

# Dualidade I

Alexandre Checoli Choueiri

26/10/2022

- ① O dual do problema da dieta
- ② Terminologia e relações
- ③ O dual do problema do fabricante de fertilizante
- ④ Próximos passos

## O dual do problema da dieta

# O dual do problema da dieta

## Problema

### O problema da dieta

Considere o problema de uma nutricionista que deve montar um cardápio para uma família. Existem 6 alimentos diferentes que ela pode escolher (qtdes/kg). Cada kg de alimento contribui com uma quantidade de vitamina A e vitamina C e possui um custo. A nutricionista deve atender a *demandas mínimas* de vitaminas da família, ao *menor custo possível*. Os dados são apresentados na Tabela:

# O dual do problema da dieta

Dados

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

Tabela 1: Tabela de alimentos e componentes nutricionais

# O dual do problema da dieta

## Modelo

Sejam as variáveis,

# O dual do problema da dieta

## Modelo

Sejam as variáveis,

$\{x_i : \text{ Quantidade (kg) usada do alimento } i \text{ na dieta}$

# O dual do problema da dieta

## Modelo

Sejam as variáveis,

$\{x_i : \text{ Quantidade (kg) usada do alimento } i \text{ na dieta}$

$$\begin{array}{lll} \min & 35x_1 + 30x_2 & +60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ \text{Sujeito à} & x_1 & +2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\ & x_2 & +3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 & \end{array}$$

# O dual do problema da dieta

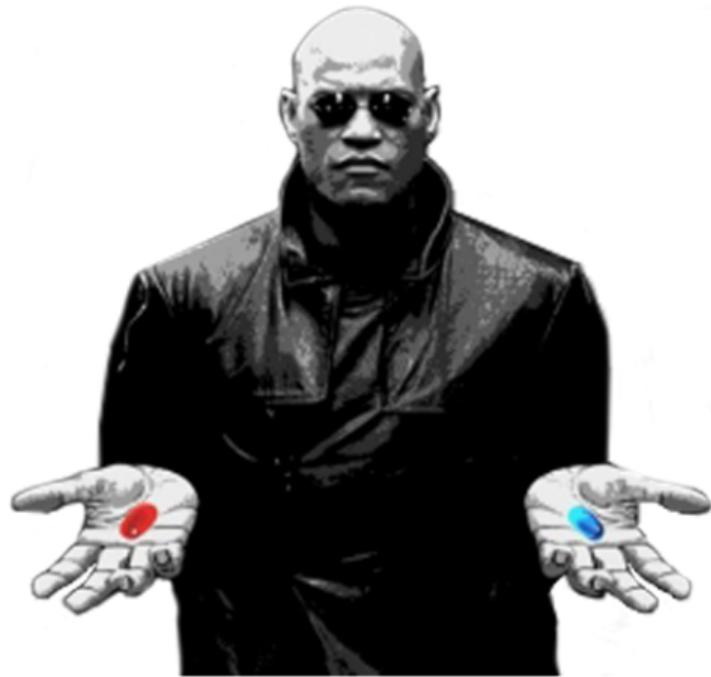
## O vendedor de pílulas

### O vendedor misterioso...

Um vendedor misterioso vê uma oportunidade de concorrência com a nutricionista: suprir toda a demanda de **Vitamina A** e **Vitamina C** da família por meio de **pílulas**.

