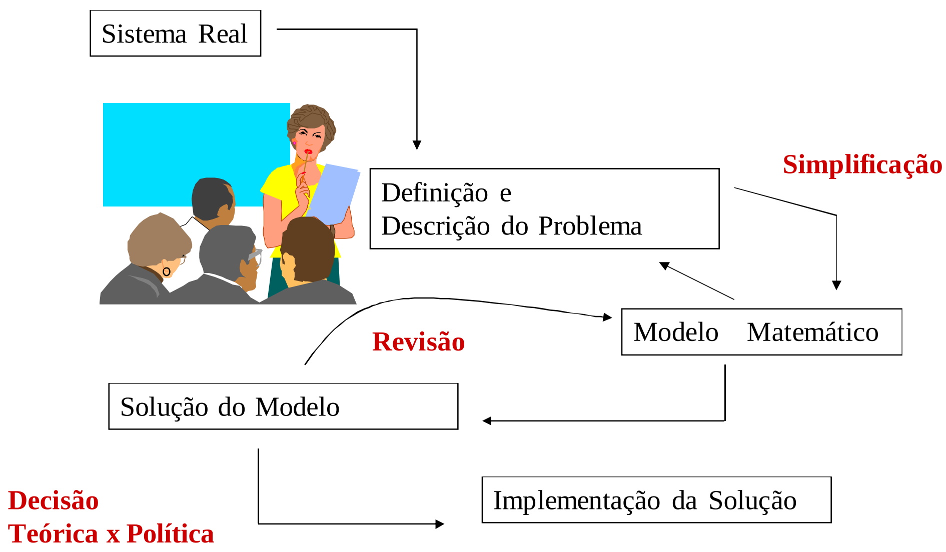
Introdução aos Problemas de Otimização

Dr. Gustavo Luís Soares

Sumário

- Modelagem de Problemas
- Hierarquia de Problemas de Otimização
- O Problema da Mochila
- O problema do Caixeiro Viajante
- Otimização Mono x Multiobjetivo

Construção de Modelos Matemáticos



Elementos de um modelo matemático

ESTUDO DO PROBLEMA

O que não conhecemos no problema?

Identificar quais **variáveis (de decisão)** interferem no problema e como é essa iteração.

OBJETIVOS

Definir **objetivos** capazes de indicar que uma decisão é preferível a outras

RESTRIÇÕES

Identificar quais as **restrições** que limitam as decisões a tomar

Forma Geral de um Modelo de Otimização

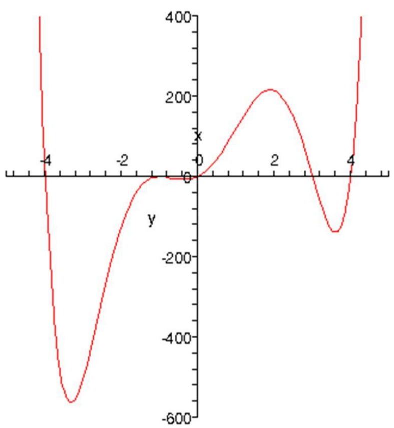
Min ou Max (funções objetivo)

Sujeito a

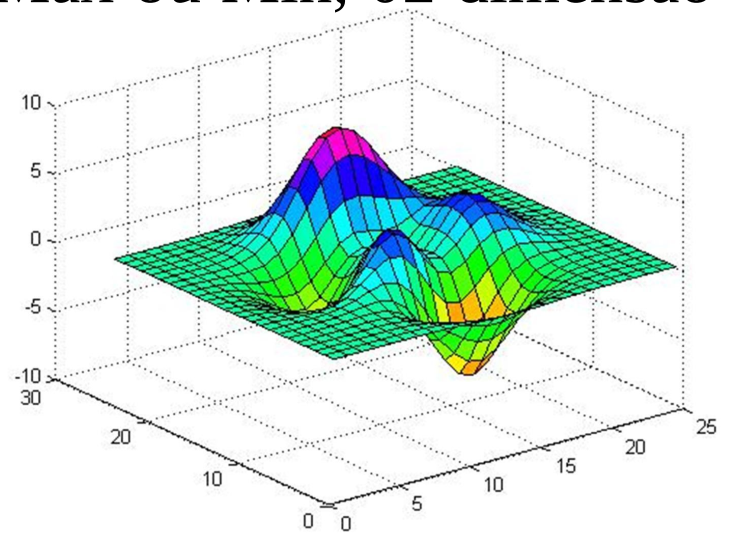
(restrições principais - equações ou inequações)

