A inversa: Simplex & Dualidade II

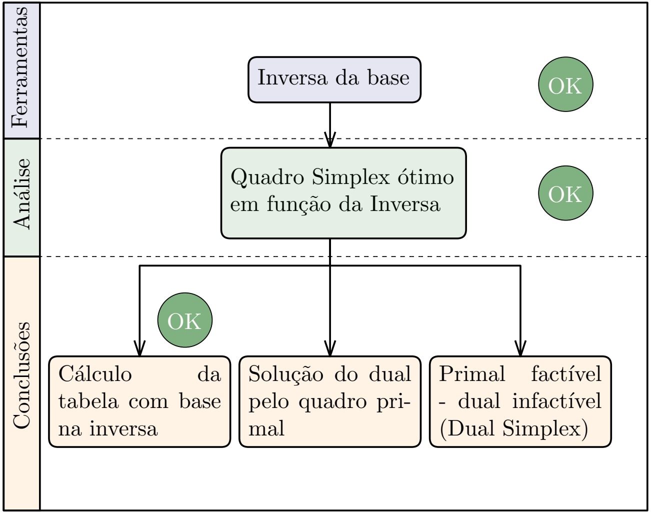
Alexandre Checoli Choueiri

29/01/2023

Conteúdo

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Obtendo a solução dual pelo quadro ótimo primal

Solução dual pelo quadro primal

Agora possuímos todas as ferramentas para mostrar que ao encontrarmos a solução ótima do primal, automaticamente encontramos a solução ótima do dual. Considere o par primal dual, com o primal escrito na forma padrão:

Primal

$$\begin{aligned} \min z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \max z = \pi^T\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\pi \leq \mathbf{c} \\ \pi \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Da mesma forma que fizemos antes, podemos particionar os problemas em relação às variáveis básicas e não básicas do problema original:

Primal

$$\begin{aligned} \min\ z = {} & \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \max\ v = {} & \pi^T \mathbf{b} \\ & \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \\ & \pi \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores > 0 no primal (x_B) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores > 0 no primal (x_B) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\begin{aligned} \max \mathrm{v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \max \mathrm{v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi = \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Pelo **teorema das folgas complementares**, na otimalidade, as variáveis com valores > 0 no primal (x_B) implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^T \pi = \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Aplicando a transposta em ambos os lados (lembre-se que $(AB)^T = B^T A^T$):

Solução dual pelo quadro primal

$$\begin{aligned} \text{max } \mathsf{v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} & \\ \pi^T \mathbf{B} &= \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Como podemos derivar uma solução genérica para π? (como isolar π).

Solução dual pelo quadro primal

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Como podemos derivar uma solução genérica para π? (como isolar π). Multiplicando ambos os lados da igualdade por B^{-1}:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Chegamos então ao modelo equivalente:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{N}^T \pi \le \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Chegamos então ao modelo equivalente:

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = \pi^T \mathbf{b} \\ \pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Que nos fornece uma forma também genérica de calcular os valores duais, em função da inversa da base primal:

$$\boxed{\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}}$$

Solução dual pelo quadro primal

Se olharmos a tabela genérica do Simplex, percebemos que esse mesmo termo aparece na linha da função objetivo, abaixo das variáveis não básicas. Analisando o termo da tabela com mais cuidado, distinguimos um caso em que o cálculo fica simplificado.

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Solução dual pelo quadro primal

Embora o termo esteja em função dos coeficientes não básicos, podemos usá-lo para analisar quaisquer termos da função objetivo, básicos e não básicos, de forma que $\mathbf{c}_N^T$ são os coeficientes que queremos atualizar na fo (c_i^T), e N a submatriz composta pelas colunas referentes a esses coeficientes (A_i).

DADOS NÃO BÁSICOS

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

QUAISQUER VALORES

$$\mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} A_i$$

Lembrando que $\mathbf{c}_N^T$ e $\mathbf{N}$ são coletadas da matriz original. O que acontece se usarmos os dados das variáveis de folga para esse cálculo?

Solução dual pelo quadro primal

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Sempre os coeficientes das variáveis de folga (no inicio do quadro) são nulas.

