Modelagem

Alexandre Checoli Choueiri

09/06/2023

Conteúdo

Introdução

Essa apresentação tem por objetivo auxiliar no processo de modelagem de alguns problemas de programação linear. Certos problemas podem ser modelados diretamente, outros, no entanto, demandam um certo tempo para que as restrições sejam totalmente compreendidas. Quanto mais tipos de restrições diferentes entendermos, mais rápido e fácil fica o processo de enxergarmos problemas em situações cotidianas.

O transporte de cargas em aeronaves

O problema

Um avião de carga possui 3 compartimentos para armazenamento de carga: anterior, central e posterior. Esses compartimentos possuem limites na capacidade de carga, tanto em termos de *peso* quanto de *espaço* (volume), conforme mostrado na Tabela 1:
Além disso, o peso da carga no respectivo compartimento deve **manter a mesma proporção da capacidade** de peso desse compartimento, para manter o equilíbrio da aeronave. Existem 4 tipos de cargas que podem ser transportadas no avião. As cargas são de grãos, de forma que **qualquer parcela** de cada carga pode ser transportada.
O peso, volume e lucro total das cargas é mostrado na Tabela 2 (por exemplo, se decidirmos transportar toda a carga 1, o peso será de 20t, o volume de 500 pes^3 e o lucro de 320US$). O objetivo é determinar quanto (se alguma) de cada carga deve ser transportada e como distribuir cada uma delas entre os compartimentos de modo a maximizar o lucro total por voo. Formule um modelo de programação linear para este problema.

O transporte de cargas em aeronaves

O problema

Tabela 1: Capacidade dos compartimentos do avião

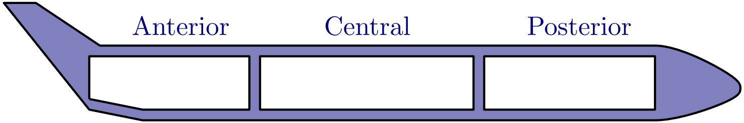
Compartimento	**Capacidade em peso (t)**	**Capacidade em volume** pes^3
Anterior	12	600
Central	18	700
Posterior	10	400

Tabela 2: Cargas que podem ser transportadas

Carga	**Peso(t)**	**Volume(**pes^3**)**	**Lucro(US$)**
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

O transporte de cargas em aeronaves

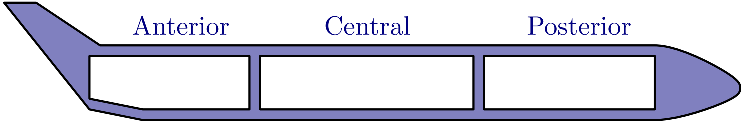
Solução



Como já sabemos, o primeiro passo para modelar o problema é definição das variáveis. E para isso é necessário entender o contexto completo do problema.

O transporte de cargas em aeronaves

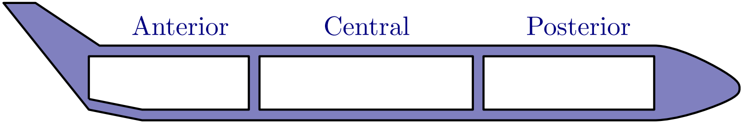
Solução



Nesse caso temos 3 compartimentos em um avião que podem realizar o transporte de carga.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

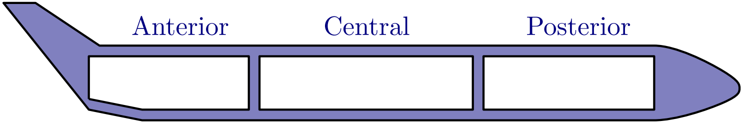


Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400

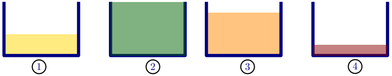
Cada compartimento possui uma limitação em relação ao **peso** e ao **volume** da carga a ser transportada.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