# O dual do problema da dieta

O vendedor de pílulas

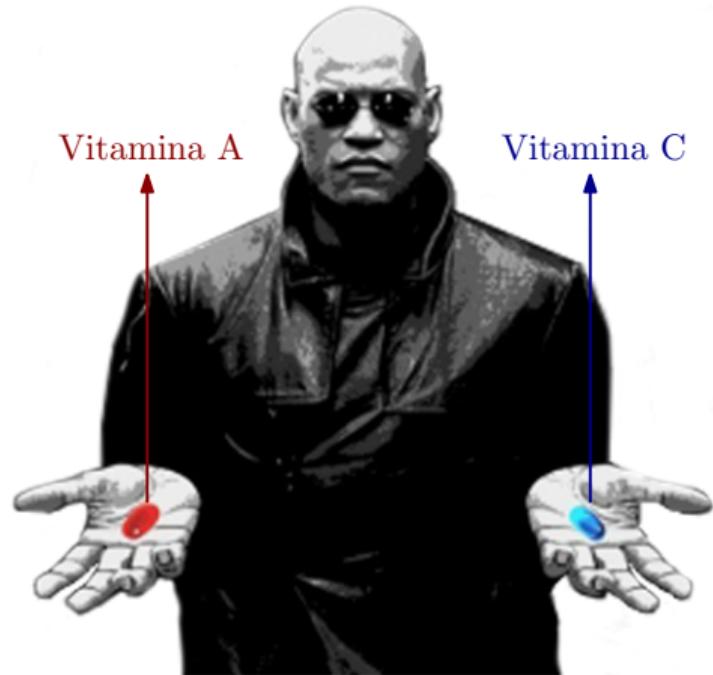


## O vendedor misterioso...

Um vendedor misterioso vê uma oportunidade de concorrência com a nutricionista: suprir toda a demanda de **Vitamina A** e **Vitamina C** da família por meio de **pílulas**.

# O dual do problema da dieta

O vendedor de pílulas

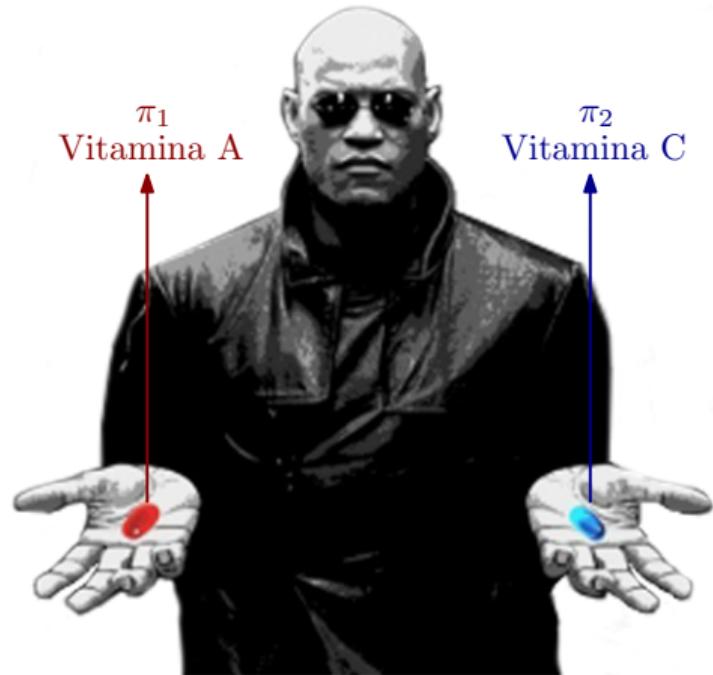


O vendedor misterioso...

Um vendedor misterioso vê uma oportunidade de concorrência com a nutricionista: suprir toda a demanda de **Vitamina A** e **Vitamina C** da família por meio de **pílulas**.

# O dual do problema da dieta

O vendedor de pílulas

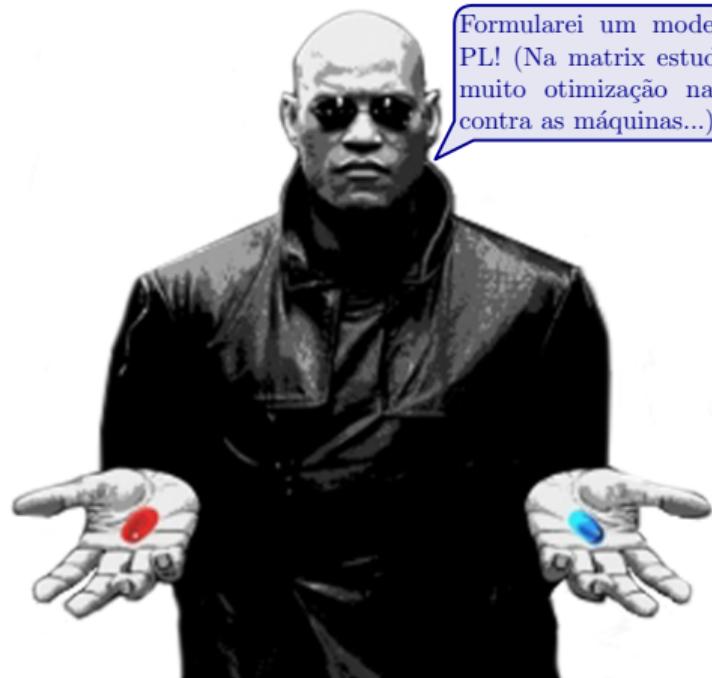


O vendedor misterioso...

