UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320 (Méthodes mathématiques pour la chimie)

Cours en bref

Introduction : modélisation, dérivation, équations différentielles. Par exemple, cinétique chimique ou électrochimie. Résolution exacte parfois. Etude qualitative ou numérique aussi.

1 Intégration, en bref

1.1 Propriétés de l'intégrale

1.1.1 Relations entre intégrale et primitives

Il s'agit de l'intégrale de fonctions réelles continues par morceaux définies sur un intervalle compact (fermé et borné) de $\mathbb{R}$.

(i) Positivité
Si $f \geq 0$ et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Le nombre $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ est l'aire sous le graphe de f.

Exemple. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ est un nombre réel, dont une valeur approchée est $0,882$ (calcul avec une machine).

(ii) Convention sur les bornes
Si $a \geq b$, on note $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

(iii) Linéarité
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Exemple. Pour calculer $\int_3^{-1} \left(\sin(x^2) - 2x\exp(x) + \frac{1}{5}\log^2(x^2+1)\right) dx$, il suffit de calculer chaque terme séparément.

(iv) Ordre
Si $a \leq b$ et si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Interprétation sur les aires.
Exemple. Soit $f : x \mapsto e^{1-x^8} - 1$; dessin du graphe. Comme $f(0) = e - 1 = 1,718\ldots$, majorer par un rectangle donne $\int_0^1 f \leq 1,72$, et minorer par un triangle donne $\int_0^1 f \geq 0.85$. On raffine un peu : comme $f(0,7) = 1,566\ldots$, minorer par la fonction affine par morceaux qui s'appuie sur $(0,7; f(0,7))$ donne $\int_0^1 f \geq 1,38$; les premières décimales

exactes, calculées avec une machine : $\int_0^1 f = 1,481\ldots$. Ne pas espérer de primitive en termes de fonctions usuelles.

(v) Relation de Chasles
Quel que soit l'ordre respectif des réels a, b et c, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.
Permet de calculer les yeux fermés, mais attention aux inégalités.

(vi) Inégalité triangulaire
Si $a \leq b$, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Outil fondamental de majoration.

(vii) Théorème fondamental de l'analyse

> Si f est continue en x_0, l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Le slogan : *l'intégrale de la borme supérieure d'une fonction continue définit une fonction dérivable.*

En particulier, si f est continue sur $[a, b]$, l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.

Commentaire sur l'existence de primitives d'une fonction continue.
Exemple. Calculer la fonction dérivée de $x \longmapsto \int_{-2}^{x^2} \cos(t+1)dt$. Le calcul fait intervenir la formule de dérivation d'une fonction composée.

(viii) Relation entre intégrale et primitives

> Si f est continue sur $[a, b]$ et si F est n'importe quelle primitive de f sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Conséquence directe du théorème fondamental de l'analyse, c'est le principal outil de calcul des intégrales.

Exemple. (i) $\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$. Pour aller plus loin : faire tendre x vers $+\infty$, on note $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.
(ii) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+x} - 2$. Pour aller plus loin : faire tendre x vers $+\infty$, ça diverge.
Commentaire sur ces intégrales sur des intervalles non bornés.

Exemple. Tracer le graphe de $f : x \mapsto \int_1^x (1-t^2)e^{t^3}dt$ (les valeurs approchées, calculées avec une machine : $f(-1) \simeq -1,366$ et $\lim_{-\infty} f \simeq -1,329$).

Rappel : si F et G sont deux primitives d'une même fonction *sur un intervalle*, alors leur différence $F - G$ est une fonction constante sur cet intervalle.
Commentaire sur l'hypothèse "intervalle".

Deux conséquences : quand on connaît une primitive F de f sur un intervalle, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + C$ où C est une constante. Sur un intervalle, une primitive est déterminée par sa valeur en un point : *si $x_0 \in [a, b]$ et si $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ (si f est continue sur $[a, b]$).*

Le sujet du cours, ce sont les équations différentielles et les systèmes différentiels. Commentaire sur ce que sont les équations différentielles. Avec le lien entre primitive et intégrales, on résout les équations différentielles les plus simples. Reformulation de l'énoncé précédent : *soient f une fonction continue sur $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une unique fonction $y :]a, b[\to \mathbb{R}$, dérivable, telle que*

$$\begin{cases} \forall x \in]a, b[, \quad y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

L'équation différentielle proprement dite est $y' = f$; la condition $y(x_0) = y_0$ est appelée *condition au bord*, ou *condition aux limites*. L'unique solution de ce problème est $x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Exemple. (i) Résoudre $y' = \sin x - x^2$ avec $y(2) = \pi$.
(ii) Résoudre $y' = x^{-3/2}$ avec $\lim_{+\infty} y = 1$.

1.1.2 Sommes de Riemann

Théorème 1 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Admis (rappel). Commentaire appuyé sur un dessin. A relier à la méthode des rectangles pour l'approximation, mais aussi à la définition de l'intégrale.

Exemple. $\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \ln(1 + \frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$ lorsque $n \to +\infty$.

1.1.3 Intégration par parties

Théorème 2 *Si f et g sont des fonctions dérivables sur $[a, b]$ et si f' et g' sont continues sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Preuve à partir de $(fg)'$, puisque $f'g + fg'$ admet fg pour primitive.

Exemple. (i) Résoudre $y' = xe^x - 1$ avec $y(\pi/2) = 7/8$.
(ii) Calculer les primitives de $x \mapsto \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.
[On intègre cos, on dérive $\cos^2$. On obtient $\int_0^x \cos^3 t dt = \sin x \cos^2 x + 2\int_0^x \cos t \sin^2 t dt$ et on regroupe en utilisant que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (Pythagore) avant de conclure.]

1.1.4 Changements de variables

Théorème 3 *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue et soit f une fonction continue définie sur un intervalle contenant $\varphi([a,b])$. Alors,*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Preuve à partir de $(F \circ \varphi)'$ où F est une primitive de f, puisque $(F' \circ \varphi).\varphi'$ admet $F \circ \varphi$ pour primitive (pour une preuve élégante, on peut prendre $F(t) = \int_{\varphi(a)}^t f(x)dx$).

Moyen mnémotechnique efficace : poser $x = \varphi(t)$, dériver formellement $dx = \varphi'(t)dt$ et ajuster les bornes.

Exemple. Calcul de l'aire de l'ellipse. Si $a, b > 0$, $\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{\pi ab}{2}$, en effectuant le changement de variable $x = a\sin t$.

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}$.
(i) Si f est une fonction paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
(ii) Si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
(iii) Si f est une fonction T-périodique, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

1.1.5 Formule de la moyenne

Théorème 4 *Si f est continue sur $[a,b]$, alors f atteint sa valeur moyenne,* i.e. *il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

La continuité de f importe, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires (voir le cours de première année).
Exercice. Justifier le vocable"valeur moyenne" de f sur $[a,b]$.

1.1.6 Fonctions à valeurs complexes ou vectorielles

• Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. Pour tout $x \in [a,b]$, on note $\Re f(x)$ et $\Im f(x)$ les parties réelle et imaginaire de $f(x)$. Les fonctions $\Re f$ et $\operatorname{im} f$ sont alors aussi continues par morceaux, et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Re f(x)dx + i\int_a^b \Im f(x)dx.$$

On se ramène ainsi aux cas des fonctions réelles.

Exercice. Parmi toutes les propriétés de l'intégrale vues jusque-là, lesquelles restent vraies si les fonctions sont à valeurs complexes ?

• Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t))$. On suppose que chaque f_k est continue par morceaux. Dans ces conditions, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Les propriétés de linéarité, les liens entre intégration et primitivation, la relation de Chasles, l'intégration par parties, la formule de changement de variable sont encore vraies pour les intégrales de fonctions à valeurs vectorielles.

1.2 Calculs de primitives

Outils principaux : liste de primitives usuelles, intégration par parties, changement de variables, réduction des fractions rationnelles en éléments simples. Noter que tous les résultats de cette section sont contenus dans les logiciels de calcul formel. Connaître cependant les principes de calcul et la forme des résultats, ce qui nécessite sans doute un peu de pratique.

1.2.1 Tableau de primitives usuelles

Par abus de notation, on notera $\int f(x)dx$ (en laissant les bornes vides) la famille des primitives de f sur un intervalle. Par exemple, $\int \frac{dx}{3x^3} = \frac{-1}{6x^2} + C$ où C désigne un réel (ou un complexe) arbitraire.

(i) $\boxed{\text{Si } n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \text{ alors } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.}$

Cette formule contient en particulier les primitives des fonctions $1/x^p$, $\sqrt{x}$, $e^{\pi \ln x}$, *etc.* Celle qui manque : $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (exercice : pourquoi une valeur absolue ?).

(ii) $\boxed{\text{Si } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ alors } \int \exp(wx)dx = \frac{1}{w}\exp(wx) + C.}$

En se ramenant à des combinaisons linéaires d'exponentielles, cette formule contient en particulier les primitives des fonctions $\sin wx$, $\cos wx$, $\sinh wx$, $\cosh wx$, $e^{2x}\cos 5x$, *etc.*

Exemple. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{2x}\sin x$, en passant par les nombres complexes. [On pourrait aussi utiliser deux intégrations par parties.]

(iii) De la formule de changement de variable on tire que si f est bijective et si f^{-1} est sa réciproque,

$$\int \frac{dx}{f' \circ f^{-1}(x)} = f^{-1}(x) + C.$$

[Ecrire directement $\int^x \frac{dt}{f' \circ f^{-1}(t)} = \int^{f^{-1}(x)} \frac{f'(u)}{f'(u)} du$ en posant $t = f(u)$.]

En particulier, on obtient les primitives usuelles suivantes :

- $\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \text{ pour tout } a \neq 0.}$

[[Cette formule est valide sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction arctan est la réciproque de la bijection $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ (dessin). Prendre $f(x) = \tan x$ et la relation $f' = 1 + f^2$, qui fournit $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.
En passant, prendre garde à cette fonction : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (mais seulement pour ces x-là), $\arctan(\tan x) = x$. Si k est un entier relatif et si $x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, alors $\arctan(\tan x) = x - k\pi$. Exercice : tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x) = x - \lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$, où $\lfloor z \rfloor$ désigne la partie entière du réel z.]

- $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.}$

[Cette formule est valide sur tout intervalle de $[-1, 1]$. La fonction arcsin est la réciproque de la bijection $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ (dessin). Prendre $f(x) = \sin x$ et la relation $f' = \sqrt{1 - f^2}$.
En passant, prendre garde à cette fonction: pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$ et pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (mais seulement pour ces x-là), $\arcsin(\sin x) = x$. Soit k un entier relatif : si $x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, alors $\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi$; si $x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$, alors $\arcsin(\sin x) = (2k+1)\pi - x$. Exercice : tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.]

Exercice. Démontrer, en dérivant, la formule duale $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$ sur tout intervalle de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Exemple. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{2}$.

- $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C.}$

[La fonction arcsinh est la réciproque de la bijection $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dessin). Prendre $f(x) = \sinh x$ et la relation $f' = \sqrt{1 + f^2}$.
Cette fois, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sinh(\operatorname{arcsinh} x) = x$ et $\operatorname{arcsinh}(\sinh x) = x$.]

Exercice. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, en montrant que ces deux fonctions ont même dérivée et même valeur en 0.

(iv) Pour mémoire :

- $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$.
- $\int \tan x = -\ln\cos|x| + C$.
- $\int \frac{1}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.
- $\int \frac{1}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Exercice. Démontrer ces formules en dérivant et en utilisant des formules trigonométriques. Sur quels intervalles ces formules sont-elles valides ?

1.2.2 Fractions rationnelles

Décomposition en éléments simples, en bref. Voir en TD. On obtient des sommes de fractions rationnelles, de logarithmes, d'arctangentes. Renvoyer aux logiciels de calcul formel, aussi.

Exemple. Si $a \neq 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Exemple. Les exemples qui suivent ne sont pas exhaustifs de toutes les situations de calculs de primitives de fractions rationnelles mais en constituent l'essentiel du paysage.

(i) Deux pôles simples.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C.$$

(ii) Dénominateur de degré 2 sans racine réelle.

$$\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(iii) Dénominateur de degré 2 sans racine réelle et numérateur de degré 1.

$$\int \frac{xdx}{1 + x + x^2} = \frac{1}{2}\ln(1 + x + x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(iv) Un pôle simple et un dénominateur de degré 2 sans racine réelle.

$$\int \frac{dx}{1 - x^3} = \frac{1}{6}\ln(1 + x + x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C.$$

(v) Un pôle triple.

$$\int \frac{dx}{(2+x)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2+x)^2} + C.$$

(vi) Un pôle double et un dénominateur de degré 2 sans racine réelle.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)(2-x)^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{x-2} + \frac{2}{25}\ln(1+x^2) + \frac{3}{25}\arctan x - \frac{4}{25}\ln|x-2| + C.$$

[Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{(1+x^2)(x-2)^2} = \frac{4x+3}{25(x^2+1)} - \frac{4}{25(x-2)} + \frac{1}{5(x-2)^2}$]

(vii) Dénominateur carré d'un polynôme de degré 2 sans racine réelle.
[Procédure algorithmique : $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - x\frac{x}{(x^2+1)^2}$ et on intègre par parties.]
$\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$

(viii) Dénominateur carré d'un polynôme de degré 2 sans racine réelle et numérateur de degré 1.
$\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + C.$

1.2.3 Polynômes trigonométriques

On se ramène aux primitives des fonctions du type $\sin ax$ et $\cos ax$ en linéarisant à l'aide des formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Autre méthode : celle de *l'arc moitié*. Il s'agit de changer de variable en posant $t = \tan \frac{x}{2}$ qui implique $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, et d'utiliser les formules

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Après ce changement de variable, on tombe sur une fraction rationnelle. Cette seconde méthode vaut aussi pour les fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$. Noter la paramétrisation (dite *unicursale*) du cercle *via* le paramètre t.

Exemple. (i) En linéarisant, $\displaystyle\int \sin^4 xdx = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$
(ii) Par la méthode de l'arc moitié, $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.$

1.2.4 Polynômes en x et $\exp ax$

C'est une somme d'intégrales de la forme $\displaystyle\int x^p e^{qx} dx$ qu'on calcule en intégrant par parties plusieurs fois en faisant chuter le degré du polynôme.

Exemple. $\displaystyle\int x^2 e^x dx = (2 - 2x + x^2)e^x + C.$

1.2.5 Opérateur de primitive $n^{\text{ième}}$

Si f est continue sur un intervalle contenant 0 et si n est un entier naturel non nul, une primitive $n^{\text{ième}}$ est f est donnée par la formule intégrale

$$x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Preuve : exercice, faire une récurrence sur n, intégrer par parties.

2 Exponentielle complexe

2.1 La série exponentielle

Théorème *Si x est n'importe quel nombre complexe, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et*

$$\exp x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Eléments de preuve, non exigible : la convergence des sommes partielles est au moins géométrique sur tout disque [admis : pour tout $r > 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, si l'on note $S_n(z) = \sum_0^n z^k/k!$, alors pourvu que n soit assez grand et que $|z| \leq r$, on a $|\exp z - S_n(z)| \leq 2^{-n}$. En fait, on a plus précisément que pour un z donné, $\exp z - S_n(z)$ est équivalent à $z^{n+1}/(n+1)!$ quand n tend vers $+\infty$]. Malgré la somme infinie, la dérivation terme à terme est autorisée (retenir, ce n'est pas le cas de toutes les fonctions définies par des séries). Dans le champ réel, la fonction trouvée égale sa dérivée (faire le calcul) et vaut 1 en 0 : c'est exp. Dans le champ complexe, c'est la définition de l'exponentielle. On retrouve les formules de trigonométrie à partir des formules d'Euler, les fonctions sin et cos étant ***définies*** comme les parties réelles et imaginaires de $x \mapsto \exp(ix)$: $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$ et $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, c'est-à-dire

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

De la même façon,

$$\sinh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \cosh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

respectivement parties impaire et paire de l'exponentielle.

Exercice. (Re)démontrer, à partir du développement en série de l'exponentielle, que $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous x et y complexes.

Propriétés de l'exponentielle que l'on généralisera à l'exponentielle des matrices, importantes pour la résolution des systèmes différentiels et de certaines équations différentielles d'ordre supérieur :

• $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Noter que c'est cette propriété (avec la définition du nombre $e = \exp(1)$) qui rend opératoire la ***notation*** $\exp(x) = e^x$.

• $\exp(0) = 1$.

• $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ et $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

• Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tz)$ est dérivable et sa fonction dérivée est $t \in \mathbb{R} \mapsto z\exp(tz)$. Autrement dit,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\exp(tz) = z\exp(tz).}$$

Cela entraîne que la fonction $t \mapsto \exp(tz)$ est dérivable à tout ordre et que $\frac{d^d}{dt^n}\exp(tz) = z^n\exp(tz)$, pour tout entier naturel n. En particulier, dans le champ réel, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. De même, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$, pour tout entier naturel n.

2.2 Série de Taylor

La série de Taylor d'une fonction f indéfiniment dérivable en x_0 est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Cette série fournit toujours un développement limité d'ordre arbitraire à f au voisinage de x_0 (commentaire sur le sens de cela, vertu *locale* de cette propriété).

En revanche, même si la série converge pour x voisin de x_0 (ce qui n'est pas toujours le cas), il arrive que la fonction ne soit jamais égale à sa série de Taylor en un point différent de x_0. Exemple de la *fonction plate* $x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par 0 en 0, dont la série de Taylor à l'origine est nulle. Les fonctions qui égalent leur série de Taylor sur un voisinage du point sont dites *analytiques*. Les fonctions analytiques font l'objet d'une théorie entière. Le théorème précédent dit que la fonction exponentielle et ses consœurs trigonométriques sont des fonctions analytiques. Elles sont mêmes égales à leur série de Taylor à l'origine en tout point où elles sont définies (toutes les dérivées en 0 de exp valent 1). Notamment, la rapidité de convergence de la série fournit un moyen efficace d'approximation des valeurs.

3 Equation différentielles linéaires d'ordre 1

3.1 Structure des solutions

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont les équations de la forme

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions continues et y la fonction dérivable inconnue. Les fonctions sont à valeur réelles ou complexes, mais les résultats s'étendent tous au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie (on s'en servira pour les systèmes différentiels).

Résoudre (explicitement) une telle équation sur un intervalle ouvert I, c'est trouver une ou toutes les fonctions dérivables $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ pour tout $x \in I$. Parfois aussi, on considérera les solutions $f : I \to \mathbb{C}$. Le vocable *ordre 1* vient du fait que l'équation lie y à sa dérivée première (seulement). Le vocable *linéaire* vient de la proposition ci-dessous. Si la fonction a est nulle, la question est celle de la primitivation de la fonction continue b, entièrement résolue par le calcul intégral.

On associe à (E) son *équation homogène* (ou *sans second membre*)

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

Proposition 1 (Structure des solutions de l'équation linéaire homogène)
(i) Si f et g sont solutions de (E_0) sur I, alors $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ l'est aussi.
(ii) Si λ est un complexe et si f est solution de (E_0) sur I, alors $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est aussi une solution de (E_0).

Preuve : exercice.

Dans le jargon, on dit que l'ensemble des solution sur I d'une équation homogène forme un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions dérivables sur I. D'où le vocable *linéaire*. La proposition s'étend aux équations linéaires d'ordre supérieur.

Proposition 2 (Structure des solutions de l'équation linéaire avec second membre)
(i) Si f et g sont deux solutions de (E) sur I, alors $f - g$ est une solution de (E_0) sur I.
(ii) Si f est une solution ("particulière") de (E) sur I, l'ensemble des solutions de (E) sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $f + h$ où h décrit l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

Preuve : exercice.

Slogan répandu : *la solution générale de l'équation linéaire* (E) *est la somme d'une solution particulière de* (E) *et de la solution générale de l'équation homogène* (E_0).

Exemple. On considère l'équation différentielle (E) $y' = xy + x$.
Premier geste : reconnaître qu'elle est linéaire d'ordre 1, avec second membre. Ensuite, on écrit l'équation linéaire homogène qui lui est associée : $y' = xy$. Les fonctions de la forme $C \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ où C est une constante réelle sont solutions de l'équation homogène ; on montrera plus bas que ce sont les seules. Enfin, un calcul simple montre que la fonction constante égale à -1 est une solution de (E). On déduit alors de la proposition 2 que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $-1 + C \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ où $C \in \mathbb{R}$.

3.2 Problème de Cauchy

On se donne : l'équation (E), un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel les fonctions a et b sont définies, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le *problème de Cauchy* associé à ces données est le suivant :

trouver toutes les solutions f *de* (E)*, définies sur* I*, telles que* $f(x_0) = y_0$.

La condition $f(x_0) = y_0$ est appelée *condition au bord* ou *condition aux limites* – dans des sciences qui modélisent leur objet par des équations différentielles, x_0 est souvent au bord de l'intervalle de définition de la variable. Interprétation graphique : il s'agit de trouver les solutions de (E) dont le graphe passe par le point de coordonnées (x_0, y_0).

Exercice (écriture intégrale du problème de Cauchy) Une fonction y est solution du problème de Cauchy ci-dessus si, et seulement si elle vérifie

$$\forall x \in I, \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (-a(t)y(t) + b(t))\, dt.$$

Cet exercice a une grande importance théorique ; d'autre part, cette expression intégrale est à la base de méthodes de résolution approchée des solutions.

Dans le cas des équation différentielles linéaires d'ordre 1, le problème de Cauchy admet une réponse définitive.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire)
On suppose que les fonctions a *et* b *sont continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Soient* $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$*. Alors, l'équation* (E) *admet une unique solution* f *définie sur* I *(tout entier) telle que* $f(x_0) = y_0$.

Autrement dit, par chaque point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une courbe intégrale et une seule, définie sur I tout entier. Ce théorème fondamental sert de parapluie et légitime *a posteriori* toutes les manipulations opératoires qui mènent au calcul de la solution.

Preuve : on admet. La méthode historique, dans un cadre plus général que l'on étudiera, fournit également une méthode d'approximation de la solution (Euler).

Exemple. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

Le théorème 5 assure qu'il a une unique solution. On a vu plus haut que si y est une solution de l'équation $y' = xy + x$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -1 + C \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$. On détermine la constante C pour que cette fonction prenne la valeur -2 en 1, ce qui impose la condition $C = -e^{-1/2}$. Conclusion : l'unique solution à ce problème de Cauchy est la fonction $x \mapsto -1 - \exp\left(\frac{x^2-1}{2}\right)$.

Une conséquence géométrique de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire est que deux graphes de solutions de l'équation (E) ne peuvent se couper que s'ils sont confondus. En particulier, les solutions non (identiquement) nulles d'une équation différentielle linéaire *homogène* d'ordre 1 ne s'annulent pas puisque la fonction nulle est solution : les courbes intégrales sont séparées par l'axe des abscisses.

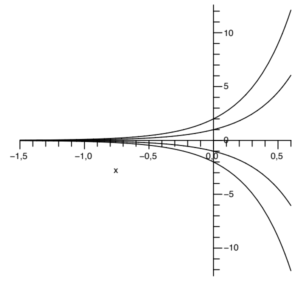
3.3 ED linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficents constants

Proposition 3 *(i) Soit $a \in \mathbb{R}$. L'unique solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$ valant y_0 en x_0 est la fonction $x \mapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}$.*
(ii) Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$ où C est une constante réelle.

Preuve : (i) il suffit de vérifier que cette fonction est solution du problème de Cauchy. L'unicité est donnée par le théorème 5. (ii) Les fonctions Ce^{-ax} sont des solutions. L'unicité dans le théorème 5 assure que les solutions sont toutes de cette forme.

Dans la pratique, on utilise le moyen mnémotechnique suivant (qui s'étend à des cadres plus larges, on le verra) : on transforme successivement l'équation en $y'/y = -a$ qui fournit $\ln|y| = -ax + c$ d'où, en passant à l'exponentielle, $|y| = e^c e^{-ax}$ ou encore $y = Ce^{-ax}$ où $C = \pm e^c$ est une (autre) constante. On calcule la constante c par la valeur en x_0 : on trouve $y_0 = ce^{-ax_0}$, c'est-à-dire $c = y_0 e^{ax_0}$. On reporte et c'est fini.

Exemple. L'équation différentielle $y' = 3y$ est linéaire du premier ordre homogène à coefficients constants. Ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{3x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Ci-contre, le dessin de quelques courbes intégrales.



Exercice.
Comportement des solutions en $+\infty$ des courbes intégrales de $y' + ay = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.
Si $a > 0$, toute solution sur $\mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$.
Si $a = 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes (!).
Si $a < 0$, toute solution non nulle sur $\mathbb{R}$ tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ (exponentiellement !).

3.4 ED linéaire homogène d'ordre 1 générale

Proposition 4 *(i) Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une application continue. L'unique solution sur I de l'équation linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$ valant y_0 en x_0 est la fonction*

$$x \mapsto y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

(ii) Pour n'importe quel $x_0 \in I$, les solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

où C est une constante réelle.

Preuve : même raisonnement que pour la proposition 3.

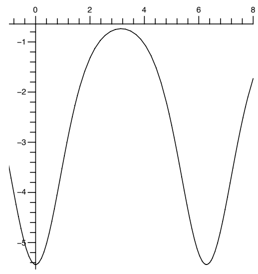
Attention à la subtilité du jeu entre les constantes x_0 et C dans le (ii) de la proposition, qui vient de la famille des primitives de a sur I.

Dans la pratique, on utilise le moyen mnémotechnique vu plus haut : sans se soucier de l'éventuelle nullité de y, on transforme successivement l'équation en $y'/y = -a(x)$ qui fournit $\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} a(t)dt + C$. On passe à l'exponentielle, on ajuste la constante, c'est fini. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire affirme que la solution trouvée est la seule possible (c'est cela, la fonction parapluie du théorème 5). Résoudre explicitement l'équation $y' + a(x)y = 0$ revient ainsi simplement à calculer une primitive de a. Là encore, puisque la fonction nulle est solution de l'équation homogène $y' + a(x) = 0$, aucune autre solution ne peut s'annuler : les courbes intégrales sont séparées par l'axe des abscisses.

Exemple. Trouver toutes les fonctions f définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $\pi/2$ qui y vérifient

$$f'(x) + f(x)\sin x = 0 \text{ et } f(\pi/2) = -2.$$

On trouve $x \mapsto -2\exp(\cos x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (graphe ci-contre).



3.5 ED linéaires d'ordre 1 : variation de la constante

Grâce à la proposition 2, à la proposition 4 et au théorème 5, il suffit de trouver une solution sur I à l'équation (E) pour écrire sa solution générale.

On a vu en 3.4 que si φ_0 est n'importe quelle solution non nulle de (E_0), la solution générale de (E_0) est

$$x \mapsto C\varphi_0(x)$$

où C est une constante réelle. La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher *une* solution – parfois dite *particulière* – à (E) sous la forme

$$\varphi(x) = C(x)\varphi_0(x)$$

où C est cette fois une *fonction* dérivable. En reportant dans l'équation (E), on obtient $C'\varphi_0 + C\varphi_0' + aC\varphi_0 = b$ qui implique, puisque φ_0 est solution de (E_0), que $C'\varphi_0 = b$. On pourra dans la pratique toujours diviser par φ_0 puisque φ_0 ne s'annule pas (par unicité de la solution au problème de Cauchy). On trouve ainsi une fonction C qui convient en résolvant l'équation

$$C'(x) = \frac{b(x)}{\varphi_0(x)}.$$

dans laquelle C est la fonction inconnue. Ainsi, si κ désigne n'importe quelle primitive de la fonction b/φ_0, la fonction $\kappa\varphi_0$ est solution de (E). La solution générale de (E) est alors, en vertu de la proposition 2,

$$x \mapsto \kappa(x)\varphi_0(x) + C\varphi_0(x)$$

où C est une constante arbitraire. L'unique solution du problème de Cauchy s'obtient en ajustant la constante C.