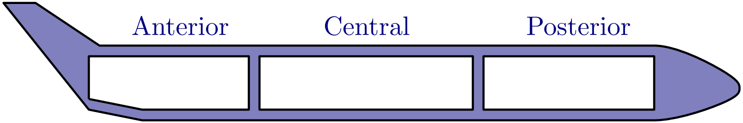
Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400



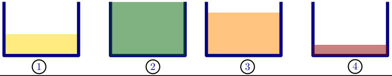
No total, existem 4 tipos de cargas que podem ser transportadas no avião.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400

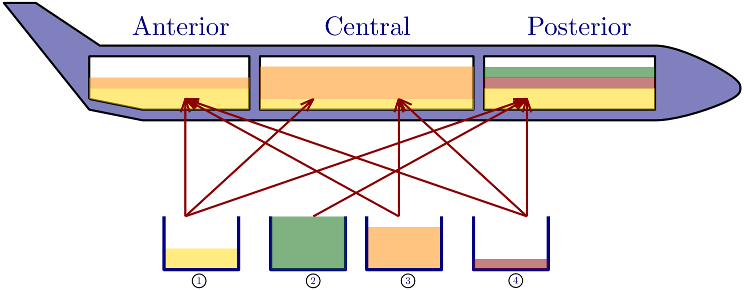


Peso	20	16	25	13
Volume	500	700	600	400
Lucro	320	400	360	290

Cada uma tem um peso, volume e lucro pela **totalidade** do seu transporte.

O transporte de cargas em aeronaves

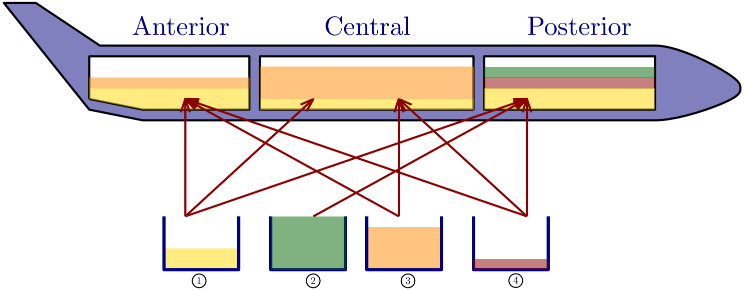
Solução



Como são cargas de grãos, **qualquer parcela** de qualquer carga pode ser transportada em cada compartimento.

O transporte de cargas em aeronaves

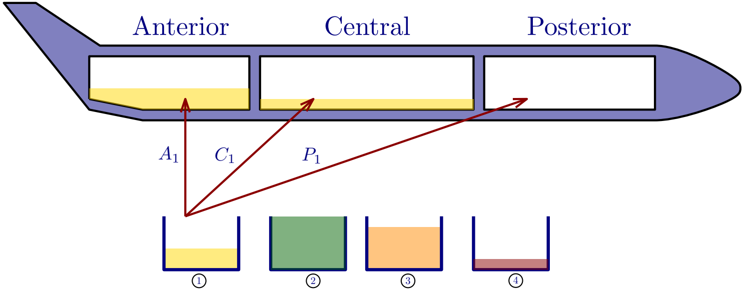
Solução



O que poderia ser a variável de decisão desse problema?

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



Precisamos determinar quanto de **cada carga** vai ser transportada em **cada compartimento**. Ou seja, precisamos de uma variável para cada carga em cada compartimento. Ainda, podemos transportar qualquer parcela da carga total, de forma que faz sentido trabalharmos com a porcentagem de carga transportada em cada compartimento.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Podemos definir então as variáveis como:

$$\begin{cases} A_i : \%\ \text{da carga } i \text{ carregada no compartimento Anterior} \quad i = 1,2,3,4. \\ C_i : \%\ \text{da carga } i \text{ carregada no compartimento Central} \quad i = 1,2,3,4. \\ P_i : \%\ \text{da carga } i \text{ carregada no compartimento Posterior} \quad i = 1,2,3,4. \\ A : \text{Peso total carregado no compartimento Anterior} \\ C : \text{Peso total carregado no compartimento Central} \\ P : \text{Peso total carregado no compartimento Posterior} \end{cases}$$

