Simplex Fase I

OBS: Diversos exercícios dessa lista podem ter suas soluções verificadas usando o software GUSEK

1. Sabe-se que o **método Simplex** é composto por duas fases. Ambas utilizam o algoritmo Simplex. Com base nisso, responda o que se pede:
   (a) O que é a Fase I do método Simplex? Quando ela é utilizada?
   RESPOSTA:
   A fase I do método Simplex consiste no procedimento de encontrar uma solução básica factível inicial para o problema. Ela é usada quando as variáveis de folga não formam uma base factível por si só, ou seja, se existirem restrições de igualdade ou desigualdade do tipo $\geq$.
   (b) Dê um exemplo em duas variáveis em que a Fase I precisaria ser aplicada e um em que não seria necessário (crie as inequações e desenhe a região factível).
   RESPOSTA:
   O modelo abaixo precisa que a Fase I seja aplicada, sua região factível é mostrada no gráfico da Figura 1.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

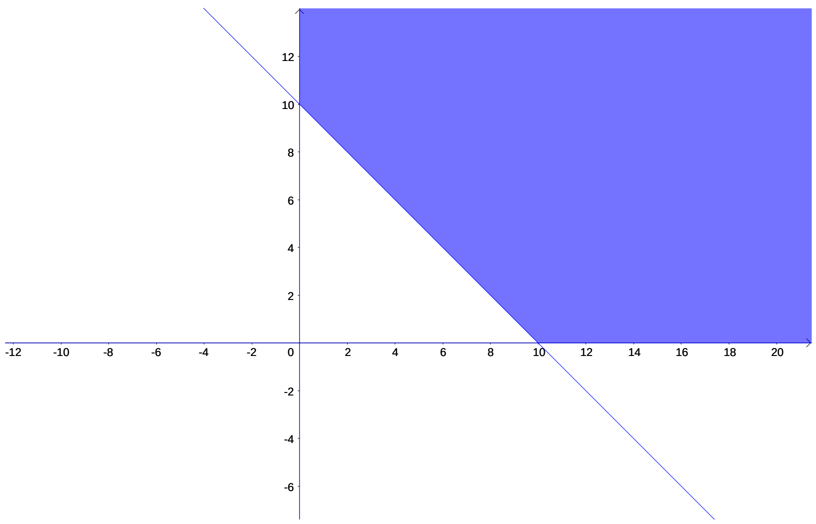

Figura 1: Região factível modelo com Fase I

Já o modelo abaixo não precisa que a Fase I seja aplicada, sua região factível é mostrada no gráfico da Figura 2.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

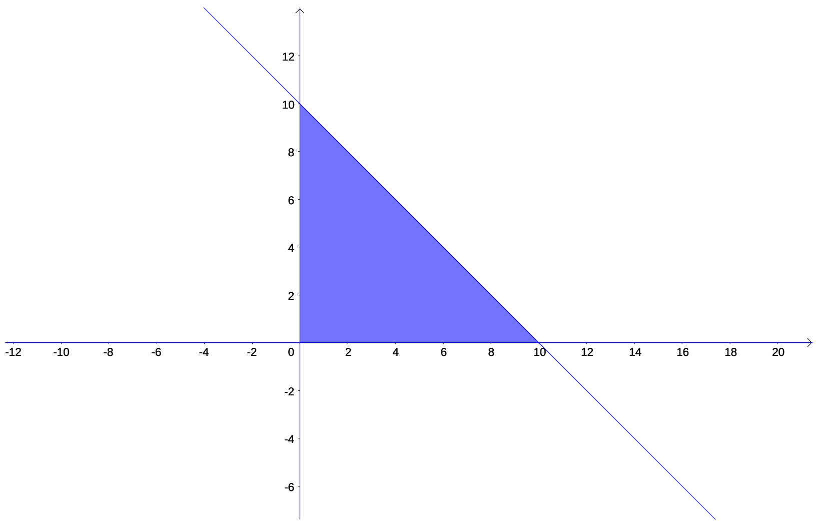

Figura 2: Região factível modelo sem Fase I

2. Resolva os modelos de PL a seguir. Para cada um mostre o caminho Simplex.

(a)