Solução dual pelo quadro primal

$$\boxed{\mathbf{c}_N^T} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

De forma que $c_N^T = 0$.

Solução dual pelo quadro primal

$$\mathbf{c}_N^T - {\color{red}\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}} \mathbf{N}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

Ainda, a submatriz composta pelas colunas das variáveis de folga no inicio do Simplex também sempre será a **identidade** (**I**) (no Simplex Fase I será a matriz das var. artificiais).

Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1. $\mathbf{c}_N^T = 0$
2. $\mathbf{N}{=}\mathbf{I}$

Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1. $\mathbf{c}_N^T = 0$
2. $\mathbf{N} = \mathbf{I}$

O que faz o termo ficar:

$$\underbrace{\mathbf{c}_N^T}_{0} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \underbrace{\mathbf{N}}_{I} = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = -\pi^T$$

Solução dual pelo quadro primal

Ou seja, no caso das variáveis de folga:

1. $\mathbf{c}_N^T = 0$
2. $\mathbf{N}=\mathbf{I}$

O que faz o termo ficar:

$$\underbrace{\mathbf{c}_N^T}_{0} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \underbrace{\mathbf{N}}_{I} = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = -\pi^T$$

Que é exatamente o negativo da expressão que encontramos para o problema dual:

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

(lembre do negativo)!

Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão

$$\boxed{\begin{aligned} \max \ \mathrm{v} = \pi^T \mathbf{b} & \\ \mathbf{B}^T \pi &\leq \mathbf{c}_B \\ \mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N \\ \pi & \text{ irrestrito} \end{aligned}}$$

Partimos da definição do problema dual, considerando os termos separados em básicos e não básicos.

Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão

$$\begin{aligned} \max\ \mathrm{v} = {} & \pi^T \mathbf{b} \\ & \mathbf{B}^T \pi \leq \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{N}^T \pi \leq \mathbf{c}_N \\ & \pi \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

Com isso chegamos a uma expressão para a solução dual em função de parâmetros do primal.

Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão

$$
\begin{aligned}
\max \ v = \pi^T \mathbf{b} & \\
\mathbf{B}^T \pi &\leq \mathbf{c}_B \\
\mathbf{N}^T \pi &\leq \mathbf{c}_N \\
\pi & \text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Percebemos que a expressão da solução dual está contida na própria tabela genérica do Simplex.

Solução dual pelo quadro primal

Retomando o caminho da conclusão

$$
\begin{aligned}
\max\ \mathrm{v} = \pi^T \mathbf{b} & \\
\mathbf{B}^T \pi &\le \mathbf{c}_B \\
\mathbf{N}^T \pi &\le \mathbf{c}_N \\
\pi &\ \text{irrestrito}
\end{aligned}
$$

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})$	$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = -\pi^T$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

E que ao considerarmos somente os termos acima da matriz identidade inicial, os custos atualizados na função objetivo são **exatamente iguais ao negativo da solução dual**.

Solução dual pelo quadro primal

Conclusão

Os termos da função objetivo referentes a matriz identidade inicial (ou variáveis de folga ou artificiais), representam o negativo da solução do problema dual, de forma que **ao resolvermos o primal pela tabela Simplex, automáticamente encontramos também a solução do dual** (o seu negativo!).

Solução dual pelo quadro primal

Conclusão

Os termos da função objetivo referentes a matriz identidade inicial (ou variáveis de folga ou artificiais), representam o negativo da solução do problema dual, de forma que **ao resolvermos o primal pela tabela Simplex, automáticamente encontramos também a solução do dual** (o seu negativo!).

Atenção

Como no caso da inversa, os valores duais estão acima da matriz identidade original. Se usarmos variáveis artificiais e quisermos coletar o valor dual:

1. **Não remover as colunas artificiais ao final da fase I**.
2. Ao resubstituir a função objetivo original, inicializar os coef. das variáveis artificiais $= 0$ (não usar esse valores como variáveis para entrar na base).
3. No final da otimização, os valores duais são os coef. das variáveis artificiais.

Exemplo

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Considere o seguinte par primal-dual de PLs:

$$
\begin{aligned}
\text{max } z = x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 - x_2 &\leq 4 \\
-x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min } v = 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 & \\
\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &\geq 1 \\
\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 2 \\
\pi_1, \pi_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

O quadro inicial e o quadro ótimo para o problema primal são mostrados acima.