OBS: As variáveis A, C e P não são necessárias, elas só vão servir para simplificar a escrita de uma restrição

O transporte de cargas em aeronaves

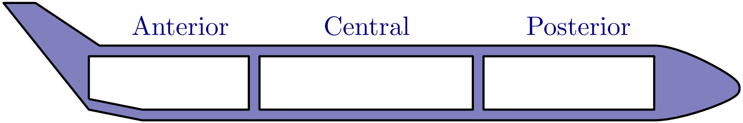
Solução

Com essa definição de variáveis já podemos criar o primeiro conjunto de restrições. Se vamos transportar uma porcentagem da carga total, sabemos que o máximo que podemos transportar de cada carga não pode ultrapassar 100%. Assim temos as seguintes restrições para as 4 cargas:

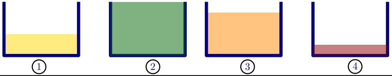
$$\begin{aligned}
A_1 + C_1 + P_1 &\leq 1\\
A_2 + C_2 + P_2 &\leq 1\\
A_3 + C_3 + P_3 &\leq 1\\
A_4 + C_4 + P_4 &\leq 1
\end{aligned}$$

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



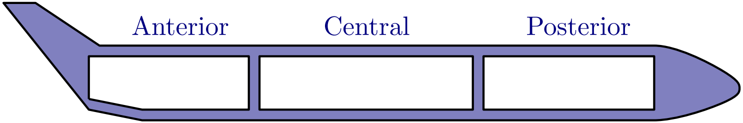
Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400



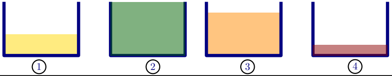
Peso	20	16	25	13
Volume	500	700	600	400
Lucro	320	400	360	290

Sabemos também que cada carga possui um volume, e cada compartimento um volume máximo.

O transporte de cargas em aeronaves
Solução



Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400



Peso	20	16	25	13
Volume	500	700	600	400
Lucro	320	400	360	290

Assim, o volume transportado em cada compartimento deve ser menor do que o volume máximo do compartimento.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

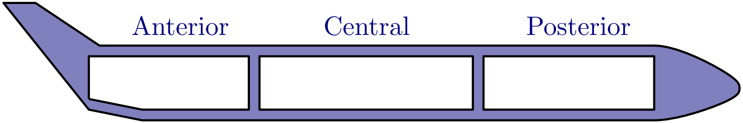
Temos então o seguinte conjunto de restrições (uma para cada compartimento):

$$
\begin{aligned}
500A_1 + 700A_2 + 600A_3 + 400A_4 &\leq 600 \\
500C_1 + 700C_2 + 600C_3 + 400C_4 &\leq 700 \\
500P_1 + 700P_2 + 600P_3 + 400P_4 &\leq 400
\end{aligned}
$$

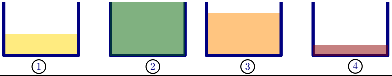
Ou seja, o volume total em cada compartimento deve ser menor ou igual a sua capacidade volumétrica.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



Capacidade (peso)	12	18	10
Capacidade (vol.)	600	700	400



Peso	20	16	25	13
Volume	500	700	600	400
Lucro	320	400	360	290

Restrições do mesmo tipo devem ser criadas para as capacidades máximas em peso.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

No entanto, antes de criarmos essas restrições, vamos criar 3 novas variáveis (A,P e C), para os pesos totais em cada um dos compartimentos:

$$20A_1 + 16A_2 + 25A_3 + 13A_4 = A$$
$$20C_1 + 16C_2 + 25C_3 + 13C_4 = C$$
$$20P_1 + 16P_2 + 25P_3 + 13P_4 = P$$

O transporte de cargas em aeronaves

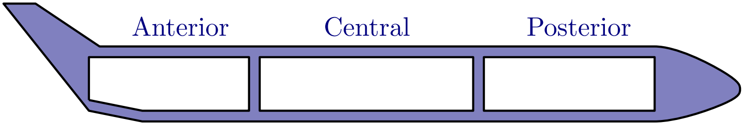
Solução

Agora basta limitarmos essas quantidades às capacidades de peso de cada compartimento:

