

Simplex Fase II

OBS: Diversos exercícios dessa lista podem ter suas soluções verificadas usando o software [GUSEK](#)

1. O que é uma solução básica? O que é uma solução básica factível?

RESPOSTA:

Uma solução básica é aquela em que $n - m$ variáveis possuem valores = 0 (chamadas de x_N , ou *não básicas*), e m variáveis possuem valores diferentes de 0 (x_B , ou básicas). Se todos os valores das variáveis básicas $x_B \geq 0$, a solução é dita *básica factível*.

2. Para cada um dos modelos de PL a seguir, escreva-o na forma padrão.

(a)

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 &\geq -60 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Multiplicando a função objetivo por -1 e deixando na forma de minimização. Multiplicando a primeira restrição por -1 para deixar 60 positivo e adicionando a variável de folga x_3 , o modelo fica:

$$\begin{aligned} \min z &= & -5x_1 & - & 2x_2 & & & & \\ & -10x_1 & - & 12x_2 & + & x_3 & = & 60 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & = & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5000 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 15000 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\text{ irrestrito} \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Multiplicando a função objetivo por -1 para deixar na forma de minimização. Como x_2 é irrestrito, fazemos a transformação $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Adicionando uma variável de folga na primeira restrição (x_4) e subtraindo uma da segunda (x_5) para deixá-las na forma de igualdade, temos o modelo:

$$\begin{aligned} \min z &= & -10x_1 & - & 7(x_2^+ - x_2^-) & & & & \\ & 2x_1 & + & (x_2^+ - x_2^-) & + & x_3 & + & x_4 & = 5000 \\ & 4x_1 & + & 5(x_2^+ - x_2^-) & & & - & x_5 & = 15000 \\ & x_1 & , & x_2^+, x_2^- & , & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 9 \\
 -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
 x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Removendo uma variável de folga da primeira inequação (x_3) e adicionando outras duas nas restrições 2 e 3 (x_4 e x_5), temos o modelo:

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\
 -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

3. Certo problema de programação linear que envolve 2 variáveis possui a região factível indicada na Figura 1. O objetivo é maximizar o lucro total das duas variáveis. O lucro unitário para

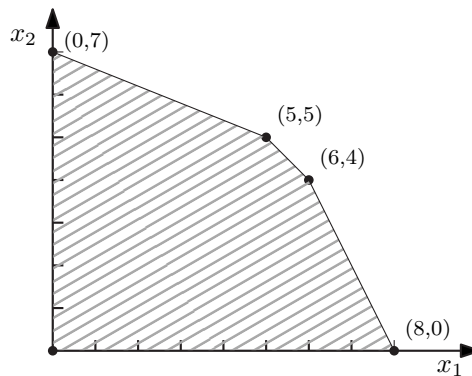


Figura 1: Região factível

cada unidade de x_1 é de R\$1.00 e o lucro unitário para cada unidade de x_2 é R\$2.00.

- (a) (0.5) Calcule o lucro total para cada solução básica factível. Use esta informação para encontrar a solução ótima. **RESPOSTA:**

As soluções básicas factíveis são dadas pelos pontos de interseção na região factível. Os pontos com os custos são dados por:

- $(0,0)$: custo = 0
- $(0,7)$: custo = 14
- $(5,5)$: custo = 15
- $(6,4)$: custo = 14
- $(8,0)$: custo = 8

Temos que a solução ótima é dada por $(x_1, x_2) = (5, 5)$, com lucro de 15.

- (b) (0.5) Identifique a sequência de soluções básicas factíveis examinadas pelo método simplex para chegar a uma solução ótima (sem aplicar o método). Por que esse caminho ocorre?

RESPOSTA:

O caminho seguido pelo Simplex é: $(0,0) \rightarrow (0,7) \rightarrow (5,5)$. Esse caminho é seguido pois na primeira iteração a variável x_2 é a mais vantajosa para entrar na base.

4. Para facilitar os cálculos, os coeficientes de um modelo de PL são colocados em uma tabela chamada *tabela simplex*. É muito importante entendermos os elementos dessa tabela. Considerando a tabela simplex 1 após um determinado número de iterações do algoritmo, responda o que se pede:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-7/2	0	3/2	0	0	6
???	-1/2	1	1/2	0	0	2
???	2	0	-1	1	0	2
???	5/2	0	-3/2	0	1	3

Tabela 1: Tabela simplex

- (a) Quais são e quais os valores das variáveis básicas da tabela (células com ???)? **RESPOSTA:**

As variáveis básicas podem ser encontradas pela submatriz identidade na matriz dos coeficientes. Para cada linha dessa identidade, a variável que possui valor 1 é a variável básica da linha. No caso da tabela, temos as variáveis básica, e seus valores, na seguinte ordem:

- $x_2 = 2$
- $x_4 = 2$
- $x_5 = 3$

- (b) Qual o valor da função objetivo nessa iteração?