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Verificando os elementos acima da identidade no quadro inicial.

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4

			$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-\pi_3$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

Sabemos que na otimalidade eles são o negativo da solução dual, ou seja, $-\pi$.

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Lembrando que para deixar o problema na forma padrão fizemos

$$\text{max z} = -\text{min z}$$

Assim, temos que, para voltar à função original, multiplicamos os termos novamente por -1, o que gera:

1. $-\pi_1 = -3/2 \rightarrow \pi_1 = 3/2$
2. $-\pi_2 = -0 \rightarrow \pi_2 = 0$
3. $-\pi_3 = -1/2 \rightarrow \pi_3 = 1/2$

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Substituindo as soluções primal-dual $x^T = (x_1, x_2) = (1, 5)$ e $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1.5, 0, 0.5)$ nos modelos, temos:

$$
\begin{aligned}
\text{max } z = x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 - x_2 &\leq 4 \\
-x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min } v = 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 & \\
\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &\geq 1 \\
\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 2 \\
\pi_1, \pi_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Substituindo as soluções primal-dual $x^T = (x_1, x_2) = (1, 5)$ e $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1.5, 0, 0.5)$ nos modelos, temos:

$$
\begin{aligned}
\text{max } z = 1 + 2 \cdot 5 &\Rightarrow 11 \\
1 + 5 \leq 6 &\Rightarrow 6 \leq 6 \\
1 - 5 \leq 4 &\Rightarrow -4 \leq 4 \\
-1 + 5 \leq 4 &\Rightarrow 4 \leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min } v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 &\Rightarrow 11 \\
1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq 1 \\
1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 &\Rightarrow 2 \geq 2 \\
\pi_1, \pi_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e $z = v$, o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções x e π são ótimas para seus respectivos problemas.

$$\begin{aligned} \text{max } z = 1 + 2 \cdot 5 &\Rightarrow 11\checkmark \\ 1 + 5 \leq 6 &\Rightarrow 6 \leq 6\checkmark \\ 1 - 5 \leq 4 &\Rightarrow -4 \leq 4\checkmark \\ -1 + 5 \leq 4 &\Rightarrow 4 \leq 4\checkmark \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min } v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 &\Rightarrow 11\checkmark \\ 1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq 1\checkmark \\ 1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 &\Rightarrow 2 \geq 2\checkmark \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e $z = v$, o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções x e π são ótimas para seus respectivos problemas.

$$\begin{aligned} \text{max } z = 1 + 2 \cdot 5 &\Rightarrow 11\checkmark \\ 1 + 5 \le 6 &\Rightarrow 6 \le 6\checkmark \\ 1 - 5 \le 4 &\Rightarrow -4 \le 4\checkmark \\ -1 + 5 \le 4 &\Rightarrow 4 \le 4\checkmark \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min } v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 &\Rightarrow 11\checkmark \\ 1.5 + 0 - 0.5 \ge 1 &\Rightarrow 1 \ge 1\checkmark \\ 1.5 - 0 + 0.5 \ge 2 &\Rightarrow 2 \ge 2\checkmark \\ \pi_1, \pi_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

As soluções são factíveis, mas como podemos **garantir que são ótimas**?

Solução dual pelo quadro primal

Exemplo

Vemos que todas as restrições são satisfeitas, e $z = v$, o que, pelo teorema fraco da dualidade garante que as soluções x e π são ótimas para seus respectivos problemas.