Nesse caso, cada pílula fornece uma unidade de Vitamina, de forma que o vendedor precisa decidir quanto cobrar por cada unidade de pílula ( $\pi_1$  e  $\pi_2$ ), *maximizando* o seu lucro.

# O dual do problema da dieta

## O vendedor de pílulas



Formularei um modelo de PL! (Na matrix estudamos muito otimização na luta contra as máquinas...)

### O vendedor misterioso...

Nesse caso, cada pílula fornece uma unidade de Vitamina, de forma que o vendedor precisa decidir quanto cobrar por cada unidade de pílula ( $\pi_1$  e  $\pi_2$ ), *maximizando* o seu lucro.

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

Vamos analisar as restrições que esse modelo deveria ter:

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina             | Unidades de vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
|                      | 1                                      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                             |
| Vitamina A           | 1                                      | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                           |
| Vitamina C           | 0                                      | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                          |
| Custo/kg do alimento | 35                                     | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                             |

1 1 kg de alimento 1 contribui com 1 unidade de Vit. A e 0 unidade de Vit. C ao custo de R\$35,00. Dessa forma, o custo pela compra das pílulas deve ser mais atraente para a família do que suprir a demanda com carne.

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

$$\pi_1 \leq 35$$

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

- 2 O mesmo deve ser verdade para o Alimento 2.

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

$$\begin{array}{l} \pi_1 \leq 35 \\ \pi_2 \leq 30 \end{array}$$

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina             | Unidades de vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
|                      | 1                                      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                             |
| Vitamina A           | 1                                      | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                           |
| Vitamina C           | 0                                      | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                          |
| Custo/kg do alimento | 35                                     | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                             |

3 E assim, os preços das pílulas devem *compensar* os preços de todos os alimentos

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

$$\pi_1 \leq 35$$

$$\pi_2 \leq 30$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60$$

$$2\pi_1 + \pi_2 \leq 50$$

$$\pi_1 + 3\pi_2 \leq 27$$

$$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22$$

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina             | Unidades de vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
|                      | 1                                      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                             |
| Vitamina A           | 1                                      | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                           |
| Vitamina C           | 0                                      | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                          |
| Custo/kg do alimento | 35                                     | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                             |

- 4 Sabemos também que a família não vai comprar mais pílulas do que o necessário para sua dieta (seria um desperdício de dinheiro).

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina             | Unidades de vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
|                      | 1                                      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                             |
| Vitamina A           | 1                                      | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                           |
| Vitamina C           | 0                                      | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                          |
| Custo/kg do alimento | 35                                     | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                             |

- 4 Sabemos também que a família não vai comprar mais pílulas do que o necessário para sua dieta (seria um desperdício de dinheiro).
- 5 Assim, o vendedor deve maximizar o quanto a família vai comprar de pílulas (demandas) pelos preços de cada uma (variáveis).

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina                | Unidades de<br>vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima<br>de vitaminas |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|--------------------------------|
|                         | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                                |
| Vitamina A              | 1   | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                              |
| Vitamina C              | 0   | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                             |
| Custo/kg<br>do alimento | 35  | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                                |

$$\max 9\pi_1 + 19\pi_2$$

# O dual do problema da dieta

## Modelando o problema

| Vitamina             | Unidades de vitaminas por kg de comida |    |    |    |    |    | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
|                      | 1                                      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |                             |
| Vitamina A           | 1                                      | 0  | 2  | 2  | 1  | 2  | 9                           |
| Vitamina C           | 0                                      | 1  | 3  | 1  | 3  | 2  | 19                          |
| Custo/kg do alimento | 35                                     | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |                             |

O modelo **completo** fica então:

$$\max 9\pi_1 + 19\pi_2$$

$$\pi_1 \leq 35$$

$$\pi_2 \leq 30$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60$$

$$2\pi_1 + \pi_2 \leq 50$$

$$\pi_1 + 3\pi_2 \leq 27$$

$$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

$$\begin{aligned} \min \quad & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 9\pi_1 + 19\pi_2 \\ \pi_1 \quad & \leq 35 \\ \pi_2 \quad & \leq 30 \\ 2\pi_1 + 3\pi_2 \quad & \leq 60 \\ 2\pi_1 + \pi_2 \quad & \leq 50 \\ \pi_1 + 3\pi_2 \quad & \leq 27 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 \quad & \leq 22 \\ \pi_1, \pi_2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

