

Simplex revisado

Alexandre Checoli Choueiri

03/09/2023

- ① Onde estamos
- ② Retomando o quadro genérico
- ③ Motivação: qual o problema do Simplex?
- ④ Simplex Revisado
- ⑤ Cálculo da nova inversa a partir da anterior
- ⑥ Exercícios

Onde estamos

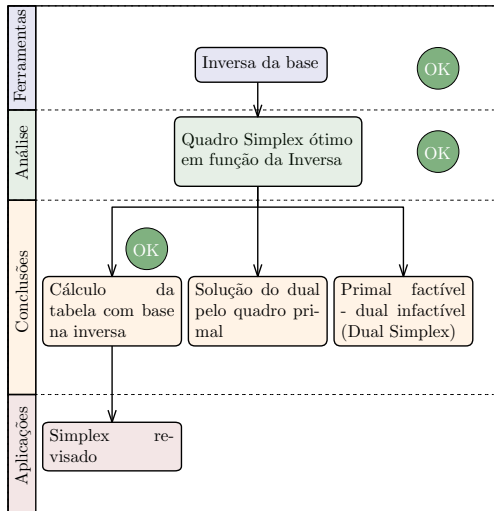
Objetivos

Ferramentas e objetivos

Com as conclusões que chegamos em relação ao **cálculo da tabela Simplex com base na inversa**, estamos aptos a entender uma aplicação direta dos conceitos: o algoritmo **Simplex Revisado** (ou **simplex por multiplicadores**).

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Retomando o quadro genérico

Retomando o quadro genérico

Como vimos, em função de uma **base (B)**, podemos recuperar todos os valores de uma tabela Simplex, usando as **fórmulas genéricas**:

| x_B | x_N | $-Z$ |
|-------|--------------------------|-------------------|
| 0 | $c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ | $-c_B^T B^{-1} b$ |
| I | $B^{-1} N$ | $B^{-1} b$ |

Retomando o quadro genérico

Embora as fórmulas estejam escritas com as variáveis **básicas** e **não básicas** de forma separada, elas **funcionam para quaisquer valores**. Lembrando que um modelo de PL na forma padrão é:

$$\begin{aligned}\min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

Retomando o quadro genérico

Embora as fórmulas estejam escritas com as variáveis **básicas** e **não básicas** de forma separada, elas **funcionam para quaisquer valores**. Lembrando que um modelo de PL na forma padrão é:

$$\begin{aligned}\min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

Seja

$$\begin{cases} A_i : & \text{Coluna } i \text{ da matriz } A \\ c_i : & \text{Elemento } i \text{ do vetor } c \end{cases}$$

Retomando o quadro genérico

| \mathbf{x}_B | \mathbf{x}_N | $-Z$ |
|----------------|--|--|
| 0 | $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$ | $-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ |
| I | $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$ | $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ |

Para atualizarmos a coluna A_i (novo valor \bar{A}_i), e o valor de c_i (novo valor \bar{c}_i) usamos as seguintes fórmulas:

$$\bar{c}_i^T = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

$$\bar{A}_i = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

OBS: Essa atualização pode ser feita com mais de uma coluna ao mesmo tempo, bastando substituir A_i e c_i pelo conjunto de colunas e valores que serão atualizados.

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Considere o modelo de PL na forma padrão e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $-Z$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|------|
| VB | 0 | 0 | $3/2$ | 0 | $1/2$ | 11 |
| x_1 | 1 | 0 | $1/2$ | 0 | $-1/2$ | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | $1/2$ | 0 | $1/2$ | 5 |

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Considere o modelo de PL na forma padrão e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 = 4 \end{array}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $-Z$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| VB | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 11 |
| x_1 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 5 |

Suponha que queiramos encontrar os valores atualizados (da tabela final) de $c^T = [c_3, c_4, c_5] = [3/2, 0, 1/2]$, sabendo que a base tem $[x_1, x_4, x_2]$.

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Considere o modelo de PL na forma padrão e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 = 4 \end{array}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $-Z$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| VB | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 11 |
| x_1 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 5 |

Suponha que queiramos encontrar os valores atualizados (da tabela final) de $\mathbf{c}^T = [c_3, c_4, c_5] = [3/2, 0, 1/2]$, sabendo que a base tem $[x_1, x_4, x_2]$. Podemos usar a fórmula:

$$\bar{c}_i = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1. $c_i^T = [0, 0, 0]$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1. $c_i^T = [0, 0, 0]$

2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1. $c_i^T = [0, 0, 0]$

2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$

3.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1. $c_i^T = [0, 0, 0]$

2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$

3.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Retomando o quadro genérico