Dans la pratique, on refait le raisonnement ci-dessus (d'ordre mnémotechnique), en s'abritant derrière le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Exemple. Trouver la solution de $y' + y\sin x = e^{-x}$ qui vérifie $y(0) = 1$.

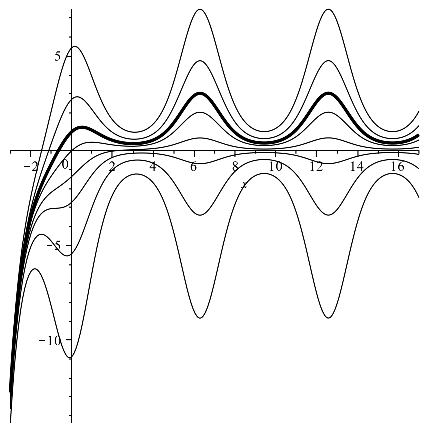
Réponse : la solution générale de l'équation est

$$x \longmapsto e^{\cos x}(C + \int_0^x e^{-t-\cos t}dt)$$

où $C \in \mathbb{R}$. La solution au problème de Cauchy est

$$x \longmapsto e^{\cos x}(\frac{1}{e} + \int_0^x e^{-t-\cos t}dt).$$

Ci-contre, quelques courbes intégrales. En gras, celle du problème de Cauchy demandé.



• Cas des ED linéaires d'ordre 1 à coefficients constants et à second membre exponentielle-polynôme. Il s'agit des équations de la forme

$$y'(x) + ay(x) = \sum_k P_k(x)e^{b_k x}$$

où les P_k sont des fonctions polynomiales et les b_k des nombres complexes, la somme étant finie. On cherche une solution particulière pour chacune des équations $y'(x) + ay(x) = P_k(x)e^{b_k x}$ et on les ajoute pour obtenir une solution particulière de l'équation complète (exercice : cela vaut pour la recherche d'une solution particulière de n'importe quelle équation différentielle linéaire). On se ramène ainsi à une équation

$$y'(x) + ay(x) = P(x)e^{bx}$$

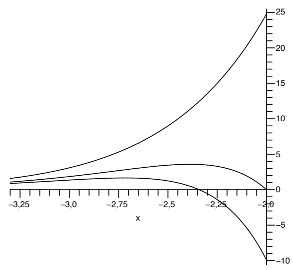
où P est un polynôme et $b \in \mathbb{C}$. On trouvera toujours une solution particulière de la forme

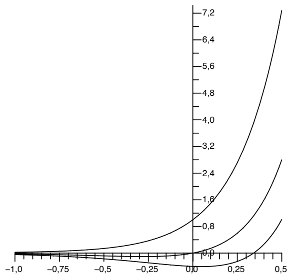
$$Q(x)e^{bx}$$

dans les conditions suivantes :
(i) si $b \neq -a$ alors $\deg Q = \deg P$; en procédant par identification, on obtient un système triangulaire ;
(ii) si $b = -a$, alors $\deg Q = 1 + \deg P$ (on peut prendre pour Q n'importe quelle primitive de P).

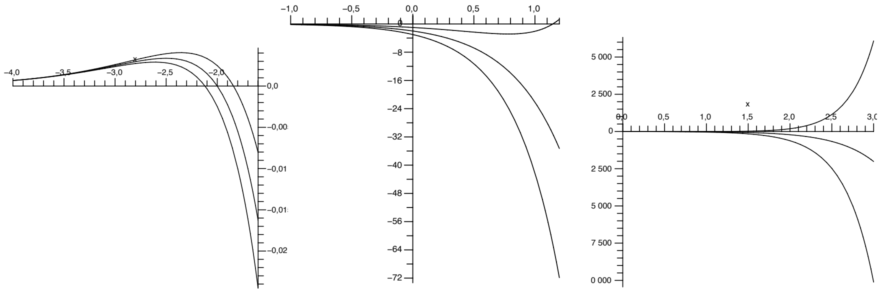
Exemple. Résoudre $y' - 3y = (1 + x)e^{3x}$ et $y' - 3y = (1 + x)e^{2x}$.
Les réponses : $(C + x + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ pour la première équation, $Ce^{3x} - (x + 2)e^{2x}$ pour la seconde.

Ci-contre, quelques courbes intégrales de la première équation, zoom gauche et zoom droit.





Ci-contre, quelques courbes intégrales de la seconde équation, zooms gauche, centre et droit.



4 Equation différentielles d'ordre 1 résolues

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$y' = F(x, y) \qquad (E)$$

où la fonction F est continue en le couple (x, y). On n'insite pas sur le sens de la continuité en le couple mais la plupart des fonctions F qui s'expriment à l'aide des fonctions unsuelles sont continues (fonctions rationnelles et composées de fonctions usuelles). On considère dans un premier temps des fonctions inconnues y à valeurs réelles ou complexes, mais les résultats se généralisent au cas des fonctions vectorielles (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$).

Si F est définie sur un ouvert de $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, une solution (réelle) de (E) est une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que
(i) pour tout $x \in I$, $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{O}$;
(ii) pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$.

[Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est *ouverte* lorsque pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$, il existe un rectangle ouvert $\mathcal{R} =]a, b[\times]c, d[$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}$. Faire un dessin. On n'insiste pas.]

On a aussi dans ce cadre général une notion de problème de Cauchy :

$(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ *étant donné, quelles solutions* f *de* (E) *vérifient-elles* $f(x_0) = y_0$ *?*

4.1 Parapluies théoriques

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire se généralise aux équations résolues sous la forme de l'énoncé suivant. Il contient une hypothèse sur F (que l'on peut affaiblir) et on perd la garantie que les solutions "maximales" soient définies "partout".

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-lipschitz)
On suppose que F *est continue sur* $\mathcal{O}$ *et que la dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial y}(x, y)$ *est définie et bornée au voisinage de tout point de* $\mathcal{O}$*. Alors, il existe un unique intervalle ouvert* I *contenant* x_0 *et une unique fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*, solution de* (E) *sur* I*, tels que*
(i) $f(x_0) = y_0$ *;*
(ii) si J *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel que* $x_0 \in J \subseteq I$ *et si* $g : J \to \mathbb{R}$ *est une solution de* (E) *telle que* $g(x_0) = y_0$*, alors* $g(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in J$*.*

On admet ce théorème dont la preuve classique, constructive, contient en germe un schéma d'approximation de solutions implantable sur un ordinateur (méthode d'Euler). Le (i) est une clause d'existence (locale) d'une solution au problème de Cauchy. Le (ii) est un résultat d'unicité (commenter). On utilise, en passant, que f est solution de (E) sur I telle que $f(x_0) = y_0$ si, et seulement si f est continue sur I et vérifie : $\forall x \in I$, $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))dt$ (écriture intégrale du problème de Cauchy).

On peut résumer ce théorème par le slogan : *sous les hypothèses énoncées, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale.* Interprétation en terme de courbes intégrales deux à deux disjointes.

Exemple. La fonction $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est solution de l'équation différentielle résolue (non linéaire) $(E)\ \ y' = 1 + y^2$ et vérifie $f(0) = 1$. On vérifie aisément que (E) entre dans les hypothèses du théorème 6, qui assure que f est *la seule* fonction qui soit solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Noter que, bien que la fonction $F : (x, y) \mapsto 1 + y^2$ soit définie sur $\mathbb{R}^2$, la solution (maximale) au problème de Cauchy demandé n'est définie que sur l'intervalle ouvert $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Ce phénomène contraste avec le cas des équations linéaires.

Si F n'entre pas dans ces hypothèses, on a encore existence de solutions comme le montre le résultat suivant.

Théorème 7 (Théorème de Peano)
On suppose que F est continue en (x_0, y_0). Alors il existe (au moins) une solution y de (E) définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 telle que $y(x_0) = y_0$.

On admet ce théorème. A la différence du théorème de Cauchy-Lipschitz, il n'y a pas forcément unicité de la solution.

Exemple. On considère l'équation différentielle résolue $(E)\ \ y' = 3y^{2/3}$. Si a est n'importe quel nombre réel, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 \text{ si } x \leq a, \\ \\ f_a(x) = (x - a)^3 \text{ si } x > a \end{cases}$$

(dessin du graphe). Toutes les fonctions f_a sont solutions de (E). Par exemple, f_{-1}, f_0 et f_2 sont solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(-2) = 0. \end{cases}$$

Ce phénomène vient de ce que la fonction $F : (x, y) \mapsto 3y^{2/3}$ est continue mais, que sa dérivée en y, qui vaut $2y^{-1/3}$, n'est pas bornée au voisinage de 0 : l'équation différentielle (E) entre dans les hypothèse du théorème de Peano, mais pas das celles de Cauchy-Lipschitz.

4.2 Equations à variables séparables

Il s'agit des équations que l'on peut écrire sous la forme

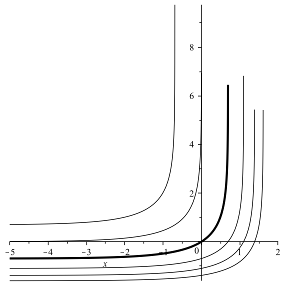
$$f(y)y' = g(x)$$

où f et g sont des fonctions continues.

En s'abritant sous le théorème de Cauchy-Lipschitz convenablement appliqué, elles se résolvent en calculant une primitive F et f et une primitive G de g : dans ces conditions, une fonction φ est une solution sur un intervalle si, et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(\varphi(x)) = G(x) + C$ pour tout x. On conclut en inversant F.

Exemple. Résoudre l'équation $y' = e^{x+y}$. Elle est à variables séparables puisqu'elle s'écrit encore $e^{-y}y' = e^x$.

On intègre : si y est solution, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $-e^{-y} + C = e^x$; cette condition impose $C > 0$. En réécrivant, on obtient que $y(x) = -\ln(C - e^x)$, pour tout x où y est définie. Ainsi, pour tout $C > 0$, la fonction $x \mapsto -\ln(C - e^x)$, définie sur l'intervalle $]-\infty, \ln C[$, est solution maximale de l'équation. Ci-contre, quelques courbes intégrales.



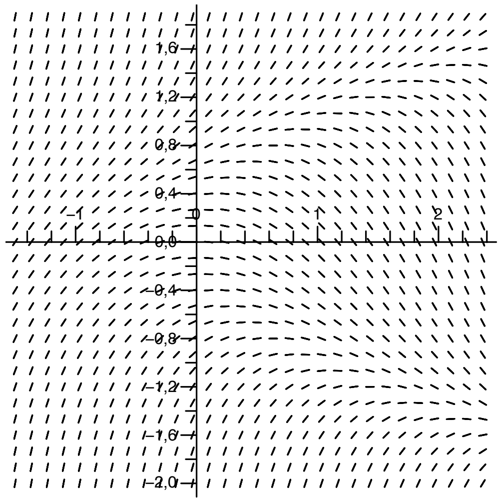
Par exemple, *l'unique* courbe intégrale passant par le point $(0, 0)$ est le graphe de la fonction $x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, définie sur $]-\infty, \ln 2[$ (l'unicité est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la courbe est dessinée en gras).

4.3 Un exemple d'étude qualitative

Soit (E) l'équation différentielle $y' = y^2 - x$. Malgré son caractère débonnaire, inutile de chercher à en faire une quadrature : on peut démontrer, à l'aide de mathématiques très avancées (non résolubilité d'un groupe (de Lie) de Galois différentiel), que ses solutions ne s'expriment pas à l'aide d'opérations élémentaires sur les fonctions usuelles. Cela dit, en s'appuyant sur le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut faire une étude qualitative de l'aspect (et même davantage) des courbes intégrales.

Le point de départ est l'interprétation suivante : si le graphe d'une solution f passe par le point (x, y) du plan, sa tangente en ce point a pour vecteur directeur $(1, y^2 - x)$.

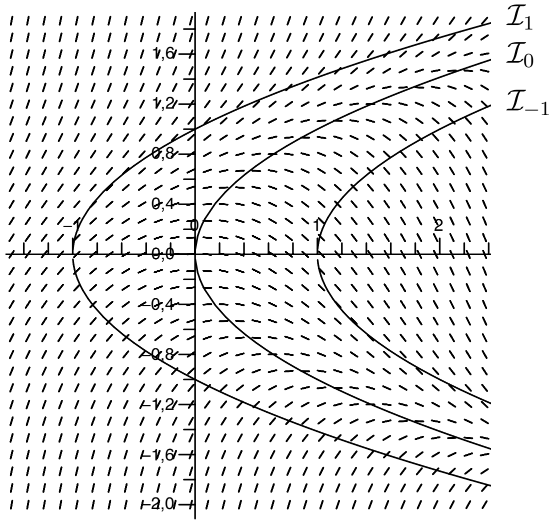
Il est intéressant de dessiner des petits segments de droites passant par un grand nombre de points (x, y), dont la pente est $y^2 - x$. On obtient le dessin du *champ des tangentes* suivant, qui permet déjà de prévoir grossièrement l'allure des courbes intégrales.



On peut, dans un second temps, étudier et tracer les *courbes isoclines* : pour chaque réel k, il s'agit de l'ensemble des points où une solution admet k pour nombre dérivé, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{I}_k = \{(x, y),\ y^2 - x = k\}.$$

C'est une parabole d'axe Ox et de sommet $(-k, 0)$. Ces paraboles sont toutes translatées horizontalement de l'une d'elles. On trace ici $\mathcal{I}_{-1}$, $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_1$. Interpréter.



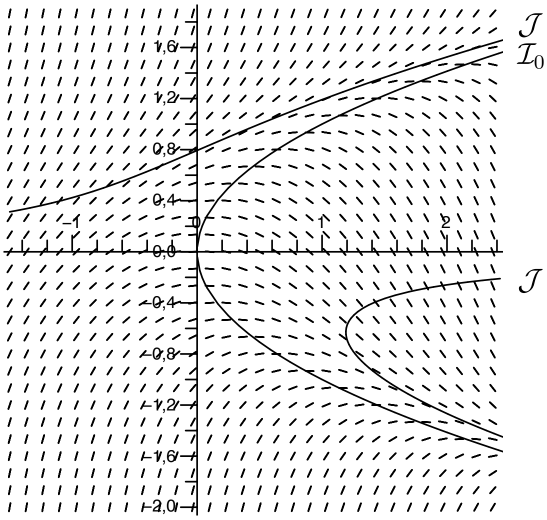
On montre, par un raisonnement graphique, que $\mathcal{I}_0$ est une *zone piège* : si une courbe intégrale pénètre à l'intérieur de $\mathcal{I}_0$, elle y reste (elle ne peut en sortir que par la branche inférieure ($y < 0$) car toutes les pentes sont négatives à l'intérieur, mais la pente est nulle le long de $\mathcal{I}_0$).

On peut aussi tracer la *courbe d'inflexions*, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan où une courbe intégrale admet un point d'inflexion.

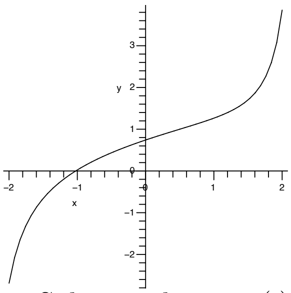
Il s'agit des points (x, y) pour lesquels une solution f vérifie $f''(x) = 0$. En dérivant, on obtient $y'' = 0$ ssi $2yy' - 1 = 0$, soit encore $2y^3 - 2xy - 1 = 0$. Ainsi, la courbe d'inflexions est

$$\mathcal{J} = \{(x, y),\ y \neq 0 \text{ et } x = y^2 - \frac{1}{2y}\}.$$

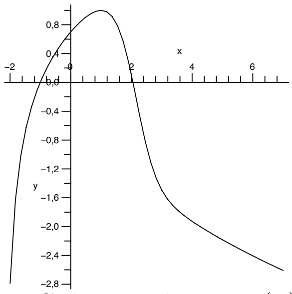
Tracer (deux composantes connexes), interpréter.



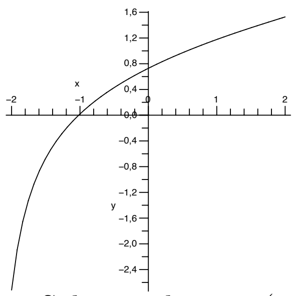
On peut montrer, en poursuivant ce type de raisonnement, que (E) admet trois types de solutions :
(i) celles dont le graphe coupe la partie supérieure de $\mathcal{J}$. Elles ne coupent pas $\mathcal{I}_0$.
(ii) celles dont le graphe coupe $\mathcal{I}_0$. Elles restent alors dans la zone piège et sont asymptotes à $\mathcal{I}_0$ en $+\infty$.
(iii) une unique solution dont le graphe ne rencontre ni $\mathcal{I}_0$ ni $\mathcal{J}$. Elle est asymptote à $\mathcal{I}_0$ et à $\mathcal{J}$ en $+\infty$.



Solution de type (i)



Solution de type (ii)



Solution de type (iii)

4.4 Deux exercices

Voir ci-dessous.

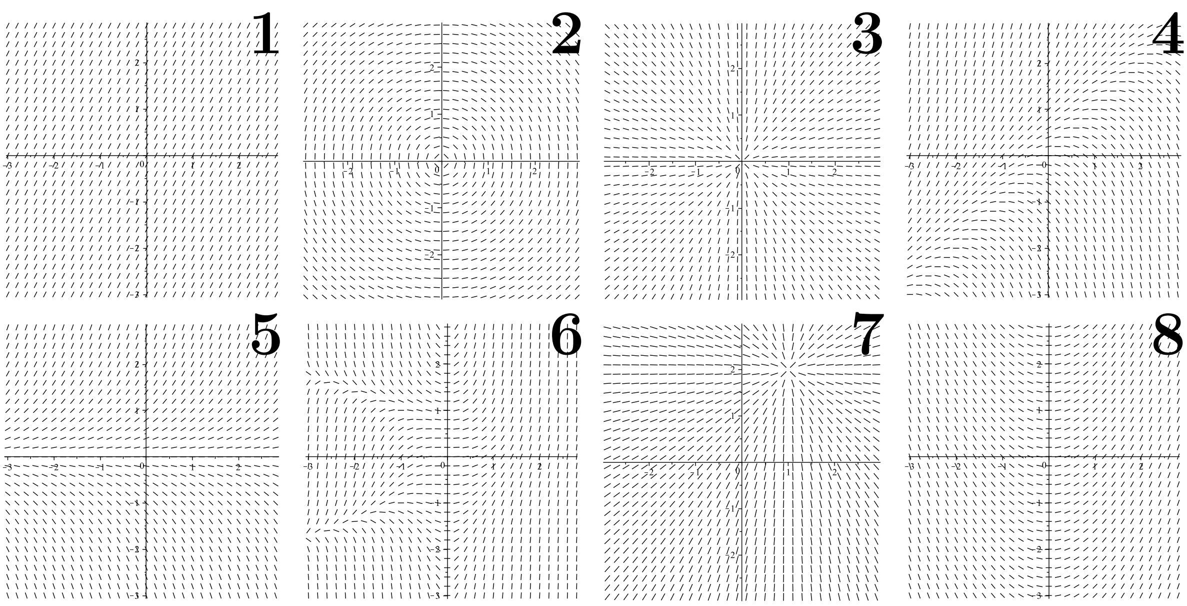
NB : ces exercices ont été mis au point par Michèle Artigue et Véronique Gautheron à l'université Paris 6 dans les années 1985.

4.4.1 Champs de tangentes

A quelles équations différentielles de la liste ci-dessous (numérotées de A à H) correspondent les champs de tangentes numérotés de 1 à 8 ?

(A) $y' = y$ (B) $y' = y - x$ (C) $y' = x$ (D) $y' = \dfrac{y}{x}$

(E) $y' = 2$ (F) $y' = -\dfrac{x}{y}$ (G) $y' = x(y^2 + x)$ (H) $y' = \dfrac{y-2}{x-1}$

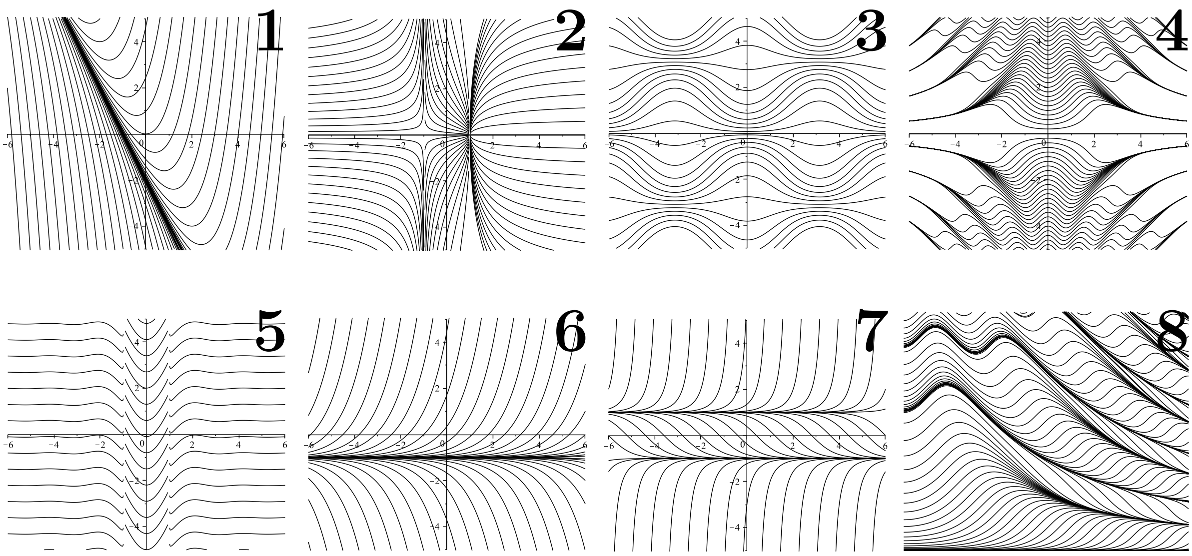


4.4.2 Courbes intégrales

A quelles équations différentielles de la liste ci-dessous (numérotées de A à G) correspondent les courbes intégrales numérotées de 1 à 8 ?

(A) $y' = (\sin x)(\sin y)$ (B) $y' = y + 1$ (C) $y' = \dfrac{\sin 3x}{1 - x^2}$ (D) $y' = \sin(xy)$

(E) $y' = y + 2x$ (F) $y' = \dfrac{y}{x^2 - 1}$ (G) $y' = y^2 - 1$



5 Algèbre matricielle

5.1 Calcul matriciel

Une *matrice* est un tableau rectangulaire de nombres. Dans ce cours, les coefficients seront des nombres complexes. On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et m colonnes, à coefficients complexes. On note aussi $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ les *matrices carrées. Idem* en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

• Définition de l'addition de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}$. Les règles de calcul (parenthésage et signes) de l'addition des nombres sont valides sur les matrices, la matrice nulle faisant fonction de zéro.

• Définition de la multiplication d'un nombre par une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}$, à droite ou à gauche. Les règles de calcul (parenthésage, lien avec l'addition) de la multiplication des nombres sont valides pour la multiplication des matrices par des nombres.

• Définition de la multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}$ par une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}$. Les règles de calcul (parenthésage, lien avec l'addition) de la multiplication des nombres sont valides pour la multiplication des matrices, **à l'exception de la commutativité, même lorsqu'elle a du sens** (pour la multiplication de deux matrices carrées) **et de la division**. La matrice *identité* est la matrice carrée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la décrire) ; elle fait fonction d'unité, au sens où $AI_n = A$ et $I_nB = B$ pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotation d'un quart de tour) et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (symétrie selon l'axe des abscisses) ne commutent pas. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse (preuve directe rapide, interprétation géométrique, l'image est la première diagonale).

Cas particulier de la multiplication MX d'une matrice carrée M par un vecteur-colonne X de même dimension. Lien avec les endomorphismes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Gammes en TD sur l'addition et la multiplication des matrices.

On utilise presque toujours la notation $m_{i,j}$ pour désigner le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne d'une matrice. Avec cette notation, le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne d'un produit $C = AB$ est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}$. Cette formule sert à montrer les résultats généraux de calcul matriciel qui font intervenir le produit.

Une matrice carrée $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite *diagonale* lorsque tous ses coefficients non diagonaux sont nuls (*i.e.* lorsque $\forall i,j,\ i\neq j \Longrightarrow m_{i,j}=0$).

Exemple. Calcul de $P(D)$ lorsque D est une matrice diagonale et P un polynôme.

5.2 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice carrée

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur-colonne, alors AX est aussi un vecteur-colonne. Slogan : *une matrice carrée agit linéairement sur les vecteurs-colonne.*

Définition. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un vecteur-colonne **non nul** X est un *vecteur propre* de A lorsque AX et X sont proportionnels, c'est-à-dire lorsqu'il existe un nombre $a\in\mathbb{C}$ tel que $AX=aX$. Le nombre $a\in\mathbb{C}$ est appelé *valeur propre* de A associée au vecteur propre X.

Exemple. $A=\begin{pmatrix}-3&1\\5&-7\end{pmatrix}$ admet $X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur propre, associé à la valeur propre -2. Si une matrice est proportionnelle à I_n, tous les vecteurs-colonne non nuls sont des vecteurs propres.

• Enorme avantage d'un vecteur propre : si $AX=aX$ et si P est un polynôme, alors $P(A)X=P(a)X$. Facilité de calcul.

Exemple. On reprend la matrice A et le vecteur X de l'exemple précédent. On peut montrer avec un peu de patience que $A^5=\begin{pmatrix}-5488&5456\\27280&-27312\end{pmatrix}$. Mais, puisque $AX=-2X$, calculer $A^5X=(-2)^5X=\begin{pmatrix}-32\\-32\end{pmatrix}$ est immédiat.

• Si X est vecteur propre de A associé à la valeur propre a, alors il en est de même pour tout vecteur non nul proportionnel à X (*droite propre*, ou *direction principale*). De même, X est alors valeur propre de toute matrice proportionnelle à A. Plus précisément, ces deux propriétés s'énoncent ainsi : si $AX=aX$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $A(tX)=a(tX)$ et $(tA)X=taX$. Preuves immédiates avec les règles de calcul matriciel.

• Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale si, et seulement si la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(C)$ (la définir) est formée de vecteurs propres. Les valeurs propres associées sont les coefficients diagonaux de la matrice. Preuve immédiate.

Remarque importante : X est vecteur propre de A associé à la valeur propre a si, et seulement si X est vecteur propre de $A-aI_n$ associé à la valeur propre 0. Ainsi, la recherche des valeurs propres se ramène à la question de savoir si 0 est valeur propre.

