

O algoritmo Dual-Simplex

Alexandre Checoli Choueiri

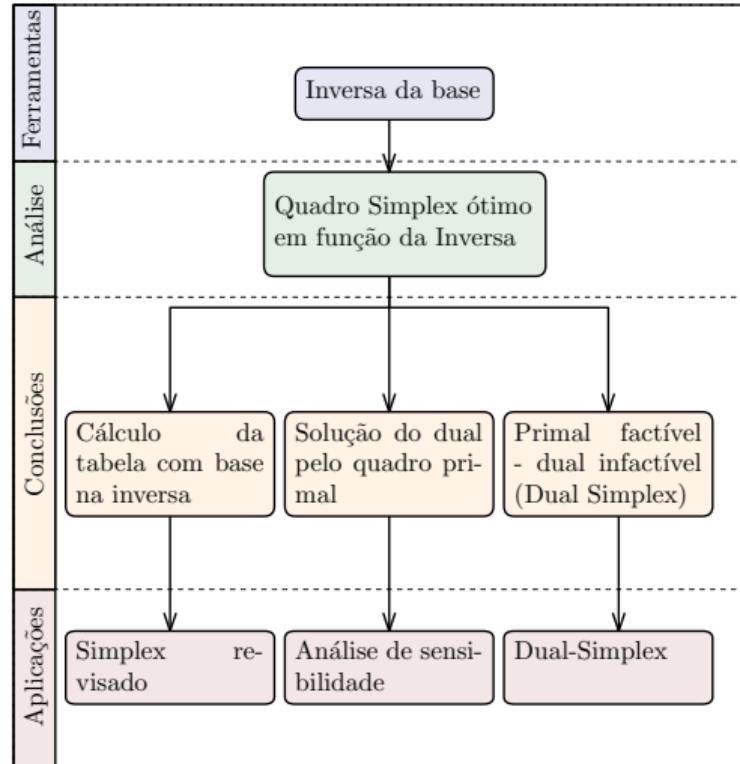
06/11/2022

Conteúdo

- ① Relembrando
- ② Motivação
- ③ A intuição do método
- ④ Condições para aplicar o Dual-Simplex
- ⑤ O algoritmo Dual-Simplex
- ⑥ Exemplo

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e dual.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Como verificamos se a tabela acima é **primal**-factível?

Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e dual.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade primal está associada ao vetor b , ou seja:

$$b \geq 0$$

Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade primal e **dual**.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

E a factibilidade dual? Como verificamos se a tabela é **dual** factível?

Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade primal e **dual**.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade dual está associada ao vetor de custos da função objetivo, ou seja:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Dual-Simplex

Retomando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e **dual**.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	1

Ainda, na optimização a tabela mantém tanto a factibilidade primal quanto dual.

Dual-Simplex

Motivação

Na prática, após encontrar a solução de problema de PL, muitas vezes é necessário fazer pequenas modificações no problema original. Por exemplo a adição de uma **nova restrição**. Essa nova restrição pode **infactibilizar** a solução ótima, o que implicaria em resolver todo o problema novamente.

Dual-Simplex

Motivação

Considere o par primal-dual de modelos de PLs:

$$\begin{aligned} \max z = & \quad 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

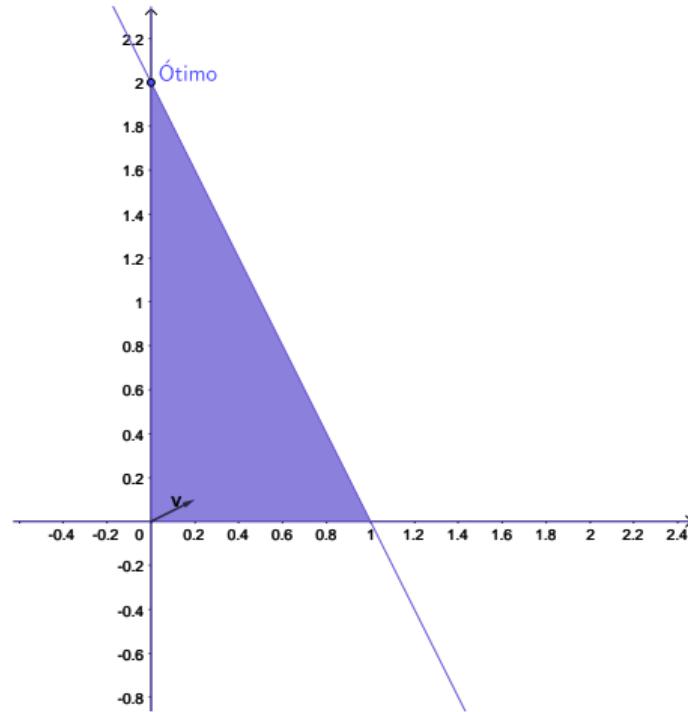
$$\begin{aligned} \min v = & \quad 2\pi_1 \\ & 2\pi_1 \geq 2 \\ & \pi_1 \geq 1 \\ & \pi_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual-Simplex

Motivação

O quadro ótimo para o primal, bem como o gráfico da região factível ficam então:

VB	x_1	x_2	x_3	$-z$
	0	0	1	2
x_2	2	1	1	2



Dual-Simplex

Motivação

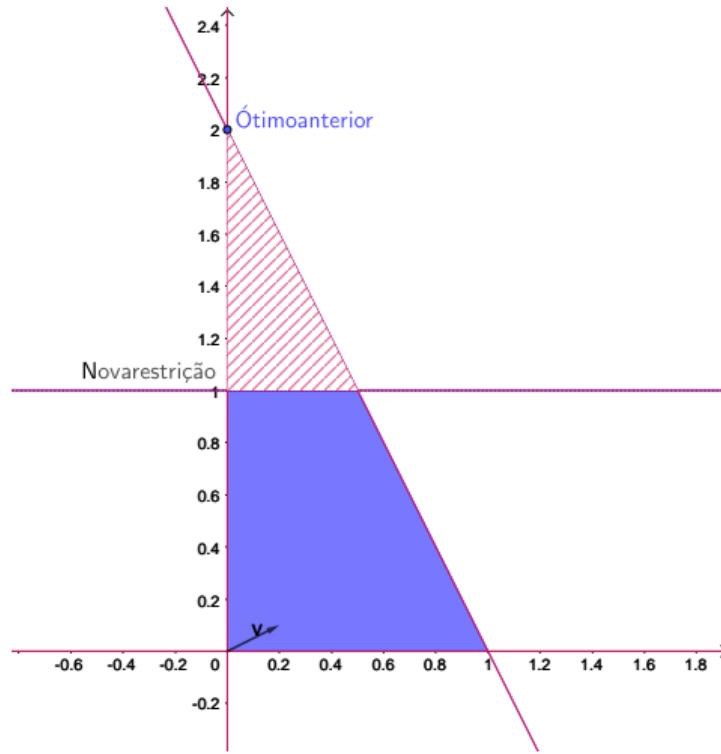
Imagine que por algum motivo, após a otimização, seja necessário inserir a nova restrição ao modelo:

$$x_2 \leq 1$$

Dual-Simplex

Motivação

A solução ótima anterior não está mais na região **factível** do problema.