$$A \leq 12$$
$$C \leq 18$$
$$P \leq 10$$

O transporte de cargas em aeronaves

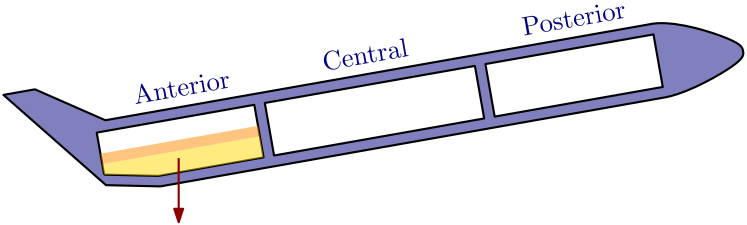
Solução



Finalmente, a última restrição diz respeito às proporções de peso em cada compartimento.

O transporte de cargas em aeronaves

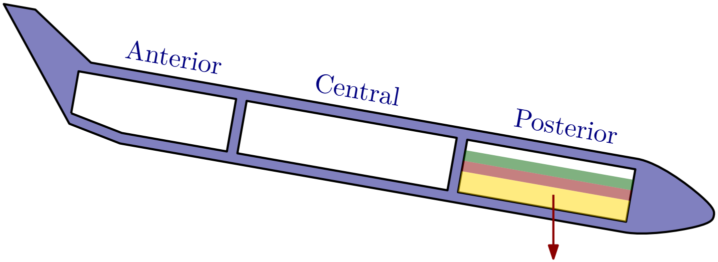
Solução



Em se tratando de uma aeronave, se as cargas estiverem muito desproporcionais nos compartimentos, isso pode influenciar na estabilidade do avião.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução



Dessa forma, deve existir uma **proporção (em peso**) de carga em cada compartimento. Essa proporção deve seguir a proporção das capacidades máximas nos compartimentos.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Para entendermos melhor a restrição, vamos pensar em um exemplo simples. Considere que a capacidade máxima em cada compartimento é dado como na Tabela 3.

Tabela 3: Capacidades em peso dos compartimentos

Anterior	**Central**	**Posterior**
20	30	50

Se tivermos que transportar uma carga com peso total de 10, quanto deve estar alocado a cada compartimento?

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Para entendermos melhor a restrição, vamos pensar em um exemplo simples. Considere que a capacidade máxima em cada compartimento é dado como na Tabela 3.

Tabela 3: Capacidades em peso dos compartimentos

Anterior	**Central**	**Posterior**
20	30	50

Se tivermos que transportar uma carga com peso total de 10, quanto deve estar alocado a cada compartimento?

Seguindo as proporções da Tabela 3, teremos que transportar **2** unidades no compartimento Anterior, **3** no Central e **5** no Posterior.

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Considerando o valor no compartimento anterior (2). Note que multiplicamos a porcentagem de carga máxima referente ao compartimento anterior pelo total da carga que deve ser transportada :

$$\underbrace{10}_{\substack{\text{Total}\\ \text{a ser}\\ \text{transportado}}} \cdot \underbrace{\frac{20}{10+30+50}}_{\substack{\text{Proporção}\\ \text{no}\\ \text{compartimento}\\ \text{Anterior}}} = 10 \cdot 0.2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{Qtde.}\\ \text{a ser}\\ \text{transportada}\\ \text{no comp.}\\ \text{Anterior}}} \tag{1}$$

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Considerando o valor no compartimento anterior (2). Note que multiplicamos a porcentagem de carga máxima referente ao compartimento anterior pelo total da carga que deve ser transportada :

$$\underbrace{10}_{\substack{\text{Total}\\ \text{a ser}\\ \text{transportado}}} \cdot \underbrace{\frac{20}{10+30+50}}_{\substack{\text{Proporção}\\ \text{no}\\ \text{compartimento}\\ \text{Anterior}}} = 10 \cdot 0.2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{Qtde.}\\ \text{a ser}\\ \text{transportada}\\ \text{no comp.}\\ \text{Anterior}}} \tag{1}$$

