Simplex fase I: variáveis artificiais

Alexandre Checoli Choueiri

04/05/2022

O algoritmo Simplex

O **algoritmo** Simplex requer uma solução básica factível para que possa ser iniciado. Quando temos um modelo somente com restrições do tipo $\leq$, sempre é possível criar uma SBF no início.

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$
\begin{array}{lllll}
\min & -5x_1 & -2x_2 & & \\
& 10x_1 + & 12x_2 + & x_3 & = 60 \\
& 2x_1 + & x_2 + & x_4 & = 6
\end{array}
$$

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Colocando os dados em forma tabular:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Solução básica

Como temos 2 restrições, a presença de uma matriz identidade ($\mathbf{I}_{2X2}$) já fornece uma solução básica factível (lembre-se de que os coef. da função objetivo também devem ser zerados nas colunas das variáveis básicas).

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Solução básica

Temos a solução $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Modelo com restrições $<=$

O que sabemos fazer

Solução básica

De forma que o sistema é canônico, e equivalente ao mostrado abaixo, em que a solução é trivial.

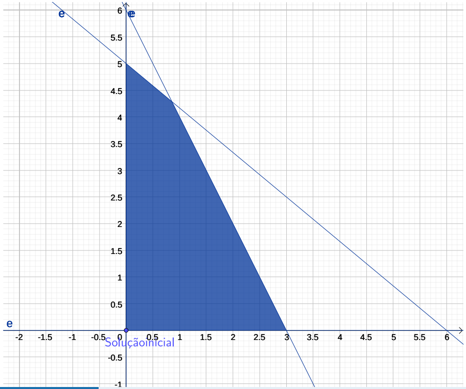
	x_3	x_4	-z
VB	0	0	0
x_3	1	0	60
x_4	0	1	6

Modelo com restrições <=

O que sabemos fazer

Solução básica

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ é factível.



Restrições do tipo $>=$ ou $=$

Mas o que acontece quando temos restrições do tipo "$>=$" ou "$=$" no modelo?
Considere o modelo abaixo.

$$
\begin{aligned}
\max z = x_1 + x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 & \geq 20 \\
x_1 & \leq 9 \\
x_2 & \leq 11 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Na forma padrão, temos:

$$
\begin{array}{rl}
\min z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 \textcolor{red}{-x_3} & = 20 \\
x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 & = 9 \\
x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 11
\end{array}
\tag{2}
$$

Na forma tabular:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	60
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Modelo com restrições >= ou =

O problema

Solução infactível

Note que com esse modelo, a sol. básica formada pelas variáveis de folgas/excessos **não** é factível, devido a negatividade de x_3 na linha 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	60
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Solução infactível

Essa solução implicaria $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (-60, 9, 11)$, com $x_3 < 0 \rightarrow$ infactível

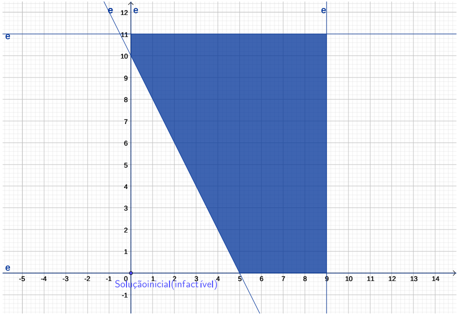
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	60
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Modelo com restrições >= ou =

O problema

Solução básica infactível

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ não está na região factível.



As duas fases do Simplex

A solução

Método x Algoritmo Simplex

É por esse motivo que o **método** Simplex é composto por duas fases, chamadas fase I e fase II. Em ambas as fases o **algoritmo** Simplex é usado.

1. Método Simplex:
   1.1 **FASE I:** Verifica se o problema tem uma SBF inicial. Se não, tenta encontrar uma (pelo algoritmo Simplex e um modelo alterado).
   1.2 **FASE II:** Com uma SBF, inicia o algoritmo Simplex no modelo original.

Como operar a Fase I?

