Capítulo 20

Simulated Annealing Aplicado ao Problema de Alocação de Salas com Deslocamentos Mínimos

Rosana Maria Luvezute Kripka* e Moacir Kripka

Resumo: A otimização combinatorial é comumente utilizada na resolução de aplicações reais complexas, onde geralmente a solução pertence a um conjunto discreto, resultante de todas as combinações entre as possibilidades existentes. Um problema desta natureza é o de alocação de salas de aula em instituições de ensino onde, na distribuição das salas de aula disponíveis, devem ser respeitados tanto o número de alunos de cada disciplina/turma, bem como as capacidades das salas de aula. Neste capítulo apresenta-se uma formulação matemática desenvolvida para a otimização do problema de alocação de salas na Universidade de Passo Fundo, na qual a função objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida pelos alunos, com intuito de realizar a distribuição das salas de aula, dos diversos prédios, de modo a manter os alunos o mais próximo possível das suas respectivas unidades. O processo de otimização foi realizado através do método *Simulated Annealing*, uma vez que apresenta um bom desempenho na resolução de problemas de otimização combinatórial e utiliza poucos parâmetros de controle, comparado a outras meta-heurísticas. Foram realizados testes diversos que comprovaram a validação do modelo. Acredita-se que a formulação matemática apresentada, com pequenas adaptações, poderá resolver problemas específicos de outras Instituições de ensino.

Palavras-chave: Modelagem matemática, Alocação de salas de aula, Otimização combinatorial, *Simulated annealing.*

Abstract: *In general, combinatorial optimization is used in the resolution of real complex applications, where a solution is obtained from a discrete set, resulting from all the combinations among the possibilities. One such problem is the Classroom Assignment Problem because in the distribution of available classrooms, the number of registered students in each course and the capacities of the classrooms must be respected. This chapter presents a mathematical formulation developed for the optimization of the Classroom Assignment Problem at the University of Passo Fundo, in which the objective function is to minimize the total distance traveled by students, aiming assign classrooms at various buildings in order to keep students as close as possible of their respective units. The optimization process was solved by the Simulated Annealing method because it presents a good performance in solving combinatorial optimization problems and uses fewer control parameters, when compared to other metaheuristics. Various tests were performed for model validation with good results. It is believed that the mathematical modeling presented, with a few adjustments, can solve specific problems of other education institutions.*

Keywords: *Mathematical modeling, Classroom assignment problem, Combinatorial optimization, Simulated annealing.*

1. Introdução

A resolução de problemas reais através de técnicas de otimização tem sido muito empregada atualmente, tendo em vista que, no planejamento econômico, a busca das melhores soluções possíveis, para problemas restritos, possui grande importância. Neste contexto, identifica-se o Problema de Alocação de Salas de aula (PAS), em instituições de ensino superior de médio e grande porte, o qual se refere à atribuição de salas de aula às turmas, relativas às disciplinas que ocorrem nos períodos letivos, de tal modo que sejam respeitadas algumas restrições próprias do problema.

O Problema de Alocação de Salas é referido na literatura como um problema pertencente à classe NP-difícil, para os quais a obtenção da solução ótima do problema, em um período de tempo computacional aceitável, não é uma tarefa simples (Even et al., 1976). Para problemas combinatórios desta natureza, a utilização de

*Autor para contato: rkripka@upf.br

Lopes et al. (Eds.), Meta-Heurísticas em Pesquisa Operacional (2013) DOI: 10.7436/2013.mhpo.20 ISBN 978-85-64619-10-4

métodos baseados em programação matemática exata têm se mostrado pouco eficiente, mesmo para problemas de pequena ou média dimensão. Em função disto, métodos heurísticos vêm sendo empregados com êxito não apenas para a alocação de salas, mas para outras classes de problemas de organização acadêmica (Carter & Laporte, 1995; Alvarez-Valdés et al., 2001; Rossi-Doria et al.; Dammak et al., 2008; Subramanian et al., 2006; Jat & Yang, 2008; Subramanian et al., 2011).