Dual-Simplex

Motivação

Podemos perceber essa infactibilidade no quadro Simplex. Inserindo a variável de folga da restrição, ficamos com:

$$x_2 + \textcolor{red}{x_4} = 1$$

Dual-Simplex

Motivação

Podemos perceber essa infactibilidade no quadro Simplex. Inserindo a variável de folga da restrição, ficamos com:

$$x_2 + \textcolor{red}{x}_4 = 1$$

Ao inserirmos essa linha no quadro Simplex (no quadro ótimo), ficamos com:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
$\textcolor{red}{??}$	0	1	0	1	1

Note que, como inserimos uma nova restrição, precisamos adicionar uma nova variável à base.

Dual-Simplex

Motivação

Via de regra, sempre inserimos a folga da nova restrição como variável básica (nesse caso x_4), e mantemos todas as outras iguais.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	0	1	0	1	1

Dual-Simplex

Motivação

Via de regra, sempre inserimos a folga da nova restrição como variável básica (nesse caso x_4), e mantemos todas as outras iguais.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	0	1	0	1	1

Porém, percebemos que o sistema deixou de estar na forma canônica em relação à variável x_2 , de forma que precisamos realizar a operação $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ para manter x_2 na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	0	1	0	1	1

Dual-Simplex

Motivação

A nova tabela fica então:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Note que a **infactibilidade** é apontada pela negatividade da variável ($b < 0$).

Dual-Simplex

Motivação

Sabemos também, que associado a todo quadro Simplex temos uma solução para o problema dual equivalente (π):

		$-\pi_1$	$-\pi_2$		
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Motivação

Sabemos também, que associado a todo quadro Simplex temos uma solução para o problema dual equivalente (π):

			$-\pi_1$	$-\pi_2$	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Note que a inserção da nova restrição, **não afetou a condição de factibilidade dual**, ou seja, o termo:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

ainda é valido (todos os coeficientes da função objetivo ≥ 0). Mas por quê isso acontece?

Dual-Simplex

Motivação

Vejamos como a nova restrição fica no par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min v = & 2\pi_1 - \pi_2 \\ & 2\pi_1 + 0\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 - \pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1 - \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

Dual-Simplex

Motivação

Vejamos como a nova restrição fica no par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \textcolor{red}{0x_1 + x_2 \leq 1} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min v = & 2\pi_1 + \textcolor{red}{\pi_2} \\ & 2\pi_1 + 0\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 + \textcolor{red}{\pi_2} \geq 1 \\ & \pi_1 + \textcolor{red}{\pi_2} \geq 0 \end{array}$$

Ou seja, a inserção da nova restrição no primal gera uma nova **variável** no dual; de forma que, se a solução dual anterior já era dual-factível, podemos atribuir o valor de zero a nova variável, e a nova solução continuará sendo **dual factível**.

Dual-Simplex

Motivação

Substituindo a solução dual $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

$$\begin{aligned} \min v = & \quad 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \geq 2 \\ & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \geq 1 \\ & 1 \cdot 0 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual-Simplex

Motivação

Substituindo a solução dual $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	$-\pi_1$ $-\pi_2$				
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

$$\begin{aligned} \min v = & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \Rightarrow 2 \\ & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark \\ & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark \\ & 1 \cdot 0 \geq 0 \end{aligned}$$

Todas as restrições duais ainda são satisfeitas.

Dual-Simplex

Intuição do método

A ideia geral do método dual-Simplex é, a partir de um quadro Simplex **infactível** para o primal, porém **factível** para o dual, tentar recuperar a **factibilidade** primal mantendo a **factibilidade** dual. Se isso ocorrer, sabemos que atingimos o ótimo.