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a: } 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Colocando o modelo na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a: } 2x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 10 \\ x_1 + 5x_2 \quad - x_4 &= 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis artificiais $\bar{x_5}$ e $\bar{x_6}$, e substituindo a função objetivo original pela função artificial min w $= \bar{x_5} + \bar{x_6}$:

$$\begin{aligned} \min\ w &= \bar{x_5} + \bar{x_6} \\ \text{s.a: } 2x_1 + x_2 - x_3 \quad + \bar{x_5} \quad &= 10 \\ x_1 + 5x_2 \quad - x_4 + \quad \bar{x_6} &= 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Colocando no formato tabular, temos: (a Tabela 1 não está no formato canônico em relação às variáveis $\bar{x_5}, \bar{x_6}$, de forma que executamos as operações $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, gerando a Tabela 2 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	-w
	0	0	0	0	1	1	0
??	1	1	-1	0	1	0	10
??	1	1	0	-1	0	1	15

Tabela 1: Ex. 2a Tabela inicial (não básica)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	-w
	-2	-2	1	1	0	0	-25
$\bar{x_5}$	1	1	-1	0	1	0	10
$\bar{x_6}$	1	1	0	-1	0	1	15

Tabela 2: Ex. 2a Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	-w
	0	0	-1	1	2	0	-5
x_1	1	1	-1	0	1	0	10
$\bar{x_6}$	0	0	1	-1	-1	1	5

Tabela 3: Ex. 2a iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	-w
	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	1	0	-1	0	1	15
x_3	0	0	1	-1	-1	1	5

Tabela 4: Ex. 2a iteração 2 (ótimo artificial)

Como não temos variáveis artificiais na base e a função objetivo artificial é w = 0, encontramos uma solução básica factível. Removemos as colunas referentes às variáveis artificias e inserimos novamente a função objetivo original z. Com a nova função a Tabela deixa de ser canônica em relação às variáveis básica (x_1 e x_3). Portanto realizamos a operação $L_0 \leftarrow L_0 - 3L_1$, gerando a Tabela 6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
	3	2	0	0	0
x_1	1	1	0	-1	15
x_3	0	0	1	-1	5

Tabela 5: Ex. 2a Tabela não canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
	0	-1	0	3	-45
x_1	1	1	0	-1	15
x_3	0	0	1	-1	5

Tabela 6: Ex. 2a Tabela na forma canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
	1	0	0	2	-30
x_2	1	1	0	-1	15
x_3	0	0	1	-1	5

Tabela 7: Ex. 2a iteração 1 (ótimo)

Solução ótima com valores $x_B^T = (x_2, x_3) = (15, 5)$ e $x_N^T = (x_1, x_4) = (0, 0)$ e função objetivo com custo 30. O caminho Simplex é mostrado na Figura 3, iniciando no ponto A e passando ao ponto B (ótimo). Note que uma das restrições é irrelevante para o problema, ou seja, poderia ser removida e região factível permanece a mesma.

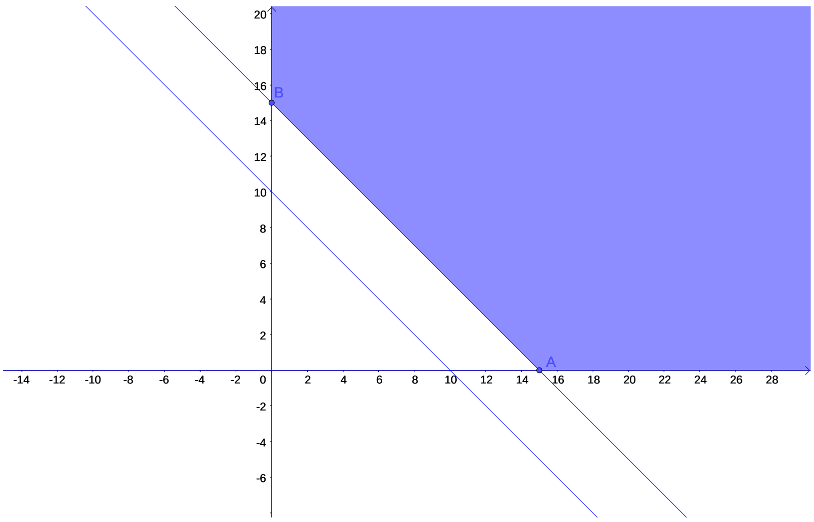

Figura 3: Caminho Simplex

(b)