A solução

- Existem 2 formas de operarmos a Fase I do método Simplex, a fim de encontrarmos uma SBF. O chamado **método do big-M** e o **método das variáveis artificiais.**
- Como seguimos o material do criador do Simplex (George B. Dantzig), usaremos a sua sugestão: **método das variáveis artificiais**. Porém ambos são equivalentes.

A lógica das variáveis artificiais

Este método insere novas variáveis no modelo para artificialmente gerar uma matriz identidade nos coeficientes da matriz. Como elas não fazem parte do sistema, uma nova função objetivo é inserida, que deve minimizar a soma destas variáveis, levando o simplex a removê-las da base. Quando (se) isso ocorre, uma SBF é encontrada e as variáveis artificiais podem ser retiradas do sistema.

O método das variáveis artificiais

A solução

O método das variáveis artificiais consiste dos seguintes passos (considerando o modelo já na forma padrão):

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

O método das variáveis artificiais

A solução

Ao fim da otimização do novo sistema, faça:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

O modelo na forma padrão não possui nenhum $b < 0$

$$
\begin{aligned}
\min\ z = -x_1 + -x_2 \\
4x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 20 \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 9 \\
x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 11
\end{aligned}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

Adicionamos a cada restrição uma variável artificial.

$$
\begin{aligned}
\min\ z = -x_1 + -x_2 \\
4x_1 + 2x_2 - x3 \quad + \bar{x}_6 &= 20 \\
x_1 \quad + x4 \quad + \bar{x}_7 &= 9 \\
x_2 \quad + x_5 \quad + \bar{x}_8 &= 11
\end{aligned}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots, \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

Adicionando a nova função objetivo w:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\min\ w = & & & & & + \bar{x}_6 & + \bar{x}_7 & + \bar{x}_8 & \\
& 4x_1 + 2x_2 & -x3 & & & + \bar{x}_6 & & & = 20 \\
& x_1 & & + x4 & & & + \bar{x}_7 & & = 9 \\
& x_2 & & & + x_5 & & & + \bar{x}_8 & = 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})\checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Colocando o problema na forma tabular.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Para deixar na forma canônica em relação às variáveis $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8)$ é necessário zerar os coeficientes delas na função objetivo (marcados com 1):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

Após as atualizações temos a tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Com variáveis básicas $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (20, 9, 11)$ e não básicas $x_N^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$. De forma que podemos começar a aplicar o método Simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). ✓
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

Selecionando min $\{-5, -3, -1, -1\} = -5$ com x_1 entrando na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando min $\{\frac{20}{4}, \frac{9}{1}\} = \frac{20}{4} = \bar{x}_6$ saindo da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com variáveis básicas $x_B^T = (x_1, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

OBS: Note que já conseguimos remover uma variável artificial da base (removemos $\bar{x}_6$ e inserimos x_1).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Aqui seria possível escolher outra variável para entrar na base (x_5). Teria alguma diferença?

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

O nosso objetivo é remover as variáveis artificiais da base. Selecionando tanto x_4 ou x_5 para entrar, forçaria uma artificial a sair ($\bar{x}_7$ ou $\bar{x}_8$), de forma que podemos escolher arbitrariamente.

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando min $\{\frac{4}{1}\} = 4$ com $\bar{x}_7$ saindo da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = \textcircled{1}$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos a tabela atualizada com a nova base $x_B^T = (x_1, x_4, \bar{x}_8,) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, \bar{x}_7, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

OBS: Note que já conseguimos remover duas variáveis artificiais da base (agora inserimos x_4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Nesse caso sim! Se escolhermos x_2, a variável que sairia da base é x_1 (uma não artificial). Já escolhendo x_5 quem sai é $\bar{x}_8$ (uma artificial), de forma que devemos dar preferencia a escolha de x_5.

Resolvendo o problema

A solução

Selecionando $\min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$ com $\bar{x}_8$ saindo da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Temos o elemento pivo $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

A tabela atualizada fica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})✓$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j✓$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). ✓
5. Aplique o método Simplex na tabela atual. ✓

Fim da otimização Fase I

A solução

A lógica das variáveis artificiais

Com isso chegamos ao fim da otimização na Fase I. Agora verificamos se podemos continuar (se o problema original é factível), adaptando a tabela novamente (removendo colunas extras e trocando a função objetivo).