Dual-Simplex

Intuição do método



Dual-Simplex

Intuição do método

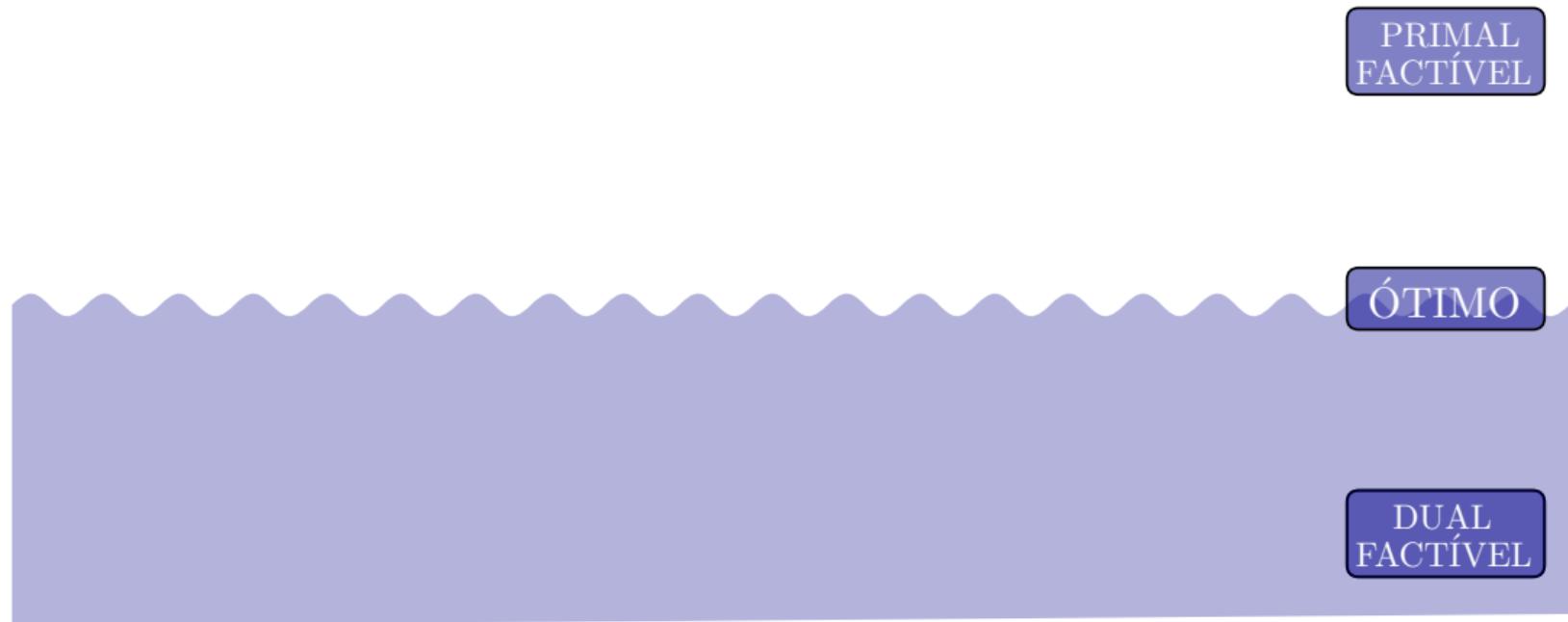
PRIMAL
FACTÍVEL

ÓTIMO

DUAL
FACTÍVEL

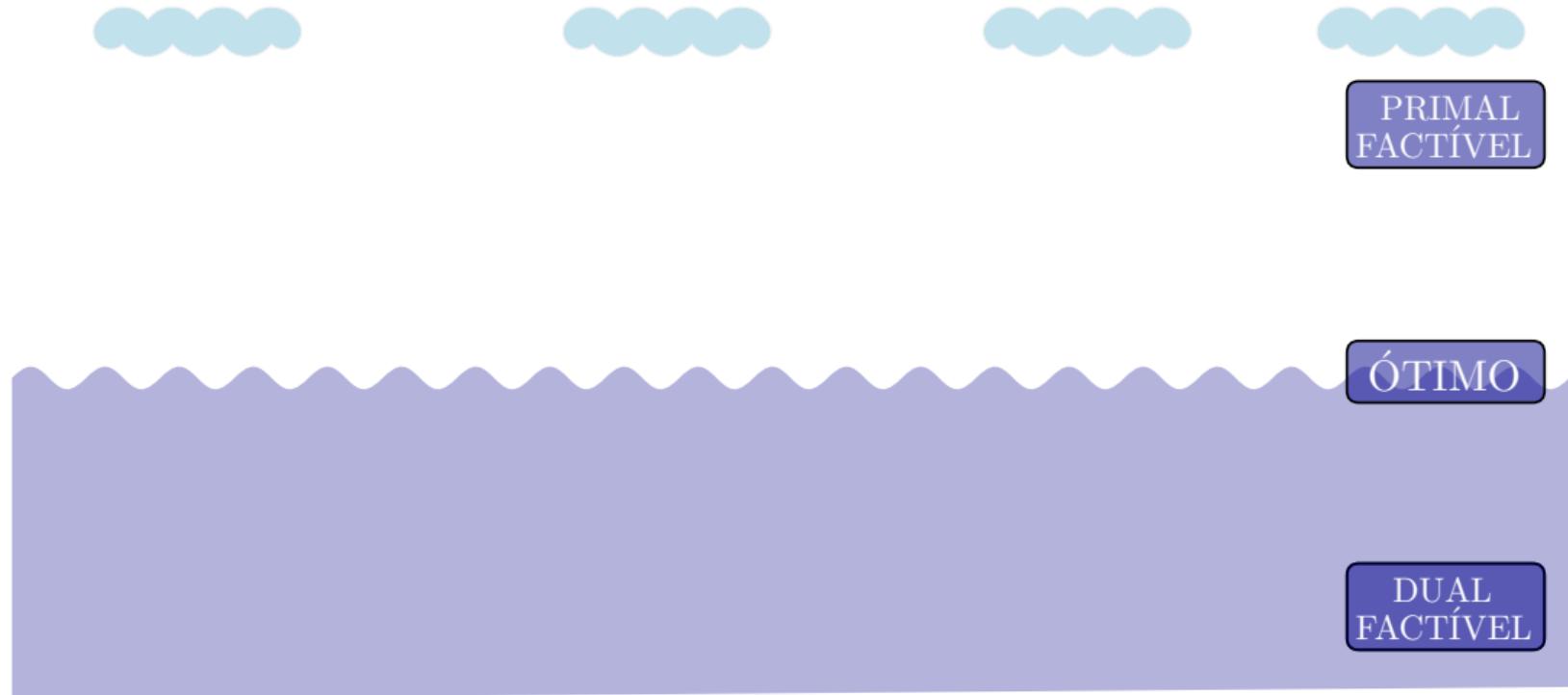
Dual-Simplex

Intuição do método



Dual-Simplex

Intuição do método



Dual-Simplex

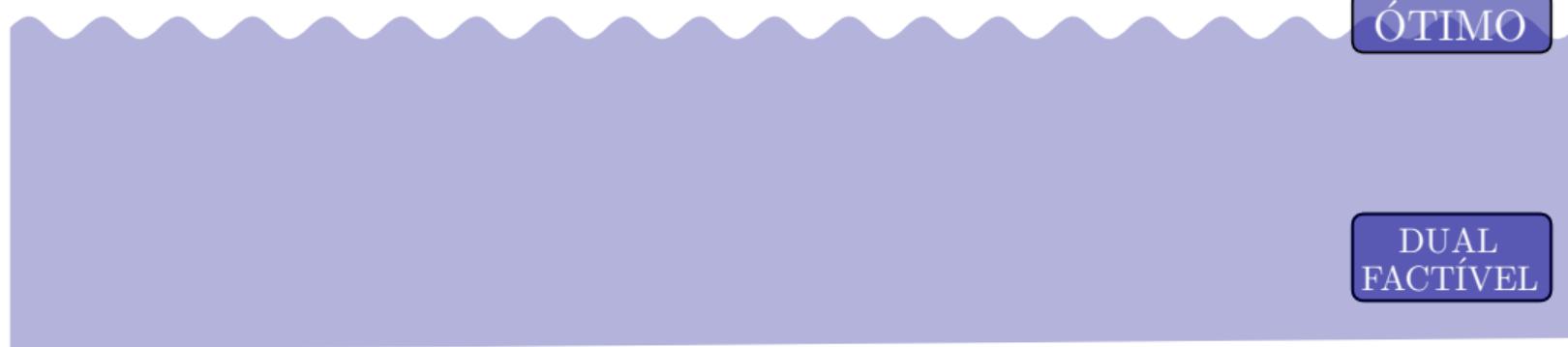
Intuição do método



VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
x_2					



PRIMAL
FACTÍVEL
(simplex)