(tipo das variáveis de decisão)

Max ou Min, 01 dimensão



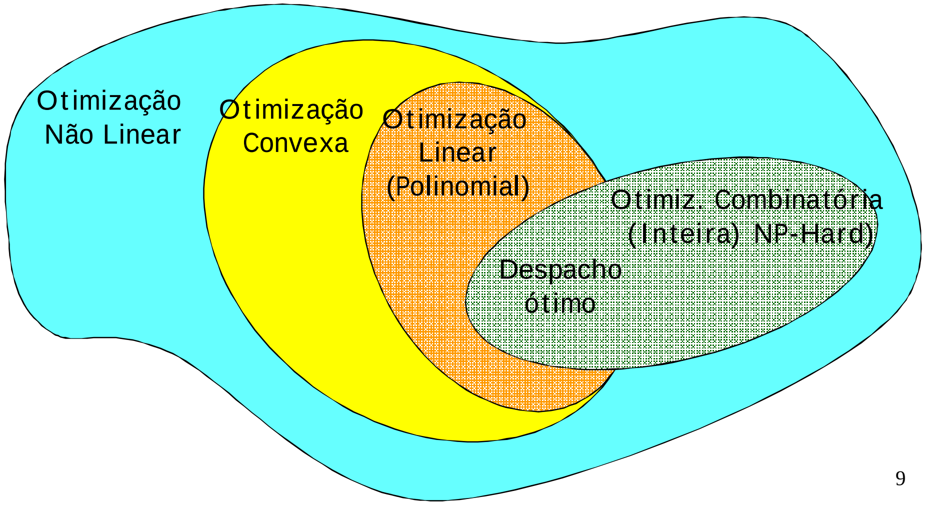
Max ou Min, 02 dimensão



Modelos de Otimização

- Modelos lineares
- Não lineares
- Discretos
- Mistos

Hierarquia de Problemas de Otimização



Modelo de Otimização Linear

Min $\quad f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeito a:

$$g_1(X) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \sim b_1$$

$$g_2(X) = a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \sim b_2$$

$$\ldots$$

$$g_m(X) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \sim b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0, \text{onde} \sim \text{pode ser} \geq, \leq, \text{ ou} =$$

Modelo de otimização Não Linear

Min $\quad f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeito a:

$$g_1(X) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim b_1$$

$$g_2(X) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim b_2$$

$$\ldots$$

$$g_m(X) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0, \text{onde} \sim \text{pode ser} \geq, \leq, \text{ ou} =$$

Modelo de Otimização Linear Discreta

Min $\quad f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeito a:

$$g_1(X) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \sim b_1$$

$$g_2(X) = a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \sim b_2$$

$$\ldots$$

$$g_m(X) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \sim b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0, \text{onde} \sim \text{pode ser} \geq, \leq, \text{ ou} =$$

Sendo as variáveis inteiras

Construindo um modelo matemático

ESTUDO DO PROBLEMA

Identificar quais **variáveis (de decisão)** interferem no problema e como é essa iteração.

Definir Variáveis de decisão

RESTRIÇÕES

Identificar quais as **restrições** que limitam as decisões a tomar

Definir Conjunto de equações ou inequações

OBJETIVOS

Definir **objetivos** capazes de indicar que uma decisão é preferível a outras

Definir Função Objetivo

Exemplo Linear

Problema:

Paula deseja saber quanto gastar para fazer uma dieta alimentar que forneça diariamente toda a energia, proteína e cálcio que ela necessita. Seu médico recomendou que ela se alimente de forma a obter diariamente no mínimo 2000 kcal de energia, 65g de proteína e 800 mg de cálcio.

