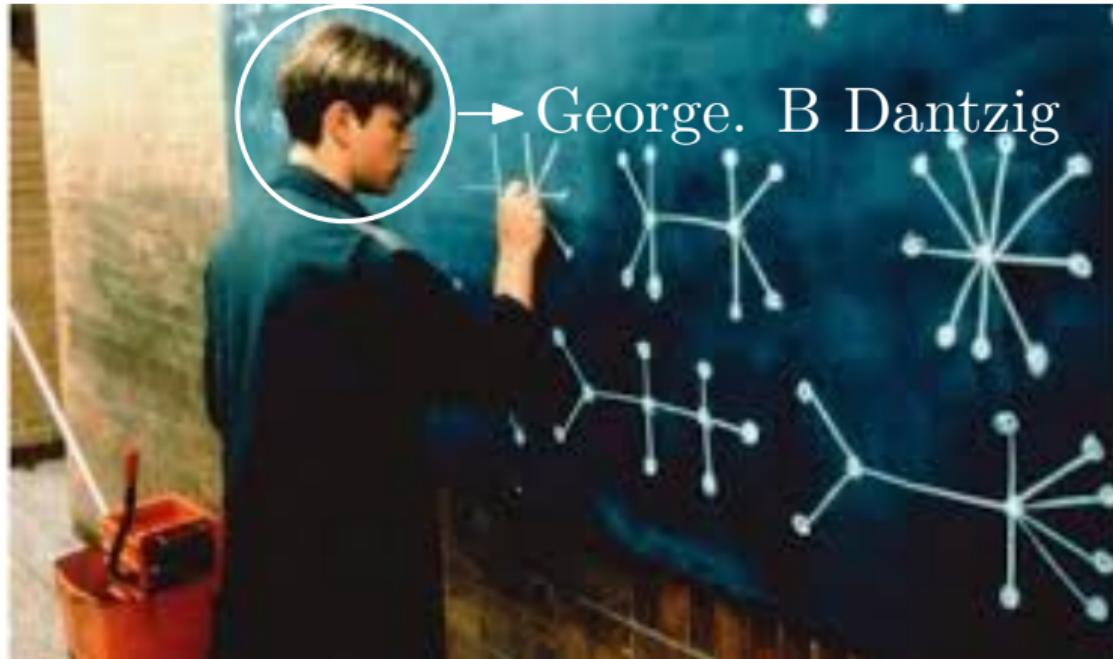
George. B Dantzig

Interrompeu seu doutorado para ajudar as forças armadas com o problema de alocação

## Um pouco de História - do que Dantzig era capaz?



## Um pouco de História - do que Dantzig era capaz?



## Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.

## Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).

## Um pouco de História - do que Dantzig era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).
- Dantzig chega atrasado em sala e copia os problemas imaginando se tratar de um dever de casa.

## Um pouco de História - do que **Dantzig** era capaz?

- Em 1939 Dantzig era aluno de graduação.
- Seu professor colocou 2 problemas em aberto no quadro (para provocar os alunos).
- Dantzig chega atrasado em sala e copia os problemas imaginando se tratar de um dever de casa.
- Pouco tempo depois retorna com os problemas resolvidos para o professor.

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Imagine o problema de alocar 70 soldados à 70 atividades.

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Imagine o problema de alocar 70 soldados à 70 atividades.
- Toda atividade deve ser desempenhada por um soldado, e existe uma aptidão de cada soldado para desempenhar cada atividade.

# Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

|   | AT1 | AT2 | AT3 | AT4 |
|---|-----|-----|-----|-----|
|  | 3   | 2   | 3   | 7   |
|  | 4   | 3   | 3   | 5   |
|  | 1   | 7   | 3   | 3   |
|  | 3   | 5   | 1   | 3   |

# Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

|   | AT1   | AT2   | AT3 | AT4   |
|---|---|---|-----|---|
|  | 3   |  | 2   |   |
|  |  | 4   | 3   | 3   |
|  |   | 1   | 7   |  |
|  | 3   |   | 5   |  |

# Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

|   | AT1   | AT2   | AT3   | AT4   |
|---|---|---|---|---|
|  | 3   |  2 | 3   | 7   |
|  |  4 | 3   | 3   | 5   |
|  | 1   | 7   |  3 | 3   |
|  | 3   | 5   | 1   |  3 |

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não
- E se existissem  $10^{40}$  terras cheias desses computadores funcionando desde o início do big-bang?