Temos que a inversa da base é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Retomando o quadro genérico

Temos que a inversa da base é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\bar{c}_i^T = \underbrace{c_i^T}_{\mathbf{c}_i^T} - \underbrace{c_B^T}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{B^{-1}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\mathbf{A}_i}_{\mathbf{A}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Retomando o quadro genérico

Temos que a inversa da base é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i^T &= \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_i^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} \\ &= \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Considere o modelo de PL e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $-z$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|------|
| VB | 0 | 0 | $3/2$ | 0 | $1/2$ | 11 |
| x_1 | 1 | 0 | $1/2$ | 0 | $-1/2$ | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | $1/2$ | 0 | $1/2$ | 5 |

Suponha que agora queremos encontrar as colunas da matriz referentes às variáveis x_3 e x_4 , ou seja A_3 e A_4 .

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Considere o modelo de PL e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | $-Z$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| VB | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 11 |
| x_1 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 5 |

Suponha que agora queremos encontrar as colunas da matriz referentes às variáveis x_3 e x_4 , ou seja A_3 e A_4 . Podemos usar a fórmula:

$$\bar{A}_i = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

Retomando o quadro genérico

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{rcccccl} \min & -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ & x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Retomando o quadro genérico

Portanto:

Retomando o quadro genérico

Portanto:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Motivação: qual o problema do Simplex?

Motivação

Considerando o seguinte quadro inicial Simplex:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Motivação

Considerando o seguinte quadro inicial Simplex:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Na primeira iteração **olhamos para a linha** c^T para encontrar o mínimo, para A_2 e b para fazer a razão.

Motivação

Considerando o seguinte quadro inicial Simplex:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Na primeira iteração **olhamos para a linha** c^T para encontrar o mínimo, para A_2 e b para fazer a razão. Em seguida realizamos o pivoteamento, e **todos os elementos da tabela** são alterados:

$$\begin{cases} c^T : n \\ A : m \times n \\ b^T : m \\ z : 1 \end{cases}, Total = (n + 1)(m + 1)$$

Motivação

A tabela atualizada fica da seguinte forma:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| | -100 | 0 | 0 | 0 | 150 | 4500 |
| x_3 | 2 | 0 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Motivação

A tabela atualizada fica da seguinte forma:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| | -100 | 0 | 0 | 0 | 150 | 4500 |
| x_3 | 2 | 0 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Novamente **olhamos para a linha c^T** para encontrar o mínimo, para A_1 e b para fazer a razão.

Motivação

A tabela atualizada fica da seguinte forma:

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| | -100 | 0 | 0 | 0 | 150 | 4500 |
| x_3 | 2 | 0 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Novamente **olhamos para a linha** c^T para encontrar o mínimo, para A_1 e b para fazer a razão. Embora tenhamos atualizado **toda** a tabela na iteração passada, nenhum dos valores em **vermelho** foi usado nessa iteração!

Conclusão

Percebemos então que ao usarmos o Simplex por quadros, muitos valores são atualizados e não são utilizados nas iterações seguintes. Esse fato justifica uma utilização mais inteligente do Simplex, pelo algoritmo chamado **Simplex Revisado**.

OBS: O modelo resolvido nesta apresentação é o mesmo do resolvido em "Simplex Fase II". Compare os dois métodos e veja que os resultados são os mesmos.

Simplex Revisado

IDEIA GERAL

O Simplex revisado parte do pressuposto de que, se sabemos qual é a base (**B**), então é possível calcular a sua inversa B^{-1} , e consequentemente **fazer uso das fórmulas genéricas** para recuperar o quadro Simplex. Com isso, ao invés de atualizar o quadro todo a toda iteração, simplesmente **geramos as informações relevantes** a medida que precisamos delas.

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Seja o quadro inicial como mostrado acima. Temos que inicialmente $x_B^T = [x_3, x_4, x_5]$, e a base é $B = [A_3 A_4 A_5]$. Na primeira iteração nada é alterado, pois já temos todos os dados, assim:

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Seja o quadro inicial como mostrado acima. Temos que inicialmente $x_B^T = [x_3, x_4, x_5]$, e a base é $B = [A_3 A_4 A_5]$. Na primeira iteração nada é alterado, pois já temos todos os dados, assim:

$$\begin{cases} x_2 \text{ entra na base} \\ x_5 \text{ sai da base} \end{cases}$$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Assim, temos que $x_B^T = [x_3, x_4, x_2]$, e a **nova base** é $B = [A_3 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Assim, temos que $x_B^T = [x_3, x_4, x_2]$, e a **nova base** é $B = [A_3 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para sabermos se o algoritmo pode parar, devemos calcular os valores de c^T atualizados pela fórmula $\bar{c}_i^T = c_i^T - c_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Para isso, precisamos então de B^{-1} , c_B^T , c_i^T e A_i .