O valor nutritivo e o preço (pôr porção) de cada alimento que ela está considerando comprar é dado na tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – Valor nutritivo e custo dos alimentos

alimento	tamanho da porção	energia (kcal)	Proteína (g)	cálcio (mg)	preço p/ porção (centavos)
arroz	100g	205	32	12	14
ovos	2un	160	13	54	13
leite	237ml	160	8	285	9
feijão	260g	260	14	80	19

Quanto de cada alimento Paula deve consumir?

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

Neste problema temos:

elementos conhecidos: valor nutritivo dos alimentos, custo dos alimentos

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

Neste problema temos:

elementos conhecidos: valor nutritivo dos alimentos, custo dos alimentos

elementos desconhecidos: quanto consumir de cada alimento

objetivo a ser alcançado: obter uma dieta de baixo custo

restrições: a dieta deve fornecer uma quantidade mínima de nutrientes.

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

VARIÁVEIS DE DECISÃO

A dieta deve ser feita a partir de 4 itens: arroz, ovos, leite, feijão.

Faça j = 1,2,3,4 representar respectivamente cada um dos itens

Defina então:

x_j = número de porções adquirida do alimento j para ser usada na dieta

17

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

Objetivo

Obter a dieta de menor custo possível.

Proporcionalidade:

1 porção de arroz ==> 14 centavos,
2 porções de arroz ==> 28 centavos,
x_1 porções de arroz ==> $14 * x_1$ centavos.
gasto associado a compra de ovos: $13 x_2$

Aditividade

gasto total com arroz e ovos é dado pôr: $14 x_1 + 13 x_2$

18

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

Custo total da dieta é então:

$$\min f(X) = 14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$$

19

Construindo um modelo para o Problema da Dieta

Restrições

Obter quantidade mínima de nutrientes:

energia:

1 porção de arroz ==> 205 kcal
1 porção de ovos ==> 160 kcal
1 porção de leite ==> 160 kcal
1 porção de feijão ==>260 kcal

quantidade total de energia >= quantidade mínima

Proporcionalidade e aditividade

Temos:

$$205 x_1 + 160 x_2 + 160 x_3 + 260 x_4 \geq 2000$$

20

Modelo de Otimização Linear Para o Problema da Dieta

Min f(X)= $14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

sujeito a:

$205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4 \geq 2000$ (energia)

$32x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 14x_4 \geq 65$ (proteína)

$12x_1 + 54x_2 + 285x_3 + 80x_4 \geq 800$ (cálcio)

$x_j \geq 0, \; j = 1,2,3,4$

Solução Para o Problema da Dieta

X1	0.000000 (arroz)
X2	0.000000 (ovos)
X3	12.500000 (leite)
X4	0.000000 (feijão)

Isto é consumir 12.5* 237ml = 2,9625 l de leite
e gastar com a dieta 112,5 u.m.

Esta solução é aceitável?

Novo Modelo Para o Problema da Dieta

Se limitarmos a quantidade de leite na dieta, para no **máximo 2 porções, como seria a nova solução?**

Min f(X)= $14x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 19x_4$

sujeito a:

$205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 260x_4 \geq 2000$

$32x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 14x_4 \geq 65$

$12x_1 + 54x_2 + 285x_3 + 80x_4 \geq 800$

$x_j \geq 0, \; j = 1,2,4 \qquad x_3 <= 2$

Nova Solução Para o Problema da Dieta

X1	5.617470
X2	0.000000
X3	2.000000
X4	2.032380

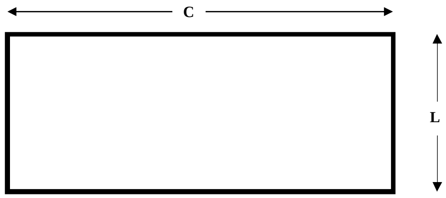
Isto é consumir:
5.617470*100g = 561.747 g de arroz
2* 237ml = 474m l de leite
2.032380*260g = 528,4188 g de feijão

e gastar com a dieta 135,2598 u.m.

Exemplo Não Linear

Problema:

Construa um modelo matemático que determina o retângulo de área máxima cujo perímetro seja no máximo 80 metros.