Dual-Simplex

Intuição do método

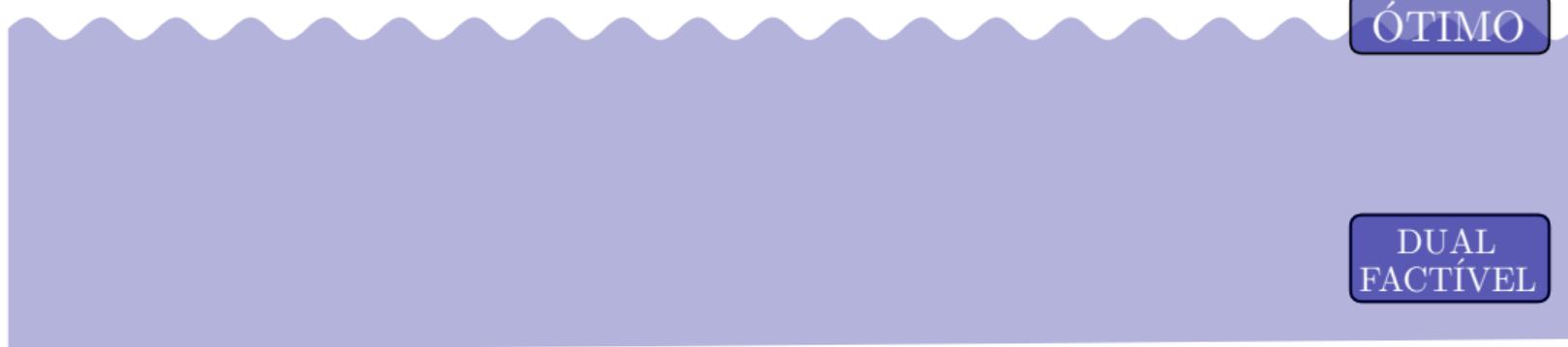
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
x_2					
x_4					

→

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$



PRIMAL
FACTÍVEL
(simplex)



Dual-Simplex

Intuição do método

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
x_2					

x_4

x_2

x_4

x_2

x_4

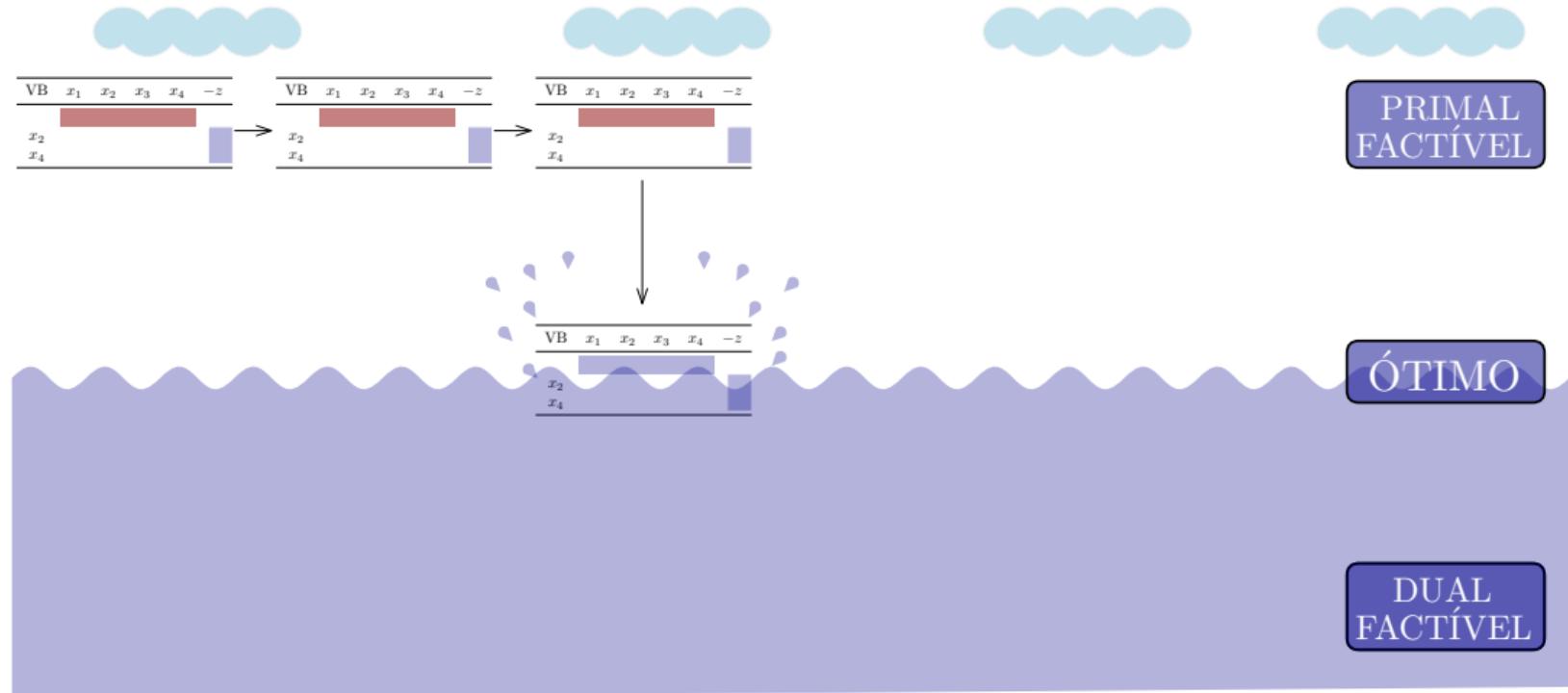


PRIMAL
FACTÍVEL
(simplex)