MIN X MAX

$$\min 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$$

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

$$\max 9\pi_1 + 19\pi_2$$

$$\pi_1 \leq 35$$

$$\pi_2 \leq 30$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60$$

$$2\pi_1 + \pi_2 \leq 50$$

$$\pi_1 + 3\pi_2 \leq 27$$

$$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

MIN X MAX

$$\begin{array}{ll} \min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \\ \\ \max & 9\pi_1 + 19\pi_2 \\ \pi_1 & \leq 35 \\ \pi_2 & \leq 30 \\ 2\pi_1 + 3\pi_2 & \leq 60 \\ 2\pi_1 + \pi_2 & \leq 50 \\ \pi_1 + 3\pi_2 & \leq 27 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 & \leq 22 \\ \\ \geq X \leq & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

**MIN X MAX**

$$\begin{array}{ll} \min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \quad (1) \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \quad (2) \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 9\pi_1 + 19\pi_2 \\ \pi_1 & \leq 35 \\ \pi_2 & \leq 30 \\ 2\pi_1 + 3\pi_2 & \leq 60 \\ 2\pi_1 + \pi_2 & \leq 50 \\ \pi_1 + 3\pi_2 & \leq 27 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 & \leq 22 \end{array}$$

$\geq X \leq \quad \pi_1, \pi_2 \geq 0$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

MIN X MAX

$$\begin{array}{ll} \min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \quad (1) \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \quad (2) \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \\ \max & 9\pi_1 + 19\pi_2 \\ \pi_1 & \leq 35 \\ \pi_2 & \leq 30 \\ 2\pi_1 + 3\pi_2 & \leq 60 \\ 2\pi_1 + \pi_2 & \leq 50 \\ \pi_1 + 3\pi_2 & \leq 27 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 & \leq 22 \\ \pi_1, \pi_2 & \geq 0 \end{array}$$

$\geq X \leq$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

MIN X MAX

$$\begin{array}{ll} \min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ & \\ & \max 9\pi_1 + 19\pi_2 \\ & \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \quad (1) \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \quad (2) \\ & \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \\ & \\ & \geq X \leq \\ & \\ & \pi_1 \leq 35 \\ & \pi_2 \leq 30 \\ & 2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60 \\ & 2\pi_1 + \pi_2 \leq 50 \\ & \pi_1 + 3\pi_2 \leq 27 \\ & 2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22 \\ & \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

(1)      (2)

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

**NUTRICIONISTA**

**VENDEDOR**

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

- Objetivo:** minimizar.

### VENDEDOR

- Objetivo:** maximizar.

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

- Objetivo:** minimizar.
- Tipo de restrições:**  $\geq$ .

### VENDEDOR

- Objetivo:** maximizar.
- Tipo de restrições:**  $\leq$ .

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

- Objetivo:** minimizar.
- Tipo de restrições:**  $\geq$ .
- Numero de restrições:** 2.

### VENDEDOR

- Objetivo:** maximizar.
- Tipo de restrições:**  $\leq$ .
- Número de variáveis:** 2.

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Numero de restrições:** 2.
4. **Número de variáveis:** 6.

### VENDEDOR

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de variáveis:** 2.
4. **Número de restrições:** 6.

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Numero de restrições:** 2.
4. **Número de variáveis:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .

### VENDEDOR

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de variáveis:** 2.
4. **Número de restrições:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Numero de restrições:** 2.
4. **Número de variáveis:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .
6. **Coef. da f. objetivo:**  $c^T$ .

### VENDEDOR

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de variáveis:** 2.
4. **Número de restrições:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .
6. **Constantes:**  $c$ .

# O dual do problema da dieta

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **nutricionista** e do **vendedor** são dados então por:

### NUTRICIONISTA

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Numero de restrições:** 2.
4. **Número de variáveis:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .
6. **Coef. da f. objetivo:**  $c^T$ .
7. **Constantes:**  $b$ .

### VENDEDOR

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de variáveis:** 2.
4. **Número de restrições:** 6.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .
6. **Constantes:**  $c$ .
7. **Coef. da f. objetivo:**  $b^T$ .