5.3 Déterminant d'une matrices carrée

Par définition, le *déterminant* d'une matrice carrée de dimension 2 est

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

(et le déterminant d'une matrice a de dimension 1 est a).
On définit le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de dimension quelconque de manière récursive (ou algorithmique) : pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note A_k la matrice obtenue en rayant la première colonne et la $k^{\text{ième}}$ ligne de A ; alors,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{k,1} \det(A_k)$$

(développement par rapport à la première colonne, faire un dessin).

Exemple. (i) Développer le déterminant de dimension 3.
(ii) Si une matrice est triangulaire supérieure (des zéros au dessous de la diagonale), son déterminant égale le produit de ses termes diagonaux. *Idem* pour les triangulaires inférieures. Preuve par récurrence sur la dimension, immédiate.

Proposition 5 (Propriétés (caractéristiques) du déterminant)
(i) Linéarité par rapport aux lignes et aux colonnes.
(ii) Si on échange deux lignes ou deux colonnes d'une matrice carrée, on change son déterminant de signe (en particulier, si deux colonnes ou deux lignes sont égales, le déteminant est nul.
(iii) Si un ensemble non vide de lignes ou de colonnes sont linéairement dépendantes, le déterminant est nul.
(iv) Si A et B sont des matrices carrées, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Preuve : admis. Exercice : le vérifier pour les matrices de dimension 2.

Exemple. (i) $\det \begin{pmatrix} 1 & x^2 & 7y \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & e^{2i\pi x} \end{pmatrix} = 0$ (une ligne de zéros).

(ii) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ (permuter les deux premières colonnes).

(iii) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ (deux lignes proportionnelles).

(iv) $\det(A^2 - I_n) = \det\big((A - I_n)(A + I_n)\big) = \det(A - I_n) \times \det(A + I_n)$.

(v) On a directement $\det\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & y\end{pmatrix} = y - x$. En dimension 3, on peut calculer $\det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{pmatrix} =$ $(z-x)(z-y)(y-x)$ en développant par rapport à la première ligne et en factorisant, ou, mieux, en utilisant la proposition 5 (on remplace la deuxième colonne C_2 par $C_2 - xC_1$, et la troisième colonne par $C_3 - xC_2$, on factorise les deuxième et troisième lignes, et on se ramène au calcul d'un déterminant de dimension 2). On a plus généralement la très célèbre formule de Vandermonde

$$\det\begin{pmatrix}1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1}\\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1}\\ 1 & X_3 & X_3^2 & \dots & X_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{(i,j),\ i<j}(X_j - X_i)$$

qui se démontre par récurrence sur n en généralisant le raisonnement décrit ci-dessus.

Définition. Une matrices carrées $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *inversible* lorsqu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $PQ = QP = I_n$.

Si P est inversible, il existe une *unique* matrice Q qui vérifie $PQ = QP = I_n$. On appelle Q l'*inverse* de P et on note $Q = P^{-1}$. [Preuve de l'unicité : $P(Q - Q') = 0_n$; multiplier à gauche par Q.]

Exemple. (i) Les matrices $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -7\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-12 & 1 & 7\\ 7 & 3 & 21\\ 5 & -4 & 15\end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre (preuve).

(ii) La matrice $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -7\\ -3 & 6 & -7\end{pmatrix}$ n'est pas inversible (preuve naïve, qui sera rendue archaïque par la proposition suivante : multiplier à droite par une matrice. Si on note x, y, z les coefficents dela première colonne, en supposant que le produit vaut I_3, on obtient un système incompatible).

Proposition 6 (Caractérisation des matrices inversibles)
Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) P est inversible ;
(ii) pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, l'équation $PX = Y$ a une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$;
(iii) 0 n'est pas une valeur propre de P ;
(iv) $\det P \neq 0$.

Preuve : admis (algèbre linéaire, élémentaire).

Exemple. On reprend les exemples précédents.

(i) Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est -43. Donc A est inversible. Pour calculer l'inverse, on résout le système linéaire $AX = X'$ où X et X' sont des vecteurs-colonne.

(ii) Le déterminant de $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est nul (calcul, ou la dernière ligne est somme des deux premières). Donc B n'est pas inversible.

Exercice. en dimension 2, si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix};$$

Cette formule admet une généralisation en dimension quelconque. Ainsi, la non-nullité du déterminant devient un test d'inversiblité des matrices carrées. En combinant cette proposition avec la remarque de la fin de la section précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 7 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors, a est valeur propre de A si, et seulement si* $\det(A - aI_n) = 0$.

Définition. Le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le polynôme $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Son degré égale la dimension de la matrice. Ses racines sont exactement les valeurs propres de A ; leur nombre est donc inférieur ou égal à n.

Exercice. (i) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement ses termes diagonaux.

(ii) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -3 \\ -18 & -1 & -9 \\ 18 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(iii) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -9 \\ -6 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4 Matrices carrées semblables, réduction des matrices

Définition. Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont dites *semblables* lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA = BP$, c'est-à-dire telle que $B = PAP^{-1}$. La matrice P est une *matrice de passage*.

Exercice. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres. La réciproque est fausse.

Proposition 8 *Soient f un polynôme à coefficients complexes, A et B des matrices carrées semblables et P une matrice carrée inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Alors,*

$$f(B) = Pf(A)P^{-1}.$$

Preuve : il suffit de le montrer pour $f(X) = X^n$, $n \in \mathbb{N}$. Voir cela avec des pointillés. Evoquer une récurrence pour une preuve plus formelle.

Si $B = PAP^{-1}$ et si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre a, alors PX est vecteur propre de B, associé aussi à la valeur propre a. En particulier, B est semblable à une matrice diagonale si, et seulement si B admet une base de vecteurs propres. Une telle matrice est dite *diagonalisable*. Une condition suffisante (mais non nécessaire, voir I_n par exemple) est que B admette autant de valeur propres distinctes que sa dimension. Une matrice diagonalisable est semblable à une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont ses valeurs propres.
Autre point de vue : changer de variables en prenant PX au lieu de X comme nouvelle variable permet de se ramener à une matrice diagonale.

Un algorithme de calcul pour diagonaliser : soit A une matrice carrée.

(1) On calcule ses valeurs propres (complexes), comme racines de son polynôme caractéristique. On les note $a_1, \dots, a_n$.

(2) Pour chaque valeur propre, on calcule l'ensemble des vecteurs propres associés. ***On suppose*** qu'on a trouvé ainsi une base de vecteurs propres $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le vecteur propre X_k étant associé à la valeur propre a_k, pour chaque k.

(3) Soit P la matrice carrée dont la $k^{\text{ième}}$ colonne égale X_k, pour tous les k.

Alors, si $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, on a $A = PDP^{-1}$.

[Preuve : si E_k est le $k^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la définition de P dit que PE_k est vecteur propre de A associé à la valeur propre a_k. On en déduit que $PDE_k = APE_k$ pour tout k, ce qui entraîne que $PD = AP$.]

Exemple. soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -36 & 17 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - XI_2) = (X+1)(X-5)$. Les valeurs propres sont -1 et 5. Comme elles sont toutes racines simples du polynôme caractéristique, A est diagonalisable. Calcul de vecteurs propres :

par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres respectivement associés à -1 et 5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On ne théorisera pas ici sur la *réduction* des matrices (une matrice étant donnée, lui trouver une matrice semblable qui soit de la forme la plus simple possible, par exemple diagonale).

A retenir (on admet, on verra sur des exemples en TD) :
(i) toute matrice à coefficients complexes est semblable à une matrice triangulaire supérieure (des zéros au dessus de la diagonale ; *idem* avec triangulaire inférieure) ;
(ii) toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui, si elle était diagonalisable, serait semblable à I_n, ce qui n'est pas.
(iii) toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = D + N$ où
• D est une matrice diagonalisable,
• N est une matrice nilpotente (*i.e.* il existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $N^k = 0_n$),
• N et D sont des polynômes en A.
En particulier, D et N commutent (entre elles et avec A).

La propriété (iii) permet de calculer simplement $f(A)$ où f est un polynôme, ou encore $\exp(A)$ (voir plus bas).

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $A = D+N$, D est diagonale (donc diagonalisable !), $A = D+N$ et D et N commutent (puisque D est proportionnelle à I_2). Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \operatorname{diag}((-2)^n, (-2)^n) = (-2)^n I_2$ et $N^2 = 0_2$ ce qui entraîne que $N^n = 0_2$ dès que $n \geq 2$. On en déduit, puisque D et N commutent. que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-2)^n & 4n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice. Plus généralement, si f est un polynôme,

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(-2) & 4f'(-2) \\ 0 & f(-2) \end{pmatrix}.$$

[Utiliser ce qui précède pour les monômes et prolonger par linéarité, ou utiliser la formule de Taylor pour les polynômes qui permet de conclure directement.]

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$. Alors, $A-D = N$, $N^2 = 0_2$ (et naturellement, N et D commutent puisque D est proportionnelle à I_2). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-2)^n + 8n(-2)^{n-1} & 4n(-2)^{n-1} \\ -16n(-2)^{n-1} & (-2)^n - 8n(-2)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice. Trouver une formule générale pour $f(A)$ si f est un polynôme.

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -9 \\ -6 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & 9 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$. On a vu que A n'est pas diagonalisable. On montre que D est diagonalisable, à valeurs propres -1, -1 et 2. La matrice $N = A-D$ est nilpotente (elle vérifie $A^2 = 0_3$). En outre, $D = \frac{1}{3}\left(A^2 + 2A - 2I_3\right)$ et $N = A - D$ sont des polynômes en D.

5.5 Exponentielle d'une matrice carrée

La définition par la somme d'une série entière permet de définir l'exponentielle d'une matrice carrée A de dimension d à coefficents (réels ou) complexes par

$$\exp A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!},$$

où on adopte (définitivement) la notation $A^0 = I_d$. C'est encore une matrice carrée de même dimension d. Les arguments développés dans les éléments de preuve pour l'exponentielle complexe s'étendent au cas des matrices carrées à coefficients complexes.

On a la première propriété, importante car deux matrices, en général, ne commutent pas :

$$\boxed{\exp A \text{ } \textit{commute avec } A}$$

et donc aussi avec tous les polynômes et toutes les séries entières convergentes en A (preuve : la commutation avec les sommes partielles est évidente ; passer à la limite).

Les propriétés suivantes sont vérifiées, toutes conséquences de la première.
• *Si A et B commutent*, alors $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$.

• $\exp 0_d = I_d$ où 0_d désigne la matrice carrée de dimension d dont tous les coefficients sont nuls.

• $\exp A$ est toujours inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

• Si s et t sont des nombres complexes, $\exp(s+t)A = \exp(sA)\exp(tA)$.

• L'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et $f'(t) = A \cdot \exp(tA) = \exp(tA) \cdot A$, pour tout t.

Ces proprétés importantes interviendront fortement dans la résolution des systèmes différentiels linéaires.

5.6 Calcul de l'exponentielle d'une matrice carrée

• Exponentielle et vecteurs propres : *si A est une matrice carrée, X un vecteur colonne et a un nombre complexe tels que $AX = aX$, alors* $\exp(A)X = e^a X$.

• Exponentielle d'une matrice diagonale : *si* $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ *est une matrice diagonale, alors* $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{a_1}, \ldots, e^{a_d})$.

• Exponentielle et matrices semblables : *si* $B = PAP^{-1}$*, alors* $\exp(B) = P \exp(A) P^{-1}$. C'est cette propriété, combinée avec la réduction des matrices carrées, qui fournit un calcul algorithmique de l'exponentielle d'une matrice.

Exemple. On reprend les exemples de 5.4.
(i) Soient $A = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -36 & 17 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a montré que $A = PDP^{-1}$. Alors, $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} P^{-1}$ et on trouve après calcul que $\exp(A) = \begin{pmatrix} 3e^{-1} - 2e^5 & -e^{-1} + e^5 \\ 6e^{-1} - 6e^5 & -2e^{-1} + 3e^5 \end{pmatrix}$.

(ii) Premier cas non diagonalisable : soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A = D + N$, et D et N commutent (ensemble et avec A) et $N^2 = 0_2$. Alors, $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$, puisque D et N commutent. Par ailleurs, $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{-2}, e^{-2})$. Enfin, puisque $N^2 = 0$, on a $\exp(N) = I_2 + N$ (développement en série de exp). On en déduit que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 4e^{-2} \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

(iii) Second cas non diagonalisable : soient $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$. Alors, $A = D + N$, $N^2 = 0_2$, N et D commutent. Ainsi, puisque $\exp N = I_2 + N$, il vient $\exp(A) = \exp(D)(I_2 + N) = e^{-2} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -16 & -7 \end{pmatrix}$.

(iv) Exemple non diagonalisable en dimension 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -9 \\ -6 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & 9 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ et $N = A - D = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

On a vu que $N^2 = 0_3$ et que A, N et D commutent. Alors, $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\,(I_3 + N)$. Le calcul de $\exp(D)$ se fait en diagonalisant D (car D est diagonalisable). On trouve

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 7e^{-1} & 9e^{-1} & -9e^{-1} \\ -2e^2 + 2e^{-1} & -2e^2 + 3e^{-1} & 3e^2 - 3e^{-1} \\ -2e^2 + 6e^{-1} & -2e^2 + 8e^{-1} & 3e^2 - 8e^{-1} \end{pmatrix}.$$

• Une propriété parfois utile : *si A est n'importe quelle matrice carrée, alors* $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$ (définir la trace s'il faut).

6 Equations matricielles, systèmes, ordre supérieur

Chapitre en bref.
On se ramène à des équations différentielles vectorielles *via* le calcul matriciel :
- pour les systèmes d'équations différentielles linéaires ;
- pour les équations linéaires (ou les systèmes) d'ordre supérieur.

6.1 Des systèmes linéaires scalaires aux équations vectorielles

On passe d'un système linéaire scalaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(t)x(t) + b(t)y(t) + u(t) \\ \\ y'(t) = c(t)x(t) + d(t)y(t) + v(t) \end{array} \right.$$

à une équation vectorielle linéaire d'ordre 1

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ (une matrice dont les coefficients sont des fonctions se dérive coefficient par coefficient). Ce procédé se généralise en dimension supérieure et est encadré par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, encore valide pour les équations vectorielles.

• On résout d'abord l'équation homogène $X' = AX$. Sa solution générale est

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right) \cdot X_0$$

où t_0 est dans l'intervalle de définition des fonctions a, b, c, d, u, v et où X_0 est un vecteur-colonne constant (cette écriture fournit la solution du problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$).

• Puis on fait varier la constante vectorielle. On obtient une solution générale qui dépend de deux paramètres (ou d'autant de paramètres que le nombre d'inconnues du système carré initial).

Le cas des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants se résout toujours explicitement *via* le calcul d'exponentielle de matrice.

Exemple. Résoudre le système différentiel linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x' + 2x + 4y = 1 + 4t \\ \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2. \end{array} \right.$$

On le transforme en $X' = AX + B$ où $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1+4t \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$.

(i) Résolution de l'équation homogène vectorielle $X' = AX$.

Puisque la matrice A a des coefficient constants, sa solution générale est

$$X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où u et v sont des constantes. Il s'agit donc de calculer l'exponentielle de A. Pour cela, on diagonalise A (c'est possible, ici). Calcul du polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = (X-2)(X+3)$. Calcul d'un base de vecteurs propres : choix de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A = PDP^{-1}$. On en déduit que $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1}$. [On peut faire le calcul inutile et on trouve $\exp(tA) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{2t} + 4e^{-3t} & -4e^{2t} + 4e^{-3t} \\ -e^{2t} + e^{-3t} & -4e^{2t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$]. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est $X(t) = P\exp(tD)P^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ où u et v sont des constantes. En posant $P^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, les constantes C_1 et C_2 parcourent $\mathbb{R}$ lorsque u et v parcourent $\mathbb{R}$, puisque P est inversible. La solution générale de $X' = AX$ s'écrit alors $X(t) = P\exp(tD) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} \\ \\ y(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

(ii) Variation des constantes.

On peut chercher une solution de l'équation avec second membre sous la forme

$$X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

où u et v sont cette fois des *fonctions* inconnues. Il est cependant plus judicieux de "faire varier" les constantes C_1 et C_2 et de chercher une solution particulière sous la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t} \\ -C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t} \end{pmatrix} = P\exp(tD) \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Noter qu'on peut aussi procéder à un calcul scalaire sans la notation vectorielle, mais c'est plus fastidieux encore. On reporte dans l'équation avec second membre. On trouve que X est solution si, et seulement si $P\exp(tD)\begin{pmatrix}C_1'(t)\\C_2'(t)\end{pmatrix} = B(t)$, ce qui s'écrit encore $\begin{pmatrix}C_1'(t)\\C_2'(t)\end{pmatrix} = \exp(-tD)P^{-1}B(t)$. En séparant les coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(t) = \frac{1}{5}(1+4t-6t^2)e^{-2t} \\ \\ C_2'(t) = \frac{1}{5}(1+4t+\frac{3}{2}t^2)e^{-3t}. \end{cases}$$

En intégrant (les primitives se calculent en intégrant par parties), les primitives qui s'annulent en 0 de ces fonctions sont

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{1}{5}t(1+3t)e^{-2t} \\ \\ C_2(t) = \frac{1}{10}t(2+t)e^{-3t}. \end{cases}.$$

En reportant, on trouve que la solution générale du système initial est

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t^2 + t \\ \\ y(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

6.2 Des équations d'ordre supérieur aux équations vectorielles

On passe d'une équation scalaire linéaire d'ordre 2

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = u(t)$$

à une équation vectorielle linéaire d'ordre 1

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

en posant $X(t) = \begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\-b(t) & -a(t)\end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix}0\\u(t)\end{pmatrix}$. Ce procédé se généralise en dimension supérieure pour les équations linéaires scalaires d'ordre supérieur ou égal à deux. En combinant avec la section précédente, on passe des systèmes d'équations linéaires d'ordre supérieur à des équations linéaires vectorielles d'ordre 1.

Exemple. Montrer que l'équation différentielle $y'' - 2y'(t) + 5y(t) = 20e^{-3t}$ admet une unique solution $y(t)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ et calculer cette dernière. [Commentaire sur existence et unicité au regard du thèorème de Cauchy-Lipschitz linéaire vectoriel.]

On écrit l'équation sous forme vectorielle $X' = AX + B$ où $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 20e^{-3t} \end{pmatrix}$.

(i) Résolution de l'équation homogène vectorielle $X' = AX$.

On diagonalise A (c'est possible ici, à condition de passer dans $\mathbb{C}$). Calcul du polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 5 = (X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$. Noter que c'est le discriminant négatif de ce polynôme qui oblige à passer dans $\mathbb{C}$. Calcul d'un base de vecteurs propres : choix de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+2i & 1-2i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$. Alors, $A = PDP^{-1}$. Ceux qui n'ont pas confiance peuvent vérifier sans peine que $AP = PD$. Ainsi, l'équation homogène $X' = AX$ a pour solution générale $X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \exp(tD) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où u, v, C_1, C_2 sont des constantes *complexes* liées par la relation $P^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. On trouve

$$\begin{cases} y(t) = z_1 e^{t(1+2i)} + z_2 e^{t(1-2i)} \\ \\ y'(t) = (1+2i) z_1 e^{t(1+2i)} + (1-2i) z_2 e^{t(1-2i)} \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes. La seconde équation est inutile (elle le sera toujours) et cela montre que la solution générale de l'équation scalaire homogène d'ordre deux $y'' - 2y' + 5y = 0$ est la fonction $y(t) = z_1 e^{t(1+2i)} + z_2 e^{t(1-2i)}$ où z_1 et z_2 sont complexes. En séparant les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2, on montre que les solutions réelles de cette équation sont les fonctions de la forme $y(t) = C_1 e^t \cos(2t) + C_2 e^t \sin(2t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

[Commentaire sur les solutions générales des équations linéaires homogènes d'ordre deux à coefficients constants dans les cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.]

(ii) Variation des constantes.

On cherche une solution particulière de l'équation vectorielle linéaire avec second membre en faisant varier les constantes z_1 et z_2, c'est-à-dire sous la forme

$$P \exp(tD) \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

où z_1 et z_2 sont des fonctions inconnues à valeurs complexes. En reportant dans l'équation vectorielle de départ, on trouve $P\exp(tD)\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = B(t)$, ce qui s'écrit encore $\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \exp(-tD)P^{-1}B(t)$. Dans le cas général, le calcul de primitives permet de trouver deux fonctions z_1 et z_2 qui conviennent. Ici, compte tenu de la forme particulièrement simple de B, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = 20e^{-3t}\exp(-tD)P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5i\exp\big[-t(D+3I)\big]\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'intégration entre 0 et t des coordonnées amène à

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = 5i\exp\big[-t(D+3I)\big]\begin{pmatrix} \frac{1}{4+2i} \\ \frac{1}{-4+2i} \end{pmatrix} = \exp\big[-t(D+3I)\big]\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i \\ \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une solution particullière de $X' = AX + B$ est

$$Pe^{tD}e^{-t(D+3I}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i \\ \frac{1}{2}-i \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(*NB* : la seconde coordonnée est bien dérivée de la première !). On montre ainsi que la solution générale complexe de l'équation différentielle scalaire d'ordre deux avec second membre est

$$y(t) = z_1e^{t(1+2i)} + z_2e^{t(1-2i)} + e^{-3t}$$

où z_1 et z_2 sont des constantes complexes. Les solutions réelles sont les fonctions de la forme

$$y(t) = C_1e^t\cos(2t) + C_2e^t\sin(2t) + e^{-3t}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

(iii) En particulier, demander les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ amène au système linéaire $C_1 + 1 = 1$ et $C_1 + 2C_2 - 3 = -1$ qui se résout en $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$. La fonction cherchée est $y(t) = e^t\sin(2t) + e^{3t}$.

6.3 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficents constants

Une équation différentielle linéaire réelle d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme

$$y'' + ay' + by = m(x) \tag{1}$$

où a et b sont des nombres réels et m une fonction continue à valeurs réelles. Les résultats qui suivent se démontrent avec les outils de la section précédente, sur le mode de l'exemple qui y est traité. On rassemble les cas possibles en récapitulant sous la forme d'un algorithme de résolution, que l'on peut retenir et utiliser tel quel.

6.3.1 L'équation homogène associée

C'est l'équation

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2}$$

On la résout *directement* de la manière suivante. On considère d'abord l'équation polynomiale de degré deux, appelée l'*équation caractéristique* de (2) suivante :

$$X^2 + aX + b = 0, \tag{3}$$

et on la résout.

Premier cas : l'équation (3) a deux racines *réelles et distinctes* que l'on note u et v. Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b > 0$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto Ae^{ux} + Be^{vx}$$

où A et B sont des constantes réelles.

Deuxième cas : l'équation (3) a une racine *double* que l'on note r.
Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b = 0$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto Ae^{rx} + Bxe^{rx}$$

où A et B sont des constantes réelles.

Troisième cas : l'équation (3) deux racines *complexes non réelles* que l'on note $\sigma + i\omega$ et $\sigma - i\omega$ où σ et ω sont des nombres réels.
Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b < 0$ et que les racines de (3) sont alors nécessairement conjuguées dans $\mathbb{C}$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto Ae^{\sigma x}\cos(\omega x) + Be^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

6.3.2 Solution générale de l'équation avec second membre

Si $x \mapsto A\phi(x) + B\psi(x)$ est la solution générale de l'équation homogène (2) et si $x \mapsto f(x)$ est n'importe quelle solution de l'équation avec second membre (1), alors la solution générale de l'équation avec second membre (1) est

$$x \longmapsto f(x) + A\phi(x) + B\psi(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

On retient parfois le slogan suivant : *la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution "particulière" de l'équation avec second membre.*

Il reste, pour finir de résoudre (1), à en trouver une solution "particulière" f. C'est à cela que l'on utilise la méthode de variation des constantes de la section suivante.

6.3.3 Méthode de variation des constantes

Une fois trouvée la solution générale $x \mapsto A\phi(x) + B\psi(x)$ de l'équation homogène (2), on cherche une solution particulière $x \mapsto f(x)$ de (1) qui vérifie simultanément

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = A(x)\phi(x) + B(x)\psi(x) \\ \text{et} \\ f'(x) = A(x)\phi'(x) + B(x)\psi'(x) \end{array}\right.$$

où $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ sont des fonctions deux fois continûment dérivables. En calculant f à partir de la première de ces formules d'une part, en reportant dans (1) d'autre part, on obtient le système de deux équations linéaires en A' et B'

$$\left\{\begin{array}{l} \phi(x)A'(x) + \psi(x)B'(x) = 0 \\ \text{et} \\ \phi'(x)A'(x) + \psi'(x)B'(x) = m(x) \end{array}\right.$$

qui admet toujours des solutions (car ϕ et ψ ne sont pas proportionnelles). On trouve ainsi des fonctions A' et B', dont il suffit de calculer des primitives pour obtenir des fonctions A et B qui fournissent une solution particulière $x \mapsto A(x)\phi(x) + B(x)\psi(x)$ de (1).

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320 (Méthodes mathématiques pour la chimie)

Etudes qualitatives d'équations différentielles

1- A quelles équations différentielles de la liste ci-dessous (numérotées de A à H) correspondent les champs de tangentes des pages 3 et 4 (numérotés de 1 à 8) ?

(A) $y' = y$

(B) $y' = y - x$

(C) $y' = x$

(D) $y' = \dfrac{y}{x}$

(E) $y' = 2$

(F) $y' = -\dfrac{x}{y}$

(G) $y' = x(y^2 + x)$

(H) $y' = \dfrac{y-2}{x-1}$

2- A quelles équations différentielles de la liste ci-dessous (numérotées de A à G) correspondent les courbes intégrales des pages 5 et 6 (numérotées de 1 à 8) ?