Área do retângulo: Largura x Comprimento
Perímetro: soma do tamanho dos lados

Construindo um Modelo para o Problema do Retângulo

Neste problema temos:

elementos conhecidos: fórmulas para calcular perímetro e área do retângulo

elementos desconhecidos: comprimento e largura do retângulo

objetivo a ser alcançado: obter um retângulo de maior área possível

restrições: perímetro do retângulo deve menor ou igual a oitenta metros

Construindo um Modelo para o Problema do Retângulo

VARIÁVEIS DE DECISÃO

largura: L em metros

Comprimento: C em metros

RESTRIÇÕES

O perímetro do retângulo = 2*L + 2* C

deve ser no máximo igual a 80 metros

$$2L + 2C \leq 80$$

OBJETIVOS

Área do retângulo = L*C

deve ser a maior possível :

$$\max f(L,C) = L*C$$

Um modelo Não Linear para o Problema do Retângulo

$$\textbf{Max} \quad f(L,C) = LC$$

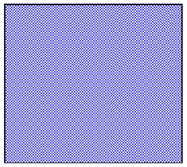
sujeito a

$$2L + 2C \leq 80$$

$$L, C \geq 0$$

Solução ótima:

L = C = 20



Exemplo Linear Discreto

Problema:

Considere uma mochila com capacidade limitada e diversos itens com pesos e valores conhecidos.

O problema da mochila consiste em determinar um subconjunto destes itens cujo peso total não exceda a capacidade da mochila e cujo valor total seja o maior possível.

Construindo um modelo para Problema da Mochila

Neste problema temos:

elementos conhecidos: peso e valor de cada ítem (p,v), capacidade máxima da mochila (C). Suponha que não existem dois itens com o mesmo par de valor e peso.

elementos desconhecidos: se um determinado elemento será incluído ou não na mochila

objetivo a ser alcançado: o valor total dos itens incluídos na mochila deve ser o maior possível

restrições: o peso total dos itens incluídos na mochila não deve exceder a capacidade da mesma

Construindo um modelo para Problema da Mochila

Variáveis de decisão

$$x_j = \begin{cases} 1 & \textbf{se o item j for incluído na mochila} \\ 0 & \textbf{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{j = 1,\dots,n}$$

Restrições

A soma total do peso dos itens não deve exceder a capacidade da mochila:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq C$$

Objetivo

O valor total dos itens incluídos na mochila deve ser o maior possível.

$$\max\ f(X) = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n$$

Um modelo Linear Discreto Para o Problema da Mochila

$$\max f(X) = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n$$

Sujeito a

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq C$$

$$x_j = 0\ /\ 1 \quad j = 1,\dots,\ n$$

Otimização Mono x Multiobjetivo

- Otimização Mono e Multiobjetivo
- Dificultadores
- Por quê Evolucionário?

33

Motivação

Projeto ótimo: encontrar soluções que trazem

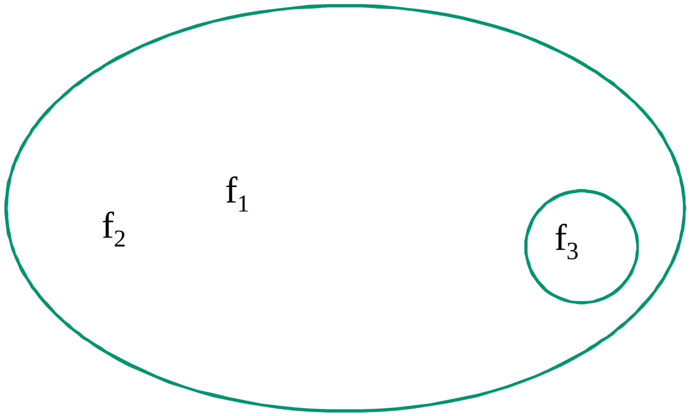
- Menor custo
- Desempenho mais alto
- Mais confiabilidade

Nota: Muitas vezes não é possível, sem métodos matemáticos/numéricos, descobrir a solução ótima.

34

Mono x Multi-objetivo

Mundo multiobjetivo



35

Mais famílias de problemas de otimização...

Combinatória

Multidisciplinar

Robusta

36

Dificultadores

Não continuidade

Não convexidade

Não linearidade

Multiobjetividade

Multi-variável

Presença de restrições

Ambiente com incertezas

37

Por quê Evolucionário?

?

38