## Um pouco de História - do que o **problema** era capaz?

- Existem  $70!$  possíveis combinações de planejamentos *homem x atividade*. Uma abordagem é criar todas elas, e comparar seus resultados.
- E Se tivéssemos um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo, desde o início do big bang, conseguiríamos verificar todas as possibilidades?
  - NÃO!
- E se o computador fizesse um **bilhão** de operações por **nanosegundo**?
  - Ainda não...
- E se a **superfície da terra** fosse cheia desses computadores, trabalhando em paralelo, desde o big-bang?
  - ...não
- E se existissem  $10^{40}$  terras cheias desses computadores funcionando desde o início do big-bang?
  - Talvez!

# Um pouco de História - o confronto

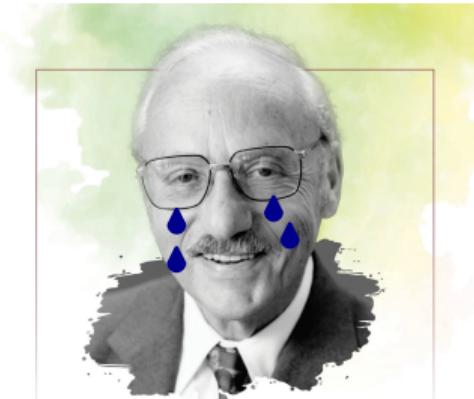


George. B Dantzig

VS

|   | AT1 | AT2 | AT3 | AT4 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 3   | 2   | 3   | 7   |
| 2 | 4   | 3   | 3   | 5   |
| 3 | 1   | 7   | 3   | 3   |
| 4 | 3   | 5   | 1   | 3   |

# Um pouco de História - o confronto



George. B Dantzig

Dantzig virou um especialista em criar planejamentos usando uma calculadora, porém sem otimização...

VS

|     | AT1 | AT2 | AT3 | AT4 |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| AT1 |     | 3   | 2   | 7   |
| AT2 | 4   |     | 3   | 5   |
| AT3 | 1   | 7   | 3   | 3   |
| AT4 | 3   | 5   | 1   | 3   |

## Voltando à História

Após a guerra, em 1945, com o fim de seu doutorado e em busca de uma posição acadêmica, Dantzig prefere aceitar a **aposta de seus colegas** do pentágono, de operacionalizar um método **automático** para resolver o problema genérico de alocação de recursos.

Cartão *automático*

## Voltando à História

Após a guerra, em 1945, com o fim de seu doutorado e em busca de uma posição acadêmica, Dantzig prefere aceitar a **aposta de seus colegas** do pentágono, de operacionalizar um método **automático** para resolver o problema genérico de alocação de recursos.