(A) $y' = (\sin x)(\sin y)$

(B) $y' = y + 1$

(C) $y' = \dfrac{\sin 3x}{1 - x^2}$

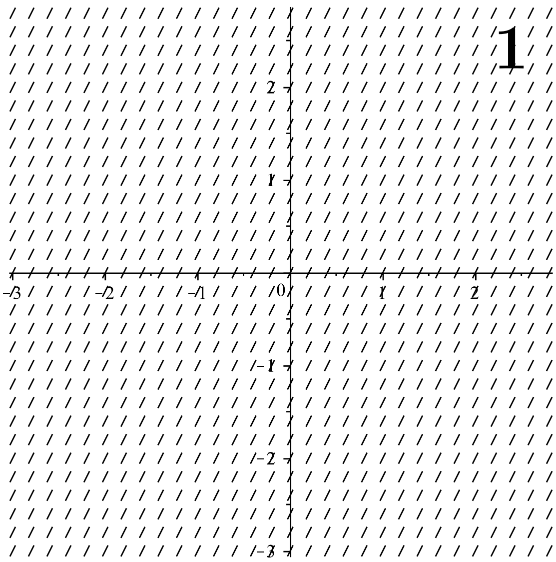
(D) $y' = \sin(xy)$

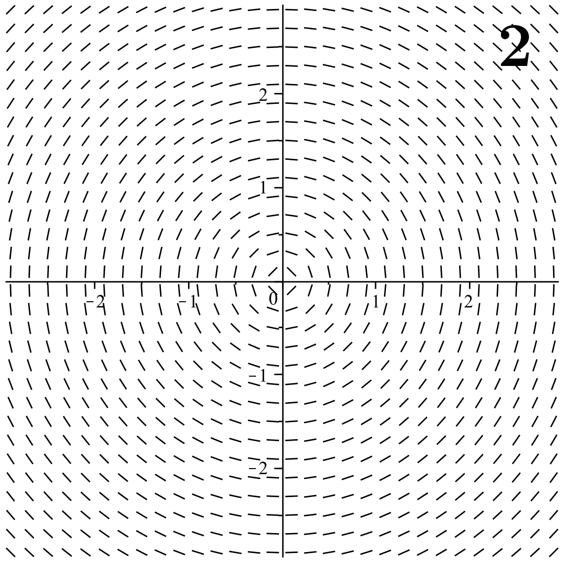
(E) $y' = y + 2x$

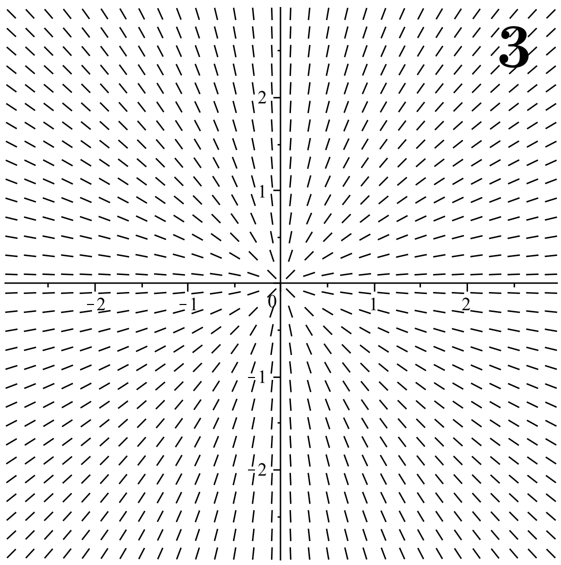
(F) $y' = \dfrac{y}{x^2 - 1}$

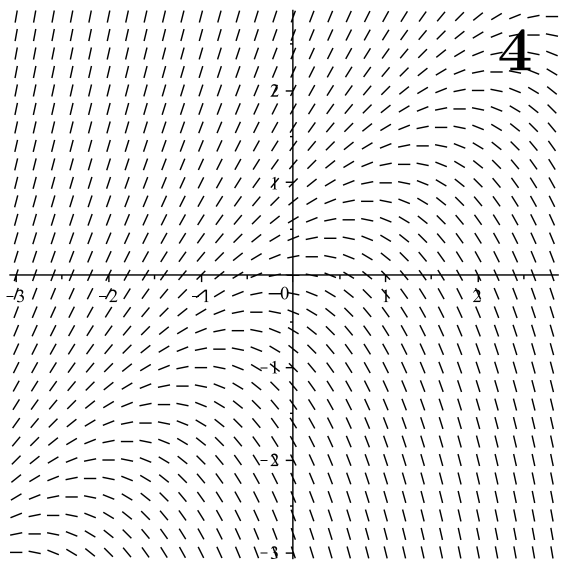
(G) $y' = y^2 - 1$

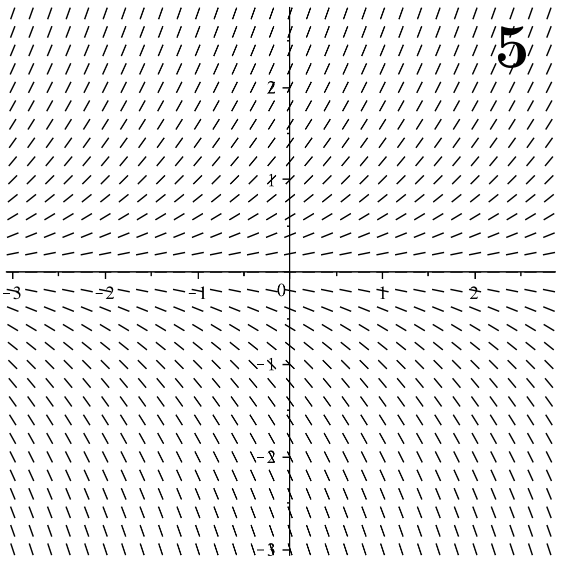
NB : cet exercice a été mis au point par Michèle Artigue et Véronique Gautheron à l'université Paris 6 dans les années 1985.

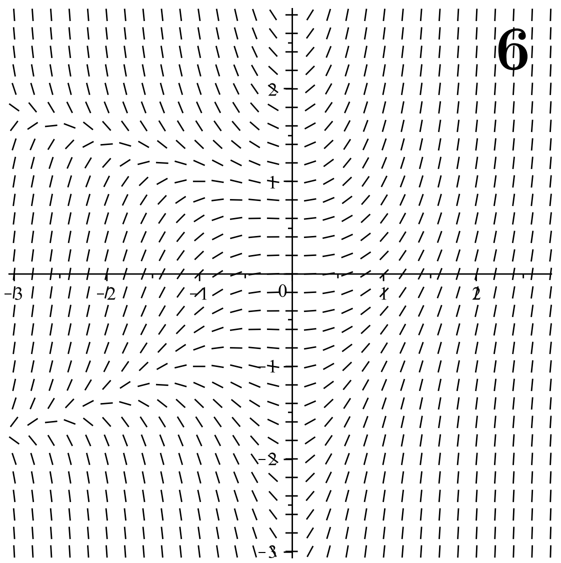

1
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3

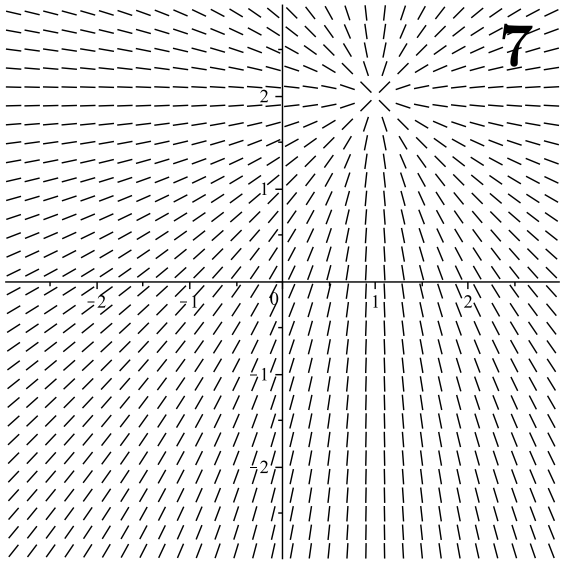

2
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2

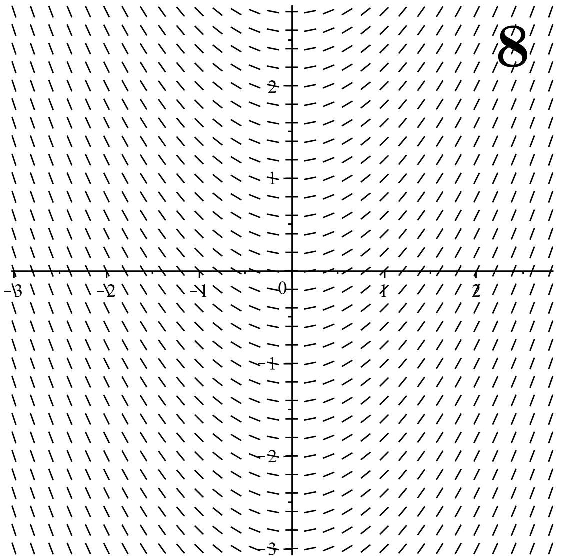

3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2

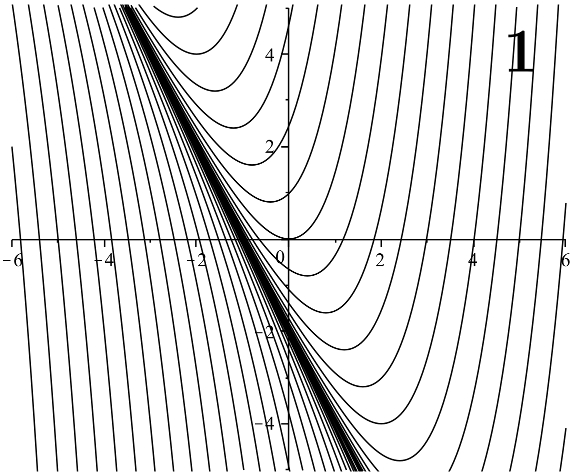

4
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3

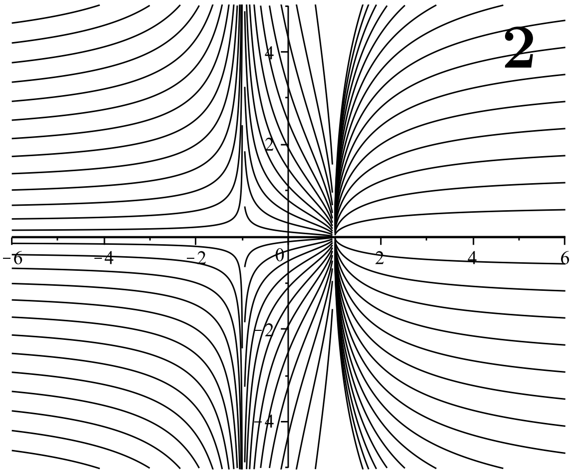

5

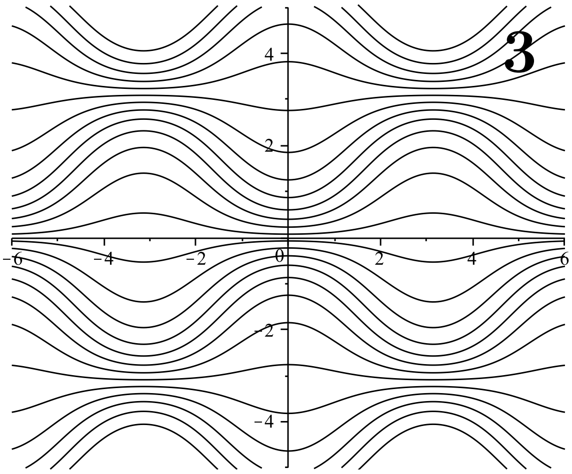

6

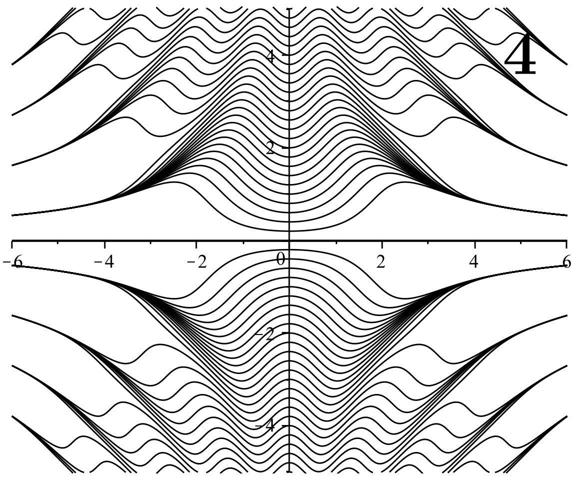

7

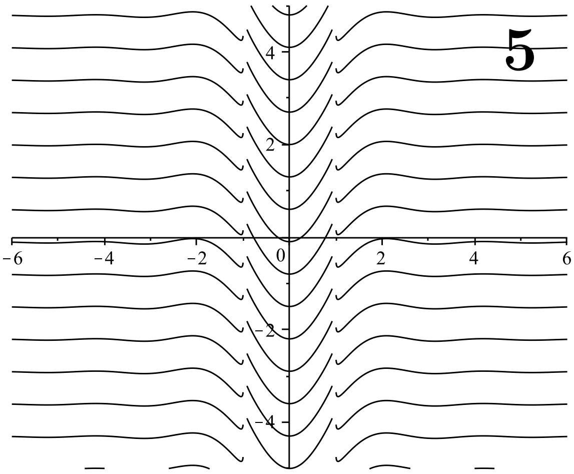

8

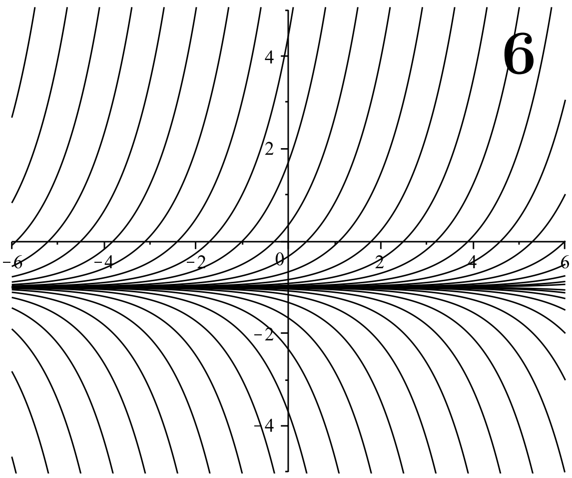

1

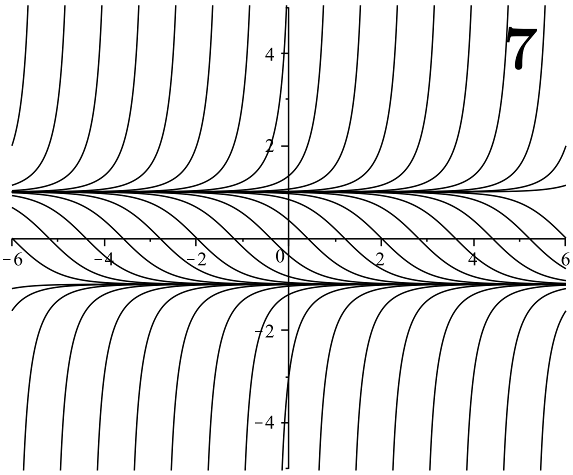

2

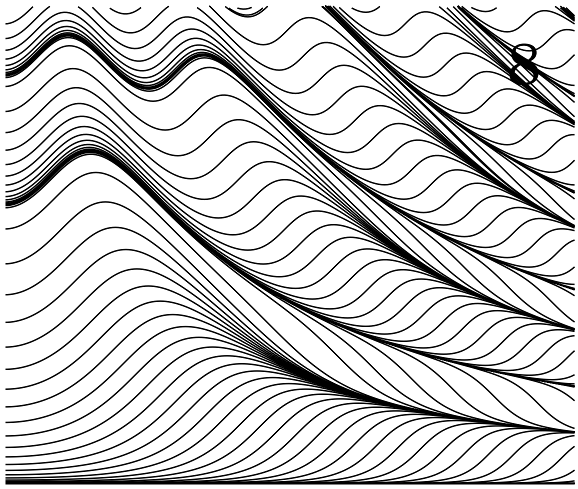

3


4


5


6


7


8

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 1

Exercice 1 : des gammes

1.1- Dérivation

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $f(x) = \tan x$; *(ii)* $f(x) = (\ln x)^3$; *(iii)* $f(x) = 2x\sqrt{1-x^4}$;

(iv) $f(x) = \ln\left(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right)$; *(v)* $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(t^2+1)dt$;

(vi) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp(\sin(t))dt$; *(vii)* $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{1+x^2}}^{\pi} \ln(2+\cos t)dt.$

1.2- Primitivation

Calculer les primitives les fonctions suivantes.

(i) $f(x) = \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; *idem* sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,\cup\,]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$;

(ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; *idem* sur $\mathbb{R}^*$;

(iii) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$; *(iv)* $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; *(v)* $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; *(vi)* $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$.

1.3- Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+\frac{3}{x^2})dx$; *(ii)* $\displaystyle\int_0^1 (2-4e^{2x})dx$; *(iii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$;

(iv) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\left(4+\sqrt{\cos x}\right)dx$; *(v)* $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\,dx$; *(vi)* $\displaystyle\int_3^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1.4- Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par partie *ad hoc*.

(i) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$; *(ii)* $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; *(iii)* $\displaystyle\int_e^{e^2} x^2\ln x\,dx$;

(iv) $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)e^{-x}\,dx$; *(v)* $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$; *(vi)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Exercice 2 : polynômes du second degré

2.1- Gammes encore

Calculer les racines complexes de polynômes suivants.

(i) $X^2 - 7X + 10$; *(ii)* $X^2 - 6X + 9$; *(iii)* $X^2 - 4X + 5$;

(iv) $X^2 + 2\cos\theta X + 1$ où θ est un nombre réel.

2.2- Relations entre racines et coefficients

Montrer que x et y sont les deux racines (éventuellement confondues) du polynôme $P(X) = X^2 - sX + p$ si, et seulement si $x + y = s$ et $xy = p$. Calculer le discriminant de P en fonction de x et y (remarquer que le résultat est symétrique en x et y, comme on pouvait s'y attendre).

Pour aller plus loin : comment cela se généralise-t-il aux polynômes de degré 3, 4,... ?

2.3- Conjugaison des racines

Montrer que si z est un nombre complexe (réel ou non), le polynôme $(X - z)(X - \overline{z})$ a des coefficients réels.
Montrer que si x est racine du polynôme à coefficients *réels* $uX^2 + vX + w$, alors $\overline{x}$ l'est aussi. Cela se généralise-t-il aux polynômes réels de degré supérieur ?

Pour aller plus loin : montrer que tout polynôme unitaire à coefficients réels se décompose en un produit de polynômes de la forme $X - r$ où $r \in \mathbb{R}$ et de polynômes de la forme $X^2 - sX + p$ où s et p sont des réels qui vérifient $s^2 - 4p < 0$.

Exercice 3 : applications des nombres complexes

3.1- Formules d'Euler

Se rappeler les formules d'Euler liant $\cos a$, $\sin a$, e^{ia} et e^{-ia}.

3.2- Développer

Se rappeler les formules trigonométriques d'addition en calculant $\exp i(a+b)$ de deux manières. En adaptant cette méthode, calculer $\sin 3a$ et $\cos 3a$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$.

Pour aller plus loin : même question pour $\cos na$ et $\sin na$ lorsque n est n'importe quel entier naturel.

3.3- Linéariser

En utilisant les formules d'Euler, montrer que

$$(\cos x)^5 = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x.$$

En déduire une primitive de $\cos^5 x$. Cette méthode peut-elle se généraliser au calcul des primitives des fonctions $x \mapsto \sin^n x$ et $x \mapsto \cos^n x$?

3.4- Exponentielle et trigonométrie pour l'intégration

Soient a et b des réels. Calculer une primitive des fonctions $\cos(ax)e^{bx}$ et $\sin(ax)e^{bx}$.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 1 : réponses

Exercice 1 : des gammes

1.1- Dérivation

(i) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; *(ii)* $\frac{3 \ln^2 x}{x}$; *(iii)* $\frac{2(1-3x^4)}{\sqrt{1-x^4}}$; *(iv)* $\frac{1}{\cos x}$;
(v) $\sin(x^2+1)$; *(vi)* $e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}$; *(vii)* $\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(2 + \cos\sqrt{1+x^2})$

1.2- Primitivation

(i) $-\ln(\cos x) + C$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (forme $\frac{u'}{u}$) ; noter la positivité de cos sur l'intervalle. Pour une formule valable sur tout intervalle sans réel de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, prendre $-\ln(|\cos x|)$ pour primitive. Gaffe aux constantes sur le truc pas connexe pour l'autre question : f définie par $f(x) = -\ln(|\cos x|) + C_1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f(x) = -\ln(|\cos x|) + C_2$ sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$;

(ii) $-e^{1/x} + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (forme $u'e^u$) ; deux constantes pour $\mathbb{R}^*$.

(iii) $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$ sur $]-1, +\infty[$ (forme $\frac{u'}{u}$) ; $\frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$ sur tout intervalle ne contenant pas -1. Encore le coup des plusieurs constantes s'il faut.

(iv) $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (forme uu').

(v) $f(x) = \frac{1}{x \ln x} + C$; $\ln(\ln x) + C$ sur $]1, +\infty[$ (forme $\frac{u'}{u}$) et $\ln(-\ln x) + C$ sur $]0, 1[$. Ecriture avec valeur absolue et coup des plusieurs constantes s'il faut.

(vi) $\sin(\ln x) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (forme $u' \cos u$).

1.3- Calculs d'intégrales

(i) $\int_1^2 (x^2 + \frac{3}{x^2})dx = \frac{23}{6}$;

(ii) $\int_0^1 (2 - 4e^{2x})dx = 4 - 2e^2$;

(iii) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = -\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 2$;

(iv) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(4 + \sqrt{\cos x})\,dx = \frac{1}{3}\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2}$;

(v) $\int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\;dx = \frac{-16}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{2}$;

(vi) $\int_3^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

1.4- Intégration par parties

(i) $\int_1^e \ln x \ dx = 1$;

(ii)$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{2}$;

(iii) $\int_e^{e^2} x^2 \ln x \ dx = -\frac{2}{9}e^3 + \frac{5}{9}e^6$;

(iv) $\int_1^2 (2x+1)e^{-x} \ dx = \frac{5}{e} - \frac{7}{e^2}$;

(v) $\int_1^e (\ln x)^2 \ dx = -2 + e$;

(vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \ dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 2 : polynômes du second degré

2.1- Gammes encore

(i) $X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$;

(ii) $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$;

(iii) $X^2 - 4X + 5 = (X-2+i)(X-2-i)$;

(iv) $X^2 + 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})X - e^{-i\theta})$.

2.2- Relations entre racines et coefficients

Si x et y sont les racines du polynôme $P(X) = X^2 - sX + p$, le discriminant de P est $(x-y)^2$.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 2

Exercice 1 : une intégrale

Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \exp\left(\sqrt{1-x^2}\right)$. Est-il vrai que

$$\int_0^1 \exp\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx \geq 2 \ ?$$

On répondra à cette dernière question à l'aide d'une machine à calculer si l'on veut, mais sans utiliser de programme de calcul approché d'intégrale.

Exercice 2 : valeur moyenne

1- Quelle est la valeur moyenne de la fonction *sinus* sur l'intervalle $[0, \pi]$?
Quelle est la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 1]$?

2- Existe-t-il un intervalle de longueur 3 sur lequel la fonction $x \mapsto x(2-x)$ ait une valeur moyenne nulle ?
Si $a \in \mathbb{R}$, existe-t-il un intervalle de longueur 3 sur lequel la fonction $x \mapsto x(2-x)$ ait une valeur moyenne égale à a ?

3- Existe-t-il un intervalle de longueur 2 sur lequel la fonction $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ ait une valeur moyenne nulle ?

Exercice 3 : changements de variable

1- (Traité en cours)

1.1- Soit $r > 0$. Montrer que l'aire d'un disque de rayon r égale $4 \displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.
En effectuant le changement de variable $x = r \cos \theta$, retrouver la formule de l'aire du disque.

1.2- Si $\Theta \in [0, 2\pi]$, calculer l'aire d'un secteur angulaire d'angle Θ tracé dans un disque de rayon $R > 0$.

1.3- Soient a et b des réels strictement positifs. Calculer l'aire du domaine délimité par l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2- En posant $u = \sin x$, calculer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x}.$$

3- En posant $v = \exp(x)$, calculer $\displaystyle\int_0^t \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})(1+e^x)}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : fonction Gamma d'Euler

Pour tout nombre complexe z tel que $\Re(z) > 0$, on note

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

(par définition, cette intégrale est la double limite de $\displaystyle\int_x^y t^{z-1} e^{-t} dt$ lorsque x tend vers 0 et y vers $+\infty$; on admettra que cette limite existe dès que $\Re(z) > 0$).
Calculer $\Gamma(1)$. En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Que vaut $\Gamma(n)$ si n est un entier naturel non nul ?

[Commentaire : la fonction Γ prolonge analytiquement la fonction *factorielle* aux nombres complexes qui ne sont pas entiers strictement négatifs.]

Exercice 5 : des intégrales généralisées

1- Intégrales de Riemann
Pour tout nombre réel strictement positif a, soient f_a et g_a les fonctions

$$f_a(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^a} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^a}.$$

Montrer que $f_a(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si, et seulement si $a > 1$.
Calculer alors cette limite en fonction de a.
Montrer que $g_a(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 si, et seulement si $a < 1$.
Calculer alors cette limite en fonction de a.

2- Séries de Riemann
Soit $a > 0$. Pour tout entier naturel n, on note

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^a}$$

En utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-a}$, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^a} \leq \frac{1}{n^a} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^a}$$

Déduire de cette double inégalité que la suite $(S_n(a))_{n\geq 1}$ converge si, et seulement si $a > 1$.

[Commentaire : en particulier, la série harmonique diverge : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{90}$ à l'aide de la théorie des séries de Fourier par exemple, mais on ne sait pas si le nombre $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \sim 1,202057$ est un nombre rationnel.]

3- Donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ et la calculer.

Même question pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} du$, pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} ds$ et pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-|y|} dy$.

Exercice 6 : intégrale d'une fonction vectorielle

1- Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \begin{pmatrix} e^{-2x} \sin x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} \end{pmatrix}.$$

Calculer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\pi/2} f(t)dt$.

2- Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ continues. On note $u.v$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$. Est-il vrai que si a et b sont des réels,

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right).\left(\int_a^b g(t)dt\right) \ ?$$

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 2 : réponses

Exercice 1 Par exemple : essayer le triangle de la corde au dessus de $[0, 1]$. On trouve un minorant d'environ $1, 8$.
Essayer les trapèzes sous les cordes $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. On trouve que l'aire est $\geq 2, 1$.
La réponse est oui. Les machines donnent $\int_0^1 \exp\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx \approx 2,243950501$.
Fait pour toucher du doigt le sens d'une intégrale, indépendamment du calcul de primitive. Pour la convexité, si on cherche à être complet, on calcule la dérivée seconde et on admet que le graphe est au dessus de ses cordes.

Exercice 2
1- $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$ et $\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^1 x^2 dx = \frac{1}{4}$.

2- $\int_x^{x+3} t(2-t)dt = -3x(x+1)$. La réponse est oui, et les deux seuls réels qui répondent à la question sont 0 et -1.
$\frac{1}{3}\int_x^{x+3} t(2-t)dt = a$ si, et seulement si $x^2 + x + a = 0$. La réponse est oui ssi $a \leq \frac{1}{4}$.

3- $\frac{1}{2}\int_a^{a+2}(x^3 - 2x^2 + 1)dx = a^3 + a^2 + \frac{1}{3}$. Ce polynôme de degré 3 en a a bien sûr une racine réelle. Si on veut, tracer le graphe pour voir qu'il n'y en a qu'une seule.

Exercice 3
1.2- L'aire du secteur est $R^2\frac{\Theta}{2}$.

3- L'aire de l'ellipse est πab.

2- $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = 2\arctan(\sin x) - \sin x + C$.

3- $\int_0^t \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})(1+e^x)} = -\frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log(1+e^{2t}) + \frac{1}{2}\arctan e^t + \frac{1}{2}\log(1+e^t)$.

Exercice 4 : $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Exercice 5
3- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|}du = 2$, $\int_{-\infty}^{+\infty} se^{-s^2}ds = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-|y|}dy = 0$.

Exercice 6 : Une primitive de f est $x \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x)e^{-2x} \\ \ln(1+\sqrt{x}) \end{pmatrix}$.