Diversos estudos e formulações foram e vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de efetuar a otimização da alocação de salas, abordando particularidades e interesses específicos das instituições de ensino. Neste capítulo se apresenta uma formulação desenvolvida com o objetivo de contemplar o problema enfrentado na Universidade de Passo Fundo (UPF), localizada em Passo Fundo, no estado do Rio Grande do Sul, na região sul do Brasil.

A universidade possui uma estrutura multi-campi. Assim, além do câmpus central, existem mais seis câmpus da UPF, localizados nas seguintes cidades: Carazinho, Casca, Lagoa Vermelha, Palmeira das Missões, Sarandi e Soledade. Atualmente, na totalidade dos cursos, a UPF possui mais de 17 mil alunos de graduação, sendo que a maioria destes estuda no câmpus central, com uma parcela significativa concentrada no período da noite. Desta forma, a formulação elaborada objetiva não apenas a alocação das salas, mas também a minimização dos deslocamentos dos alunos pelo câmpus, buscando acomodá-los em salas próximas aos prédios onde seus cursos estão sediados. Para a otimização foi empregado o método *Simulated Annealing* (Kirkpatrick et al., 1983).

2. Fundamentação Teórica

O Problema de Alocação de Salas (PAS), também conhecido na literatura por *Classroom Assignment Problem*, é classificado como um problema de organização acadêmica, pelo fato de envolver variáveis relacionadas a professores/alunos/turmas/disciplinas/horários/salas de aula. Além do PAS, também podem ser citados como exemplos de problemas de organização acadêmica a distribuição de carga horária de professores, a distribuição de datas de exames de disciplinas ou, ainda, problemas de construção de grade horária.

Dentre os problemas de organização acadêmica, destacam-se os problemas de programação (organização) de horários (PPH), também chamados de problemas de *timetabling*, os quais são classificados por Schaerf (1999) em três categorias: *school timetabling, course timetabling* e *examination timetabling*.

Schaerf (1999) entende que os problemas classificados na categoria *school timetabling* dizem respeito a programação semanal de horários de professores ou turmas em escolas, onde neste caso, o estudante deve cursar um número fixo de disciplinas. Assim, além da programação da grade horária, que deve evitar choques de horários entre todas as disciplinas oferecidas, também existe o problema de distribuição de professores por disciplina, de modo que um professor receba apenas uma turma em um determinado horário, evitando choques de horários.

Os problemas classificados na categoria *course timetabling* envolvem a programação semanal de horários de disciplinas para todos os períodos dos cursos universitários, bem como a distribuição de professores para as turmas existentes, de modo a minimizar possíveis choques entre professor/turma/horário. Schaerf (1999) afirma que estes se diferenciam do *school timetabling*, pois os estudantes podem escolher as matérias que desejam se matricular.

Já na categoria *examination timetabling* se enquadram os problemas de programação de exames para cursos universitários, onde se busca evitar sobreposições de datas de exames de disciplinas que possuem estudantes em comum, onde também se objetiva distanciar as datas dos exames dos estudantes o máximo possível.

Vários autores consideram o PAS como um problema de *course timetabling* (Schaerf, 1999; Silva & Silva, 2010). Neste problema específico se considera que os horários em que ocorrerão as disciplinas já estão estabelecidos e busca-se distribuí-las entre as salas de aula disponíveis na Instituição, de modo que seja evitado que duas disciplinas sejam atribuídas, num mesmo horário, a uma mesma sala de aula disponível. Além disto, também deve ser respeitada a capacidade da sala, ou seja, a distribuição deve considerar que existam classes e cadeiras suficientes para comportar os alunos matriculados na disciplina. Assim, as soluções possíveis para o PAS são resultantes de combinações possíveis entre disciplinas/salas que respeitem as restrições do problema.