Dessa forma, voltando às nossas variáveis, temos que o peso total a ser transportado é dado por $A + P + C$, e queremos determinar o peso de A, de forma que, fazendo a substituição, temos:

$$(A + C + P) \cdot \frac{20}{10+30+50} = A \tag{2}$$

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Dessa forma, usando os dados do problema e criando uma restrição para cada compartimento, temos que:

$$A = (A + C + P)\frac{12}{40}$$
$$C = (A + C + P)\frac{18}{40}$$
$$P = (A + C + P)\frac{10}{40}$$

OBS: Lembre que para "resolver" o modelo o lado direito sempre deve ser de constantes (veja o modelo.lp).

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

Finalmente, a função objetivo deve maximizar o lucro pelos transportes. Como cada porcentagem de carga transportada tem um lucro associado, podemos simplesmente maximizar as porcentagens multiplicadas pelos lucros:

$$\begin{aligned}\max Z = {} & 320(A_1 + C_1 + P_1) + 400(A_2 + C_2 + P_2) + \\ & 360(A_3 + C_3 + P_3) + 290(A_4 + C_4 + P_4)\end{aligned}$$

O transporte de cargas em aeronaves

Solução

O modelo completo fica então:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = 320(A_1 + C_1 + P_1) + 400(A_2 + C_2 + P_2) + \\
& \qquad 360(A_3 + C_3 + P_3) + 290(A_4 + C_4 + P_4)
\end{aligned}
$$

Sujeito à

$$
\begin{aligned}
A_1 + C_1 + P_1 &\leq 1 \\
A_2 + C_2 + P_2 &\leq 1 \\
A_3 + C_3 + P_3 &\leq 1 \\
A_4 + C_4 + P_4 &\leq 1 \\
500A_1 + 700A_2 + 600A_3 + 400A_4 &\leq 600 \\
500C_1 + 700C_2 + 600C_3 + 400C_4 &\leq 700 \\
500P_1 + 700P_2 + 600P_3 + 400P_4 &\leq 400
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20A_1 + 16A_2 + 25A_3 + 13A_4 &= A \\
20C_1 + 16C_2 + 25C_3 + 13C_4 &= C \\
20P_1 + 16P_2 + 25P_3 + 13P_4 &= P \\
A &\leq 12 \\
C &\leq 18 \\
P &\leq 10 \\
(A + C + P)\frac{12}{40} &= A \\
(A + C + P)\frac{18}{40} &= C \\
(A + C + P)\frac{10}{40} &= P
\end{aligned}
$$

Não negatividade das variáveis

EXERCÍCIOS E VARIAÇÕES DO MODELO

1. Encontre a solução ótima do problema. Verifique se as restrições estão de fato sendo atendidas. DICA: Use o modelo.lp base para resolver o problema no GUSEK e a planilha do site para verificar se a solução está correta.
2. (Variação 1) Considere que toda a carga do tipo 1 deve ser transportada.
3. (Variação 2) Considere que não existe um limite máximo em relação a cada carga. Qualquer quantidade pode ser transportada.
4. (Variação 3) Considere que se alguma unidade de volume do compartimento central ficar disponível, a empresa de aviação pode locar o espaço para outras companhias, a uma taxa de 0.9 (US$) por unidade de volume.

O problema do sapateiro

Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, **se fizer somente sapatos**, e 5 cintos por hora **se fizer somente cintos**. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo que o **total disponível de couro** é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades e o do cinto é de 2 unidades, formular o modelo que maximize lucro por hora. Um resumo dos dados é mostrado na Tabela 4.