Simplex Revisado

Exemplo

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = [0 \quad 0 \quad -150], \mathbf{c}_i^T = [-100 \quad 0] \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Exemplo

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = [0 \quad 0 \quad -150], \mathbf{c}_i^T = [-100 \quad 0] \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\bar{\mathbf{c}}_i^T = [\bar{c}_1, \bar{c}_5] = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

$$\bar{\mathbf{c}}_i^T = [-100 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad -150] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-100, 150]$$

Simplex Revisado

Exemplo

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [-100, 0, 0, 0, 150]$$

Como existe $c_i < 0$ o algoritmo deve continuar, e portanto selecionamos a variável x_1 para **entrar na base** (min c_i^T).

Simplex Revisado

Exemplo

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [-100, 0, 0, 0, 150]$$

Como existe $c_i < 0$ o algoritmo deve continuar, e portanto selecionamos a variável x_1 para **entrar na base** (min c_i^T).

O próximo passo é a seleção da **variável que sai da base**, pela razão b/A_i , de forma que precisamos encontrar os valores atualizados de A_1 e b . Novamente usamos as fórmulas genéricas:

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\bar{A}_i = B^{-1}A_i$$

Simplex Revisado

Exemplo

Temos então que:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{A}_i = B^{-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Exemplo

Temos então que:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{A}_i = B^{-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, com os valores atualizados podemos determinar a variável que **sai da base**, pelo $\min\{b/A_i\}$. Temos que $\min = 30/2 = 15$, na primeira linha. A primeira linha tinha a variável x_3 como básica, portanto:

$$\begin{cases} x_1 \text{ entra na base} \\ x_3 \text{ sai da base} \end{cases}$$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Assim, temos que $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$, e a base é $B = [A_1 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Assim, temos que $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$, e a base é $B = [A_1 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para sabermos se o algoritmo pode parar, devemos calcular os valores de c^T atualizados pela fórmula $\bar{c}_i^T = c_i^T - c_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$

Simplex Revisado

Exemplo

| VB | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | -100 | -150 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Para isso, precisamos então de B^{-1} , c_B^T , c_i^T e A_i .

Simplex Revisado

Exemplo

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = [-100 \quad 0 \quad -150], \mathbf{c}_i^T = [0 \quad 0] \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Exemplo

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = [-100 \quad 0 \quad -150], \mathbf{c}_i^T = [0 \quad 0] \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\bar{\mathbf{c}}_i^T = [\bar{c}_3, \bar{c}_5] = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

$$\bar{\mathbf{c}}_i^T = [0 \quad 0] - [-100 \quad 0 \quad -150] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [50, 0]$$

Simplex Revisado

Exemplo

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [0, 0, 50, 0, 0]$$

Como não existe $c_i < 0$ o algoritmo **pode parar**, e temos a solução ótima com as variáveis básicas $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$. Agora só é necessário coletar os valores das variáveis (vetor \bar{b}) e o **custo** da fo.

Simplex Revisado

Exemplo

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [0, 0, 50, 0, 0]$$

Como não existe $c_i < 0$ o algoritmo **pode parar**, e temos a solução ótima com as variáveis básicas $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$. Agora só é necessário coletar os valores das variáveis (vetor \bar{b}) e o **custo** da fo.

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$-z = -c_B^T B^{-1}b = - \begin{bmatrix} -100 & 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} = 6000$$

Simplex Revisado

Conclusões

Usando o método Simplex Revisado, **não precisamos atualizar toda a tabela Simplex**, simplesmente os valores que são necessários naquela iteração, de forma geral (iniciando com uma base B e uma inversa B^{-1}):

PASSOS DO SIMPLEX REVISADO

1. Encontre os valores atualizados de A_i e b .
2. Determine a variável que entre e a que sai da base com os valores atualizados.
3. Atualize a base B e a inversa B^{-1}
4. Atualize c_T , se $c_T \geq 0$ **PARE**. Senão volte para o passo 1.

Simplex Revisado

Limitações do simplex revisado

Essa abordagem possui algumas **limitações**:

Simplex Revisado

Limitações do simplex revisado

Essa abordagem possui algumas **limitações**:

1. Uma limitação do método Simplex revisado é a **determinação da inversa da base** B^{-1} a cada iteração. Isso implica o cálculo da eliminação de Gauss em uma matriz $m \times m$ a toda iteração.