Em processos de otimização, inicialmente foram elaborados técnicas para se encontrar as soluções ótimas através de estratégias descendentes, quando as funções objetivo eram contínuas e diferenciáveis, sendo chamados na Programação Matemática de métodos exatos. Nestes, a partir de uma solução inicial, uma nova solução é gerada, através de uma direção de descida, e o valor da função objetivo obtido para esta nova solução é comparado ao valor da função objetivo inicial. Caso exista uma redução significativa no valor da função objetivo, a mesma passa a ser adotada como solução corrente e o processo se repete até que nenhuma melhora seja verificada no valor da função, dentro de uma precisão considerada aceitável. O resultado obtido deste processo, dependendo das características das funções envolvidas, pode se constituir na melhor solução nas vizinhanças da solução inicial, mas não necessariamente consiste no ótimo global para o problema abordado. Neste caso, uma estratégia alternativa usual, para se melhorar a solução otimizada obtida, consiste na otimização do problema a partir de diversas soluções iniciais.

Posteriormente, para se resolver os problemas cujas funções objetivo não eram diferenciáveis ou não contínuas, foram criados métodos alternativos chamados de "heurísticas" ou "métodos aproximativos", que possibilitam percorrer o espaço de busca de modo aleatório, com intuito de obter uma solução otimizada factível para o problema em questão. Além dos métodos heurísticos também foram desenvolvidas as meta-heurísticas que possuem uma importante vantagem em relação às heurísticas: possuem estratégias que possibilitam escapar de possíveis ótimos locais existentes no espaço das soluções. Assim, na resolução de problemas de otimização combinatorial, onde as soluções são resultantes de combinações entre variáveis e a função objetivo não é contínua, geralmente aplicam-se heurísticas, ou meta-heurísticas ou ainda, heurísticas híbridas, que combinam dois métodos para encontrar a solução otimizada para o problema.

Pela natureza combinatorial das soluções do PAS para problemas reais de grande porte, encontrar uma solução ótima se torna inviável através de métodos exatos. Dentre as diversas técnicas utilizadas na literatura para a resolução do PAS destacam-se o *Simulated Annealing (SA)*, a Busca Tabu (Alvarez-Valdés et al., 2001; Subramanian et al., 2006, 2011), os Algoritmos Genéticos e Meméticos (Oliveira, 2006; Jat & Yang, 2008), o processo de coloração de Grafos (Silva & Silva, 2010), o GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) e o Método de Pesquisa em Vizinhança Variável (Souza et al., 2002).

O método escolhido para resolução otimizada do PAS, no presente trabalho é o método *Simulated Annealing (SA)*. A opção por este método se deve a sua vasta aplicação ao tipo de problema em estudo (Martinez-Alfaro & Flores-Teran, 1998; Silva et al., 2005) , bem como à experiência anterior dos autores em outros problemas de natureza combinatória (Kripka, 2004; Kripka et al., 2005). Além disto, é um método que possui poucos parâmetros de controle, quando comparado a outras meta-heurísticas consagradas.

3. Modelagem Matemática

Inicialmente, para resolução do problema de alocação de salas, foi elaborado um modelo matemático diferenciado dos demais propostos, disponíveis na literatura. Usualmente, em problemas de alocação de salas, a função objetivo é composta por um somatório das restrições, às quais são atribuídos pesos conforme sua importância relativa.

Segundo Souza et al. (2002) existem dois tipos de requisitos para avaliação de uma alocação, chamados de requisitos essenciais e não essenciais. Os requisitos essenciais se referem aqueles que, caso não sejam atendidos, geram uma alocação inviável, ou seja, que não pode ser executada na prática, como por exemplo, alocar duas turmas para uma mesma sala, no mesmo horário de aula.

Os requisitos não essenciais são aqueles que podem não ser necessariamente atendidos de modo a se obter uma alocação viável, mas que se fossem atendidos, certamente indicariam melhorias na alocação otimizada, como por exemplo, evitar a atribuição de turmas pequenas à salas de aula com uma capacidade grande.