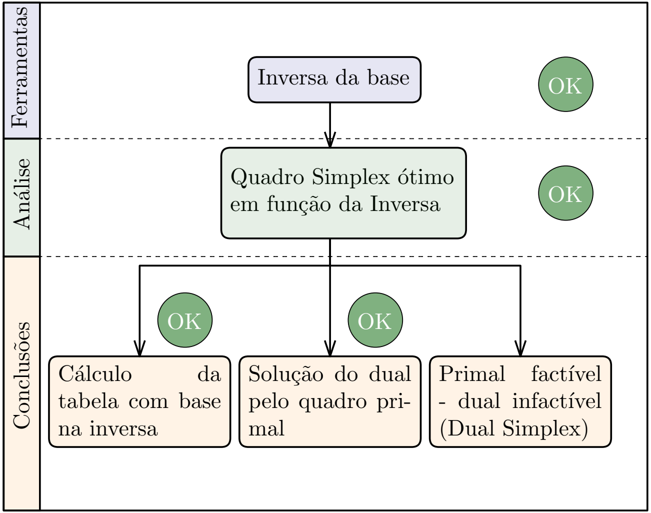
$$
\begin{aligned}
\text{max } z = 1 + 2 \cdot 5 &\Rightarrow 11 \checkmark \\
1 + 5 \leq 6 &\Rightarrow 6 \leq 6 \checkmark \\
1 - 5 \leq 4 &\Rightarrow -4 \leq 4 \checkmark \\
-1 + 5 \leq 4 &\Rightarrow 4 \leq 4 \checkmark \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min } v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 &\Rightarrow 11 \checkmark \\
1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark \\
1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 &\Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark \\
\pi_1, \pi_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

As soluções são factíveis, mas como podemos **garantir que são ótimas**?
Pelo teorema fraco da dualidade parte 2, se $Z = V$ para o par primal dual, então as soluções para ambos os problemas são ótimas.

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Primal factível - dual infactível

Primal factível - dual infactível

Agora que sabemos que ao final do quadro Simplex, além de obtermos a solução ótima do primal, obtemos também a solução ótima do dual, podemos investigar o que ocorre com essa solução iteração a iteração. O que mostramos é que, **no quadro final primal (ótimo)** a solução dual é factível e ótima, **mas não sabemos nas iterações intermediárias**. Seja novamente o par primal-dual:

Primal factível - dual infactível

Agora que sabemos que ao final do quadro Simplex, além de obtermos a solução ótima do primal, obtemos também a solução ótima do dual, podemos investigar o que ocorre com essa solução iteração a iteração. O que mostramos é que, **no quadro final primal (ótimo)** a solução dual é factível e ótima, **mas não sabemos nas iterações intermediárias**. Seja novamente o par primal-dual:

$$\begin{aligned} \text{max } z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min } v &= 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 2 \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal factível - dual infactível

Podemos analisar a cada iteração do Simplex, o que ocorre com a solução dual.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

$$\begin{aligned} \text{min } v = 6\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 \geq 1 \\ \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 \geq 2 \\ \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Na primeira iteração, a solução dual é factível?

Primal factível - dual infactível

Solução atual $\pi = (0, 0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
x_5	-1	1	0	0	1	4

$$\min v = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \Rightarrow 0$$
$$0 + 0 - 0 \geq 1 \Rightarrow 0 \geq 1 \text{ ✗}$$
$$0 - 0 + 0 \geq 2 \Rightarrow 0 \geq 2 \text{ ✗}$$
$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Não, nenhuma restrição dual é satisfeita.

Primal factível - dual infactível

Solução atual $\pi = (0, 0, 2)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-3	0	0	0	2	8
x_3	2	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

$$\min\ v = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \Rightarrow 8$$
$$0 + 0 - 2 \geq 1 \Rightarrow -2 \geq 1 ✗$$
$$0 - 0 + 2 \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 ✓$$
$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

Na segunda iteração a solução ainda é dual infactível, porém uma restrição é satisfeita.

Primal factível - dual infactível

Solução atual $\pi = (1.5, 0, 0.5)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1 /2	5

$$\begin{aligned} \text{min } v = 6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 &\Rightarrow 11 \checkmark \\ 1.5 + 0 - 0.5 \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark \\ 1.5 - 0 + 0.5 \geq 2 &\Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Somente na última iteração (ou seja, na otimalidade primal) a solução dual é factível.

Primal factível - dual infactível

Percebemos que para cada solução básica factível do primal, a solução correspondente do dual é infactível (exceto na otimalidade primal). Mas **por quê isso ocorre**? Para entender temos que recorrer novamente à tabela genérica Simplex.

Primal factível - dual infactível

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
\max \text{ v} = \pi^T\mathbf{b} & \\
\mathbf{B}^T\pi &\leq \mathbf{c}_B \\
\mathbf{N}^T\pi &\leq \mathbf{c}_N \\
\pi & \text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

Considere a tabela genérica, bem como o modelo dual com separação de variáveis básicas e não básicas.