Tabela 4: Resumo problema do sapateiro

Produto	**Qtde. de couro**	**Produção/hora**	**Lucro/unidade**
Sapato	2	6	5
Cinto	1	5	2

O problema do sapateiro

Solução

Embora simples, esse problema possui uma restrição "escondida". Obviamente as variáveis devem refletir as quantidades produzidas de sapatos e cintos, porém, como temos a informação da capacidade de produção do sapateiro por hora, é conveniente determinar como variáveis as quantidades a serem produzidas/hora:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade de sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade de cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

O problema do sapateiro

Solução

A primeira restrição se refere a quantidade disponível de couro. Como ambos os itens (sapatos e cintos) usam esse recurso, a produção dos dois deve estar relacionada ao estoque disponível. Uma inequação que modela essa situação é dada por:

$$\boxed{2x_1 + 1x_2 \leq 6}$$

DICA: Uma forma de testarmos e validarmos a restrição é realizar a atribuição de valores (quaisquer) para as variáveis, verificando se a restrição está funcionando da forma como esperado

O problema do sapateiro

Solução

Por exemplo, seja a notação para um programa do sapateiro: $(x_1, x_2) =$ (quantidade produzida de sapatos, qtde. produzida de cintos), temos o seguinte:

$$\boxed{2x_1 + 1x_2 \leq 6}$$

$$(1,0) \rightarrow 2(1) + 1(0) = 2$$
$$(0,1) \rightarrow 2(0) + 1(1) = 1$$
$$(1,1) \rightarrow 2(1) + 1(1) = 3$$

Parece que tudo está correto.

O problema do sapateiro

Solução

A segunda restrição (escondida) se refere a capacidade de produção do sapateiro. Ele consegue fazer 6 sapatos/hora se fizer somente sapatos e 5 cintos/hora se fizer somente cintos. Em um primeiro momento, poderíamos pensar em escrever as restrições abaixo:

$$x_1 \leq 6$$
$$x_2 \leq 5$$

O problema do sapateiro

Solução

Porém, olhe o que acontece quando testamos a validade da restrição com alguns valores:

$$x_1 \leq 6$$
$$x_2 \leq 5$$

$(x_1, x_2) = (6, 0)$

$$6 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$0 \leq 5 \quad \checkmark$$

$(x_1, x_2) = (0, 5)$

$$0 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$5 \leq 5 \quad \checkmark$$

$(x_1, x_2) = (6, 5)$

$$6 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$5 \leq 5 \quad \checkmark$$

O problema do sapateiro

Solução

Embora as restrições sejam satisfeitas, elas não estão modelando a situação de forma adequada. Considere a última solução $(x_1, x_2) = (6, 5)$. Ela implica que o sapateiro consegue produzir 6 sapatos E 5 cintos em uma hora. Porém essas capacidades são validas **se ele produzir somente um dos itens**!

$(x_1, x_2) = (6, 0)$

$$6 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$0 \leq 5 \quad \checkmark$$

$(x_1, x_2) = (0, 5)$

$$0 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$5 \leq 5 \quad \checkmark$$

$(x_1, x_2) = (6, 5)$

$$6 \leq 6 \quad \checkmark$$
$$5 \leq 5 \quad \checkmark$$

O problema do sapateiro

Solução

De alguma forma devemos juntar as duas produções, de sapatos e de cintos, e limitá-las considerando a capacidade do sapateiro. Para isso, é necessário **padronizar as unidades de medida da restrição**, todas devem estar na mesma unidade. Uma forma de fazer isso é determinar o tempo necessário para a produção de cada produto, e limitar o tempo do sapateiro:

$$5 \text{ sapatos/hora} \rightarrow 12 \text{ min/sapato}$$
$$6 \text{ sapatos/hora} \rightarrow 10 \text{ min/cinto}$$

Assim, se limitarmos o tempo total de produção em 60 minutos, temos a seguinte restrição:

$$10x_1 + 12x_2 \leq 60$$

O problema do sapateiro

Solução

Adicionando a função objetivo, temos o modelo completo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito à} \quad & 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\
& 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \in R^+
\end{aligned}
$$