$\int_1^{\pi/2} f(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(e^{-2}\cos 1 + 2e^{-2}\sin 1 - 2e^{-\pi}\right) \\ \ln\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \ln 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,043 \\ 0,812 \end{pmatrix}$.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 3

Exercice 1 : primitives de fractions rationnelles

1- Les briques
Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul. Trouver les primitives des fonctions

$$x \mapsto x^n,\ x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n},\ x \mapsto \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}.$$

Donner une méthode algorithmique de calcul des primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$$

si n est un entier naturel quelconque. Soient u et v des nombres réels, n un entier naturel et P un polynôme unitaire de degré 2 sans racine réelle. Montrer comment le calcul des primitives de

$$x \mapsto \frac{ux+v}{P(x)^n}$$

se ramène aux calculs précédents.

2- La décomposition en éléments simples : énoncé
Le théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples stipule que *toute fraction rationnelle à coefficients réels se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire d'*éléments simples*, c'est-à-dire de "fractions-briques" de la liste du* **1-**.
Autrement dit, *toute fraction rationnelle à coefficients réels s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme finie*

$$P(x) + \sum \frac{a}{(x-b)^m} + \sum \frac{cx+d}{[(x-e)^2+f^2]^n}$$

où P est un polynôme, les sommes étant indexées par des ensembles finis de nombres réels a, b, c, d, e, f, g et de nombres entiers naturels non nuls m et n.

3- Quelques gammes qui tentent de faire le tour
Calculer des primitives des fractions rationnelles suivantes.
(i) Pôles simples

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-2)} \ ; \ \frac{x^3-x+1}{x(x-1)} \ ; \ \frac{x^3}{x^2-4} \ ; \ \frac{3}{x^2-4x-5} \ ; \ \frac{2x^3+1}{x(x^2+6x+5)(x^2-9)}.$$

(ii) Pôles simples non réels

$$\frac{x^3-2}{x^2+1} \quad ; \quad \frac{x}{x^2+x+1} \quad ; \quad \frac{-10x}{(x^2+4)(x+1)}.$$

(iii) Pôles multiples
[Dans le cas des pôles simples, pour trouver la décomposition en éléments simples, on évalue le coefficient du terme de plus haut degré, on fait la différence, on recommence. Passer par $\mathbb{C}$ pour les pôles non réels.]

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} \quad ; \quad \frac{x^2+1}{(x-1)^7} \quad ; \quad \frac{2x^2+x-1}{(x-1)^3(x+1)^2} \quad ; \quad \frac{1+x}{(x^2+x+1)^2} \quad ; \quad \frac{16}{(x^2+1)^3(x-1)^2}$$

Exercice 2 : exponentielle réelle

1- En n'utilisant que les opérations élémentaires $+, -, \times, \div$ de la machine à calculer, donner trois décimales exactes de $e^{1/5}$, de e^3 et de e^{10}.

Pour argumenter le résultat, on pourra s'appuyer sur l'inégalité vue en cours (qui peut elle-même se démontrer à partir de la formule de Taylor-Lagrange à reste intégrale)

$$\left|\exp z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}.$$

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

qui est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor à l'origine de la fonction *exponentielle*. Sur une machine graphique, faire représenter, sur un même dessin, la fonction exponentielle ainsi que les fonctions S_1, S_2,..., S_8 sur l'intervalle $[-5; 3,5]$.

Faire le même exercice avec la fonction *sinus* et ses cinq premiers polynômes de Taylor à l'origine, sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z| = e^{\Re(z)} \quad \text{et} \quad \frac{e^z}{|e^z|} = e^{i\Im(z)}.$$

Donner un argument de e^z. Calculer les parties réelle et imaginaire de $\exp(z)$ en fonction des parties réelle et imaginaires de z.
En dérivant $t \mapsto e^{it}$, retrouver les dérivées des fonctions trigonométriques.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 3 : réponses

Exercice 1 : primitives de fractions rationnelles

1- Les briques

• Dans l'ordre, $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $\dfrac{-1}{n+1}\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}$, $\dfrac{-1}{2(n+1)}\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ si $a \neq 0$.

• Premier exemple générique avec $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ que l'on écrit

$$\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - x\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

avant d'intégrer le second terme par parties en dérivant le x. On trouve $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C$. Si $a \neq 0$, on généralise ce truc-là en écrivant

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}x\frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

ce qui donne une méthode récursive de calcul de ces primitives (lourdingue mais ça marche toujours).

• Puisque P n'a pas de racine réelle, il s'écrit de la forme $a\left[(x-b)^2+c^2\right]$. En posant $y = x-b$ comme nouvelle variable, quitte à multiplier par une constante *ad hoc*, on se ramène au cas de $\dfrac{dy+e}{(y^2+c^2)^n}$, déjà vu.

3- Quelques gammes qui tentent de faire le tour

(i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x+1)(x-2)}dx = -\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-2| + C.$

$\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{x(x-1)}dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \ln x + \ln|x-1| + C.$

$\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x^2-4| + C.$

$\displaystyle\int \frac{3}{x^2-4x-5}dx = \frac{1}{2}\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$

$\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x(x^2+6x+5)(x^2-9)}dx =$

$\frac{55}{576}\ln|x-3|+\frac{53}{72}\ln|x+3|-\frac{1}{45}\ln|x|-\frac{249}{320}\ln|x+5|-\frac{1}{32}\ln|x+1|+C$ (on se marre comme on peut).

(ii) $\int \frac{x^3-2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\arctan x+C.$

$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+C.$

$\int \frac{-10x}{(x^2+4)(x+1)}dx = -\ln(x^2+4)-4\arctan\frac{x}{2}+2\ln|x+1|+C.$

(iii) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx = -\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln|x-1|+C.$

$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^7}dx = \frac{-2}{5(x-1)^5}-\frac{1}{3(x-1)^6}-\frac{1}{4(x-1)^4}+C.$

$\int \frac{2x^2+x-1}{(x-1)^3(x+1)^2}dx = \frac{-3}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8}\ln|x-1|+\frac{3}{8}\ln|x+1|+C.$

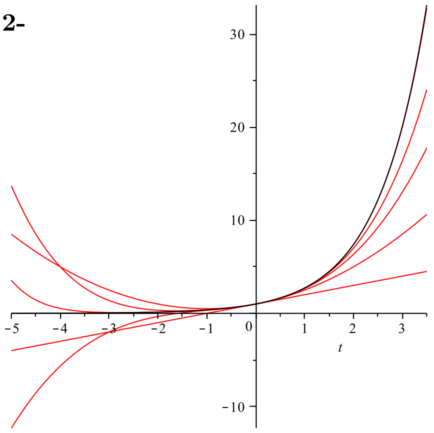
$\int \frac{1+x}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+C.$

$\int \frac{16}{(x^2+1)^3(x-1)^2}dx = \frac{-2}{x-1}-6\ln|x-1|+3\ln(x^2+1)+6\arctan x+\frac{2x-4}{x^2+1}-\frac{2}{(x^2+1)^2}+C.$

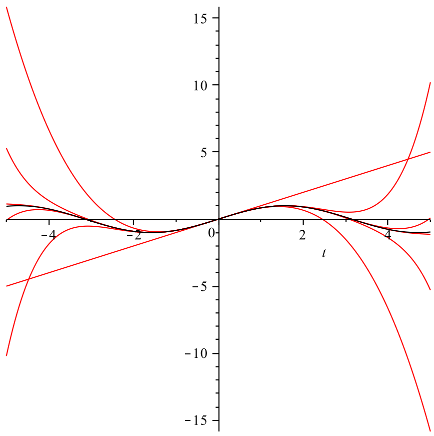
Exercice 2 : exponentielle réelle

1- $e^{1/5}=1,221\ldots$, $e^3=20,085\ldots$ et $e^{10}=22\ 026,465\ldots$.

2-



3-



UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 4

Exercice 1- Des gammes

Intégrer les équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes. Dans chaque cas, donner l'allure de la famille des courbes intégrales.

(i) $y' + 2xy = e^{-x^2}$;
(ii) $y' + 7y = e^{-2x}$;
(iii) $y' + 7y = e^{-7x}$
(iv) $y' + 7y = x^2 e^{-7x}$
(v) $y' \cos x - y \sin x = 2x$
(vi) $y' x \ln x = y + 3x^3 \ln^2 x$
(vii) $y' = ye^x + 2xe^{e^x}$
(viii) $y' + xye^x = e^{(1-x)e^x}$

Exercice 2- Equations de Bernoulli

Ce sont les équations différentielles d'ordre 1 non linéaires de la forme

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$$

où n est un entier différent de 0 et de 1. On se ramène à une équation linéaire en effectuant le changement de fonction

$$z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}.$$

2.1- Un exemple

Montrer que si f est une solution de l'équation

$$y' - xy = -xy^3 \tag{1}$$

qui s'annule en un point, alors f est la fonction constante égale à 0. Si y est une solution non nulle de (1), on note z la fonction

$$z : x \mapsto \frac{1}{y(x)^2}.$$

Montrer que z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$z' + 2xz = 2x. \tag{2}$$

Intégrer (2), puis intégrer (1).

2.2- (Examen juin 2012)

Ce problème consiste à résoudre l'équation différentielle non linéaire

$$y'(x) + e^x y(x) = -xy(x)^2. \tag{3}$$

(i) On suppose que y est une solution de (3) qui ne s'annule pas. Pour tout nombre réel x en lequel y est définie, on pose alors

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Montrer que z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre

$$z'(x) - e^x z(x) = x. \tag{4}$$

(ii) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène $z' - e^x z = 0$.

(iii) Montrer que l'application f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{e^x} \int_0^x t e^{-e^t} dt$$

est une solution de (4).

(iv) Résoudre (4).

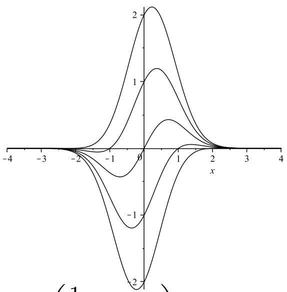
(v) En remarquant qu'une solution non identiquement nulle de (3) ne s'annule jamais, utiliser les questions **(i)** et **(iv)** pour donner la solution générale de l'équation (3).

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

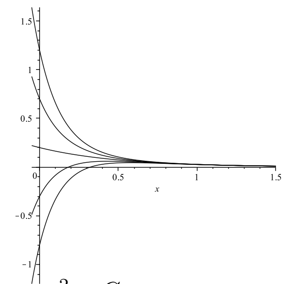
Feuille d'exercices numéro 4 : réponses

Exercice 1- Des gammes

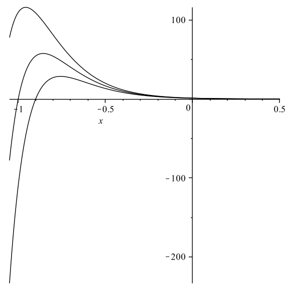
(i) $(x+C)e^{-x^2}$



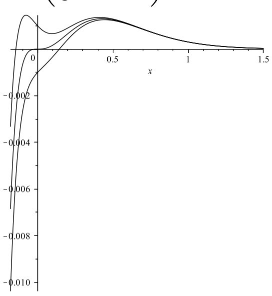
(ii) $\left(\frac{1}{5}e^{5x}+C\right)e^{-7x}$



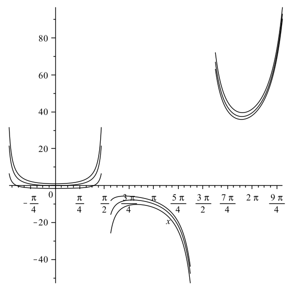
(iii) $(x+C)e^{-7x}$



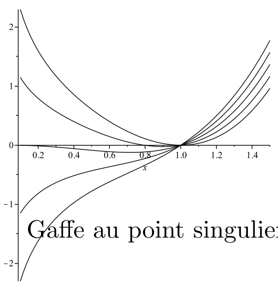
(iv) $\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)e^{-7x}$



(v) $\dfrac{x^2+C}{\cos x}$

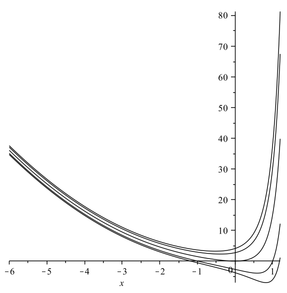


(vi) $\left(x^3+C\right)\ln x$

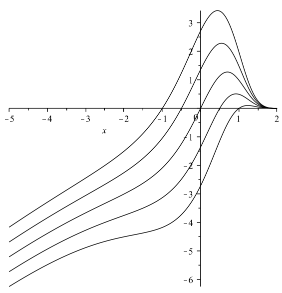


Gaffe au point singulier en 1 !

(vii) $\left(x^2+C\right)e^{e^x}$



(viii) $(x+C)e^{(1-x)e^x}$



Exercice 2- Equations de Bernoulli

2.1- Solutions de (2) : $1 + Ce^{-x^2}$.
Solutions de (1) : $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + Ce^{-x^2}}}$.

2.2-
(ii) Ce^{e^x}.
(iv) $f(x) + Ce^{e^x}$.
(v) $\dfrac{1}{f(x) + Ce^{e^x}}$.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 5

Exercice 1- De l'importance de la condition de Cauchy

Montrer que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction

$$f_C : x \mapsto C^2 - \sqrt{x^4 + C^4}$$

est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left(x^4 + y^2\right) y' = 4x^3 y \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tracer sur un même dessin les graphes d'une famille de fonctions f_C. Calculer la dérivée partielle selon y de

$$(x, y) \mapsto \frac{4x^3 y}{x^4 + y^2}$$

et montrer qu'elle n'est pas bornée au voisinage de $(0, 0)$ (on pourra par exemple calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$).

Exercice 2- Equations à variables séparables

2.1- Trouver la solution (maximale) de l'équation différentielle

$$(1 + e^x)\, yy' = e^x$$

qui vérifie $y(0) = 1$. Pouvait-on en prévoir l'unicité ?

2.2- Ecrire la solution générale des solutions de l'équation différentielle

$$y' \sin x = y \ln y.$$

Quelle solution y satisfait-elle $y(\pi/2) = e$? Même question pour $y(\pi/2) = 1$.

2.3- Existe-t-il une solution f de l'équation différentielle

$$x^3 y' \sin y = 2$$

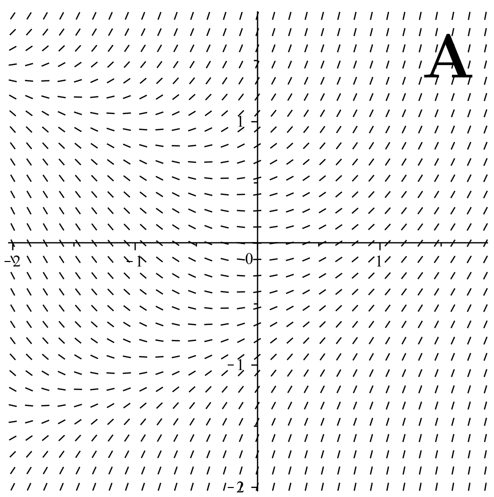
qui satisfasse $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$?

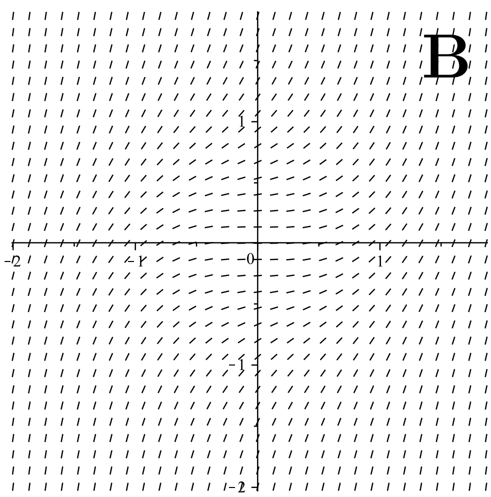
2.4- Résoudre $y' = a^{x+y}$ où a est un réel strictement positif.

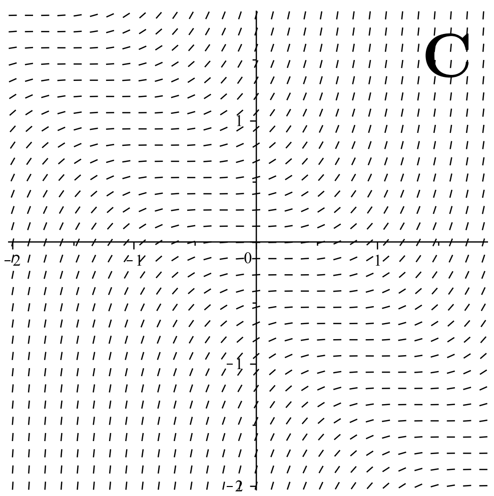
Exercice 3- (Examen janvier 2012)

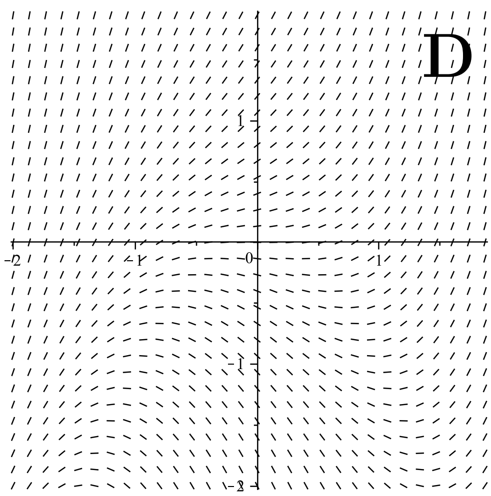
A quelles équations différentielles numérotées 1, 2, 3, et 4 correspondent les champs de tangentes numérotés A, B, C, et D ? Donner l'allure des courbes intégrales de ces équations différentielles.

(1) $y' = x + y^2$ (2) $y' = x^2 + y$ (3) $y' = (x + y)^2$ (4) $y' = x^2 + y^2$







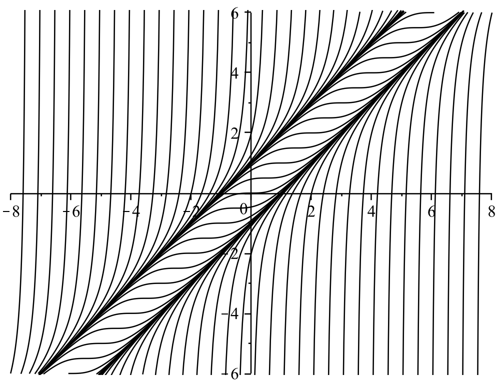


Exercice 4- (Examen juin 2012)

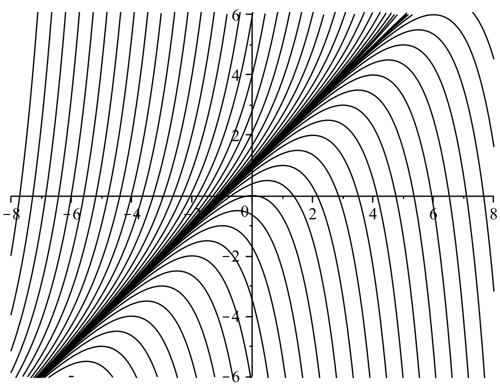
A quelles équations différentielles numérotées 1, 2, 3, et 4 correspondent les champs de courbes intégrales A, B, C, et D ?

(1) $y' = (y-x)^2$ (2) $y' = \sin(y-x)$ (3) $y' = y - \sin x$ (4) $y' = y - x$

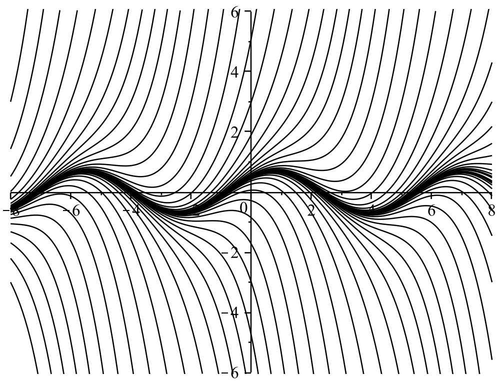
A



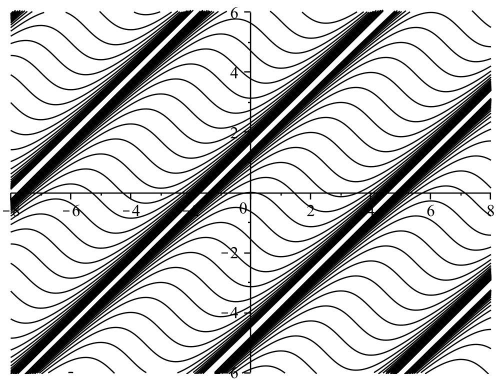
B



C



D



Exercice 5- Points singuliers

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$x(x-1)y' - (3x-1)y = \left(x^2 - 4x + 1\right) e^x \tag{1}$$

et son équation homogène associée

$$x(x-1)y' - (3x-1)y = 0. \tag{2}$$

1- Calculer toutes les solutions de (2) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. Même question pour l'intervalle $]0,1[$ et pour l'intervalle $]1,+\infty[$.

2- Soit f une solution de (2) sur $]1,+\infty[$. Calculer les limites (à droite) en 1 de f et de f'. De même, calculer les limites (à gauche) en 1 des solutions de (2) sur $]0,1[$ et de leurs dérivées. En déduire que pour tous nombres réels a et b, la fonction $f_{a,b}$ définie par

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} ax(x-1)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx(x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

est une solution de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$. Faire des dessins et étudier l'unicité des solutions au problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+^*$.

3- Soit f une solution de (2) sur $]-\infty, 0[$. Calculer

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0, x<0} f'(x).$$

De même, calculer la limite (à droite) en 0 d'une solution de (2) sur $]0,1[$ ansi que la limite (à droite) en 0 de sa dérivée. En déduire que les solutions de (2) sur $]-\infty, 1[$ sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cx(x-1)^2 \end{array}$$

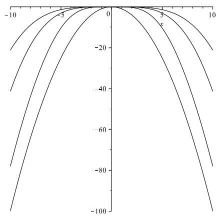
où c est un nombre réel.

4- Résoudre (1) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Résoudre (2) et (1) sur $\mathbb{R}$.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 5 : réponses

Exercice 1



Exercice 2- Equations à variables séparables

2.1- On passe par $y^2/2 = \ln(1+e^x) + C$, on ajuste $C = 1/2 : \ln 2$, on trouve finalement $y(x) = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$. Cauchy-Lipschitz s'applique au voisinage de $(0,1)$: l'unicité en résulte.

2.2- $y(x) = e^{C\tan(x/2)}$. Les deux solutions cherchées sont $e^{\tan(x/2)}$ et 1 (cette solution constante est singulière pour l'équadiffe).

2.3- On passe par $\cos y = 1/x^2 + C$. La condition au bord impose $C = 0$. Attention : de $\cos y = x$ on tire

$$y(x) = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2\pi n$$

où n est entier. La condition au bord rimpose $\arccos \frac{1}{x^2}$.
Existe-t-il une solution f de l'équation différentielle

$$x^3 y' \sin y = 2$$

qui satisfasse $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$?

2.4- $-\frac{\ln(C - a^x)}{\ln a}$.

Exercice 3- A1, B4, C3, D2.

Exercice 4- A1, B4, C3, D2.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 6

Exercice 1 : des gammes

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AC, AE, BC, BE, C^2, CE, DA, D^2, DG, EB, EF, FA, FD, FG, GB, GF.

Exercice 2 : des gammes encore

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1- Soit P le polynôme $P(X) = X^7 + 3X^3 - X - 2$. Calculer $P(M)$.

2- Soient $U = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que U et V sont des vecteurs propres de M.

3- Calculer $M^4 - I_2$.

Exercice 3 : . . . et encore

1- Soient $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer S^2, S^3 et, plus généralement, tout les S^n, $n \in \mathbb{N}$. Montrer successivement que U et V sont des vecteurs propres de S, respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, que P est inversible et que son inverse est

$$P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et enfin que $P^{-1}SP$ est une matrice diagonale.
[Remarque : cet exercice est une gamme au sens où il consiste à vérifier que S est diagonalisable en calculant une base de vecteurs propres (U, V) et une matrice de passage P, donnés par l'énoncé). Le cours contient une méthode de calcul de matrices U, V et P qui conviennent en passant par le polynôme caractéristique de S.]

2- Soient $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer CP et PD. En remarquant que P est inversible, en déduire que C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que C est semblable à D.
[Pour montrer que P est inversible, on pourra montrer que son déterminant n'est pas nul en le calculant, ou encore montrer que transposer P, diviser par 4 et prendre le conjugué des coefficients de la matrice obtenue fournit l'inverse de P. Ce calcul de l'inverse est un cas très particulier (C est une matrice d'isométrie en dimension 4).]
Calculer C^4 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si r est le reste de la division euclidienne de n par 4, alors $C^n = C^r$. Calculer C^2 et C^3. Que vaut C^{-1} ?

Exercice 4 : Quelques polynômes de matrices

1- Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
On note I_2 la matrice identité de dimension 2. Calculer $A^2 - 7A + 13I_2$.

2- Plus généralement, montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et si

$$\chi(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc,$$

alors $\chi(M)$ est la matrice nulle de dimension 2.
[Cet exercice démontre le théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2. Ce théorème affirme que si χ est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M de dimension quelconque, alors $\chi(M)$ est la matrice nulle.]

3- Soient $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Démontrer que $F = RDR^{-1}$ (on pourra montrer, c'est plus simple, que R est inversible et que $FR = RD$). Quelles sont les valeurs propres de F ? Donner, sans calcul, une base de vecteurs propres de F. La matrice F est-elle inversible ? Calculer D^n pour tout entier naturel n. Calculer F^2 et, plus généralement, F^n pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est n'importe quel polynôme à coefficients réels, alors

$$P(F) = R \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & P(-\sqrt{2}) \end{pmatrix} R^{-1}.$$

4- Matrices nilpotentes
Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, M^2 et M^3. Plus généralement, calculer $P(N)$ et $P(M)$ pour n'importe quel polynôme P à coefficients complexes.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 7

Exercice 1 : des déterminants

1- Ecrire une matrice carrée de dimension 2 sans coefficent nul et calculer son déterminant. Parmi les matrices carrées de dimension 2 dont les coefficients sont tous égaux à 1 ou 2, quelles sont celles qui ont le plus grand déterminant ?

2- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & \pi - 14 \\ 0 & 1/14 & e^{-2}\ln 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det(AB)$ et $\det\left(A^3\right)$. Les matrices A, B et C sont-elles inversibles ? Dans l'affirmative, calculer $\det(M^n)$ pour $M \in \{A, B, C\}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 : van der Monde

1- Soient x et y des nombres complexes. Calculer

$$V_2(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}.$$

2- Si x, y et z sont des nombres complexes, justifier le calcul suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 - zx \\ 1 & y & y^2 - zy \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x - z & x(x-z) \\ 1 & y - z & y(y-z) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et en déduire que

$$V_3(x, y, z) := \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)V_2(x, y) = (x-z)(y-z)(x-y).$$

3- Généraliser le calcul ci-dessus en montrant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres complexes,

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)$$

(le symbole $\prod$ désigne le produit au même titre que le symbole $\sum$ désigne la somme).

Exercice 3 : inverser des matrices

1- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée à coefficients complexes dont le déterminant est non nul. Montrer que

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Retenir cette formule pour gagner en temps et en commodité.

2- Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x+y = x' \\ -2x+z = y' \\ 2y-z = z' \end{cases}$$

et en déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3- Calculer l'inverse de la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en résolvant, comme en **2-**, un système linéaire *ad hoc*.