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
    2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
    2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
    2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema
A solução

- Vemos que o valor $w = 0$, ou seja, o problema original é **factível**.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

- Das variáveis não-artificiais, não básicas (x_2, x_3), nenhuma tem valor > 0, portanto não eliminamos nenhuma.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema
A solução

- Todas as variáveis artificiais são não básicas, de forma que podemos remover todas essas colunas da tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

- Ficamos com:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w
VB	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**. ✓
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

- Ao substituirmos novamente a função objetivo original (min $z = -x_1 - x_2$), nota-se que o sistema não se mantém na forma canônica.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema
A solução

A nova tabela atualizada fica:

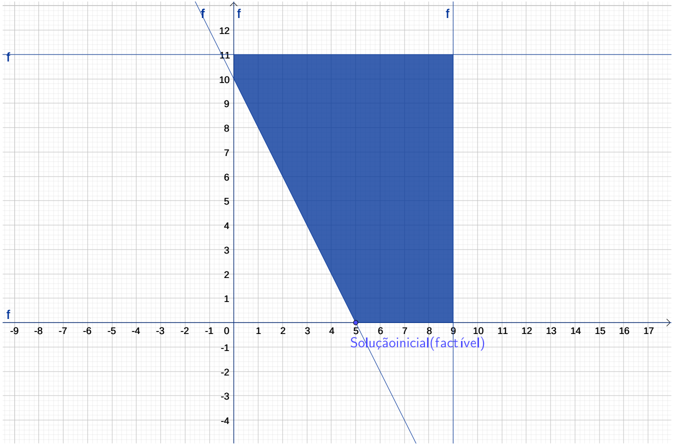
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que conseguimos uma solução básica factível (SBF) somente com as variáveis originais.

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_1, x_4, x_5) = (5, 4, 11)$



O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**. ✓
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
3. $L_2 \leftarrow 2L_2$
4. $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$
3. $L_4 \leftarrow 2L_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	1	0	-1/2	0	0	10
x_2	2	1	-1/2	0	0	10
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	-2	0	1/2	0	1	1

Resolvendo o problema
A solução

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	0	0	0	1	11
x_2	0	1	0	0	1	11
x_4	1	0	0	1	0	9
x_3	-4	0	1	0	2	2

Resolvendo o problema
A solução

Solução ótima

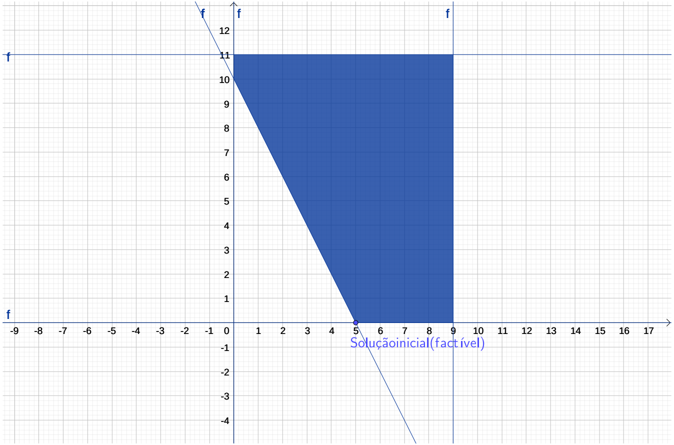
Solução ótima com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	0	1	1	20
x_2	0	1	0	0	1	11
x_1	1	0	0	1	0	9
x_3	0	0	1	4	2	38

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$.



Conclusões

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma submatriz identidade em $\mathbf{A}$).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma submatriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma submatriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma submatriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).
4. Após o fim da Fase 1 existem duas possibilidades:
   4.1 $w > 0 \rightarrow$ problema original infactível.
   4.2 $w = 0 \rightarrow$ problema original factível, base atual é factível para o problema original.