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a: } x_1 + x_2 = 3 \\
x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

RESPOSTA:
Colocando o modelo na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\min\ z = -2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a: } x_1 + x_2 \quad = 3 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Adicionando as variáveis artificiais $\bar{x_4}$ e $\bar{x_5}$, e substituindo a função objetivo original pela função artificial min w $= \bar{x_4} + \bar{x_5}$:

$$
\begin{aligned}
\min\ w = \bar{x_4} + \bar{x_4} \\
x_1 + x_2 \qquad + \bar{x_4} \quad = 3 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + \quad \bar{x_5} = 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Colocando no formato tabular, temos: (a Tabela 8 não está no formato canônico em relação às variáveis $\bar{x_4}, \bar{x_5}$, de forma que executamos as operações $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, gerando a Tabela 9 :
Com o fim da Fase I, removemos as colunas referentes às variáveis artificiais e reinserimos a função objetivo original min $z = -2x_1 - 3x_2$ (Tabela 12). Com essa inserção o sistema

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x_4}$	$\bar{x_5}$	-w
	0	0	0	1	1	0
??	1	1	0	1	0	3
??	1	2	1	0	1	4

Tabela 8: Ex. 2b Tabela inicial (não canônica)

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x_4}$	$\bar{x_5}$	-w
	-2	-3	-1	0	0	-7
$\bar{x_4}$	1	1	0	1	0	3
$\bar{x_5}$	1	2	1	0	1	4

Tabela 9: Ex. 2b Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x_4}$	$\bar{x_5}$	-w
	-1/2	0	1/2	0	3/2	-1
$\bar{x_4}$	1/2	0	-1/2	1	-1/2	1
x_2	1/2	1	1/2	0	1/2	2

Tabela 10: Ex. 2b iteração 1

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x_4}$	$\bar{x_5}$	-w
	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	-1	2	-1	2
x_2	0	1	1	-1	1	1

Tabela 11: Ex. 2b iteração 2 (ótimo artificial)

deixa de estar na forma canônica em relação às variáveis básicas, de forma que devemos executar as operações $L_0 \leftarrow L_0 + 2L_1$ e $L_0 \leftarrow L_0 + 3L_2$ (Tabela 13) Temos que ao

	x_1	x_2	x_3	$-z$
	-2	-3	0	0
x_1	1	0	-1	2
x_2	0	1	1	1

Tabela 12: Ex. 2b (não canônica)

	x_1	x_2	x_3	$-z$
	0	0	1	7
x_1	1	0	-1	2
x_2	0	1	1	1

Tabela 13: Ex. 2b Tabela canônica (ótimo)

deixar a Tabela canônica, nenhuma variável da função objetivo é menor do que zero ($c \geq 0$), que é o critério de parada do algoritmo Simplex, ou seja, a solução atual é ótima com $x_B^T = (x_1, x_2) = (2, 1)$ e $x_N^T = (x_3) = (0)$, com custo $z = -7$. Como fizemos a transformação da função objetivo para minimização, o custo original para o problema de maximização é $z = 7$.
A região factível é o segmento de reta mostrado na Figura 4, e a solução factível inicial já é a ótima no caminho Simplex, dada pelo ponto $(x_1, x_2) = (2, 1)$ (D na Figura).

(c)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 - x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 13 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