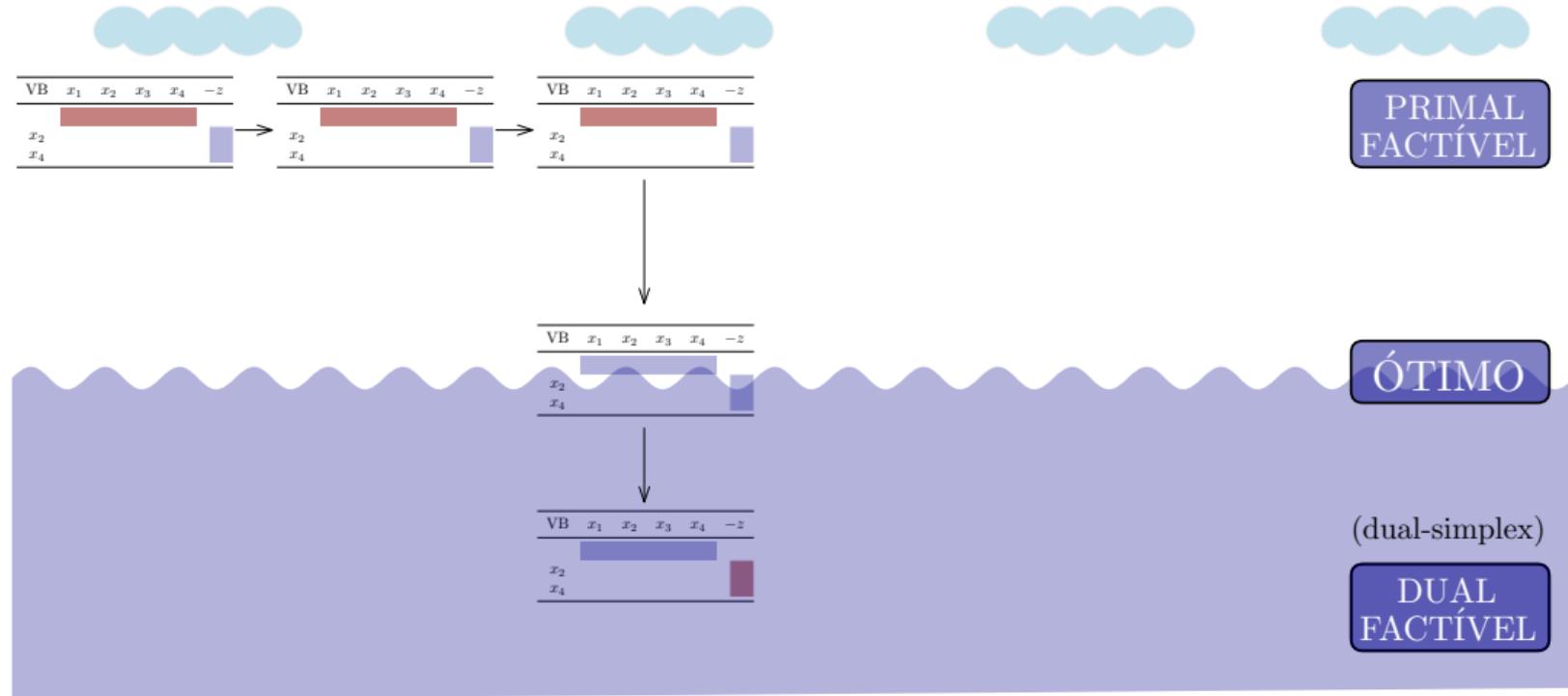
Dual-Simplex

Intuição do método



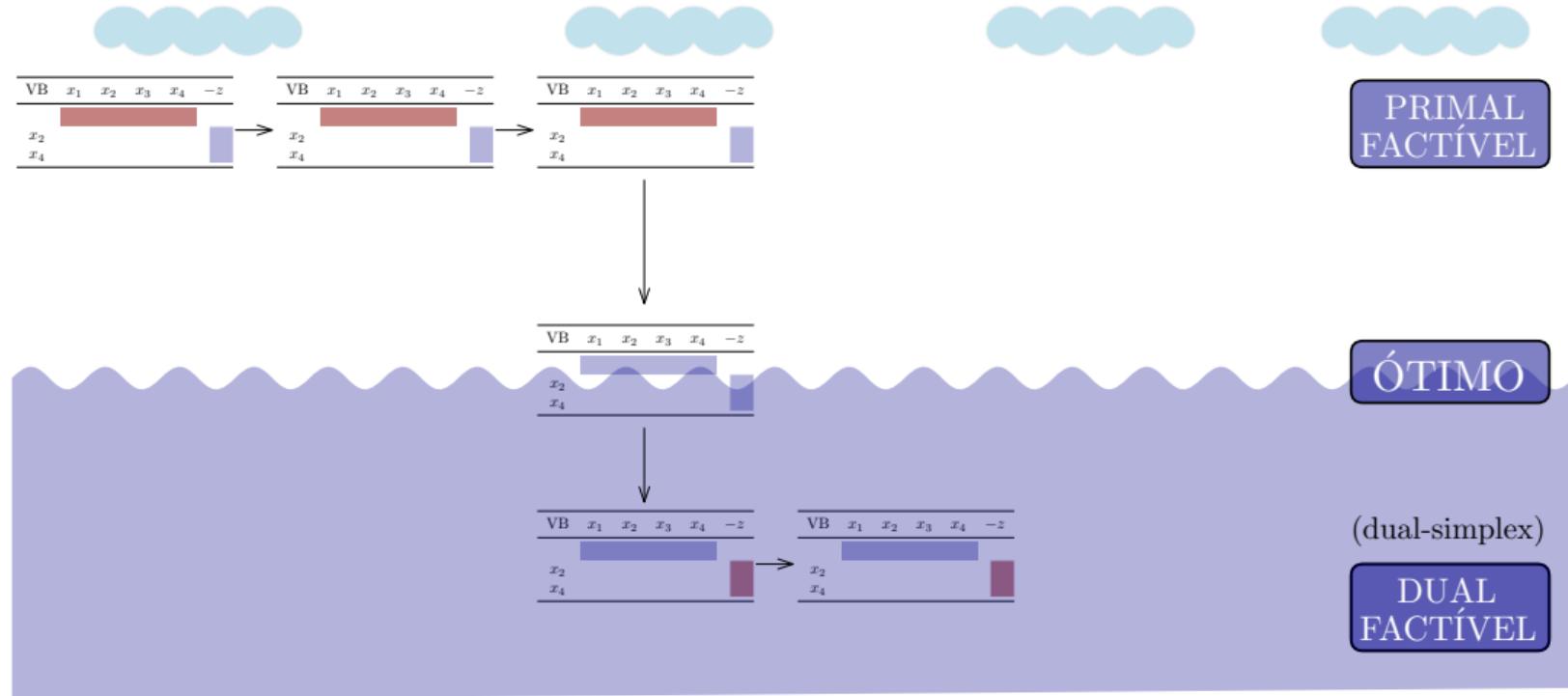
Dual-Simplex

Intuição do método



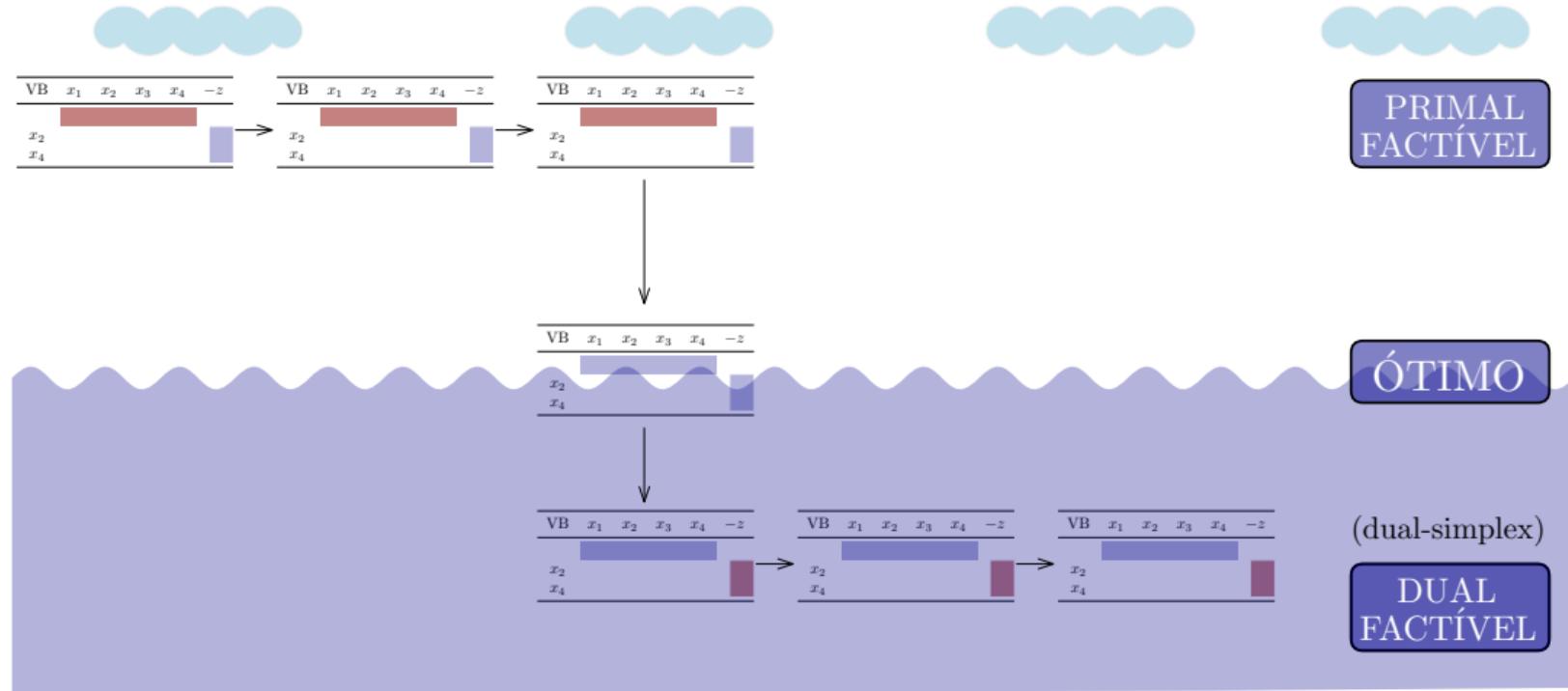
Dual-Simplex

Intuição do método



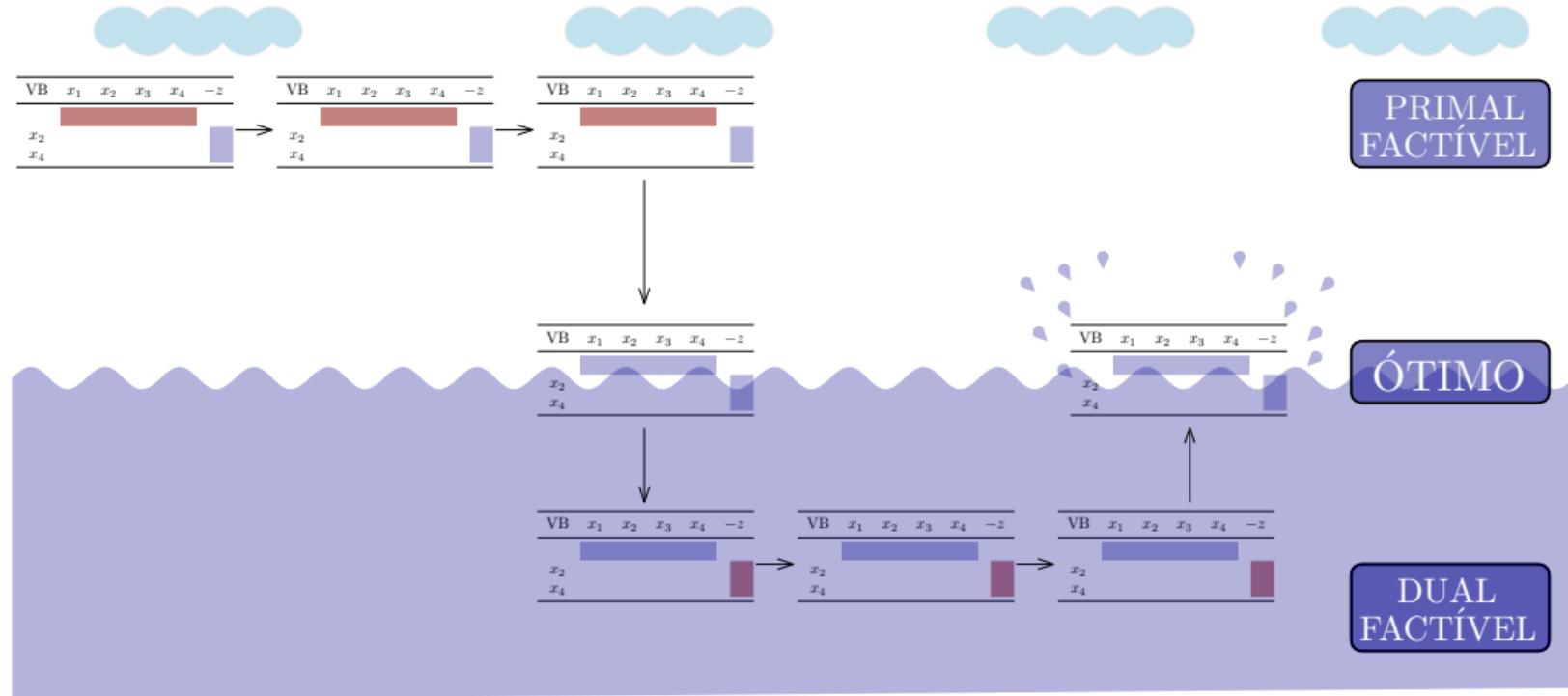
Dual-Simplex

Intuição do método



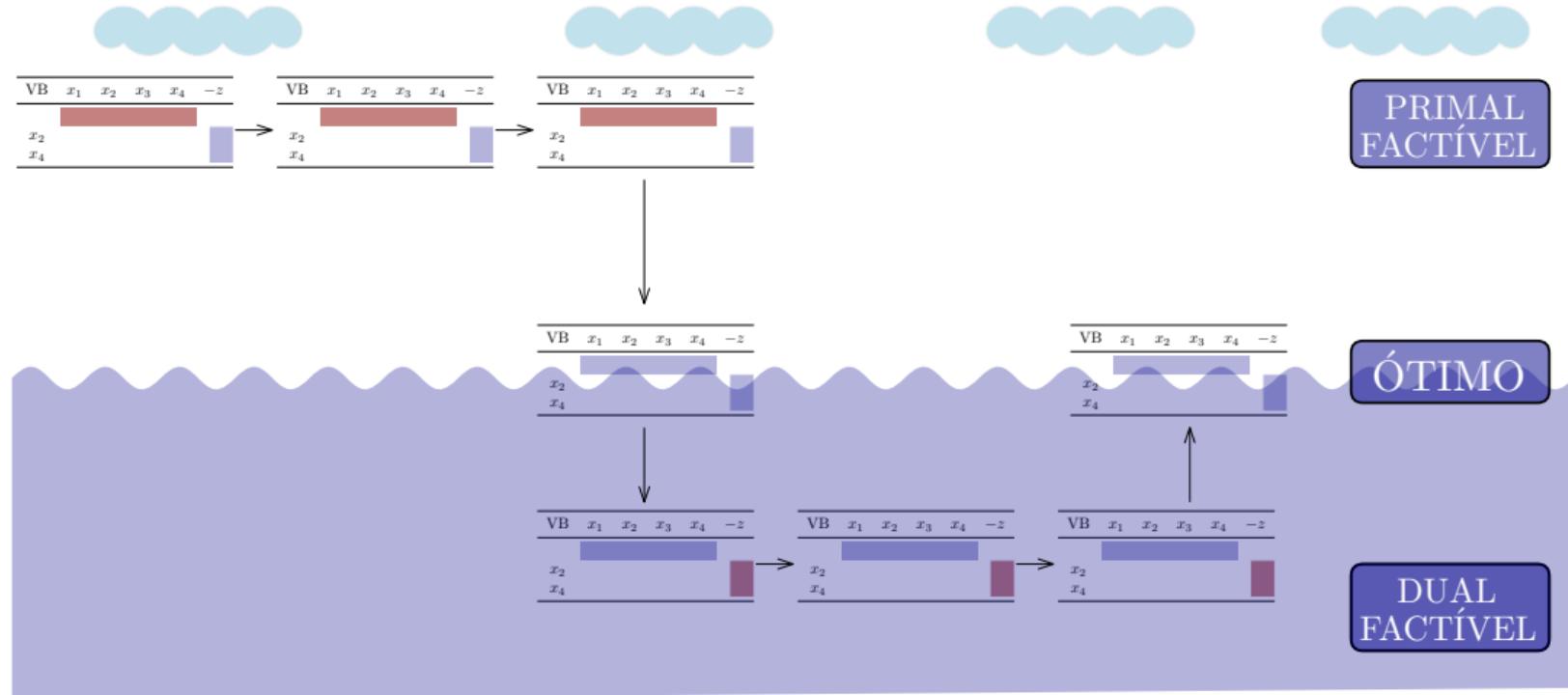
Dual-Simplex

Intuição do método



Dual-Simplex

Intuição do método



Dual-Simplex

Animação (Adobe Acrobat DC)

Dual-Simplex

Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual (π). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual (π). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

$$b \geq 0$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	(2)
x_4	-2	0	-1	1	(-1)

Dual-Simplex

Intuição do método

O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual (π). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

$$b \geq 0$$

Ao mesmo tempo em que mantém a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	(0)	(0)	(1)	(0)	2
x_2	2	1	1	0	(2)
x_4	-2	0	-1	1	(-1)

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que sai da base

Dessa forma, iniciamos o método escolhendo a **variável que sai da base** (ao contrário do Simplex). Como queremos retomar a factibilidade (deixar $b \geq 0$), escolhemos a variável com o valor de b **mais negativo**, ou seja, selecionamos o valor de b da linha r (b_r) de tal forma que:

$$\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i\}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \quad \bar{b}_i < 0$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que sai da base

Dessa forma, iniciamos o método escolhendo a **variável que sai da base** (ao contrário do Simplex). Como queremos retomar a factibilidade (deixar $b \geq 0$), escolhemos a variável com o valor de b **mais negativo**, ou seja, selecionamos o valor de b da linha r (b_r) de tal forma que:

$$\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i\}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \quad \bar{b}_i < 0$$