Primal factível - dual infactível

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
\max \text{ v} = {} & \pi^T\mathbf{b} \\
& \pi^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \\
& \mathbf{N}^T\pi \leq \mathbf{c}_N \\
& \pi \text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

Novamente, pelo **teorema das folgas complementares**, as variáveis com valores >0 no primal implicam variáveis de folga nulas no dual. Ou seja, após a inserção das folgas, sabemos que as restrições referentes a essas variáveis no dual são de igualdade. Multiplicando a primeira inequação pela inversa da base (B^{-1}) e aplicando a transposta:

Primal factível - dual infactível

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
\max \text{ v} = {} & \pi^T\mathbf{b} \\
& \pi^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \\
& 0 \leq \mathbf{c}_N^T - \pi^T\mathbf{N} \\
& \pi \text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

Aplicando a transposta em ambos os lados da inequação (conjunto de restrições 2), e movendo o termo ($\pi^T\mathbf{N}$) para a direita.

Primal factível - dual infactível

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \max \text{ v} = {} & \pi^T \mathbf{b} \\ & \pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ & 0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \\ & \pi \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

Substituindo a solução π^T da primeira equação na inequação.

Primal factível - dual infactível

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
\max \text{ v} = \pi^T\mathbf{b} \\
\pi^T &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \\
0 &\leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\
\pi &\text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

Note que o termo que define a restrição de factibilidade do dual, é exatamente o mesmo que define os custos na função objetivo da tabela Simplex referentes às variáveis não básicas.

Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o **custo atualizado** das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos ($c^T \geq 0$) das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o **custo atualizado** das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos ($c^T \geq 0$) das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} < 0$$

O método continua,

Primal factível - dual infactível

Assim, sabemos que quando a inequação

$$0 \leq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

for satisfeita no quadro Simplex, a solução do dual será factível. Acontece que esse termo define o **custo atualizado** das variáveis não básicas na função objetivo. Sabemos que o critério de parada do método Simplex é justamente quando não existirem mais custos negativos ($c^T \geq 0$) das variáveis não básicas. Ou seja, enquanto:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} < 0$$

O método continua, quando

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Estamos na solução ótima.

Conclusão

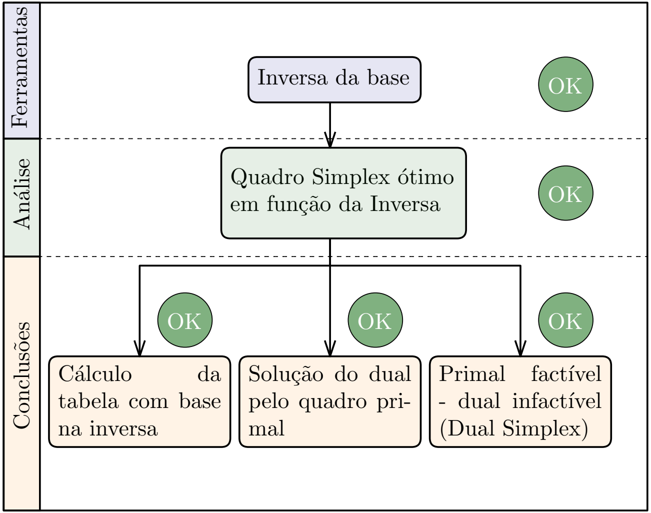
Primal factível - dual infactível

Conclusão

O custo das variáveis não básicas na função objetivo é justamente o critério de factibilidade do problema dual. O critério só é atingido quando o a solução ótima do primal é encontrada. Ou seja, no método Simplex, a cada iteração temos uma solução primal factível e dual infactível, somente quando chegamos na otimalidade primal a solução dual é factível (e ótima).

Objetivos

Ferramentas e objetivos



Primal factível - dual infactível

Próximos passos

As três conclusões que chegamos nos possibilitam entender 3 aplicações: o algoritmo **Simplex Revisado** (apresentação disponível no site), a **Análise de sensibilidade** e o algoritmo **Dual-Simplex**.

Objetivos

Ferramentas e objetivos