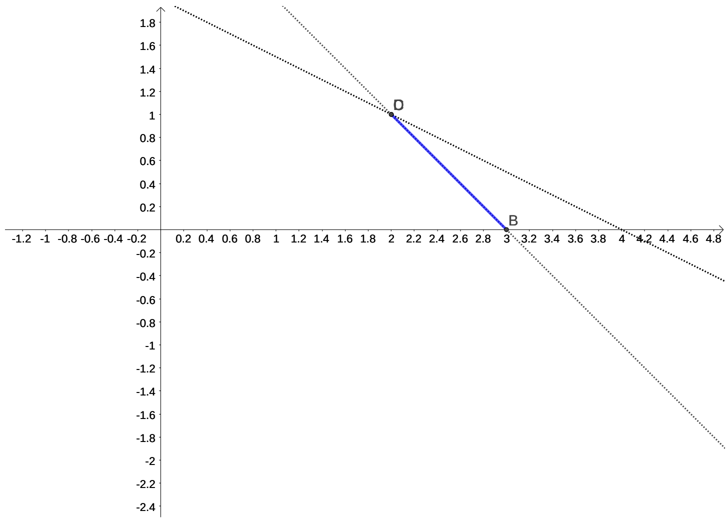

Figura 4: Caminho Simplex

Colocando o modelo na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min z = -6x_1 + x_2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \quad = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 = 13 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis artificiais $\bar{x_5}$,$\bar{x_6}$ e $\bar{x_7}$, e substituindo a função objetivo original pela função artificial min $w = \bar{x_5} + \bar{x_6} + \bar{x_7}$:

$$\begin{aligned} \min w = \bar{x_5} + \bar{x_6} + \bar{x_7} \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \quad + \bar{x_5} \quad\quad = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + \quad \bar{x_6} \quad = 13 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad\quad \bar{x_7} = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando no formato tabular, temos: (a Tabela 14 não está no formato canônico em relação às variáveis $\bar{x_5}, \bar{x_6}, \bar{x_7}$ de forma que executamos as operações $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, e $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ gerando a Tabela 15 :
Solução ótima artificial, agora removemos as colunas referentes às variáveis artificiais e reinserimos a função objetivo original min $z = -6x1 + x2$ (Tabela 19). Como essa Tabela não está na forma canônica em relação às variáveis básicas x_1, x_2, x_3, realizamos as seguintes operações:$L_1 \leftarrow L_1 + 6L_2$ e $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ (Tabela 20).
Solução ótima com $x_B^T = (x_1, x_2, x_4) = (4, 5, 0)$ e $x_N^T = x_3 = 0$ e $z = -19$, como transformamos o problema de max para min, o valor original de z é 19. O caminho Simplex é mostrado na Figura

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	-w
	0	0	0	0	1	1	1	0
??	4	1	1	0	1	0	0	21
??	2	3	0	-1	0	1	0	23
??	-1	1	0	0	0	0	1	1

Tabela 14: Ex. 2c Tabela inicial (não canônica)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	-w
	-5	-5	-1	1	0	0	0	-45
$\bar{x_5}$	4	1	1	0	1	0	0	21
$\bar{x_6}$	2	3	0	-1	0	1	0	23
$\bar{x_7}$	-1	1	0	0	0	0	1	1

Tabela 15: Ex. 2c Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	-w
	0	-15/4	1/4	1	5/4	0	0	-75/4
x_1	1	1/4	1/4	0	1/4	0	0	21/4
$\bar{x_6}$	0	5/2	-1/2	-1	-1/2	1	0	25/2
$\bar{x_7}$	0	5/4	1/4	0	1/4	0	1	25/4

Tabela 16: Ex. 2c Tabela iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	-w
	0	0	-1/2	-1/2	1/2	3/2	0	0
x_1	1	0	3/10	1/10	3/10	-1/10	0	4
x_2	0	1	-1/5	-2/5	-1/5	2/5	0	5
$\bar{x_7}$	0	0	1/2	1/2	1/2	-1/2	1	0

Tabela 17: Ex. 2c Tabela iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x_5}$	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	-w
	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	0	0	-1/5	0	1/5	-3/5	4
x_2	0	1	0	-1/5	0	1/5	2/5	5
x_3	0	0	1	1	1	-1	2	0

Tabela 18: Ex. 2c Tabela iteração 3 (ótimo)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	-6	1	0	0	0
x_1	1	0	0	-1/5	4
x_2	0	1	0	-1/5	5
x_3	0	0	1	1	0

Tabela 19: Ex. 2c Tabela não canônica com z

	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	0	-1	19
x_1	1	0	0	-1/5	4
x_2	0	1	0	-1/5	5
x_3	0	0	1	1	0

Tabela 20: Ex. 2c Tabela canônica com z

	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	19
x_1	1	0	1/5	0	4
x_2	0	1	1/5	0	5
x_4	0	0	1	1	0

Tabela 21: Ex. 2c iteração 1 (ótimo)

A região factível é o segmento de reta mostrado na Figura 4, e a solução factível inicial já é a ótima no caminho Simplex, dada pelo ponto $(x_1, x_2) = (4, 5)$ (B na Figura). Note que a Figura 5 apresenta a região vermelha *somente para visualização*, a região factível é somente o segmento de reta em azul.