Na nossa tabela temos que:

$$\bar{b}_r = \min \{-1\} \Rightarrow \bar{b}_3 = -1$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Portanto a variável que deixará a base (linha) é x_4 . Agora devemos escolher a variável que vai entrar (coluna). Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	
	0	0	1	0	2	
x_2	2	1	1	0	2	
x_4	-2	0	-1	1	-1	\rightarrow

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Portanto a variável que deixará a base (linha) é x_4 . Agora devemos escolher a variável que vai entrar (coluna). Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	
	0	0	1	0	2	
x_2	2	1	1	0	2	
x_4	-2	0	-1	1	-1	\rightarrow

A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha pelo próprio elemento pivô.

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Como queremos deixar $b \geq 0$, e $b_r < 0$, a divisão:

$$b_r/a_{r,s} \geq 0$$

Só é válida quando $a_{r,s} < 0$. Dessa forma, só podemos olhar para os elementos da linha ***r* que são negativos**.

	??	??	??	??	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
					\rightarrow

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Além de selecionar somente entre os elementos negativos, devemos também manter a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Ou seja, após realizarmos o pivoteamento, os coeficientes da função objetivo devem se manter positivos. Para encontrar o elemento pivô que mantém a relação verdadeira, precisamos determinar de forma genérica o que ocorre com os elementos da função objetivo, de acordo com o pivô escolhido.

Dual-Simplex

Intuição do método

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	

→ Elemento $a_{r,s} = a_{3,1}$ Linha r = 3

Já selecionamos a coluna do elemento pivô, ou seja, $r = 3$. Chamando as colunas de s , temos que o elemento $a_{r,s} = a_{3,1} = -1$.

Dual-Simplex

Intuição do método

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	(-1)	1	(-1)
	1	2	3	4	
	-2/-1	0/-1	-1/-1	1/-1	-1/-1