Exercice 4 : calculs de polynômes caractéristiques

Calculer les polynômes caractéristiques et les valeurs propres de toutes les matrices carrées des exercices des deux feuilles d'exercices 6 et 7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & \pi - 14 \\ 0 & 1/14 & e^{-2}\ln 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 8

Exercice 1 : question indiscrète

S'assurer de bien comprendre pourquoi, si A est une matrice carrée et P une matrice carrée inversible de même dimension, alors pour tout nombre réel t,

$$P \exp(tA) P^{-1} = \exp\left(tPAP^{-1}\right).$$

Exercice 2 : diagonalisation, exponentielle

Pour chacune des matrices (elles sont diagonalisables) ci-dessous,
- établir la liste des valeurs propres (et de leurs multiplicités) ;
- donner une base de vecteurs propres ;
- écrire une matrice diagonale D et calculer une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$;
- calculer $\exp(tA)$ pour tout nombre réel t.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; (iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; (iv) $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : exponentielle d'une matrice non diagonalisable

Soient a un nombre complexe et $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que $J = aI_2 + N$ et que les matrices J, N et aI_2 commutent. Dire avec soin pourquoi les matrices N et J ne sont pas diagonalisables. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de N et de J.

2- Calculer N^p pour tout entier naturel p. Calculer J^2, J^3 et, plus généralement, J^p pour tout entier naturel p.

3- Calculer $\exp(tN)$ et $\exp(tJ)$, pour tout nombre réel t.

4- On pose maintenant $K = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer les vecteurs propres de K et en déduire que K n'est pas diagonalisable. Montrer que $Q^{-1}KQ$ est une matrice triangulaire que l'on note T. Calculer successivement $\exp(tT)$ puis $\exp(tK)$ pour tout nombre réel t.

Exercice 4 : une exercice en dimension 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(xA)$ pour tout nombre réel x.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 8 : réponses

Exercice 2 : diagonalisation

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Valeurs propres $-1, 1$, base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$.

(ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Valeurs propres (complexes) $i, -i$, base de vecteurs propres (complexes) $\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Valeurs propres $-1, 5$, base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{5t} & -2e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & e^{-t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}$.

(iv) $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valeurs propres $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\phi' \end{pmatrix}\right)$, $D = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\phi & 1+\phi' \end{pmatrix}$,

$$\exp tA = P\exp(tD)P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10}e^{\phi t} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}e^{\phi' t} & \frac{\sqrt{5}}{5}\left(e^{\phi t} - e^{\phi' t}\right) \\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(e^{\phi t} - e^{\phi' t}\right) & \frac{5+3\sqrt{5}}{10}e^{\phi t} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}e^{\phi' t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : exponentielle d'une matrice non diagonalisable

1- Argument de non diagonalisabilité (ouf !) avant le calcul des vecteurs propres : N est trigonale ; ses valeurs propres se lisent sur la diagonale ; si N était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle ; niet. *Idem* pour J.
Vecteurs propres de N (et de J) : la droite $\mathbb{C}.^t(1,0)$.

2- $N^p = 0_2$ pour tout entier naturel $p \geq 2$. Avec la formule du binôme de Newton, puisque aI_2 et N commutent, $J^2 = a^2 I_2 + 2N$, $J^3 = a^3 I_2 + 3N$ et, plus généralement, $J^p = a^p + pN$ pour tout entier naturel p.

3- $\exp(tN) = I_2 + tN$ et $\exp(tJ) = \exp(atI_2)\exp(tN) = e^{at}(I_2 + tN)$.

4- -2 est valeur propre double de K et n'admet qu'une droite propre : $\mathbb{R}^t(2,1)$. Calcul : $Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = T$. Comme dans la première partie de l'exercice,

$$\exp(tT) = e^{-2t}(I_2 + tN) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(tK) = Q\exp(tT)\,Q^{-1} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : une exercice en dimension 3

Successivement, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, trois valeurs propres distinctes 0, $2i$ et $-2i$, matrice de passage possible $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

On conjugue, on simplifie, on trouve

$$\exp(xA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos 2x & -2\sin 2x & 1-\cos 2x \\ \sin 2x & 2\cos 2x & -\sin 2x \\ 1-\cos 2x & 2\sin 2x & 1+\cos 2x \end{pmatrix}.$$

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 9

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire réelle d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme
$$y'' + ay' + by = m(x) \tag{1}$$
où a et b sont des nombres réels et m une fonction continue à valeurs réelles. La théorie de ces équations est développée en cours. Cet exercice en récapitule un algorithme de résolution, que l'on peut retenir et utiliser tel quel.

1 L'équation homogène associée

C'est l'équation
$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2}$$
On la résout *directement* de la manière suivante. On considère d'abord l'équation polynomiale de degré deux, appelée l'*équation caractéristique* de (2) suivante :
$$X^2 + aX + b = 0, \tag{3}$$
et on la résout.

Premier cas : l'équation (3) a deux racines *réelles et distinctes* que l'on note u et v.
Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b > 0$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto Ae^{ux} + Be^{vx}$$
où A et B sont des constantes réelles.

Deuxième cas : l'équation (3) a une racine *double* que l'on note r.
Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b = 0$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto Ae^{rx} + Bxe^{rx}$$
où A et B sont des constantes réelles.

Troisième cas : l'équation (3) deux racines *complexes non réelles* que l'on note $\sigma + i\omega$ et $\sigma - i\omega$ où σ et ω sont des nombres réels.
Noter que cela se passe si et seulement si $a^2 - 4b < 0$ et que les racines de (3) sont alors nécessairement conjuguées dans $\mathbb{C}$. Alors, les solutions de (2) sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto Ae^{\sigma x}\cos(\omega x) + Be^{\sigma x}\sin(\omega x)$$
où A et B sont des constantes réelles.

2 Solution générale de l'équation avec second membre

Si $x \mapsto A\phi(x) + B\psi(x)$ est la solution générale de l'équation homogène (2) et si $\mapsto f(x)$ est n'importe quelle solution de l'équation avec second membre (1), alors la solution générale de l'équation avec second membre (1) est

$$x \longmapsto f(x) + A\phi(x) + B\psi(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

On retient parfois le slogan suivant : *la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution "particulière" de l'équation avec second membre.*

Il reste, pour finir de résoudre (1), à en trouver une solution "particulière" f. C'est à cela que l'on utilise la méthode de variation des constantes de la section suivante.

3 Méthode de variation des constantes

Une fois trouvée la solution générale $x \mapsto A\phi(x)+B\psi(x)$ de l'équation homogène (2), on cherche une solution particulière $x \mapsto f(x)$ de (1) qui vérifie simultanément

$$\begin{cases} f(x) = A(x)\phi(x) + B(x)\psi(x) \\ \text{et} \\ f'(x) = A(x)\phi'(x) + B(x)\psi'(x) \end{cases}$$

où $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ sont des fonctions deux fois continûment dérivables. En calculant f à partir de la première de ces formules d'une part, en reportant dans (1) d'autre part, on obtient le système de deux équations linéaires en A' et B'

$$\begin{cases} \phi(x)A'(x) + \psi(x)B'(x) = 0 \\ \text{et} \\ \phi'(x)A'(x) + \psi'(x)B'(x) = m(x) \end{cases}$$

qui admet toujours des solutions (car ϕ et ψ ne sont pas proportionnelles). On trouve ainsi des fonctions A' et B', dont il suffit de calculer des primitives pour obtenir des fonctions A et B qui fournissent une solution particulière $x \mapsto A(x)\phi(x) + B(x)\psi(x)$ de (1).

4 Gammexercices

1- Vérifier que $2+\frac{1}{5}(\cos x-\sin x)e^{-x}$ est une solution de l'équation $y''-3y'+2y = 4+2e^{-x}\cos x$ et résoudre cette dernière.

2- Résoudre $y''-9y = \frac{1}{e^{-3x}+1}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

3- Résoudre $y''+y = \frac{1}{\cos x}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

4- Résoudre $y''-2y'+y = \frac{e^x}{x^2+1}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

5- Résoudre les équations $y''+2y'+5y = 5x\sin x$; $y''+4y'+3y = 2x+1$; $y''+6y'+9y = e^{-3x}$.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 9, réponses

Gammexercices

1- Vérifier que $2 + \frac{1}{5}(\cos x - \sin x)e^{-x}$ définit une solution de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x}\cos x$ et résoudre cette dernière.

Solutions : $2 + \frac{1}{5}(\sin x - \cos x)e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

2- Résoudre $y'' - 9y = \frac{1}{e^{-3x}+1}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

Solutions : $\frac{1}{18}\left(-1 + e^{-3x}\log\left(1 + e^{3x}\right) - e^{3x}\log\left(1 + e^{-3x}\right)\right) + C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$.

3- Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

Solutions : $C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x.\ln(\cos x)$.

4- Résoudre $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ en utilisant la méthode de variation des constantes pour chercher une solution particulière.

Solutions : $C_1e^x + C_2xe^x + \frac{e^x}{2}\left(2x\arctan x - \ln\left(1 + x^2\right)\right)$.

5.1- $y'' + 2y' + 5y = 5x\sin x$

Solutions : $C_1e^{-x}\cos(2x) + C_2e^{-x}\sin(2x) + \frac{1-5x}{10}\cos x + \frac{-7+10x}{10}\sin x$.

5.2- $y'' + 4y' + 3y = 2x + 1$

Solutions : $C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}x$.

5.3- $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$

Solutions : $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{2}x^2e^{-3x}$.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 10

Exercice 1 : un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 3y(t) + te^{3t} \\ y'(t) = -18x(t) + 11y(t) + 2te^{-2t} + t^2 \end{cases} \tag{1}$$

1- Mettre ce système sous forme vectorielle $U'(t) = AU(t) + G(t)$ où $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, A est une matrice carrée de dimension 2, et $G(t)$ un vecteur-colonne.

2- Résoudre le système homogène associé.

3- Appliquer la méthode de variation de la constante (vectorielle) pour trouver la solution générale du système (1).

Exercice 2 : un autre système différentiel linéaire

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + te^{-5t} \\ y'(t) = x(t) - z(t) + 2t \\ z'(t) = 2y(t) - \ln t. \end{cases}$$

On pourra l'écrire sous forme vectorielle et résoudre l'équation linéaire vectorielle d'ordre 1 non homogène obtenue, en suivant la méthode générale de résolution de ces équations. En particulier, on pourra chercher une solution particulière par la méthode de variation des constantes.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Feuille d'exercices numéro 10 : réponses

Exercice 1 : un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 3y(t) + te^{3t} \\ y'(t) = -18x(t) + 11y(t) + 2te^{-2t} + t^2. \end{cases}$$

Solutions du système homogène associé

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{5t} \\ y = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Solutions du système avec second membre (quel bonheur !)

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{5t} + \dfrac{3}{10}t^2 + \dfrac{21}{50}t + \dfrac{117}{500} + e^{3t}\left(4t - \dfrac{5}{2}\right) + e^{-2t}\left(\dfrac{3}{14}t + \dfrac{33}{392}\right) \\ \\ y = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{5t} + \dfrac{2}{5}t^2 + \dfrac{19}{25}t + \dfrac{113}{250} + e^{3t}\left(9t - \dfrac{9}{2}\right) + e^{-2t}\left(\dfrac{1}{7}t + \dfrac{25}{196}\right). \end{cases}$$

Exercice 2 : un autre système différentiel linéaire

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + te^{-5t} \\ \\ y'(t) = x(t) - z(t) + 2t \\ \\ z'(t) = 2y(t) - \ln t. \end{cases}$$

Solutions du système homogène

$$\begin{cases} x = C_1t^2 + 2C_2t + C_3 \\ y = C_1t + C_2 \\ z = C_1t^2 + 2C_2t + C_3 - C_1. \end{cases}$$

Solutions du système avec second membre (quel bonheur, décidément !)

$$\begin{cases} x = C_1t^2 + 2C_2t + C_3 + \dfrac{1}{18}t^3\left(6\ln t + 1\right) - e^{-5t}\left(\dfrac{27}{125}t + \dfrac{31}{625}\right) \\ \\ y = C_1t + C_2 + \dfrac{1}{4}t^2\left(2\ln t + 1\right) + e^{-5t}\left(\dfrac{1}{25}t + \dfrac{2}{125}\right) \\ \\ z = C_1t^2 + 2C_2t + C_3 - C_1 + \dfrac{1}{18}t^3\left(6\ln t + 1\right) - t\left(\ln t - 1\right) - e^{-5t}\left(\dfrac{2}{125}t + \dfrac{6}{625}\right). \end{cases}$$

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
14 novembre 2013

Interrogation (une heure et quart)

— Les réponses doivent être rédigées sur la feuille de l'énoncé —

1 Une équation linéaire d'ordre 1 (10 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' + xy = x$.

2 Une équation à variables séparables (10 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' = 2x(1 + y^2)$.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
14 novembre 2013

Corrigé succinct de l'interrogation

1 Une équation linéaire d'ordre 1 (10 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' + xy = x$.

C'est une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre.
On résout d'abord l'équation homogène $y' + xy = 0$. Par le mécanisme habituel, on trouve que sa solution générale est $y(x) = C\exp(-x^2/2)$, $C \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire sous la forme $C(x)\exp(-x^2/2)$. En reportant, on obtient que C vérifie nécessairement $C'(x) = x\exp(x^2/2)$. Le calcul d'une primitive de $x\exp(x^2/2)$ se fait par exemple en reconnaissant une fonction de la forme $u'\exp(u)$. On voit ainsi que $C(x) = \exp(x^2/2)$ en est une : la fonction $C(x)\exp(-x^2/2) = 1$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Conclusion (venant du théorème de structure des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1) : la solution générale de l'équation $y' + xy = x$ est

$$\boxed{x \longmapsto 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

2 Une équation à variables séparables (10 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' = 2x(1 + y^2)$.

L'équation est à variables séparables puisqu'elle s'écrit

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x.$$

En intégrant des deux côtés, on obtient qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{Arctan} y(x) = x^2 + C.$$

En prenant la tangente, il vient finalement

$$\boxed{y(x) = \tan(x^2 + C), \quad C \in \mathbb{R}.}$$

C'est la solution générale de l'équation demandée.

[NB : cette solution générale est définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x^2 + C \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$

Cela n'était pas exigé.]

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
5 décembre 2013

Interrogation (une heure et quart)

— Les réponses doivent être rédigées sur la feuille de l'énoncé —

1 Sur une équation résolue (6 points)

On considère l'équation différentielle

$$y' = x\cos\left(x + y^2\right). \tag{1}$$

1.1- Si f est la solution de (1) dont le graphe passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, 0)$, calculer le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{4}$.

1.2- Montrer que si g est n'importe quelle solution de (1), le graphe de g coupe l'axe des ordonnées avec une tangente horizontale.

2 Calcul matriciel (8 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ et P le polynôme $P(X) = X^5 + X + 2$.

Calculer $P(A)$. Montrer que le vecteur-colonne $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et calculer la valeur propre associée. Montrer que B est l'inverse de A. Le vecteur-colonne V est-il aussi vecteur propre de A^{-1} ?

3 Une équation différentielle (6 points)

Résoudre l'équation différentielle $xy' + y^2 = 0$.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
5 décembre 2013

Interrogation : corrigé succinct

— Les réponses doivent être rédigées sur la feuille de l'énoncé —

1 Sur une équation résolue (6 points)

$$y' = x \cos\left(x + y^2\right). \tag{1}$$

1.1- Dire que le graphe d'une fonction f passe par le point $(\frac{\pi}{4}, 0)$ signifie que $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. Si f est solution, son nombre dérivé en $\frac{\pi}{4}$ est alors

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4} + 0^2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

1.2- Un point de l'axe des ordonnées est de la forme $(0, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Si g est la solution qui passe par ce point, elle vérifie $g(0) = a$. Mais alors, $g'(0) = 0\cos\left(0 + a^2\right) = 0$: la tangente au graphe de g en le point $(0, a)$ est horizontale.

2 Calcul matriciel (8 points)

Par le calcul, on a successivement $A^2 = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \left(A^2\right)^2 = -4I_2$. Ainsi, $P(A) = A^5 + A + 2I_2 = A.A^4 + A + 2I_2 = -4AI_2 + A + 2I_2 = -3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ -3i & 1 \end{pmatrix}$.

Par le calcul, $AV = (1-i)V$: V est vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-i$.

Par le calcul, $AB = BA = I_2$: A est inversible et $B = A^{-1}$.

Par le calcul, $A^{-1}V = BV = \frac{1+i}{2}V = \frac{1}{1-i}V$: V est vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1+i}{2} = \frac{1}{1-i}$.
[On peut aussi faire un raisonnement général suivant : si $AV = \lambda V$ et si A inversible, alors $V = \lambda A^{-1}V$, ou encore $A^{-1}V = \frac{1}{\lambda}V$.]

3 Une équation différentielle (6 points)

L'équation différentielle $xy' + y^2 = 0$ est à variable séparables : elle s'écrit encore $\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{x}$.
En intégrant, on trouve $\frac{1}{y(x)} = C + \ln|x|$ ou encore

$$y(x) = \frac{1}{C + \ln|x|},\ C \in \mathbb{R}.$$

NB : une telle solution est définie sur les intervalles $]-\infty, -e^{-C}[$, $]-e^{-C}, 0[$, $]0, e^{-C}[$ et $]e^{-C}, +\infty[$.

UVSQ 2013/2014 Nom
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Petite interro numéro 1

Exercice 1

Calculer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{4/3}}$.

Exercice 2

Soient x et s des nombres réels strictement positifs tels que $x^2 + sx - 3 = 0$. Calculer s en fonction de x.

Exercice 3

La fonction $x \longmapsto \cos\left(x^2\right)$ est-elle solution de l'équation différentielle

$$y' + 2xy = \tan\left(x^2\right) \ ?$$

UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Petite interro numéro 2

Exercice 1

La fonction $x \mapsto x^3$ est-elle solution de l'équation différentielle $y' = e^x \cos y$?

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $g(x) = x+1$. On admet que f est solution de $y' + \frac{x}{1-x^2} y = 0$ et que g est solution de $y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x}$. Donner la solution générale de $y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$ en faisant le changement de variable $u=\sqrt{t}$.

UVSQ 2013/2014 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
11 décembre 2013

Interrogation

Répondre sur la feuille de l'énoncé. Une idée : faire un brouillon d'abord ?

Exercice 1

Soient m un nombre complexe, $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} m^2-1 & 2 \\ 1 & 1+m \end{pmatrix}$.

1.1- Le produit AB a-t-il un sens ? Dans l'affirmative, calculer AB.

1.2- Le produit BA a-t-il un sens ? Dans l'affirmative, calculer BA.

Exercice 2

2.1- Calculer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto h(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

2.2- Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$2y' = 3(y-1)^2x^2. \tag{1}$$

2.3- Trouver toutes les solutions f de (1) telles que $f(0) = 2$.

UVSQ 2013/2014 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
11 décembre 2013

Corrigé succinct de l'interrogation

Exercice 1

Soient m un nombre complexe, $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} m^2-1 & 2 \\ 1 & 1+m \end{pmatrix}$.

1.1- Le produit AB a-t-il un sens ? Dans l'affirmative, calculer AB.

1.2- Le produit BA a-t-il un sens ? Dans l'affirmative, calculer BA.

1.1- Le nombre de colonnes de A n'égale pas le nombre de lignes de B. Le produit AB n'a donc pas de sens.

1.2- $BA = \begin{pmatrix} m^3-m-2 & m^2-3 & 2-2m \\ -1 & -m & 1-m^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

2.1- Calculer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto h(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

2.2- Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$2y' = 3(y-1)^2x^2. \tag{1}$$

2.3- Trouver toutes les solutions f de (1) telles que $f(0) = 2$.

2.1- $h'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.

2.2- La fonction constante égale à 1 est une solution évidente. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, aucune autre solution ne prend la valeur 1. Pour les fonctions qui ne prennent jamais la valeur 1, l'équation s'écrit $\dfrac{2}{(1-y)^2}y' = 3x^2$, qui s'intègre, en s'aidant de la question **2.1-** en

$$\frac{1+y}{1-y} = x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On tire de cette formule y en fonction de x ; on trouve ainsi la solution générale de (1) :

$$y(x) = \frac{x^3+C-1}{x^3+C+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.3- On cherche les constantes C pour lesquelles

$$\frac{C-1}{C+1} = 2.$$

En résolvant cette équation, on trouve une unique solution $C = -3$. Une seule solution de (1) convient : c'est

$$f(x) = \frac{x^3-4}{x^3-2}.$$

UVSQ 2014/2015 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie

Petite interro numéro 1

Exercice 1

Est-il vrai que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est une primitive de la fonction $x\sqrt{1+x^2}$?

Exercice 2

La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{\pi}^{x} (\sin t)^2 \, e^{-2t} dt$ est-elle croissante ?

Exercice 3

Trouver une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$.

UVSQ 2014/2015 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
15 octobre 2014

Petite interro numéro 2

Exercice 1

Soit u un nombre réel non nul. Calculer $\int_1^2 s^{u-1} ds$ en fonction de u.

Exercice 2

En procédant à une intégration par parties, calculer une primitive de $x \mapsto x \sin x$.

Exercice 3

En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

[On pourra s'il faut se rappeler que $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$.]

UVSQ 2014/2015 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
5 novembre 2014

Petite interro numéro 3

Exercice 1

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + x$ est-elle solution de l'équation différentielle $y' = (y-x)^2 + 1$?

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-x}$.

Exercice 3

Calculer la primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ qui s'annule en 0.

UVSQ 2014/2015 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
19 novembre 2014

Petite interro numéro 4

Exercice 1

Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = 1 + xy^2 - 2y$ telle que $f(1) = -1$. Donner un vecteur directeur de la tangente en 1 au graphe de f.

Exercice 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = y \sin\left(xy + y^2\right)$. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle à variables séparées $yy' = e^{-x}$.

UVSQ 2014/2015 **Nom**
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
3 décembre 2014

Petite interro numéro 5

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x, y, z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calculer XA, AY et YX.

Exercice 2

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et A^{2014}.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $D = P^{-1}AP$ et calculer A^5.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
17 octobre 2012

Examen partiel (une heure et demie)

— *Sans calculatrice ni documents* —

1 Changement de variable (4 points)

1- En effectuant le changement de variable $u = \ln x$, calculer le nombre

$$\int_1^{\exp(3)} \frac{dx}{x\big(9 + (\ln x)^2\big)}.$$

2- Trouver les primitives de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \longmapsto \frac{1}{x\big(9 + (\ln x)^2\big)}.$$

2 Intégration par parties (3 points)

Calculer la primitive de $x \mapsto x\cos(2x)$ qui prend la valeur 2 en π.

3 Nombres complexes (4 points)

En utilisant les formules d'Euler, montrer que

$$(\sin x)^4 = \frac{1}{8}\Big(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\Big).$$

En déduire une primitive de $x \longmapsto (\sin x)^4$.

4 Dérivée d'une composée (2 points)

Calculer la dérivée de la fonction

$$x \longmapsto \int_2^{x^2+x+1} \exp(-\sqrt{t})dt.$$

5 Petit problème (7 points)

1- Soit φ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = (4+x)\sqrt{1+x}.$$

Montrer que pour tout $x > -1$, la dérivée de φ s'écrit

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2+x}{\sqrt{1+x}}.$$

2- Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \int_0^x \frac{2+\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{1+t}} dt. \tag{1}$$

Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra calculer sa dérivée).

3- Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité

$$\frac{2+\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{1+t}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

et en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

4- On admet que

$$\forall t \in [0,1], \quad \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \geq t.$$

En reportant cette inégalité dans (1), démontrer que

$$f(1) \geq \int_0^1 \frac{2+t}{\sqrt{1+t}} dt$$

et calculer cette dernière intégrale en utilisant la question **1-**.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
17 octobre 2012

Examen partiel : corrigé succinct

1.1- En posant $u = \ln x$, on a $du = \frac{dx}{x}$ et $\int_1^{\exp(3)} \frac{dx}{x\left(9+(\ln x)^2\right)} = \int_0^3 \frac{du}{9+u^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{u}{3}]_0^3 = \frac{\pi}{12}$.

1.2- Par le même changement de variable, on montre que si $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t\big(9+(\ln t)^2\big)} = \int_0^{\ln x} \frac{du}{9+u^2} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\ln x}{3}\right).$$

Les primitives cherchées sont les fonctions définies sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\ln x}{3}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

2- On intègre par parties en dérivant le x et en intégrant le $\cos 2x$ dont une primitive est $\frac{1}{2}\sin 2x$. Par exemple, $\int_0^x t\cos 2t dt = [\frac{1}{2}t\sin 2t]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t dt = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$ On montre ainsi que les primitives de $x\cos 2x$ sur les intervalles sont les fonctions de la forme $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ où $C \in \mathbb{R}$. On ajuste la constante pour trouver la primitive valant 2 en π. La fonction cherchée est finalement $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{7}{4}$.

3- En utilisant les formules d'Euler, montrer que $\sin^4 x = \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4$. On développe par la formule du binôme de Newton, on regroupe les termes conjugués et on tombe sur la formule demandée. On en déduit qu'une primitive de $\sin^4 x$ est $\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3x}{8}$.

4- Par la formule de dérivation d'une fonction composée, on trouve

$$(2x+1)\exp\left(-\sqrt{x^2+x+1}\right).$$

5.1- C'est du calcul (dériver un produit, réduire au même dénominateur, simplifier).

5.2- Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{1+x}}$. Comme le sinus est supérieur ou égal à -1, le numérateur est strictement positif. Le dénominateur aussi. La dérivée de f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.3- Par le même raisonnement, puisque $\sin(\pi t/2) \geq -1$, on montre que $\frac{2+\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{1+t}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. Alors, $f(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+x} - 2 \longrightarrow +\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

5.4- De l'inégalité admise on déduit que

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2+\sin(t\pi/2)}{\sqrt{1+t}}dt \geq \int_0^1 \frac{2+t}{\sqrt{1+t}}dt.$$

La question **5.1-** montre que $\frac{2}{3}(4+t)\sqrt{1+t}$ est une primitive de $\frac{2+t}{\sqrt{1+t}}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{2+t}{\sqrt{1+t}}dt = \left[\frac{2}{3}(4+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1 = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3}.$$

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
8 janvier 2013

Examen (deux heures)

— Sans calculatrice —
— Document autorisé : énoncé de la feuille d'exercices numéro 9 —

1 Equations différentielles (6 points)

1.1- Quelle est la nature de l'équation différentielle

$$xy' + (2x - 1)y = 0 \text{ ?} \tag{1}$$

Résoudre l'équation (1).

1.2- Quelle est la nature de l'équation différentielle

$$y' + \left(2 - \frac{1}{x}\right) y = \frac{2x^2 e^{-2x}}{1 + x^2} \text{ ?} \tag{2}$$

Trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (2).

1.3- On considère l'équation différentielle non linéaire

$$x\left(1 + x^2\right) y' + (1 - 2x)\left(1 + x^2\right) y = -2x^3 e^{-2x} y^2. \tag{3}$$

Montrer que si $x \mapsto y(x)$ est une solution de (3) qui ne s'annule pas, alors la fonction

$$z : x \longmapsto \frac{1}{y(x)}$$

est une solution de (2).

1.4- Résoudre l'équation (3) sur les intervalles de $\mathbb{R}_+^*$.

