L7 - A Inversa no Simplex & Dual Simplex

1 A inversa no simplex

1. Um modelo de PL na forma padrão pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

   Ainda, considerando um conjunto de variáveis básica em uma solução qualquer, podemos reescrever esse modelo separando todos os coeficientes referentes às variáveis básicas (B) e não básicas (N), como:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

   Em que:

   - $\mathbf{c}_B^T$ e $\mathbf{c}_N^T$ são os vetores dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas na função objetivo.
   - $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ são as submatrizes da matriz tecnológica, referentes às colunas das variáveis básicas e não básicas.
   - $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

   Considere o modelo de PL a seguir, e faça o que se pede:

$$\begin{aligned} \max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Escreva o modelo na forma matricial (encontre os elementos c^T,$\mathbf{x}$,$\mathbf{A}$,$\mathbf{b}$ e reescreva o sistema com eles → primeira forma matricial acima).
   (b) Considerando a solução básica $x_B^T = (x_1, x_4)$, reescreva o sistema na forma matricial com a separação das variáveis básicas (segunda forma matricial acima).
   (c) A solução básica $x_B^T = (x_1, x_4)$ é factível? (use a inversa de B para verificar os valores atualizados de $\mathbf{b}$, e verifique se eles são ≥ 0).
   (d) Sabe-se que a solução ótima é dada por $x_B^T = (x_3, x_1)$. Reconstrua todo o quadro Simplex com essa informação (use a inversa de B para recuperar todo o quadro).

2. Uma indústria de móveis produz 4 tipos de mesas. Cada mesa passa pela carpintaria e pela finalização. O número de homens/hora necessários em cada etapa, bem como as suas disponibilidades e lucros pela venda unitária são mostrados na Tabela 1. Considere o quadro Simplex (incompleto) em uma determinada iteração para esse problema de PL como mostrado na Tabela 2, sendo $x_1, ..., x_4$ as quantidades produzidas das mesas 1 a 4.

	Mesa 1	**Mesa 2**	**Mesa 3**	**Mesa 4**	**Disponibilidade**
Carpintaria	4	9	7	10	6000
Finalização	1	1	3	40	4000
Lucro (R$/un.)	12	20	18	40	

Tabela 1: Horas/homem necessárias para produção das mesas em cada operação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$
VB	??	??	??	??	??	??	??
x_2	3/7	1	5/7	0	4/35	-1/35	??
x_4	1/70	0	2/35	1	-1/350	9/350	??

Tabela 2: Horas/homem necessárias para produção das mesas em cada operação

(a) Considerando a produção das mesas dos tipos 2 e 4, quais deveriam ser as suas quantidades produzidas?

(b) (0.7) A solução com a produção das mesas dos Tipos 2 e 4 é ótima? Argumente a sua resposta.

2 Dual Simplex

3. Uma empresa produz dois produtos 1 e 2, e ambos são produzidos a partir de duas matérias primas, A e B. Uma unidade do produto 1 demanda 2 unidades da mp A e 4 da B. Já uma unidade do produto 2 demanda 1 unidade da MP A e 5 da B. Existe um estoque de 5 unidades de A e 15 de B. Cada unidade do produto 1 é vendida a 10 reais e cada unidade do produto 2 a 7. Faça o que se pede:

   (a) Encontre a solução ótima do problema pelo método Simplex e mostre a solução na região factível (modelo já resolvido na lista de Simplex Fase 2).

   (b) A empresa teve o espaço físico reduzido, de forma que consegue armazenar no máximo 1 unidade do produto 1. A solução ótima encontrada anteriormente continua ótima? Mostre graficamente (represente a nova região factível). Se ela não continuar ótima, reotimize o problema usando o método dual Simplex.

4. Considere o modelo do sapateiro, dado por:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	1/2	0	5/2	15
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 3: Tabela ótima modelo do sapateiro

Cujo quadro Simplex ótimo é dado pela Tabela 3
O sapateiro fechou um contrato com um cliente que exige que a quantidade de sapatos + cintos seja de exatamente 2 unidades.

(a) A solução ótima atual que o sapateiro possui satisfaz essa nova restrição? Mostre graficamente.

(b) Encontre a nova solução ótima a partir da antiga usando o método dual Simplex. DICA: Lembre-se que uma equação pode ser escrita como duas inequações, use essas inequações para dar inicio no dual Simplex:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{é equivalente à: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

5. O método dual Simplex pode ser utilizado para encontrar a solução de um PL quando não temos uma solução inicial factível, ou seja, aplicamos o Dual-Simplex ao invés do método das variáveis artificiais (nem sempre isso é vantajoso ou possível, cada problema deve ser avaliado isoladamente). Considerando o modelo de PL:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

Encontre a solução ótima por meio do método dual Simplex, e em seguida represente a região factível e a solução ótima graficamente.