Devemos então escolher uma coluna s para o elemento pivô. Suponha que escolhemos o elemento pivô $a_{r,s} = a_{3,3} = -1$. A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha todo pelo elemento.

Dual-Simplex

Intuição do método

Coluna s = 3

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	(-1)	1	(-1)
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{-1}$	$\frac{a_{3,2}}{-1}$	$\frac{a_{3,3}}{-1}$	$\frac{a_{3,4}}{-1}$	$-1/-1$

Podemos usar os índices das colunas para generalizar os elementos das operações.

Dual-Simplex

Intuição do método

	c_1		c_3		
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

1	2	3	4	
$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	$-1/-1$

Da mesma forma podemos substituir o elemento -1 pelo elemento pivô $= a_{3,3}$. Ainda, se chamarmos os elementos da função objetivo de c , podemos determinar a operação que deve ser realizada para zerar o elemento $c_3 = 1$:

Dual-Simplex

Intuição do método

$$c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{a_{3,1}}{a_{3,3}} & \frac{a_{3,2}}{a_{3,3}} & \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}} & \frac{a_{3,4}}{a_{3,3}} & -1/-1 \end{array}$$

$$c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$$

Dual-Simplex

Intuição do método

$$c_1 - c_3 \frac{a_{3,1}}{a_{3,3}} \quad c_2 - c_3 \frac{a_{3,2}}{a_{3,3}} \quad c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}} \quad c_4 - c_3 \frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	-2	0	0	1	1
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	-1/-1

Essa mesma operação será realizada em todos os elementos da função objetivo, mudando

Dual-Simplex

Intuição do método

$$c_1 - c_s \frac{a_{r,1}}{a_{r,s}} \quad c_2 - c_s \frac{a_{r,2}}{a_{r,s}} \quad c_3 - c_s \frac{a_{r,3}}{a_{r,s}} \quad c_4 - c_r \frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	-2	0	0	1	1
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,2}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,3}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$	$-1/-1$

Assim, conseguimos escrever tudo em função do pivô (da linha r e da coluna s).