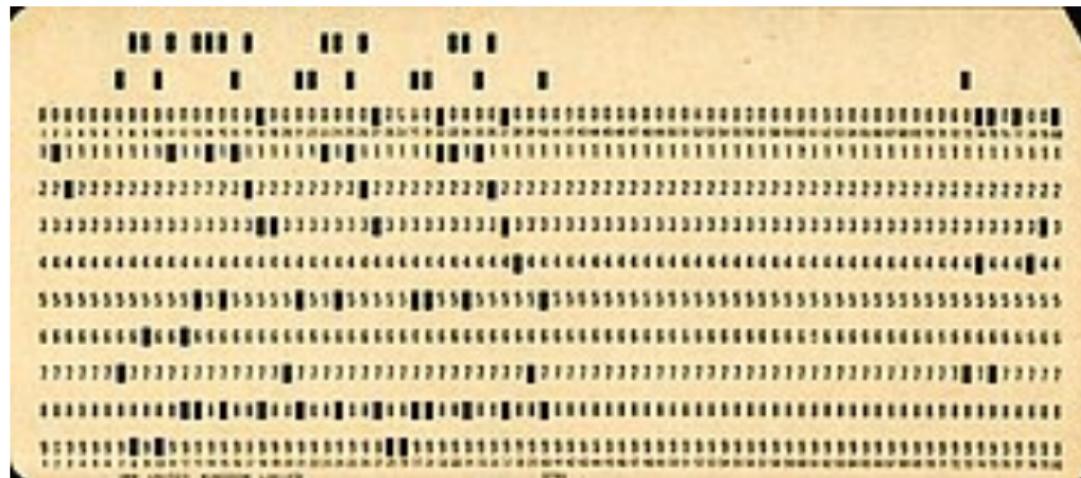


Figura 1: Cartão automático

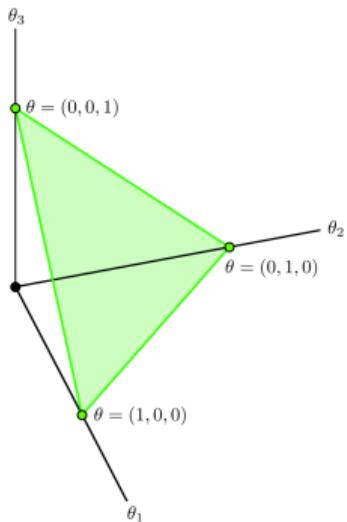
# O método Simplex

## A salvação

Finalmente, sem as pressões da guerra, em 1947 Dantzig cria um método sistemático para **resolver** problemas modelados pela programação linear, o método **Simplex**<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>O nome Simplex diz respeito ao conceito matemático de *cones simpliciais*



## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.

## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.

## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.

## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.

## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.
5. Roteamento de mensagens em redes de telecomunicação.

## Consolidação na indústria

Após a sua consolidação no pós-guerra, a programação linear rapidamente se infiltrou na indústria, devido a alta aplicabilidade de seus métodos nesse contexto.

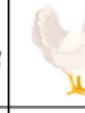
Alguns setores que empregaram PL desde o início:

1. Sequenciamento de ordens de produção.
2. Indústria do petróleo.
3. Indústria alimentícia.
4. Indústria metalúrgica.
5. Roteamento de mensagens em redes de telecomunicação.
6. Roteirização de aeronaves e navios.

# Modelando o problema da dieta

Vamos considerar o problema da dieta.

- O primeiro passo para criarmos um modelo de programação linear é a definição do que queremos descobrir, ou seja, quais são as nossas **variáveis**.

|          |  |  |  |  | Demanda   |
|----------|---|---|--|---|-----------|
| Proteína | 7   | 14  | 2  | 1   | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2   | 3   | 3  | 10  | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50  | 24.00   | 11.00  | 25.00   |           |

## Modelando o problema da dieta

- Neste problema temos diversos alimentos disponíveis, e devemos decidir *quanto comprar* de cada alimento. Dessa forma, podemos criar 4 variáveis para representar essas quantidades:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Qtde. (kg) comprada de banana} \\ x_2 : \text{Qtde. (kg) comprada de frango} \\ x_3 : \text{Qtde. (kg) comprada de arroz} \\ x_4 : \text{Qtde. (kg) comprada de bolo} \end{cases}$$

# Modelando o problema da dieta

- Com a definição das variáveis, montamos as sentenças matemáticas que representam as **restrições** e o **objetivo**.

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demandas  |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Podemos entender melhor as restrições e o objetivo atribuindo valores às variáveis (lembrando que precisamos relacionar as variáveis com as restrições de Proteína e Gordura).
- Por exemplo, se comprarmos 1kg de banana e nada mais, temos a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

- Com essa solução, quanto teremos de Proteína e Gordura na nossa dieta?

## Modelando o problema da dieta

■

$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

## Modelando o problema da dieta

- $$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$
- E se comprássemos 1kg de banana e 0.5 kg de arroz?

## Modelando o problema da dieta

- $$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 0 + 0 = 7 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$
- E se comprássemos 1kg de banana e 0.5 kg de arroz?
- $$\begin{cases} \text{Proteína} = 7 * (1) + 0 + 2 * (0.5) + 0 = 8 \\ \text{Gordura} = 2 * (1) + 0 + 3 * (0.5) + 0 = 3.5 \end{cases}$$

## Modelando o problema da dieta

- Como podemos definir a relação que descreve as quantidades de proteína e gorduras para quaisquer valores comprados dos alimentos?