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações



# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

## Resolvendo os dois modelos

Ao otimizar os dois problemas, temos as seguintes soluções:

$$x^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2) \rightarrow Z = 179$$

$$\min 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$$

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

$$\pi^T = (3, 8) \rightarrow Z = 179$$

$$\max 9\pi_1 + 19\pi_2$$

$$\pi_1 \leq 35$$

$$\pi_2 \leq 30$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60$$

$$2\pi_1 + \pi_2 \leq 50$$

$$\pi_1 + 3\pi_2 \leq 27$$

$$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

# O dual do problema da dieta

Algumas considerações

## Resolvendo os dois modelos

Ao otimizar os dois problemas, temos as seguintes soluções:

O valor da f.o é o mesmo!

$$x^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2) \rightarrow Z = 179$$

$$\pi^T = (3, 8) \rightarrow Z = 179$$

$$\min 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$$

$$\max 9\pi_1 + 19\pi_2$$

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9$$

$$\pi_1 \leq 35$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19$$

$$\pi_2 \leq 30$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60$$

$$2\pi_1 + \pi_2 \leq 50$$

$$\pi_1 + 3\pi_2 \leq 27$$

$$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

## Terminologia e relações

# O dual do problema da dieta

Relações e terminologia

Modelo  
da  
nutricionista

Modelo  
do  
vendedor

# O dual do problema da dieta

## Relações e terminologia

PRIMAL\*

Modelo  
da  
nutricionista

DUAL

Modelo  
do  
vendedor

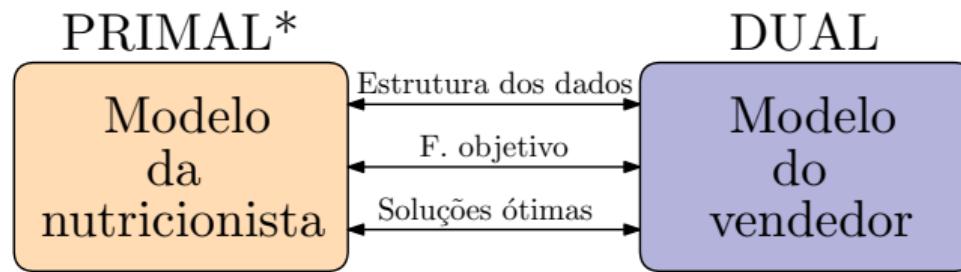
Inerente a todo modelo de programação linear existe um outro modelo, chamado de **dual**. Com essa terminologia o PL original é denominado **primal**<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>O nome primal foi sugerido pelo pai de George B. Dantzig, que também era matemático.

# O dual do problema da dieta

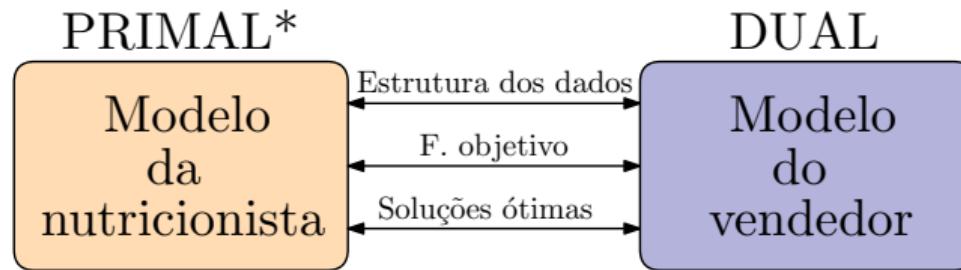
## Relações e terminologia



O par (primal,dual) de PLs mantém estritas relações (como vimos no exemplo), de forma que o estudo do fenômeno da **dualidade em programação linear** abre as portas para novos algoritmos (*dual-simplex*) e análises (*análise de sensibilidade*) .

# O dual do problema da dieta

## Relações e terminologia



OBS: O fenômeno da dualidade não está restrito a programação linear e muito menos a matemática, mas ocorre em diversas áreas do conhecimento (economia, elétrica, filosofia, matemática, bioquímica, etc...). Para mais sobre dualidade:

1. Bhatta, Varun S., and Sundar Sarukkai. "*Duality in science.*" **Current Science** 18.5 (2020): 705-713.
2. *Lista de dualidades na ciência*

## O dual do problema do fabricante de fertilizante

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Problema

### O problema do fabricante

Uma empresa pode produzir 2 tipos de fertilizante (HIGH e LOW) a partir de 3 MP's. Cada receita de fertilizante consome uma quantidade de MP e gera um determinado lucro pela sua venda. A empresa possui estoques limitados das MP. Os dados são resumidos na Tabela a seguir.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Dados

| Qtde necessária |      |     |               |  |
|-----------------|------|-----|---------------|--|
| MP              | HIGH | LOW | Estoque de MP |  |
| 1               | 2    | 1   | 1500          |  |
| 2               | 1    | 1   | 1200          |  |
| 3               | 1    | 0   | 500           |  |
| <b>Lucro</b>    | 15   | 10  |               |  |