1.5- Bonus : trouver, en argumentant, toutes les solutions de (3) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annulent en au moins un point.

2 Exponentielle de matrice (5 points)

Soit A la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1- Calculer les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres de A. Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

2.2- Calculer $\exp(xA)$ pour tout nombre réel x.

3 Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (5 points)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}\sin x. \tag{4}$$

3.1- Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-2x}(\cos x - \sin x)$ est une solution de l'équation (4).

3.2- Déterminer la solution générale de l'équation (4).

3.3- Trouver toutes les solutions f de l'équation (4) qui vérifient simultanément

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

4 Champs de courbes intégrales (4 points)

Les dessins A, B, C et D sont des champs de courbes intégrales d'équations différentielles résolues qui sont dans la liste $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ci-dessous. En argumentant soigneusement, trouver les équations qui correspondent aux dessins A, B, C et D.

(1) $y' = (y - x)\ln\left(1 + x^2\right)$

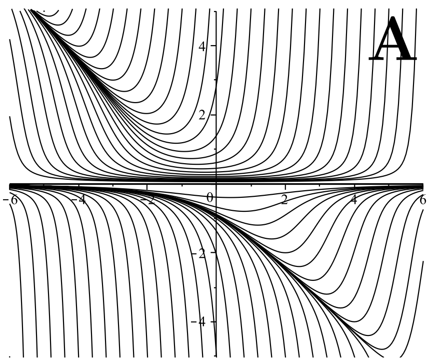
(2) $y' = (y + x)\ln\left(1 + x^2\right)$

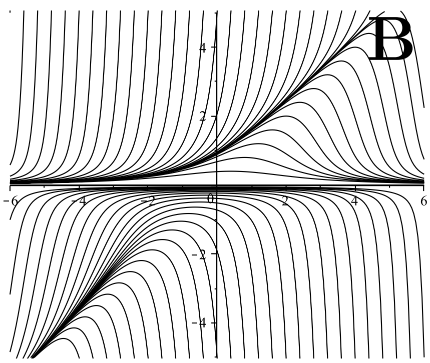
(3) $y' = (x - y)\ln\left(1 + x^2\right)$

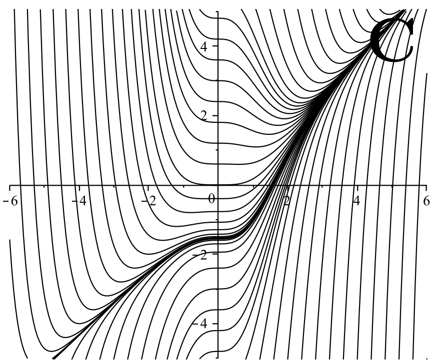
(4) $y' = (y - x)\ln\left(1 + y^2\right)$

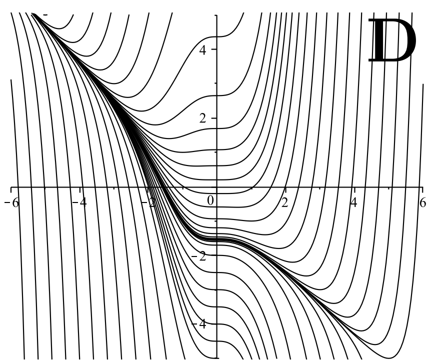
(5) $y' = (y + x)\ln\left(1 + y^2\right)$

(6) $y' = (x - y)\ln\left(1 + y^2\right)$









UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
8 janvier 2013

Corrigé succinct de l'examen

1 Equations différentielles (6 points)

1- L'équation différentielle $xy' + (2x-1)y = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1. Sa solution générale est
$$Cxe^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

2- L'équation $y' + \left(2 - \frac{1}{x}\right) y = \frac{2x^2e^{-2x}}{1+x^2}$ est linéaire d'ordre 1 avec second membre. Son équation homogène associée est celle de la question précédente. On peut utiliser la méthode de variation de la constante pour en trouver une solution particulière.
On trouve par exemple
$$x \longmapsto xe^{-2x} \ln\left(1 + x^2\right).$$

3- Calcul élémentaire.

4- Solution générale de l'équation linéaire $y' + \left(2 - \frac{1}{x}\right) y = \frac{2x^2e^{-2x}}{1+x^2}$:
$$xe^{-2x} \ln\left(1 + x^2\right) + Cxe^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$
Solution générale de $x\left(1+x^2\right)y' + (1-2x)\left(1+x^2\right)y = -2x^3e^{-2x}y^2$ sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$:
$$\frac{e^{2x}}{x\left(C + \ln\left(1+x^2\right)\right)},\ C \in \mathbb{R}.$$

5- Bonus : la fonction constante nulle est solution de l'équation $x\left(1+x^2\right)y' + (1-2x)\left(1+x^2\right)y = -2x^3e^{-2x}y^2$ qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, sur les intervalles, toute solution non identiquement nulle de l'équation ne s'annule jamais : seule la solution nulle s'annule.

2 Exponentielle de matrice (5 points)

Soit A la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Polynôme caractéristique de A : $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$.
Vecteurs propres associés à 2 : $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vecteurs propres associés à -1 : $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une base de vecteurs propres : par exemple $\left(\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$. En posant $P = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, on obtient $A = PDP^{-1}$.

2- Si $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xA) = P\exp(xD)\,P^{-1} = P\begin{pmatrix}e^{2x} & 0\\0 & e^{-1}\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{-x}+e^{2x} & -2e^{-x}+2e^{2x}\\-e^{-x}+e^{2x} & e^{-x}+2e^{2x}\end{pmatrix}$.

3 Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (5 points)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}\sin x. \tag{1}$$

2.1- Calcul élémentaire.

2.2- On suit la méthode habituelle de résolution, décrite dans la feuille de TD numéro 9.
Equation homogène associée : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
Equation caractéristique : $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0$.
Solution générale de l'équation homogène : $Ae^{-x} + Be^{-2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
Solution générale de l'équation (1) : $Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-2x}(\cos x - \sin x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.

2.3- Il n'y en a qu'une : $3e^{-x} + e^{-2x}(\cos x - \sin x - 3)$.

4 Champs de courbes intégrales (4 points)

On peut argumenter sur les courbes isoclines des tangentes horizontales et sur le régionnement induit sur le plan en fonction du signe de la pente des tangentes.
Les résultats : A5, B4, C3, D2.

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
20 juin 2013

Examen (deux heures)

— Sans calculatrice —
— Document autorisé : énoncé de la feuille d'exercices numéro 9 —

1 Calcul matriciel (4 points)

1.1- On note A, P et D les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = P^{-1}DP$.

1.2- Pour tout nombre réel t, calculer $\exp(tA)$.

2 Intégration (5 points)

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, calculer le nombre

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

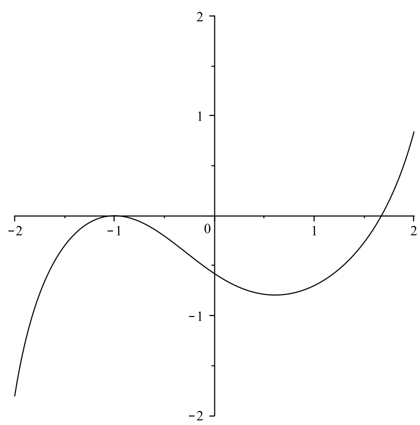
3 Etude graphique (4 points)

Le graphe de fonction dessiné ci-contre est celui d'une solution d'une des équations différentielles (a), (b) ou (c). Trouver l'équation en question en argumentant soigneusement la réponse.

(a) $y' = x^2 + y^2 - 1$

(b) $y' = -(1+x)(1+x^2+y^2)$

(c) $y' = (x+1)^2(5y+4)$



4 Une équation différentielle linéaire (7 points)

4.1- Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^{\sqrt{1+x^2}} e^{-t^2} dt.$$

Calculer la fonction dérivée de g.
[On pourra si l'on veut appliquer la formule de dérivation des fonctions composées aux fonctions $y \mapsto \sqrt{1+y^2}$ et $z \mapsto \displaystyle\int_1^z e^{-t^2} dt$.]

4.2- On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = 2xy + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1}$$

4.2.1- Ecrire et résoudre l'équation différentielle homogène associée.

4.2.2- A l'aide de la méthode de variation de la constante, trouver *une* solution de (1).

4.2.3- Ecrire la solution générale de l'équation différentielle (1).

4.2.4- Est-il vrai que la fonction $x \mapsto e^{x^2+1} g(x)$ est l'unique solution de (1) qui s'annule en 0 ?

UVSQ 2012/2013
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
20 juin 2013

Examen (deux heures)

— *Sans calculatrice* —
— *Document autorisé : énoncé de la feuille d'exercices numéro 9* —

1 Calcul matriciel (4 points)

1.1-

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = P^{-1}DP$.

1.2- $\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

2 Intégration (5 points)

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, calculer le nombre

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 4 - 2\log 3$$

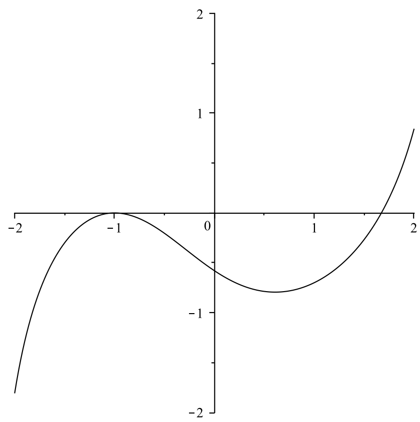
3 Etude graphique (4 points)

Le graphe de fonction dessiné ci-contre est celui d'une solution d'une des équations différentielles (a), (b) ou (c). Trouver l'équation en question en argumentant soigneusement la réponse.

(a) $y' = x^2 + y^2 - 1$

(b) $y' = -(1 + x)(1 + x^2 + y^2)$

(c) $y' = (x + 1)^2(5y + 4)$



4 Une équation différentielle linéaire (7 points)

4.1- Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^{\sqrt{1+x^2}} e^{-t^2} dt.$$

Calculer la fonction dérivée de g.

$$g'(x) = \frac{xe^{-1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.2- On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = 2xy + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1}$$

4.2.1- Ecrire et résoudre l'équation différentielle homogène associée.

$$y' = 2xy$$

Solutions Ce^{x^2}.

4.2.2- A l'aide de la méthode de variation de la constante, trouver *une* solution de (1). On intègre $C'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = eg'(x)$. Une solution particulière :

$$e^{1+x^2} g(x) = e^{1+x^2} \int_1^{\sqrt{1+x^2}} e^{-t^2} dt.$$

4.2.3- Ecrire la solution générale de l'équation différentielle (1).

$$Ce^{x^2} + e^{1+x^2} \int_1^{\sqrt{1+x^2}} e^{-t^2} dt.$$

4.2.4- Est-il vrai que la fonction $x \mapsto e^{x^2+1} g(x)$ est l'unique solution de (1) qui s'annule en 0 ?

UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
23 octobre 2013

Examen partiel
(une heure et demie)

Partie 1

Calculer toutes les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$$

(on pourra si l'on veut effectuer une intégration par parties en dérivant le logarithme).

Parmi ces primitives, y en a-t-il une dont la limite en $+\infty$ est -2 ?

Partie 2

On rappelle les formules d'Euler : pour tout réel x,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En utilisant ces formules, calculer la primitive de $x \longmapsto (\sin x)^3$ qui prend la valeur 1 en $\pi/2$.

Partie 3

Soient p et q les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$p(x) = 2x \ln\left(x^4 + 1\right) - \ln\left(x^2 + 1\right)$$

et

$$q(x) = 1 + \int_x^{x^2} \ln\left(t^2 + 1\right) dt.$$

Est-il vrai que q est une primitive de p ?

TSVP

Partie 4

4.1- Décomposer la fraction rationnelle $f(t) = \dfrac{t}{(t-1)(t+2)}$ en éléments simples.

[On pourra si l'on veut chercher deux nombres u et v tels que $f(t) = \dfrac{u}{t-1} + \dfrac{v}{t+2}$.]

4.2- Calculer une primitive de f.

4.3- Soit g la fonction de la variable réelle définie par

$$g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{2+x}}.$$

Calculer l'ensemble de définition de g.

4.4- On suppose que s et t sont deux nombres réels qui satisfont $t = \sqrt{2+s}$. Calculer s en fonction de t.

4.5- Calculer $\displaystyle\int_2^7 g(s)ds$ en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{2+s}$.

UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
23 octobre 2013

Corrigé succinct de l'examen partiel

Partie 1

Une primitive de cette fonction est par exemple $x \mapsto \int_1^x \ln t \times t^{-3/2} dt$. En intégrant par parties (on dérive $\ln t$, on intègre $t^{-3/2}$), on obtient $\int_1^x \ln t \times t^{-3/2} dt = \left[\ln t \times \left(-2t^{-1/2}\right)\right]_1^x + 2\int_1^x t^{-3/2} dt = \frac{-2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 4$. Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, les primitives de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{-2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$ où C est un nombre réel.

La limite d'une telle primitive est C en $+\infty$. Parmi ces primitives, il en existe donc une seule dont la limite en $+\infty$ soit -2 : c'est $x \mapsto \frac{-2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2$.

Partie 2

La primitive cherchée est $x \mapsto 1 + \int_{\pi/2}^x \sin^3 t dt$. En développant $\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3$ et en regroupant les termes conjugués, on obtient $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$. On en déduit que la primitive cherchée est $1 + \int_{\pi/2}^x \sin^3 t dt = 1 + \frac{1}{4}\left[-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t\right]_{\pi/2}^x = 1 - \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$.

Partie 3

Il suffit de calculer la dérivée de q, en l'écrivant par exemple sous la forme $q(x) = 1 + \int_0^{x^2} \ln\left(t^2+1\right) dt - \int_0^x \ln\left(t^2+1\right) dt$.

Il vient alors $q'(x) = 2x\ln\left((x^2)^2+1\right) - \ln\left(x^2+1\right) = p(x)$. La réponse est oui.

Partie 4

4.1- Réponse : $f(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{t-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{t+2}$.

4.2- Une primitive de f est par exemple $x \mapsto \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{2}{3}\ln|t+2|$.

4.3- $g(x)$ est défini si, et seulement si $2 + x \geq 0$ et $x + \sqrt{2+x} \neq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si $x \geq -2$ et $x \neq -1$. L'ensemble de définition cherché peut si l'on veut s'écrire $[-2, -1[\cup] - 1, +\infty[$.

4.4- Si $t = \sqrt{2+s}$, alors $s = t^2 - 2$.

4.5- Le changement de variable $t = \sqrt{2+s}$ fournit

$$\int_2^7 g(s)ds = \int_2^7 \frac{1}{s+\sqrt{2+s}} ds = \int_2^3 \frac{2t}{t^2+t-2} dt = 2\int_2^3 \frac{t}{(t-1)(t+2)} dt.$$

On conclut à l'aide de la question **4.2-** et on trouve $-2\ln 2 + \frac{4}{3}\ln 5$.

UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
9 janvier 2014

Examen
(deux heures)

1 Exponentielle de matrice (5 points)

Soient t un nombre réel, $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (le symbole i désigne l'un des deux nombres complexes dont le carré vaut -1, comme d'habitude).

1.1- Calculer les valeurs propres de A.

1.2- Montrer que F est inversible et calculer son inverse F^{-1}.

1.3- Montrer que $D = FAF^{-1}$ est diagonale et montrer soigneusement que $A = F^{-1}DF$.

1.4- Calculer $\exp(D)$ et $\exp(A)$.

2 Une équation différentielle à variables séparables (5 points)

On considère l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' \left(1 + e^{-\sqrt{x}}\right) \sqrt{x} = (3y+2)^2. \tag{1}$$

2.1- Calculer toutes les primitives de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(3t+2)^2}$ sur un intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$.

2.2- Montrer que la fonction $x \longmapsto 2\ln\left(1 + e^{\sqrt{x}}\right)$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1 + e^{-\sqrt{x}}\right)}$.

2.3- La fonction constante égale à $-2/3$ sur $]0, +\infty[$ est-elle solution de (1) ?

2.4- En s'appuyant sur les calculs des questions précédentes, trouver toutes les solutions de l'équation à variables séparables (1) qui ne prennent jamais la valeur $-2/3$.

3 Une équation différentielle non linéaire (6 points)

3.1- Question préliminaire

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre

$$z' + \frac{2x}{1+x^2} z = 2x. \tag{2}$$

3.2- Une équation de Ricatti

On considère l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$y' = \frac{3x}{2\left(1+x^2\right)^2} - 2xy^2. \tag{3}$$

3.2.1- Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{-1}{2\left(1+x^2\right)}$ est une solution de (3).

3.2.2- Soit y une solution de (3), différente de u. Expliquer pourquoi la fonction $x \longmapsto y(x) - u(x)$ ne s'annule pas.

3.2.3- Montrer que si y est n'importe quelle solution de (3) différente de u et si z est la fonction définie par

$$\forall x, \quad z(x) = \frac{1}{y(x) - u(x)},$$

alors z est solution de l'équation différentielle (2).
[On commencera par exemple par exprimer y en fonction de z et de u, puis on calculera la dérivée de y en fonction de celles de z et de u ; en reportant les expressions trouvées dans l'équation (3), on mènera enfin le raisonnement à son terme en utilisant le fait que u est solution de (3), sans jamais remplacer $u(x)$ par son expression explicite en fonction de x avant le dernier moment.]

3.2.4- En regroupant les résultats des questions **3.2.3-** et **3.1-**, donner la solution générale de (3).

4 Une étude qualitative d'équation différentielle (4 points)

4.1 Régionnement du plan

On rappelle que, dans le plan euclidien, l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $x^2 + y^2 = 9$ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.

(i) Sur deux dessins distincts qui peuvent être sommaires mais doivent être bien argumentés, hachurer la partie $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 9 > 0\}$ et le demi-plan $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0\}$.

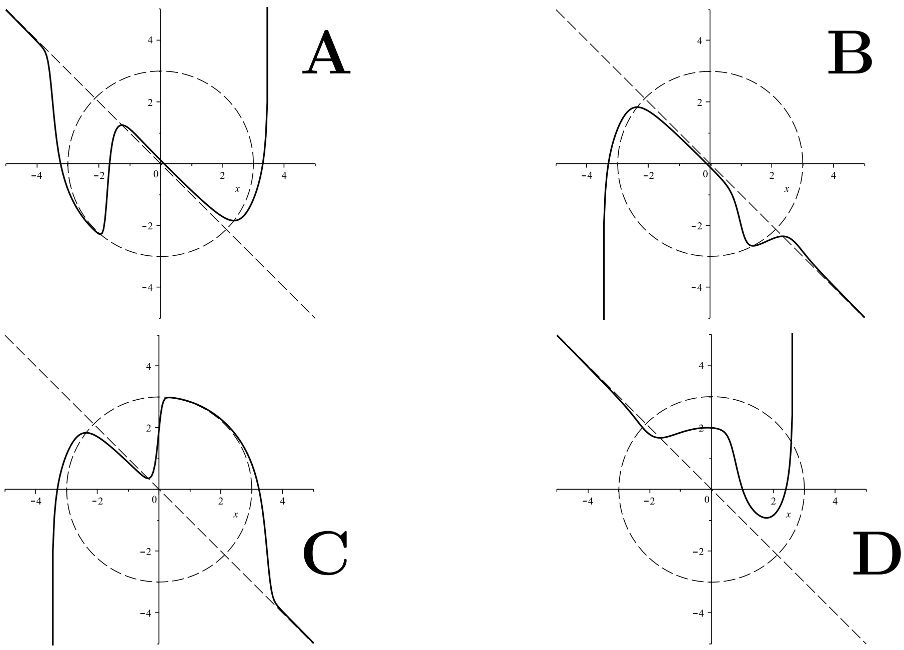
(ii) Faire un troisième dessin sur lequel apparaît $\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)(x + y) < 0\}$.

4.2 Une équation différentielle résolue

On considère l'équation différentielle résolue

$$y' = \left(x^2 + y^2 - 9\right)(x + y). \tag{4}$$

Parmi les quatre courbes du plan ci-dessous, numérotées A, B, C et D, une seule est le graphe d'une solution de (4). Déterminer laquelle, en argumentant.



UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
9 janvier 2014

Corrigé succinct de l'examen

1 Exponentielle de matrice

1.1- Le polynôme caractéristique de A est $X^2 + t^2$. Ses racines, qui sont les valeurs propres de A, sont it et $-it$.

1.2- Le déterminant de F est $2i$. Comme il n'est pas nul, F est inversible. La formule générale de l'inverse d'une matrice de dimension 2 donne $F^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3- Le calcul montre que $D = FAF^{-1} = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}$. En multipliant successivement la relation $D = FAF^{-1}$ par F^{-1} à gauche et par F à droite, on obtient $A = F^{-1}DF$.

1.4- Comme D est diagonale, $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$. Puisque $A = F^{-1}DF$, on en déduit que $\exp(A) = F^{-1}\exp(D)F = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

2 Une équation différentielle à variables séparables

2.1- Si I est n'importe quel intervalle (ouvert) de $\mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$, les primitives de $t \longmapsto \frac{1}{(3t+2)^2}$ sur I sont les fonctions $t \longmapsto \frac{-1}{3}\frac{1}{3t+2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ (forme u'/u^2 à la constante multiplicative $-\frac{1}{3}$ près).

2.2- Par la formule de dérivation des fonctions composées appliquée deux fois, on a successivement $\frac{d}{dx}\left(2\ln\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{2}{1+e^{\sqrt{x}}} \times \frac{d}{dx}\left(1+e^{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{1+e^{\sqrt{x}}}e^{\sqrt{x}} \times \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{1+e^{\sqrt{x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+e^{-\sqrt{x}}\right)}$

2.3- Oui (calcul élémentaire).

2.4- D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque $-2/3$ est une solution de (1), aucune autre solution ne prend la valeur $-2/3$. Soit y une telle fonction. Alors,

$$\frac{y'}{(3y+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+e^{-\sqrt{x}}\right)},$$

qui s'intègre au vu des questions précédentes en

$$\frac{-1}{3}\frac{1}{3y+2} = 2\ln\left(1+e^{\sqrt{x}}\right) + \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. En tirant y de cette expression, on trouve que la solution générale de (1) qui ne prend jamais la valeur $-2/3$ est

$$y(x) = \frac{1}{C - 18\ln\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)} - \frac{2}{3}$$

3 Une équation différentielle non linéaire

3.1- L'équation (2) est linéaire d'ordre 1 avec second membre. L'équation linéaire homogène qui lui est associée est $z' + \frac{2x}{1+x^2}z = 0$, dont la solution générale est $\frac{C}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante amène à $C' = 2x(1+x^2)$, qui fournit comme solution particulière $x \mapsto \frac{1}{2}(1+x^2)$ (par exemple). La solution générale de l'équation (2) est donc $z(x) = \frac{C}{1+x^2} + \frac{1}{2}(1+x^2)$, $C \in \mathbb{R}$.

3.2.1- Calcul immédiat.

3.2.2- L'équation (3) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas : la fonction $u - y$ ne s'annule pas.

3.2.3- On a successivement $y = u + \frac{1}{z}$ et $y' = u' - \frac{z'}{z^2}$. En reportant dans l'équation (3) qui s'écrit encore $y' - \frac{3x}{2\left(1+x^2\right)^2} + 2xy^2 = 0$, on obtient $0 = \left(u' - \frac{z'}{z^2}\right) - \frac{3x}{2\left(1+x^2\right)^2} + 2x\left(u + \frac{1}{z}\right)^2 = \left[u' - \frac{3x}{2\left(1+x^2\right)^2} + 2xu^2\right] - \frac{z' - 4xuz - 2x}{z^2}$. Comme u est solution de (3), le crochet est nul. Il s'ensuit que z est solution de l'équation différentielle $z' - 4xuz - 2x = 0$, qui est exactement l'équation (2).

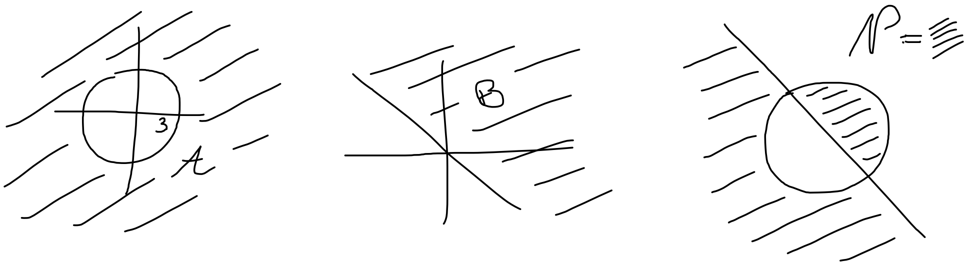
3.2.4- En utilisant la relation $y = u + \frac{1}{z}$ de **3.3-**, on obtient que la solution générale de (3) est

$$y(x) = \frac{-1}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+x^2\right) + \frac{C}{1+x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4 Une étude qualitative d'équation différentielle

4.1 Régionnement du plan

(i) et (ii) Le cercle $\{(x,y),\ x^2+y^2=9\}$ sépare le plan en deux parties : le disque ouvert $\{(x,y),\ x^2+y^2<9\}$ et le complémentaire du disque fermé $\{(x,y),\ x^2+y^2>9\} = \mathcal{A}$.
La droite $\{(x,y),\ x+y=0\}$ sépare le plan en deux demi-plans : $\{(x,y),\ x+y<0\}$ et $\mathcal{B} = \{(x,y),\ x+y>0\}$, ce dernier contenant le point $(1,0)$.
Le produit $\left(x^2+y^2-9\right)(x+y)$ est négatif lorsque les deux termes x^2+y^2-9 et $x+y$ sont de signes contraires. Cela donne les dessins ci-dessous.



4.2 Une équation différentielle résolue

Les "isoclines zéro", points du plan où les courbes intégrales ont des tangentes horizontales, sont les points de la réunion du cercle $\{(x,y),\ x^2+y^2=9\}$ et de la droite $\{(x,y),\ x+y=0\}$. Les signes du produit $\left(x^2+y^2-9\right)(x+y)$ sont résumés dans le dessin de $\mathcal{N}$. La courbe A répond à ces critères de croissance/décroissance selon ce signe. En revanche, les courbes B et C sont croissantes au sud de la droite et à l'extérieur du disque. La courbe D présente des tangentes horizontales hors de "l'isocline zéro".
Conclusion : la courbe cherchée est A.

NB : on peut trouver bien d'autres façons d'argumenter pour arriver à ce résultat.

UVSQ 2013/2014
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
20 juin 2014

Examen

(durée de l'épreuve : deux heures)

1 Algèbre matricielle (4 points)

1- Si z est n'importe quel nombre, calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} -z & -3 \\ 1 & -2-z \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible lorsque $z = 0$?

2- Quelles sont les valeurs propres (réelles ou complexes) de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$?

2 Une équation différentielle linéaire (6 points)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - \frac{1}{2} f(x) = 1 + x \\ f(0) = -1. \end{cases}$$

3 Une équation différentielle non linéaire (6 points)

1- Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, calculer la dérivée de la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \ln\left(1 + e^{xy(x)}\right).$$

2- Quelle sont les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$?