Simplex Revisado

Limitações do simplex revisado

Essa abordagem possui algumas **limitações**:

1. Uma limitação do método Simplex revisado é a **determinação da inversa da base** B^{-1} a cada iteração. Isso implica o cálculo da eliminação de Gauss em uma matriz $m \times m$ a toda iteração.
2. Esse problema pode ser parcialmente resolvido, aproveitando a inversa de iterações antigas.

Simplex Revisado

Limitações do simplex revisado

Essa abordagem possui algumas **limitações**:

1. Uma limitação do método Simplex revisado é a **determinação da inversa da base** B^{-1} a cada iteração. Isso implica o cálculo da eliminação de Gauss em uma matriz $m \times m$ a toda iteração.
2. Esse problema pode ser parcialmente resolvido, aproveitando a inversa de iterações antigas.
3. Note que o Simplex sempre faz a troca de **uma coluna de B** a cada iteração (variável que sai e que entra na base). Dessa forma, podemos usar a inversa da iteração anterior e somente atualizar com a nova coluna que deve fazer parte da nova base.

Cálculo da nova inversa a partir da anterior

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Considere a primeira matriz inversa B_1^{-1} do exemplo resolvido (a própria identidade):

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para fazer a atualização da inversa, precisamos de duas informações:

1. A nova coluna c que deve ser inserida.
2. Em qual posição ela será inserida (coluna p).

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Considere a primeira matriz inversa B_1^{-1} do exemplo resolvido (a própria identidade):

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para fazer a atualização da inversa, precisamos de duas informações:

1. A nova coluna c que deve ser inserida.
2. Em qual posição ela será inserida (coluna p).

O primeiro passo então é determinar **qual é a coluna da identidade original** referente ao índice p (I_p). Em seguida, realizamos as operações na matriz B^{-1} atual, necessárias para transformar c em I_p . O resultado final é a nova matriz inversa.

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Continuando com o exemplo, na primeira iteração determinamos que x_2 entra na base e x_5 sai, dessa forma temos que:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} c = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} p = 3, l_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Continuando com o exemplo, na primeira iteração determinamos que x_2 entra na base e x_5 sai, dessa forma temos que:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & c = \begin{matrix} x_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & p = 3, l_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Podemos escrever uma **matriz aumentada**, com todas as informações:

$$\begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_5 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Continuando com o exemplo, na primeira iteração determinamos que x_2 entra na base e x_5 sai, dessa forma temos que:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} c = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} p = 3, l_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever uma **matriz aumentada**, com todas as informações:

$$\begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_2 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Agora só precisamos executar as operações em linhas para **transformar a coluna de x_2 em l_p** . São elas:

1. $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

A nova matriz inversa B_2^{-1} fica:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Na nova iteração, temos que x_1 entra na base e x_3 sai. De forma que:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} c = \begin{matrix} & x_1 \\ \begin{matrix} x_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} p = 1, l_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Na nova iteração, temos que x_1 entra na base e x_3 sai. De forma que:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & c = \begin{matrix} x_1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} & p = 1, l_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

Na nova iteração, temos que x_1 entra na base e x_3 sai. De forma que:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \quad x_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} c = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} p = 1, l_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada fica:

$$\begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \quad x_2 \quad x_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Para transformar x_1 em l_p :

1. $L_1 \leftarrow L_1/2$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

Simplex Revisado

Atualizando B^{-1}

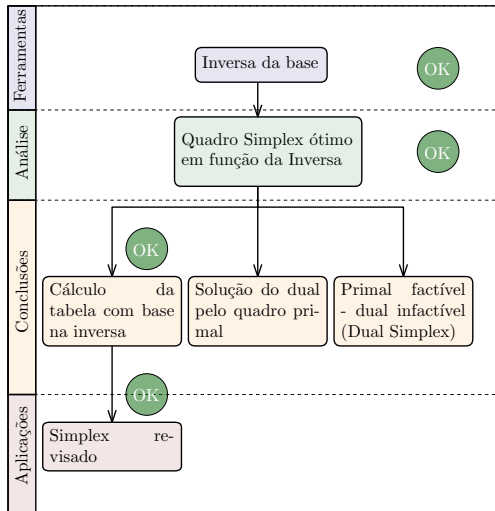
Finalmente, a última inversa B_3^{-1} fica:

$$\mathbf{B}_3^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dessa forma, conseguimos calcular todas as matrizes inversas, usando as informações anteriormente calculadas.

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Exercícios

Exercícios

1. Existe alguma desvantagem em usar o método Simplex por tabelas? Qual?
2. Qual é a ideia central do método Simplex revisado? Por quê ele pode ser considerado uma melhoria do método Simplex?
3. Existe alguma desvantagem em usar o método Simplex revisado? Como essa desvantagem pode ser sanada?