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Escrevendo os elementos que variam em função do índice j , temos a expressão genérica para os valores dos coef. da função objetivo, em relação ao elemento pivô (linha r e coluna s):

$$c_j = c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \text{ para } j = 1, \dots, n$$

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser ≥ 0 , assim, temos que:

$$c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \geq 0$$

$$c_j \geq c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}}$$

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

A desigualdade foi invertida na última passagem pois $a_{r,j} < 0$.

Dual-Simplex

Intuição do método - variável que entra na base

Temos então que

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

É equivalente à

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Ou seja, selecionamos a coluna s como o maior valor de todas as divisões dos coeficientes da função objetivo e os valores da linha da variável que sai da base (todos aqueles negativos).

Dual-Simplex

Condições para aplicar o método

Com a variável que sai da base (linha r) e a variável que entra (coluna s), basta fazer o pivoteamento no elemento $a_{r,s}$. Em seguida, se ainda existirem valores de $b < 0$ o procedimento é repetido. Se as seguintes condições forem satisfeitas, o algoritmo Dual-Simplex pode ser aplicado:

1. A tabela está na forma canônica.
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual.
3. Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal.

Dual-Simplex

Algoritmo Dual-Simplex

O algoritmo Dual-Simplex fica então, partindo de um quadro Simplex em que as condições acima são satisfeitas:

1. **(critério de otimalidade)**: Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima.
2. **(seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha r , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m, \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna s de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.

4. **(pivotamento)**: Realize as operações de pivotamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

Dual-Simplex

Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual. ✓

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual. ✓
3. Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal. ✓

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Dual-Simplex

Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima.
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha r , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m, \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna s de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

Dual-Simplex

Exemplo

Vemos que existe $b < 0$.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	(-1)

Dual-Simplex

Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima. ✓
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha r , de acordo com:

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m, \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna s de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

Dual-Simplex

Exemplo

Selecionamos então a linha de b com valor mais negativo, ou seja:

$$\bar{b}_r = \min\{-1\} = -1$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Portanto $r = 3$ e a variável que sai da base é x_4 .

Dual-Simplex

Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. (Critério de otimalidade): Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima. ✓
2. (Seleção da variável que sai da base): selecione a variável que sai da base na linha r , de acordo com: ✓

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m, \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. (Seleção da variável que entra na base): selecione a variável da coluna s de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.

4. (Pivoteamento): Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

Dual-Simplex

Exemplo

Agora, criamos o conjunto com todos os elementos da divisão dos coeficientes da função objetivo pelo coeficientes da linha da variável que sai $r = 3$ (somente onde os coeficientes são negativos). Selecionamos o máximo desse conjunto, que se refere a coluna da **variável que entra na base**.

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max \left\{ \frac{0}{-2}, \frac{1}{-1} \right\} = 0$$

Ou seja, a variável que entra na base é x_1 na coluna $s = 1$. Dessa forma, o elemento pivô é $a_{3,1} = -2$.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	(-2)	0	-1	1	-1

Portanto $r = 3$ e a variável que entra na base é x_4 .

Dual-Simplex

Exemplo

Como todas as condições são satisfeitas, podemos começar a aplicar o algoritmo Dual-Simplex:

1. **(Critério de otimalidade)**: Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima. ✓
2. **(Seleção da variável que sai da base)**: selecione a variável que sai da base na linha r , de acordo com: ✓

$$\bar{b}_r = \min_{\{\forall i \in 1, \dots, m, \bar{b}_i < 0\}} \bar{b}_i$$

3. **(Seleção da variável que entra na base)**: selecione a variável da coluna s de forma que:

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$

Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível. ✓

4. **(Pivoteamento)**: Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

Dual-Simplex

Exemplo

Para pivotarmos o elemento $a_{3,1} = -2$, fazemos as seguintes operações:

1. $L_3 \leftarrow L_3/2$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	1	1
x_1	1	0	1/2	-1/2	1/2

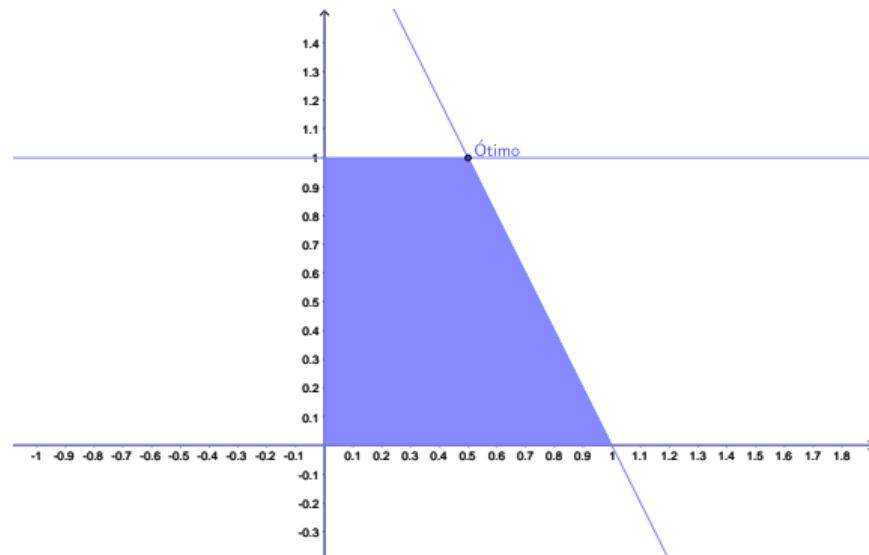
Como nenhum $b < 0$ a solução é **primal factível**. Ainda, como $c \geq 0$ ela também é **primal factível**, de forma que a solução é ótima.

Dual-Simplex

Exemplo

A nova solução ótima é mostrada no gráfico. Compare com o gráfico no inicio da apresentação.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	1	1
x_1	1	0	1/2	-1/2	1/2



Conclusões

1. Se após a otimização precisarmos adicionar novas restrições no problema, e o mesmo se tornar infactível, podemos usar o método Dual-Simplex para aproveitar o quadro atual, ao invés recomeçar a otimização do zero.
2. Antes de aplicar o método, garantir que as condições são satisfeitas.
3. Em algumas ocasiões é mais vantajoso usar o Dual-Simplex do que o Simplex, e vice-versa, as características do modelo é que dirão o caminho a seguir.
4. Podemos usar o Dual-Simplex em outras ocasiões (não somente ao adicionar restrições), por exemplo no lugar de aplicar a Fase I para encontrar uma solução inicial viável.