De modo geral, a modelagem matemática do PAS consiste em minimizar uma função de avaliação $f(s)$ constituída de um somatório de restrições essenciais, representado por $g(s)$, chamado de inviabilidade da alocação s, adicionado a um somatório de restrições não essenciais, representado por $h(s)$. Salienta-se que, na formulação tradicionalmente proposta na literatura, uma solução s será viável se, e somente, se $g(s) = 0$. Além disto, como na função de avaliação $f(s)$, os pesos atribuídos às restrições devem refletir a importância de cada uma delas. Assim, naturalmente, os pesos associados às restrições essenciais (α_k) devem ser muito maiores que os pesos associados às restrições não essenciais (β_l), com intuito de se evitar as soluções inviáveis.

Considerando S o conjunto de alocações possíveis (espaço de soluções) para uma dada instância do PAS, Silva et al. (2005) apresentam resumidamente a modelagem clássica do PAS como:

Minimizar:

$$f(s) = g(s) + h(s) \tag{1}$$

onde:

$$g(s) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k I_k \tag{2}$$

$$h(s) = \sum_{l=1}^{L} \beta_l Q_k \tag{3}$$

Sujeito a:

$$s \in \ S \tag{4}$$

$$g(s) = 0 \tag{5}$$

$$\alpha_k \geqslant \beta_l \ , \forall k, l \tag{6}$$

onde:
K : é o número de medidas de inviabilidade;
I_k : é o valor da k-ésima medida de inviabilidade;
α_k : é o peso associado a esta k -ésima medida de inviabilidade;
L : é o número de medidas de qualidade;
Q_l : é o valor da l-ésima medida de qualidade e
β_l : é o peso associado a esta l -ésima medida de qualidade;

3.1 Formulação do modelo de otimização

Na formulação proposta no presente capítulo, o objetivo consiste, além da alocação de salas, na minimização da distância a ser percorrida pelos alunos, com relação ao prédio de origem de seu curso (aqui chamado de sede). Assim, caso uma turma necessite ser acomodada em outro prédio que não sua sede, o custo desta operação será obtido pelo produto da distância até a sede pelo número de alunos matriculados na disciplina correspondente.

As restrições empregadas na formulação do problema, que são comuns aos problemas de alocação de salas, são as seguintes:

- as aulas de duas disciplinas não podem ocorrer simultaneamente em uma mesma sala;
- a aula de uma disciplina não pode ocorrer em mais de uma sala no mesmo instante;.
- a capacidade da sala deve ser maior ou igual ao número de alunos inscritos para a disciplina.

Todas as restrições listadas possuem caráter impeditivo, ou seja, são consideradas como restrições essenciais. Neste sentido, somente serão aceitas como viáveis as soluções que atendam simultaneamente todas as restrições essenciais.

Além destas, também foi considerada uma restrição de caráter não impeditivo, considerada como não essencial, que se refere a existência de uma sobra de lugares na sala, com relação ao número de alunos inscritos na disciplina a ser ministrada nesta sala. Esta restrição foi considerada pois, normalmente, o período de complementação de matrículas na UPF se estende por alguns dias após o início das aulas. Neste caso, o número de alunos matriculados poderá exceder a capacidade da sala para a qual a turma foi designada. Caso isto ocorra, haverá a necessidade de mudança da sala de aula originalmente atribuída. Assim, dependendo do número de novas matrículas, nas turmas das disciplinas, pode ocorrer um número significativo de trocas de sala de aula, justificando-se que se atribua, sempre que possível, uma sala com número de lugares maior que o número exato de alunos originalmente matriculados.

Em função das considerações efetuadas, o problema de alocação de salas de aula foi formulado como:

Minimizar:

$$\sum_{i=1}^{nd} \sum_{j=1}^{ns} X_{ij} D_j N_i \tag{7}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{ns} X_{ij} = 1, i = 1, \ldots, nd \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{nd} X_{ij} \leq 1, j = 1, \ldots, ns \tag{9}$$

$$N_i \leq \sum_{j=1}^{ns} X_{ij} C_j, i = 1, \ldots, nd \tag{10}$$

$$N_i + \delta \leq \sum_{j=1}^{ns} X_{ij} C_j, i = 1, \ldots, nd \tag{11}$$

onde:
X_{ij} : matriz binária, com:
x_{ij} =1, se a disciplina i for atribuída à sala j, e x_{ij} =0, caso contrário;
D_j : distância da sala j à sede, ou seja, da sala, atribuída à disciplina, ao prédio de origem do curso;
N_i : número de alunos matriculados na disciplina i;
C_j : capacidade da sala j;
δ : um folga ou reserva em cada sala;
nd: número total de disciplinas e
nd : número de salas disponíveis.