RESPOSTA:

O valor na última coluna da tabela fornece o valor de -z, de forma que a função objetivo nessa iteração é -6.

- (c) Existe alguma variável que pode entrar na base e melhorar a função objetivo? Qual?

RESPOSTA:

As variáveis candidatas a entrar na base são aquelas em que os coeficientes na função objetivo são negativos ($c \leq 0$). No caso temos que c_1 , referente a variável x_1 é -7/2, o que a faz uma candidata a entrar na base.

- (d) Se existir uma variável candidata a entrar na base, quais serão as candidatas a deixar a base?

RESPOSTA:

Considerando que x_1 é um candidato a entrar na base, os candidatos a sair da base são definidos pela razão entre os coeficientes de b e da coluna referente a variável que entra, **que são** ≥ 0 . Nesse caso, x_2 não é um candidato a sair da base, pois seu coeficiente na coluna de x_1 é -1/2. Os candidatos são x_4 e x_5 .

5. Considere o seguinte conjunto de restrições de um modelo de programação linear (já na forma

padrão com as variáveis de folga):

$$5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2 \in R^+$$

- (a) Nota-se que o sistema não está na forma canônica. Verifique se a solução com variáveis básicas $x_B = (x_5, x_1)$ é uma solução básica factível.

RESPOSTA:

Para que o sistema fique na forma canônica em relação a x_1 e x_5 , os elementos destacados abaixo devem ser = 1, e os outros das mesmas colunas iguais a zero:

$$5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + \textcircled{x_5} = 20$$

$$\textcircled{x_1} - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2 \in R^+$$

Podemos aplicar as seguintes operações nas linhas do sistema para isso:

$$- L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$- L_2 \leftarrow L_2 / -4$$

$$- L_1 \leftarrow L_1 - 5L_0$$

Ficamos então com o sistema equivalente:

$$-1/4x_2 + 3x_3 - 3/4x_4 + \textcircled{x_5} = 5$$

$$\textcircled{x_1} - 3/4x_2 + 2x_3 - 1/4x_4 = 3$$

$$x_1, x_2 \in R^+$$

Assim, temos que a solução básica com $x_B = (x_5, x_1) = (5, 3)$ é factível, pois $x_B \geq 0$.

- (b) Verifique se a solução com variáveis básicas $x_B = (x_1, x_2)$ é uma solução básica factível.

RESPOSTA:

Para que o sistema fique na forma canônica em relação a x_1 e x_2 , os elementos destacados abaixo devem ser = 1, e os outros das mesmas colunas iguais a zero:

$$\textcircled{5x_1} - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20$$

$$x_1 - \textcircled{x_2} + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2 \in R^+$$

Podemos aplicar as seguintes operações nas linhas do sistema para isso:

$$- L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$- L_2 \leftarrow L_2 / -4$$

$$- L_1 \leftarrow L_1 - 5L_0$$

Ficamos então com o sistema equivalente:

$$\textcircled{x_1} + -7x_3 + 2x_4 + -3x_5 = -12$$

$$\textcircled{x_2} - 12x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -20$$

$$x_1, x_2 \in R^+$$

Assim, temos que a solução básica com $x_B = (x_1, x_2) = (-12, -20)$ é infactível, pois $x_B < 0$.

6. Para cada um dos modelos de PL abaixo, resolva-os usando o método Simplex (usando tabelas), em seguida mostre o caminho Simplex percorrido na região factível (graficamente).

(a) **(R)**

$$\begin{aligned}\max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

RESPOSTA:

Forma padrão:

$$\begin{aligned}\min z &= -5x_1 - 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 + x_3 &= 60 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Tabela 2: Ex. 6a tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
VB	0	1/2	0	5/2	15
x_3	0	7	1	-5	30
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Tabela 3: Ex. 6a iteração 1

Solução ótima com valores $x_B = (x_3, x_1) = (30, 3)$ e $x_N = (x_2, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo -15 (voltando ao problema de maximização o custo é de 15). O caminho simplex percorrido foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(x_1, x_2) = (3, 0)$.