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demandas  |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Como podemos definir a relação que descreve as quantidades de proteína e gorduras para quaisquer valores comprados dos alimentos?



$$\begin{cases} \text{Proteína} = 7x_1 + +14x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{Gordura} = 2x_1 + +3x_2 + 3x_3 + 10x_4 \end{cases}$$

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demanda   |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proteína | 7         | 14        | 2         | 1         | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2         | 3         | 3         | 10        | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50      | 24.00     | 11.00     | 25.00     |           |

## Modelando o problema da dieta

- Agora que conseguimos descrever as quantidades de Proteína e Gorduras para qualquer decisão de compra, podemos impor as duas restrições de demandas mínimas:

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demanda   |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteina | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Agora que conseguimos descrever as quantidades de Proteína e Gorduras para qualquer decisão de compra, podemos impor as duas restrições de demandas mínimas:



$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 \geq 30 \end{cases}$$

|          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Demanda   |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| Proteina | 7     | 14    | 2     | 1     | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2     | 3     | 3     | 10    | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50  | 24.00 | 11.00 | 25.00 |           |

## Modelando o problema da dieta

- Com essas duas inequações conseguimos criar planejamentos factíveis (que obedecem as restrições) para o problema. Porém ainda não sabemos qual é a melhor dentre duas soluções. Ou seja, falta criarmos o nosso **objetivo**.

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demanda   |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Usando a mesma lógica que usamos para a construção das restrições, temos que o custo de uma dieta para quaisquer valores das variáveis é dados por:

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demandas  |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Usando a mesma lógica que usamos para a construção das restrições, temos que o custo de uma dieta para quaisquer valores das variáveis é dado por:
- Dentre duas soluções viáveis, obviamente a melhor é a que **custar menos**. Assim, precisamos encontrar qual é a relação que descreve o custo em função das quantidades compradas (variáveis).

|          |  $x_1$ |  $x_2$ |  $x_3$ |  $x_4$ | Demandas  |
|----------|---|---|--|---|-----------|
| Proteína | 7   | 14  | 2  | 1   | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2   | 3   | 3  | 10  | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50  | 24.00   | 11.00  | 25.00   |           |

## Modelando o problema da dieta

- Com essas duas inequações conseguimos criar planejamentos factíveis (que obedecem as restrições) para o problema. Porém ainda não sabemos qual é a melhor dentre duas soluções. Ou seja, falta criarmos o nosso **objetivo**.

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demanda   |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

- Com essas duas inequações conseguimos criar planejamentos factíveis (que obedecem as restrições) para o problema. Porém ainda não sabemos qual é a melhor dentre duas soluções. Ou seja, falta criarmos o nosso **objetivo**.
- 

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5.5x_1 + 24x_2 + 11x_3 + 25x_4$$

|          | $x_1$<br> | $x_2$<br> | $x_3$<br> | $x_4$<br> | Demanda   |
|----------|--|--|---|--|-----------|
| Proteína | 7  | 14   | 2   | 1  | $\geq 60$ |
| Gordura  | 2  | 3  | 3   | 10   | $\geq 30$ |
| R\$/kg   | 5.50   | 24.00  | 11.00   | 25.00  |           |

## Modelando o problema da dieta

Dessa forma, só precisamos definir o que queremos desse objetivo, **maximizar** ou **minimizar**? Dessa forma o modelo completo de programação linear (PL) para o problema da dieta fica:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } Z = 5.5x_1 + 24x_2 + 11x_3 + 25x_4 \\ & \text{Sujeito à} \quad \begin{aligned} & 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 \geq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \end{aligned}$$

# Por que linear?

## Linearidade

O termo **linear** diz respeito às equações/inequações usadas para modelar os problemas. Um equação linear deve ser da forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , em que  $a_i$  e  $b$  são constantes e  $x_i$  são incógnitas (ou variáveis).

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 60 & \text{inequação linear} \\ 2x_1^2 + 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 30 & \text{equação não linear} \\ f(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 & \text{função não linear} \\ \sum_1^5 x_i = 5 & \text{equação linear} \end{cases}$$

# Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.

# Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (**PO-II**)

# Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

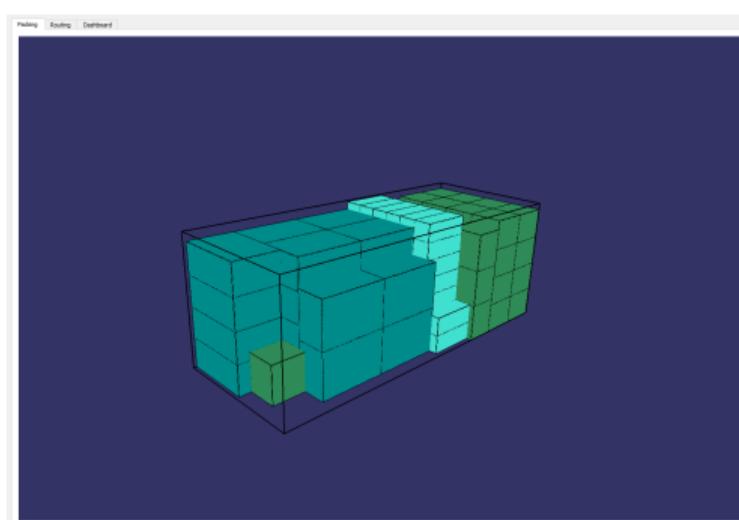
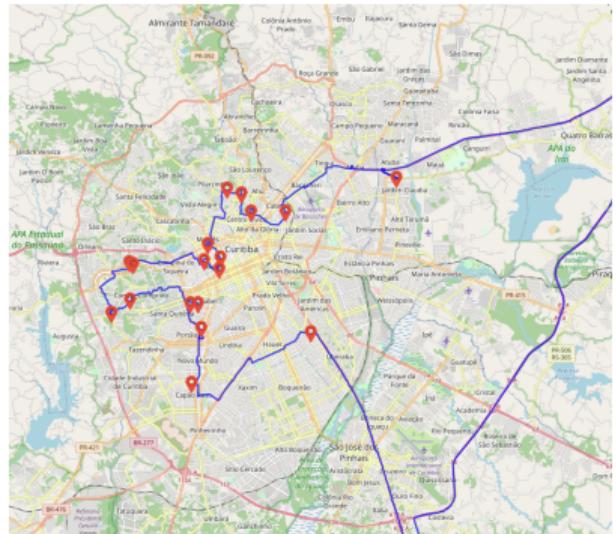
1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (**PO-II**)
3. Otimização em redes (**PO-II**)

# Após a programação linear

Muitas áreas surgiram **após**, ou mesmo paralelamente à criação da programação linear, algumas delas são:

1. Programação **não** linear.
2. Programação inteira (**PO-II**)
3. Otimização em redes (**PO-II**)
4. Programação dinâmica (**PO-III**)

# Roteirização e Carregamento - CEDRUS



## O resumo da ópera

Teste seus conhecimentos. Você deve conseguir **responder às questões** abaixo após a apresentação:

1. Qual foi o catalisador da programação linear?
2. Qual é o maior expoente da área e a sua maior contribuição?
3. Por que o ramo programação linear têm esse nome?
4. Qual é a diferença entre *modelar* um problema e *resolver* o problema?

## Exercícios

Resolva os seguintes exercícios para fixar o conteúdo.

1. Considerando o modelo da dieta desenvolvido, crie pelo menos 3 soluções **factíveis** para o problema, calcule seus custos e selecione a melhor.
2. Para cada um dos problemas abaixo, determine as variáveis, as restrições e o objetivo do problema. Traduza tudo isso matematicamente como um modelo de programação linear.
  - 2.1 Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês.
  - 2.2 Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R\$ 60,00 por unidade e o de B, R\$ 70,00 por unidade.

Existem diversos softwares comerciais e gratuitos que implementam os algoritmos que resolvem problemas modelados como programas lineares. Um deles é o [GLPK](#) General Linear Programming Kit. O GLPK não possui interface, e na maioria das vezes é usado como uma biblioteca em linguagens de programação.

No entanto, o professor **Leandro Magatão** (UTFPR - Curitiba) implementou uma solução com interface gráfica utilizando o glpk, chamada [GUSEK](#). Com ele podemos escrever modelos de PL em arquivos de texto e encontrar a solução em um mesmo ambiente.

### Usar o programa

Baixe o programa e encontre as soluções ótimas para os problemas da dieta e os dois problemas de produção.

## Sobre o curso - Aulas

### Metodologia

Devido a natureza matemática dos conteúdos, a maioria das aulas será realizada no **quadro**, salvo algumas exceções (como essa), ou para apresentação de algum **software**.

### Notas

As notas serão compostas por 3 provas escritas e um conjunto de listas de exercícios. Cada prova valerá 3 pontos e o conjunto das listas 1 ponto.

## Sobre o curso - Ementa

| Semanas | Conteúdo                        |
|---------|---------------------------------|
| 1-2     | Modelagem                       |
| 3       | Álgebra                         |
| 4-5     | Solução modelos com 2 variáveis |
| 5       | PROVA 1                         |
| 6-9     | Simplex                         |
| 9       | PROVA 2                         |
| 10-11   | Dualidade                       |
| 11-13   | Análise de sensibilidade        |
| 13-14   | Dual simplex                    |
| 15      | PROVA 3                         |