3- On considère l'équation différentielle

$$\left(xy' + y\right) e^{xy} = \frac{1 + e^{xy}}{1 + x^2} \tag{1}$$

où x désigne la variable et y la fonction inconnue. En posant $z(x) = \ln\left(1 + e^{xy(x)}\right)$, calculer toutes les solutions de (1) définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Une étude qualitative (4 points)

1- Dessiner le cercle d'équation $(x+1)^2+y^2=4$. Sur ce même dessin, hachurer l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $(x+1)^2+y^2-4<0$.

2- Le dessins ci-après représente, en traits gras, le graphe d'une solution d'une seule des quatre équations différentielles résolues suivantes :

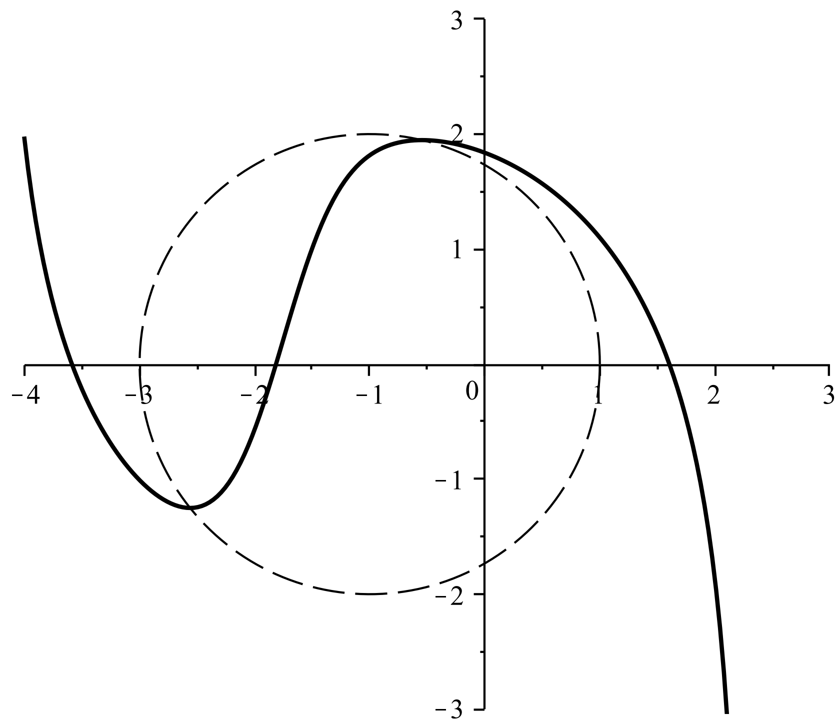
(A) $y' = y^2 + (x+1)^2 - 4$;

(B) $y' = -y^2 - (x+1)^2 + 4$;

(C) $y' = \left(x + \frac{\pi}{6}\right)(y + 2\ln 2)$;

(D) $y' = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right)(y + 2\ln 2)$.

Déterminer laquelle, en fournissant une argumentation soignée.



UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
12 novembre 2014

Examen partiel
(une heure et demie)

Partie 1 (4 points)

On rappelle les formules d'Euler : pour tout réel x,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En utilisant les formules d'Euler, trouver la primitive de $x \mapsto (\cos x)^4$ qui s'annule en 0.

Partie 2 (4 points)

Soit T un nombre réel. En utilisant le changement de variable $u = e^{-s}$, calculer l'intégrale

$$I(T) = \int_0^T \frac{1}{e^{-s} + e^s} ds.$$

Calculer la limite de $I(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$ (on pourra se souvenir que $\tan 0 = 0$ et que $\tan \pi/4 = 1$).

Partie 3 (3 points)

Calculer les nombres réels a, b, c tels que pour tout $x \neq -1/2$, on ait

$$\frac{13x^2}{(2x+1)(x^2+3)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{bx+c}{x^2+3}.$$

En déduire les primitives de cette fraction rationnelle sur $]-\infty, -1/2[$.

Partie 4 (3 points)

La fonction $x \longmapsto x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle solution de l'équation différentielle

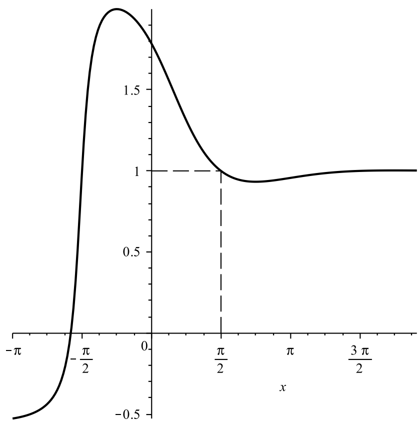
$$x^4 y'' + y = 0$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

Partie 5 (3 points)

La courbe ci-contre est-elle le graphe de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -1 + \sin(xy) \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ ?} \end{cases}$$



Partie 6 (3 points)

6.1 Montrer que la fonction $x \longmapsto 3x - \dfrac{2}{3}$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + 3y = 9x + 1. \qquad (1)$$

6.2 Donner la solution générale de l'équation (1).

6.3 Trouver la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
12 novembre 2014

Corrigé succinct de l'examen partiel

Partie 1 (4 points)

On écrit $(\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$, on développe à l'aide de la formule du binôme, on regroupe les termes deux à deux conjugués. On obtient

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)+6\right) = \frac{1}{16}\left(2\cos 4x+8\cos 2x+6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.$$

On déduit de cette formule les primitives de $x \mapsto \cos^4 x$ qui sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Parmi ces primitives, la seule valant 0 en 0 est $\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$.

Partie 2 (4 points)

En dérivant, $u = e^{-s}$ donne $du = -e^{-s}ds = -uds$, ou encore $ds = -\frac{du}{u}$. En reportant dans l'intégrale et en ajustant les bornes, on obtient

$$I(T) = \int_0^T \frac{1}{e^{-s}+e^s}ds = -\int_1^{e^{-T}} \frac{1}{u+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int_{e^{-T}}^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\arctan u\right]_{u=e^{-T}}^{u=1} = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(e^{-T}\right).$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, e^{-T} tend vers 0. Ainsi, $I(T)$ a pour limite $\pi/4$ quand T tend vers $+\infty$.

Partie 3 (3 points)

On réduit au même dénominateur, on identifie les numérateurs, on obtient un système linéaire de trois équations aux inconnues a, b, c. On le résout et on trouve

$$\frac{13x^2}{(2x+1)\left(x^2+3\right)} = \frac{1}{2x+1} + \frac{6x-3}{x^2+3} = \frac{1}{2}\frac{2}{2x+1} + 3\frac{2x}{x^2+3} - 3\frac{1}{x^2+3}$$

dont les primitives sur $]-\infty, -1[$ sont les fonctions

$$\frac{1}{2}\ln|2x+1| + 3\ln\left(x^2+3\right) - \sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(deux formes u'/u et une arctangente).

Partie 4 (3 points)

Soit $x \longmapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On dérive deux fois (produit et composée) :

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, $x^4 f''(x) + f(x) = 0$: f est solution de l'équation différentielle.

Partie 5 (3 points)

La solution ϕ au problème de Cauchy considéré vérifie simultanément

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ et } \phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 1\right) = 0 \;:$$

son graphe passe par le point de coordonnées $(\pi/2, 1)$ et sa tangente en ce point est horizontale. Le graphe dessiné passe par le point de coordonnées $(\pi/2, 1)$ avec une pente manifestement strictement négative : ce n'est pas le graphe de la solution au problème de Cauchy de l'énoncé.

Partie 6 (3 points)

6.1 Calcul immédiat.

6.2 L'équation différentielle (1) est linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants et avec second membre. L'équation homogène qui lui est associée est

$$y' + 3y = 0$$

qui admet pour solution générale la fonction $x \mapsto Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$. La question 6.1- montre que $x \mapsto 3x - 2/3$ est une solution particulière de (1). On en déduit que la solution générale de (1) est

$$x \mapsto 3x - \frac{2}{3} + Ce^{-3x}, \; C \in \mathbb{R}.$$

6.3 La fonction $x \mapsto 3x - \frac{2}{3} + Ce^{-3x}$ s'annule en 0 si, et seulement si $-\frac{2}{3} + C = 0$, c'est-à-dire lorsque $C = 2/3$. La fonction cherchée est $x \mapsto 3x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-3x}$

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
7 janvier 2015

Examen
(deux heures)

— *Sans calculatrice* —
— *Document autorisé : énoncé de la feuille d'exercices numéro 9* —

1 Calcul matriciel (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

2- Montrer que la matrice $D = PAP^{-1}$ est diagonale et calculer D^n pour tout entier naturel non nul n.

3- Calculer A en fonction de D et P, puis A^n pour tout entier naturel non nul n.

4- Calculer $\exp(tA)$ pour tout nombre réel t.

2 Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (4 points)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$y' - \sqrt{x}y = \sqrt{x}\exp\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right). \tag{1}$$

1- Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{x}y = 0$.

2- Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui prend la valeur $-\frac{2e^{-1/3}}{3}$ en 1.

3- Trouver toutes les solutions de l'équation (1).

3 Une équation différentielle à variables séparables (4 points)

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(2x+3) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2x^2+6x+5}.$$

1- Montrer que f est une primitive de g.

2- Résoudre l'équation différentielle

$$y' = -x\left(2y^2 + 6y + 5\right). \tag{2}$$

3- Trouver la solution de (2) qui prend la valeur $-3/2$ en 0.

4 Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (4 points)

1- Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2 \exp\left(-x^2\right)$$

est une solution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$y'' + 10y = 2\left(1 + 2x^4\right)\exp\left(-x^2\right). \tag{3}$$

2- Trouver toutes les solutions de (3) définies sur $\mathbb{R}$.

5 Une étude qualitative d'équation différentielle (4 points)

1- Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x.$$

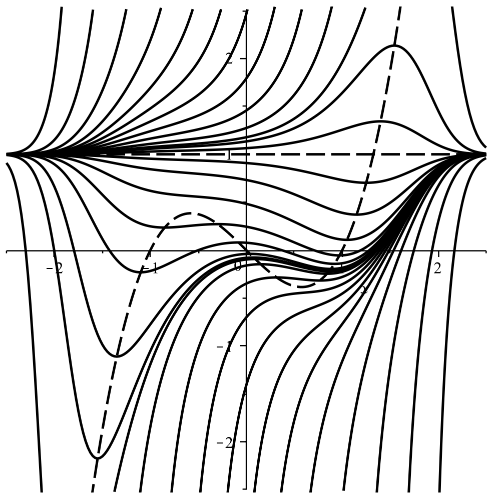
On pourra si l'on veut utiliser la valeur approchée $\sqrt{3} \approx 1,73$.

2- Sur deux figures séparées, dessiner

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (y-1)(y - f(x)) \geq 0\right\}.$$

3- Le dessin ci-contre représente (en traits pleins) le champ des courbes intégrales d'une des équations différentielles numérotées de 1 à 4 ci-dessous. En rédigeant une argumentation soignée et concise, déterminer laquelle.

(1) $y' = (y-1)(y - x^3 + x)$
(2) $y' = (1-y)(y - x^3 + x)$
(3) $y' = y - x^3 + x$
(4) $y' = (y-1)(x^3 + x)$



UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
7 janvier 2015

Corrigé succinct de l'examen

1 Calcul matriciel

1- Comme $\det(P) = -1$ est non nul, P est inversible. La formule générale de l'inverse d'une matrice carrée de dimension 2 fournit immédiatement $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2- Le calcul donne $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien diagonale. Si $n \geq 1$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, selon la formule des puissances d'une matrice diagonale.

3- En multipliant la formule $D = PAP^{-1}$ par P^{-1} à gauche et par P à droite, on obtient $A = P^{-1}DP$. Ainsi, $A^n = P^{-1}D^nP$ pour tout $n \geq 1$. On peut faire brutalement ce calcul pour trouver A^n en fonction de n, mais on peut aussi remarquer que $D^n = (-1)^{n+1}D$, qui implique que $A^n = (-1)^{n+1}A$, pour $n \geq 1$.

4- Si t est un nombre réel, $\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P$. Comme $tD = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui entraîne, après calcul, que $\exp(tA) = \begin{pmatrix} 9 - 8e^{-t} & 12 - 12e^{-t} \\ -6 + 6e^{-t} & -8 + 9e^{-t} \end{pmatrix}$.

2 Une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1- C'est l'équation différentielle linéaire homogène associée à l'équation (1). Sa solution générale est $y(x) = C\exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

2- La dérivée de $x \mapsto -x^{\frac{3}{2}}$ est $x \mapsto -\frac{3}{2}\sqrt{x}$. On reconnaît la forme $-\frac{2}{3}u'e^u$ dans la fonction $x \mapsto \sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}}$. Les primitives cherchées sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{3}\exp\left(-x^{\frac{3}{2}}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$. La condition au bord demandée impose $C = -\frac{2}{3}\left(e^{-1/3} - e^{-1}\right)$.

3- L'équation (1) est linéaire : la méthode de variation des constantes, en s'appuyant sur la question **2-**, montre que $-\frac{2}{3}\exp\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$ en est une solution particulière. La solution génerale de (1) est $-\frac{2}{3}\exp\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + C\exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

3 Une équation différentielle à variables séparables

1- On dérive f, on trouve g.

2- L'équation est à variables séparables. Elle s'écrit $y'g(y) = -x$ qui s'intègre, en utilisant la question **1-**, en $f(y) = C - x^2/2$, c'est-à-dire $\arctan(2y+3) = C - x^2/2$ où $C \in \mathbb{R}$. En prenant la tangente des deux membres de cette égalité, on trouve $y(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\tan\left(C - x^2/2\right)$ pour solution générale de (2).

3- Le problème de Cauchy impose à la constante C de vérifier $\tan C = 0$. On peut prendre par exemple $C = 0$. [A noter, si on prend pour C une autre solution de l'équation $\tan C = 0$, c'est-à-dire un multiple de π, on trouve encore la même solution de (2) puisque la fonction tangente est π-périodique.]

4 Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1- On calcule : $\varphi'(x) = \left(2x - 2x^3\right)\exp\left(-x^2\right)$ et $\varphi''(x) = \left(2 - 10x^2 + 4x^4\right)\exp\left(-x^2\right)$. On reporte dans l'équation, c'est fini.

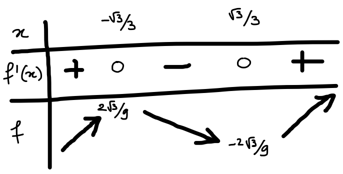
2- L'équation homogène associée est $y'' + 10y = 0$. Son équation caractéristique est $X^2 + 10 = 0$, dont les racines sont les deux nombres complexes $i\sqrt{10}$ et $-i\sqrt{10}$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit $A\cos\left(x\sqrt{10}\right) + B\sin\left(x\sqrt{10}\right)$ où A et B sont des nombres réels quelconques. La solution générale de l'équation avec second membre s'écrit donc

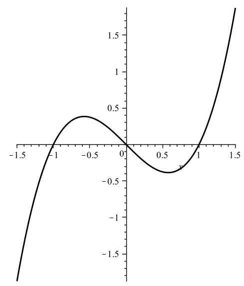
$$x^2\exp\left(-x^2\right) + A\cos\left(x\sqrt{10}\right) + B\sin\left(x\sqrt{10}\right)$$

où A et B sont des nombres réels quelconques.

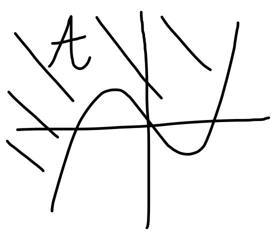
5 Une étude qualitative d'équation différentielle

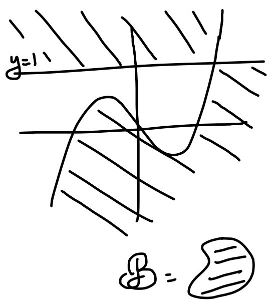
1- $f'(x) = 3x^2 - 1$. Les zéros de cette dérivée sont $\pm\sqrt{3}/3$. On en déduit le tableau de variations et le graphe de f.





2-





3- L'isocline 0 de l'équation 4 est la réunion des droites d'équations respectives $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$. Le dessin ne répond pas à cela (par exemple, sur le dessin, les tangentes aux courbes intégrales le long de l'axe des ordonnées ne sont pas horizontales).

L'isocline 0 de l'équation 3 est exactement le graphe de la fonction f de la question **1-** et le lieu des points du plan où les pentes des courbes intégrales sont positives est la région $\mathcal{A}$ de la question 2. Le dessin ne répond pas à cela (par exemple, on voit des courbes à pentes négatives en haut à droite du dessin, ou encore à gauche près de l'axe des abscisses).

Il reste les équations 1 et 2 qui ont la même isocline 0, réunion du graphe de f et de la droite d'équation $y = 1$. C'est par le signe des pentes des courbes intégrales qu'on discrimine entre les équations 1 et 2 : le lieu des points du plan où les pentes des courbes intégrales de l'équation 1 sont positives est exactement la région $\mathcal{B}$ de la question 2, alors que pour l'équation 3, cette région est le complémentaire de $\mathcal{B}$.

La réponse est donc 1.

UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
18 juin 2015

Examen
(deux heures)

— Sans calculatrice —
— Document autorisé : énoncé de la feuille d'exercices numéro 9 —

1 Calcul matriciel (4 points)

1- On note D la matrice carrée de dimension 2

$$D = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $\exp(tD)$ pour tout nombre réel t.

2- Soient P, Q et A les matrices

$$P = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} \\ -1 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est l'inverse de P et calculer PAQ.

3- Calculer la matrice $\exp(tA)$ pour tout nombre réel t.

2 Une équation différentielle d'ordre 2 (4 points)

Avec les notations habituelles, on note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) \qquad y'' + y' - 6y = -36x^2.$$

1- Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto 6x^2 + 2x + \dfrac{7}{3}$ est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

2- Trouver toutes les solutions de (E).

3- Trouver toutes les solutions de (E) qui prennent la valeur 0 en 0.

3 Une équation différentielle à variables séparables (4 points)

1- Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^x}$$

(on pourra remarquer que le numérateur est la dérivée du dénominateur).

2- On suppose que deux nombres réels u et v sont reliés par la relation $\ln(1+u) = v$. Calculer u en fonction de v.

3- Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$e^y y' = 2x\,(1+e^y)\,. \tag{1}$$

4- L'équation différentielle (1) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

4 Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (4 points)

1- On rappelle que si $u>0$ et $v \in \mathbb{R}$, alors $u^v = e^{v \ln u}$. Calculer la dérivée des fonctions $x \longmapsto x \ln x$ et $x \longmapsto x^{-x}$, définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

2- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_1^x t^{t-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Calculer la dérivée de f.

3- Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 linéaire et homogène $y' + (1+\ln x)\,y = 0$.

4- Résoudre l'équation différentielle $y' + (1+\ln x)\,y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

5 Une étude qualitative d'équation différentielle (4 points)

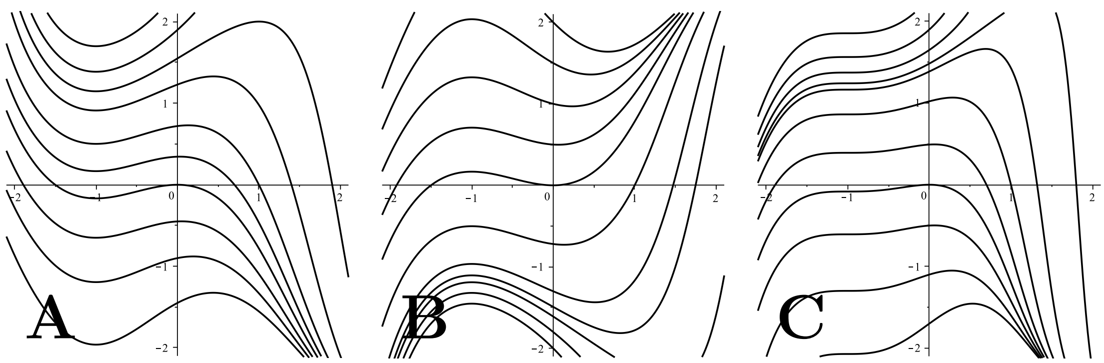
On considère l'équation différentielle résolue

$$y' = \left(\frac{1}{4}y^2 - x\right)\Big(x+1\Big). \tag{2}$$

1- Déterminer puis dessiner les courbes de l'isocline de niveau 0 de l'équation (2).

2- Montrer que toute solution dont le graphe passe par le point de coordonnées $(1,0)$ a un nombre dérivé négatif en 1.

3- Parmi les champs de courbes intégrales dessinés ci-dessous, un seul représente une famille de solutions de (2). En argumentant soigneusement, déterminer lequel.



UVSQ 2014/2015
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA320, méthodes mathématiques pour la chimie, L2 chimie
18 juin 2015

Corrigé succinct de l'examen

1 Calcul matriciel (4 points)

1- La matrice $tD = \begin{pmatrix} t\left(1-\sqrt{3}\right) & 0 \\ 0 & t\left(1+\sqrt{3}\right) \end{pmatrix}$ est diagonale. Donc $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{t\left(1-\sqrt{3}\right)} & 0 \\ 0 & e^{t\left(1+\sqrt{3}\right)} \end{pmatrix}$.

2- Le calcul montre que $PQ = I_2 = QP$. Cela montre que Q est l'inverse de P (noter qu'il suffit de vérifier que $PQ = I_2$ ou que $QP = I_2$). Un simple calcul amène à $PAQ = D$.

3- On déduit de **2-** que $A = QDP$. Il vient alors successivement que $tA = Q(tD)P$ et que $\exp(tA) = Q\exp(tD)\,P$. La calcul de ce dernier produit matriciel donne

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{t\left(1-\sqrt{3}\right)} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{t\left(1+\sqrt{3}\right)} & \frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{t\left(1+\sqrt{3}\right)} - e^{t\left(1-\sqrt{3}\right)}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left(e^{t\left(1+\sqrt{3}\right)} - e^{t\left(1-\sqrt{3}\right)}\right) & \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{t\left(1-\sqrt{3}\right)} + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{t\left(1+\sqrt{3}\right)} \end{pmatrix}.$$

2 Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (4 points)

1- On calcule $\varphi'(x) = 12x + 2$ et $\varphi''(x) = 12$. On calcule : $\varphi''(x) + \varphi'(x) - 6\varphi(x) = -36x^2$, ce qui montre que φ est solution de (E). En outre, la fonction φ est polynomiale : elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2- L'équation différentielle (E) est linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre.

Résolution de l'équation homogène associée (E_H) : $y'' + y' - 6y = 0$
L'équation caractéristique est $X^2 + X - 6 = 0$, dont les solutions sont -3 et 2. La solution générale de (E_H) est donc $x \mapsto Ae^{-3x} + Be^{2x}$ où A et B sont des constantes.

On sait que φ est une solution (particulière) de (E). On en déduit que la solution générale de (E) est $x \mapsto \varphi(x) + Ae^{-3x} + Be^{2x}$ où A et B sont des constantes.

3- Si A et B sont des réels, la fonction $x \mapsto \varphi(x) + Ae^{-3x} + Be^{2x}$ prend la valeur 0 en 0 si, et seulement si $\frac{7}{3} + A + B = 0$, c'est-à-dire lorsque $B = -A - \frac{7}{3}$. Les solutions de (E) valant 0 en 0 sont donc les fonctions $x \mapsto \varphi(x) + Ae^{-3x} - \left(A + \frac{7}{3}\right)e^{2x}$ où A est une constante.

3 Une équation différentielle à variables séparables (4 points)

1- Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^x$. Les primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ sont donc les fonctions $\ln(1 + e^x) + C$ où C est une constante.

2- On prend l'exponentielle : $1 + u = e^v$, qui s'écrit encore $u = e^v - 1$.

3- L'équation (1) s'écrit $\frac{e^y}{1+e^y}y' = 2x$. La question **1-** permet l'intégration sur un intervalle en $\ln(1 + e^y) = x^2 + C$ où C est une constante. A l'aide de **2-**, on obtient $e^y = e^{x^2+C} - 1$, qui s'écrit encore $y = \ln\left(e^{x^2+C} - 1\right)$ en prenant le logarithme.

4- Si C est un nombre réel, $\ln\left(e^{x^2+C}-1\right)$ est défini si, et seulement si $e^{x^2+C}-1>0$, c'est-à-dire lorsque $x^2+C>0$. Ainsi, la fonction $x\mapsto \ln\left(e^{x^2+C}-1\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ dès que $x^2+C>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire dès que $C>0$. La réponse est oui. Par exemple, la fonction $x\mapsto \ln\left(e^{x^2+1}-1\right)$ est une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$.

4 Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (4 points)

1- Dérivée d'un produit : $\frac{d}{dx}(x\ln x)=\ln x+1$. Dérivée d'une composée : $\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{-x\ln x}\right)=-(\ln x+1)\,e^{-x\ln x}=-(\ln x+1)\,x^{-x}$.

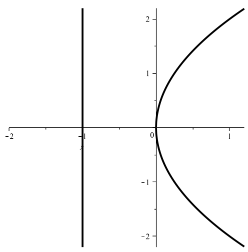
2- La fonction f est l'intégrale de la borne supérieure d'une fonction continue. Par le théorème fondamental de l'analyse, $f'(x)=x^{x-\frac{1}{2}}=\frac{x^x}{\sqrt{x}}$ pour tout $x>0$.

3- Sachant que $x\mapsto -x\ln x$ est une primitive de $x\mapsto -(1+\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **1-**), la solution générale de l'équation linéaire homogène d'ordre 1 est $x\mapsto Ce^{-x\ln x}=Cx^{-x}$ où C est une constante.

4- Pour résoudre l'équation linéaire d'ordre 1 avec second membre, on utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $C(x)x^{-x}$ où $C(x)$ est une fonction. En reportant dans l'équation, une telle fonction est une solution si, et seulement si la fonction C vérifie $C'(x)x^{-x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui s'écrit encore $C'(x)=x^{x-\frac{1}{2}}$. En utilisant la question **2-**, on voit qu'on peut prendre $C=f$. Ainsi, la fonction $x\mapsto f(x)x^{-x}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle linéaire avec second membre est la fonction $x\mapsto Cx^{-x}+f(x)x^{-x}=(C+f(x))\,x^{-x}$ où C est une constante.

5 Une étude qualitative d'équation différentielle (4 points)

1- L'isocline de niveau 0 est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (\frac{1}{4}y^2-x)(x+1)=0\}$. C'est la réunion de la droite d'équation $x=-1$ et de la parabole d'équation $y^2=4x$ (qui est elle-même la réunion des graphes des fonctions $x\mapsto 2\sqrt{x}$ et $x\mapsto -2\sqrt{x}$). Le dessin :



2- Si f est une solution qui vérifie $f(1)=0$, alors $f'(1)=\left(\frac{1}{4}f(1)^2-1\right)(1+1)=-2<0$.

3- Les trois dessins contiennent une courbe passant par le point $(1,0)$. La pente en ce point est positive dans le dessin B, ce qui élimine ce dernier. Il reste à décider entre A et C. Dans les dessins A et C, toutes les tangentes le long de la droite $x=-1$ et le long de la parabole $y^2=4x$ sont horizontales. On peut utiliser le signe des pentes pour discerner entre ces deux dessins. Par exemple, la solution de (2) passant par le point $(-2,0)$ (ou un point qui lui est proche) y passe avec une pente négative, puisque $(0+2)(-2+1)=-2<0$. Cela exclut le dessin C. La réponse : dessin A.