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Dados

| Qtde necessária |      |     |               |  |
|-----------------|------|-----|---------------|--|
| MP              | HIGH | LOW | Estoque de MP |  |
| 1               | 2    | 1   | 1500          |  |
| 2               | 1    | 1   | 1200          |  |
| 3               | 1    | 0   | 500           |  |
| <b>Lucro</b>    | 15   | 10  |               |  |

O modelo que *maximiza* o lucro da empresa pela escolha das quantidades de fertilizante fica então:

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelo

Sejam as variáveis,

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelo

Sejam as variáveis,

$$\begin{cases} x_1 : \text{ Quantidade (kg) fabricada do fertilizante HIGH} \\ x_2 : \text{ Quantidade (kg) fabricada do fertilizante LOW} \end{cases}$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelo

Sejam as variáveis,

$$\begin{cases} x_1 : \text{ Quantidade (kg) fabricada do fertilizante HIGH} \\ x_2 : \text{ Quantidade (kg) fabricada do fertilizante LOW} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 10x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1500 \\ x_1 + x_2 &\leq 1200 \\ x_1 &\leq 500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## O comprador misterioso

### O comprador misterioso

O mercado está com falta de MPs do tipo 1,2 e 3, de forma que um comprador se interessa em adquirir os estoques desses materiais da empresa. O comprador deve decidir quanto pagar por kg de MP da empresa. (ele também pode usar um modelo de PL para isso!).

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelando o problema

| Qtde necessária |      |     |               |
|-----------------|------|-----|---------------|
| MP              | HIGH | LOW | Estoque de MP |
| 1               | 2    | 1   | 1500          |
| 2               | 1    | 1   | 1200          |
| 3               | 1    | 0   | 500           |
| <b>Lucro</b>    | 15   | 10  |               |

1. Seja  $\pi_1, \pi_2$  e  $\pi_3$  os custos/kg que o comprador irá oferecer pelas MPs 1,2 e 3.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelando o problema

| Qtde necessária |           |           |               |
|-----------------|-----------|-----------|---------------|
| MP              | HIGH      | LOW       | Estoque de MP |
| 1               | 2         | 1         | 1500          |
| 2               | 1         | 1         | 1200          |
| 3               | 1         | 0         | 500           |
| <b>Lucro</b>    | <b>15</b> | <b>10</b> |               |

1. Para que seja vantajoso que a empresa venda, os preços oferecidos pelas MPs devem ser pelo menos tão atraentes quanto o que a empresa ganharia pela produção dos fertilizantes.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelando o problema

| Qtde necessária |           |           |               |
|-----------------|-----------|-----------|---------------|
| MP              | HIGH      | LOW       | Estoque de MP |
| 1               | 2         | 1         | 1500          |
| 2               | 1         | 1         | 1200          |
| 3               | 1         | 0         | 500           |
| <b>Lucro</b>    | <b>15</b> | <b>10</b> |               |

$$2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Modelando o problema

| Qtde necessária |      |     |               |
|-----------------|------|-----|---------------|
| MP              | HIGH | LOW | Estoque de MP |
| 1               | 2    | 1   | 1500          |
| 2               | 1    | 1   | 1200          |
| 3               | 1    | 0   | 500           |
| Lucro           | 15   | 10  |               |

$$2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15$$

$$\pi_1 + \pi_2 \geq 10$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelando o problema

| Qtde necessária |      |     |               |
|-----------------|------|-----|---------------|
| MP              | HIGH | LOW | Estoque de MP |
| 1               | 2    | 1   | 1500          |
| 2               | 1    | 1   | 1200          |
| 3               | 1    | 0   | 500           |
| Lucro           | 15   | 10  |               |

1. O comprador não pode comprar mais MPs do que a empresa tem para oferecer, de forma que ele tentará **minimizar** o custo total da sua compra:

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Modelando o problema

|       | Qtde necessária |     |  |               |
|-------|-----------------|-----|--|---------------|
| MP    | HIGH            | LOW |  | Estoque de MP |
| 1     | 2               | 1   |  | 1500          |
| 2     | 1               | 1   |  | 1200          |
| 3     | 1               | 0   |  | 500           |
| Lucro | 15              | 10  |  |               |