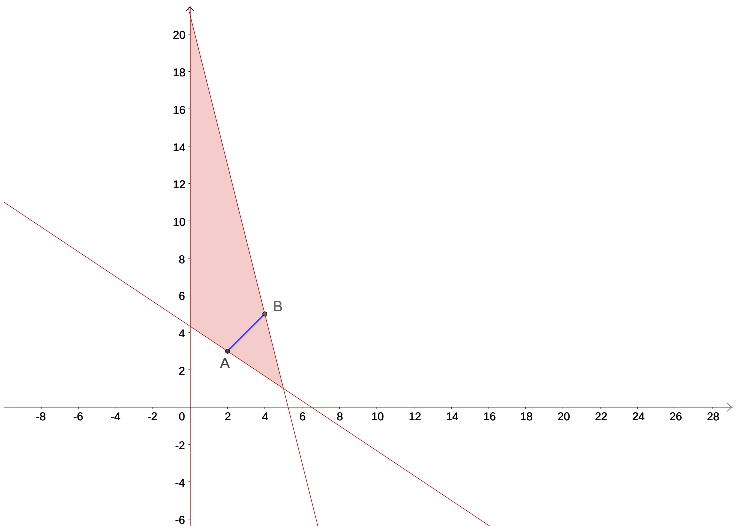

Figura 5: Caminho Simplex ex. 2c

3. **(ENADE 2018)** Uma pequena empresa fabrica apenas os produtos X e Y, em uma única máquina, que funciona durante 300 horas por semana. O gerente decidiu rever seu mix de produção (quantidade fabricada de cada produto) porque tinha a sensação de estar fazendo algo errado e achava que poderia, de alguma maneira, aumentar seu lucro. Para isso, pediu ajuda a um engenheiro de produção, que fez diversas entrevistas e resumiu os dados adicionais, relevantes para o problema, na Tabela 3.

Produto	**X**	**Y**
Tempo de produção (hora/unidade)	1	4
Demanda mínima (unidades/semana)	50	50
Margem de contribuição para o lucro (R$)	80	40

Tabela 22: Resumo informações

O gerente explicou ao engenheiro que havia adotado o mix de produção atual porque acreditava ser mais interessante fabricar e vender o máximo possível do produto de maior margem de contribuição para o lucro e usar o resto da capacidade para produzir e vender o máximo possível do outro produto de menor margem de contribuição. Crie o modelo de PL para otimizar a produção, encontre a solução ótima usando o método Simplex e determine graficamente o caminho Simplex (considere que todo o excesso produzido além da demanda semanal é vendido).

RESPOSTA:

Temos os seguinte modelo para o problema:

Sejam as variáveis: $\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade produzida do produto X} \\ x_2 : \text{Quantidade produzida do produto Y} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \max\ z = 80x_1 + 40x_2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 300 \\ x_1 \quad \geq 50 \\ x_2 \geq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min\ z = -80x_1 - 40x_2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad = 300 \\ x_1 \qquad - x_4 \qquad = 50 \\ x_2 \qquad - x_5 \quad = 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis artificiais $\bar{x_6}$,$\bar{x_7}$ e $\bar{x_8}$, e substituindo a função objetivo original pela função artificial min $w = \bar{x_6} + \bar{x_7} + \bar{x_8}$:

$$\begin{aligned} \min\ w = \bar{x_6} + \bar{x_7} + \bar{x_8} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + \bar{x_6} \qquad = 300 \\ x_1 \qquad - x_4 \qquad + \bar{x_7} \quad = 50 \\ x_2 \qquad - x_5 \qquad + \bar{x_8} = 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando no formato tabular, temos a Tabela 23, que não está no formato canônico em relação às variáveis $\bar{x_6}, \bar{x_7}, \bar{x_8}$ de forma que executamos as operações $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, e $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ gerando a Tabela 24 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	$\bar{x_8}$	$-w$
	0	0	0	0	0	1	1	1	0
??	1	4	1	0	0	1	0	0	300
??	1	0	0	-1	0	0	1	0	50
??	0	1	0	0	-1	0	0	1	50