(b) **(R)**

$$\begin{aligned}\max z &= 10x_1 + 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

RESPOSTA:

Forma padrão:

$$\begin{aligned}\min z &= -10x_1 - 7x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 &= 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Solução ótima com valores $x_B = (x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$ e $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo -85/3 (voltando ao problema de maximização o custo é de 85/3). O caminho simplex percorrido foi: $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/2, 0)$, $(x_1, x_2) = (5/3, 5/3)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-10	-7	0	0	0
x_3	2	1	1	0	5
x_4	4	5	0	1	15

Tabela 4: Ex. 6b tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	-2	5	0	25
x_1	1	1/2	1/2	0	5/2
x_4	0	3	-2	1	5

Tabela 5: Ex. 6b iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	0	0	11/3	2/3	85/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	5/3

Tabela 6: Ex. 6b tabela iteração 2

(c) (R)

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
 -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
 x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Forma padrão:

$$\begin{aligned}
 \min z &= -2x_1 - 3x_2 \\
 x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\
 -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 6
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	3	1	0	0	9
x_4	-1	2	0	1	0	4
x_5	1	1	0	0	1	6

Tabela 7: Ex. 6b tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-7/2	0	3/2	0	0	6
x_3	5/2	0	1	-3/2	0	3
x_2	-1/2	1	0	1/2	0	2
x_5	3/2	0	0	-1/2	1	4

Tabela 8: Ex. 6b iteração 1

Solução ótima com valores $x_B = (x_1, x_2, x_4) = (9/2, 3/2, 11/2)$ e $x_N = (x_3, x_5) = (0, 0)$ e função objetivo com custo de -27/2 (voltando ao problema de maximização o custo é de 27/2). O caminho percorrido pelo Simplex foi: $(x_1, x_2) = (0, 0), (0, 2), (6/5, 13/5), (9/2, 3/2)$. O caminho é mostrado na Figura 2 (caminho A,B,C,D).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$
VB	0	0	$7/5$	$-3/5$	0	$51/5$
x_1	1	0	$2/5$	$-3/5$	0	$6/5$
x_2	0	1	$1/5$	$1/5$	0	$13/5$
x_5	0	0	$-3/5$	$-2/5$	1	$11/5$

Tabela 9: Ex. 6b iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$
VB	0	0	$1/2$	0	$3/2$	$27/2$
x_1	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	$9/2$
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	$3/2$
x_4	0	0	$-3/2$	1	$5/2$	$11/2$

Tabela 10: Ex. 6b iteração 3

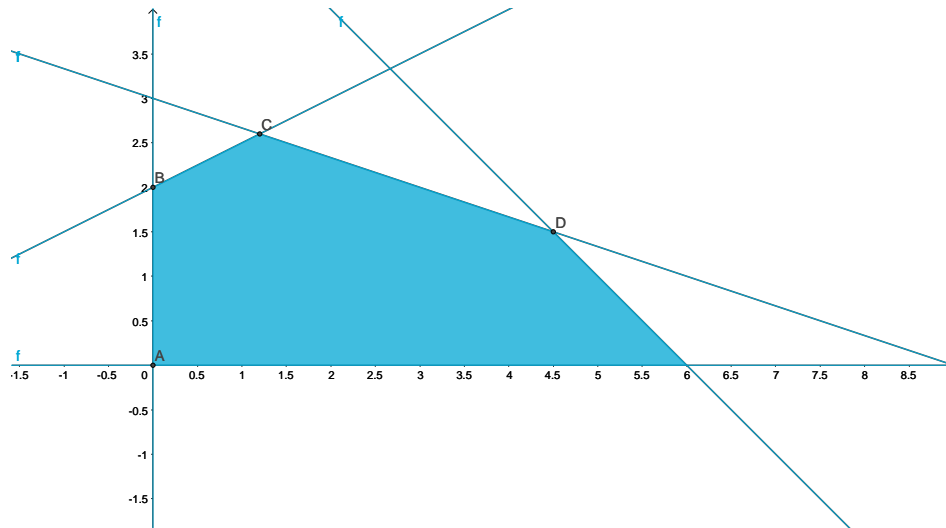


Figura 2: Caminho Simplex

7. Encontre a solução do problema a seguir, utilizando o método Simplex.

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 100 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 210 \\
 x_1 &\leq 80 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Forma padrão:

$$\begin{aligned}
 \min z &= -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 100 \\
 2x_1 + x_2 + x_5 &= 210 \\
 x_1 + x_6 &= 80 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Solução ótima com valores $x_B = (x_3, x_5, x_6) = (100, 210, 80)$ e $x_N = (x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$ e função objetivo com custo -400 (voltando ao problema de maximização o custo é de 400).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	-2	-3	-4	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	0	0	100
x_5	2	1	0	0	1	0	210
x_6	1	0	0	0	0	1	80

Tabela 11: Ex. 7 tabela inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z
VB	2	1	0	4	0	0	400
x_3	1	1	1	1	0	0	100
x_5	2	1	0	0	1	0	210
x_6	1	0	0	0	0	1	80

Tabela 12: Ex. 7 tabela iteração 1

8. Modele e encontre a solução do seguinte problema (lista 1). Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades e o do cinto é de 2 unidades, formular o modelo que maximize lucro por hora.

RESPOSTA:

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\in R^+ \end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = -5x_1 - 2x_2 \\ & 10x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ & 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in R^+ \end{aligned}$$

Exercício resolvido em 6a.