O modelo **completo** fica então:

$$\begin{aligned} \min z &= 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &\geq 15 \\ \pi_1 + \pi_2 &\geq 10 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min z = 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3$$

$$2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15$$

$$\pi_1 + \pi_2 \geq 10$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações

MAX X MIN

$$\begin{array}{ll} \boxed{\max} z = 15x_1 + 10x_2 & \boxed{\min} z = 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1500 & 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 1200 & \pi_1 + \pi_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 500 & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \\ x_i, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

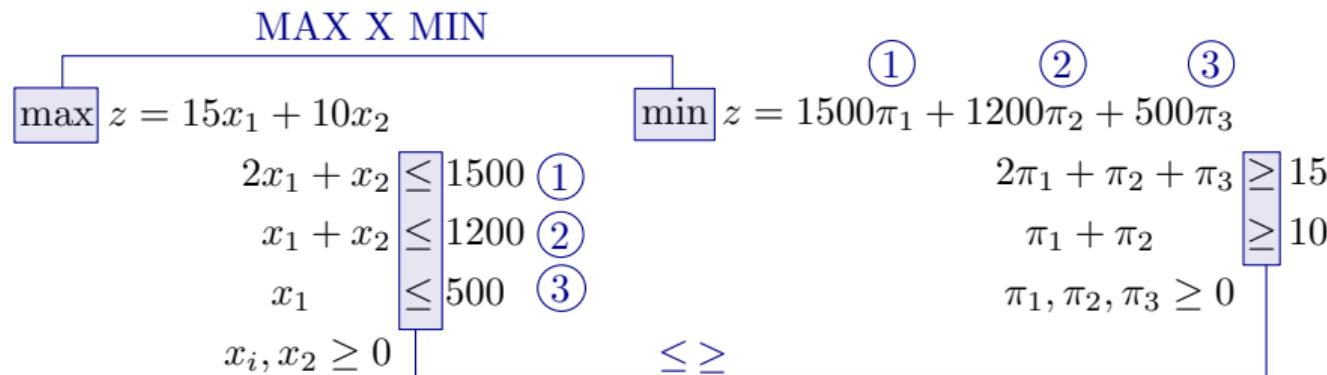
Algumas considerações

MAX X MIN

$$\begin{array}{ll} \max z = 15x_1 + 10x_2 & \min z = 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3 \\ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 1500 \\ x_1 + x_2 \leq 1200 \\ x_1 \leq 500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} & \begin{array}{l} 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15 \\ \pi_1 + \pi_2 \geq 10 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{array} \\ \leq \quad \geq & \end{array}$$

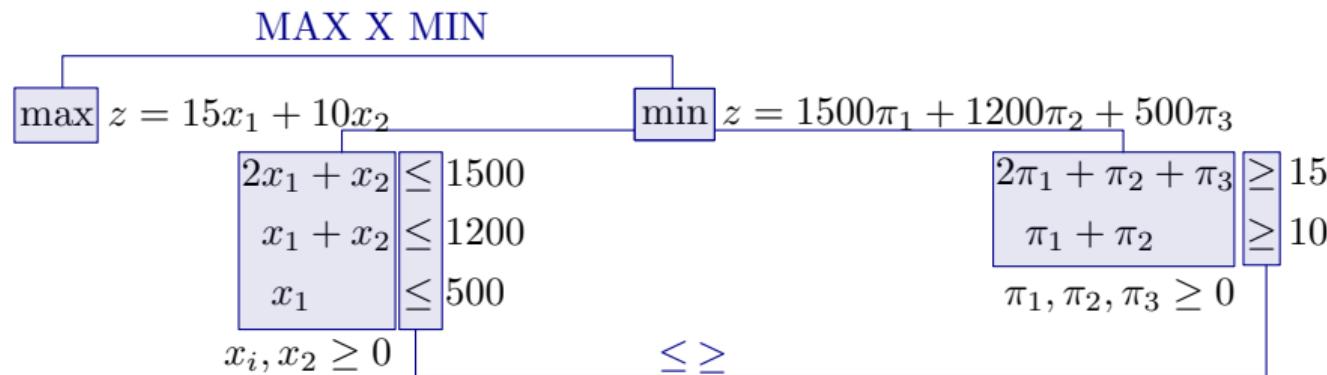
# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações



# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações



# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações

## Resolvendo os dois modelos

Ao otimizar os dois problemas, temos as seguintes soluções:

$$x^T = (300, 900) \rightarrow Z = 13500$$

$$\pi^T = (5, 5, 0) \rightarrow Z = 13500$$

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\min z = 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1500$$

$$2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$\pi_1 + \pi_2 \geq 10$$

$$x_1 \leq 500$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

$$x_i, x_2 \geq 0$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações

## Resolvendo os dois modelos

Ao otimizar os dois problemas, temos as seguintes soluções:

O valor da f.o é o mesmo!

$$x^T = (300, 900) \rightarrow Z = 13500$$

$$\pi^T = (5, 5, 0) \rightarrow Z = 13500$$

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\min z = 1500\pi_1 + 1200\pi_2 + 500\pi_3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1500$$

$$2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 15$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$\pi_1 + \pi_2 \geq 10$$

$$x_1 \leq 500$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

$$x_i, x_2 \geq 0$$

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

**FABRICANTE**

**COMPRADOR**

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

- Objetivo:** maximizar.

### COMPRADOR

- Objetivo:** minimizar.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de restrições:** 3.

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Número de variáveis:** 3.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de restrições:** 3.
4. **Número de variáveis:** 2.

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Número de variáveis:** 3.
4. **Número de restrições:** 2.

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de restrições:** 3.
4. **Número de variáveis:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Número de variáveis:** 3.
4. **Número de restrições:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de restrições:** 3.
4. **Número de variáveis:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .
6. **Coef. da f. objetivo:**  $c^T$ .

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Número de variáveis:** 3.
4. **Número de restrições:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .
6. **Constantes:**  $c$ .

# O dual do problema do fabricante de fertilizante

## Algumas considerações

As relações entre os problemas da **fabricante** e do **comprador** são dados então por:

### FABRICANTE

1. **Objetivo:** maximizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\leq$ .
3. **Número de restrições:** 3.
4. **Número de variáveis:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A$ .
6. **Coef. da f. objetivo:**  $c^T$ .
7. **Constantes:**  $b$ .

### COMPRADOR

1. **Objetivo:** minimizar.
2. **Tipo de restrições:**  $\geq$ .
3. **Número de variáveis:** 3.
4. **Número de restrições:** 2.
5. **Matriz tecnológica:**  $A^T$ .
6. **Constantes:**  $c$ .
7. **Coef. da f. objetivo:**  $b^T$ .

# Conclusão

1. Associado a todo modelo de PL, existe um outro modelo chamado de **dual** (o modelo original é chamado de **primal**) <sup>1</sup>.
2. Existe uma relação quase que simétrica entre o par de modelos primal-dual.
3. Como visto, existe uma relação entre as funções objetivo do primal e do dual. Além dessa, existem muitas outras relações importantes sobre a dualidade.
4. Essas relações abrem as portas para os seguintes tópicos:
  - 4.1 Algoritmo dual-simplex.
  - 4.2 Análise de sensibilidade.

---

<sup>1</sup>O dual foi estudado pelo matemático John von Neumann junto a Dantzig. A nomenclatura veio de von Neumann. Com essa nomenclatura o pai de Dantzig sugeriu chamar o modelo "original" de **primal**.

## Próximos passos

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. Formulação do problema dual: como criar o dual de qualquer modelo primal.

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. **Formulação do problema dual:** como criar o dual de qualquer modelo primal.
2. **Relações primal-dual:** teorema fraco (partes 1 e 2), teorema das folgas complementares.

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. Formulação do problema dual: como criar o dual de qualquer modelo primal.
2. Relações primal-dual: teorema fraco (partes 1 e 2), teorema das folgas complementares.
3. Simplex e a inversa.

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. Formulação do problema dual: como criar o dual de qualquer modelo primal.
2. Relações primal-dual: teorema fraco (partes 1 e 2), teorema das folgas complementares.
3. Simplex e a inversa.
4. O método dual-simplex.

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. Formulação do problema dual: como criar o dual de qualquer modelo primal.
2. Relações primal-dual: teorema fraco (partes 1 e 2), teorema das folgas complementares.
3. Simplex e a inversa.
4. O método dual-simplex.
5. O método Simplex revisado (material disponível, mas não veremos).

# Próximos passos

## Algumas considerações

Seguiremos o seguinte caminho então:

1. Formulação do problema dual: como criar o dual de qualquer modelo primal.
2. Relações primal-dual: teorema fraco (partes 1 e 2), teorema das folgas complementares.
3. Simplex e a inversa.
4. O método dual-simplex.
5. O método Simplex revisado (material disponível, mas não veremos).
6. Análise de sensibilidade (material disponível, mas não veremos).