Tabela 23: Ex. 3 Tabela inicial (não canônica)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	$\bar{x_8}$	$-w$
	-2	-5	-1	1	1	0	0	0	-400
$\bar{x_6}$	1	4	1	0	0	1	0	0	300
$\bar{x_7}$	1	0	0	-1	0	0	1	0	50
$\bar{x_8}$	0	1	0	0	-1	0	0	1	50

Tabela 24: Ex. 3 Tabela canônica

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	$\bar{x_8}$	$-w$
	-2	0	-1	1	-4	0	0	5	-150
$\bar{x_6}$	1	0	1	0	4	1	0	-4	100
$\bar{x_7}$	1	0	0	-1	0	0	1	0	50
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	50

Tabela 25: Ex. 3 iteração 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	$\bar{x_8}$	$-w$
	-1	0	0	1	0	1	0	1	-50
x_5	1/4	0	1/4	0	1	1/4	0	-1	25
$\bar{x_7}$	1	0	0	-1	0	0	1	0	50
x_2	1/4	1	1/4	0	0	1/4	0	0	75

Tabela 26: Ex. 3 iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x_6}$	$\bar{x_7}$	$\bar{x_8}$	$-w$
	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_5	0	0	1/4	1/4	1	1/4	-1/4	-1	25/2
x_1	0	0	-1	0	0	1	0	50	
x_2	0	1	1/4	1/4	0	1/4	-1/4	0	125/2

Tabela 27: Ex. 3 iteração 3 (ótimo artificial)

Como chegamos ao ótimo artificial, podemos remover as colunas artificiais e reinserir a função objetivo original $z = -80x_1 - 40x_2$ (Tabela). Com essa nova inserção a tabela deixa de estar na forma canônica, realizamos as operações $L_1 \leftarrow L_1 + 80L_3$ e $L_1 \leftarrow L_1 + 40L_4$ (Tabela).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$
	-80	-40	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1/4	1	25/2
x_1	1	0	0	-1	0	50
x_2	0	1	1	1/4	0	125/2

Tabela 28: Ex. 3 tabela não canônica com z

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$
	0	0	40	-70	0	6500
x_5	0	0	1	1/4	1	25/2
x_1	1	0	0	-1	0	50
x_2	0	1	1	1/4	0	125/2

Tabela 29: Ex. 3 tabela canônica com z

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$
	0	0	320	0	280	10000
x_4	0	0	4	1	4	50
x_1	1	0	4	0	4	100
x_2	0	1	0	0	-1	50

Tabela 30: Ex. 3 iteração 1 (ótimo)

Solução ótima com $x_B^T = (x_4, x_1, x_2) = (50, 100, 50)$ e $x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$ e valor objetivo de $z = -10000$. Como transformamos o problema em minimização, o valor da função objetivo é de 10000. A Figura 6 mostra a região factível e o caminho Simplex (iniciando no ponto A e terminando em B):

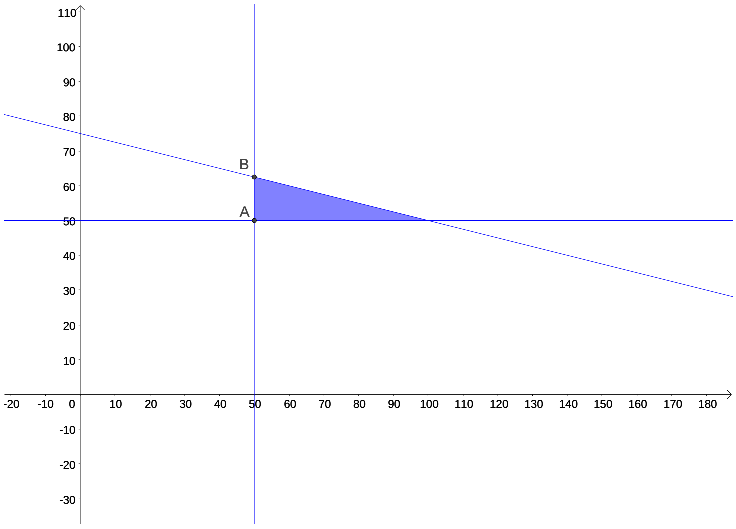

Figura 6: Caminho Simplex ex. 3