As Equações 8 e 9 correspondem, respectivamente, às condições de que cada disciplina deve ser atribuída a uma sala, e cada sala deve comportar no máximo uma disciplina. Na Equação 10 tem-se que o número de alunos da disciplina não deve superar a capacidade da sala à ela atribuída. Por fim, a relação descrita na Equação 11 corresponde à restrição não impeditiva, segundo a qual é aconselhável um folga ou reserva em cada sala.

Segundo a formulação desenvolvida, a atribuição das salas é efetuada para cada dia da semana de forma isolada, sem a preocupação de que uma turma tenha aula em uma mesma sala nos diversos dias da semana, mas apenas que, a cada noite, os alunos que estejam regularmente matriculados nas disciplinas de um determinado nível do curso não precisem se deslocar de um prédio a outro. Assim, a atribuição é feita com base na disciplina com maior número de alunos daquele turno.

A formulação proposta foi implementada em linguagem FORTRAN, sendo a otimização efetuada com o método *Simulated Annealing*. No processo de otimização, de maneira análoga às formulações propostas na literatura, as restrições não atendidas foram consideradas por meio de penalização da função objetivo, onde foram empregados fatores de penalização distintos para cada grupo de restrições, conforme o caráter impeditivo ou não destas restrições.

3.2 Método de otimização *Simulated Annealing*

O Método do Recozimento Simulado, ou *Simulated Annealing*, utiliza uma estratégia diferente dos métodos exatos, a qual possibilita evitar a convergência para um mínimo local aceitando também, a partir de um critério probabilístico, soluções que possam piorar o valor da função objetivo. O método foi originalmente proposto por Kirkpatrick et al. (1983), e se baseou na fundamentação teórica proposta por Metropolis et al. (1953) sobre a simulação do processo de recozimento, utilizado em metalurgia, para obtenção de estados de baixa energia de um sólido. O termo recozimento é dado ao processo de aquecimento de um sólido até seu ponto de fusão, seguido de um resfriamento lento. Neste processo, o resfriamento lento é essencial para a manutenção do equilíbrio térmico no qual os átomos possam se reorganizar em uma estrutura de mínima energia. Caso o sólido seja resfriado de forma abrupta, seus átomos poderão formar uma estrutura cristalina frágil. Computacionalmente, o recozimento pode ser considerado como um processo estocástico de organização dos átomos com mínima energia interna. Quando em temperaturas altas os átomos movem-se livremente podendo, com maior probabilidade, atingir estados (ou estruturas cristalinas) que acarretam em aumento na sua energia interna. A redução gradual da temperatura possibilita aos átomos a movimentação no sentido de formarem uma estrutura cristalina estável, e a probabilidade de aumento na energia interna é reduzida.

No *Simulated Annealing*, a função objetivo corresponde à energia do sólido de forma análoga ao recozimento em termodinâmica. Esta técnica começa o processo de otimização através de uma solução inicial qualquer, considerada como solução atual, e para busca de valores otimizados são geradas soluções aleatórias para o problema. O processo também considera inicialmente um alto valor para o parâmetro da temperatura T, para a qual uma nova solução é gerada na vizinhança da solução atual. Se no processo surgirem soluções melhores, estas naturalmente são aceitas como soluções e como novos centros de busca, onde o processo será reiniciado a partir da nova solução encontrada. Porém, caso a solução gerada seja pior que a solução anterior, a aceitação da nova solução como novo centro de busca se dará através de um critério probabilístico, onde se considera:

$$p = \exp(\frac{-\Delta f}{T}) \tag{12}$$

onde:
p : função aceite da nova solução gerada aleatoriamente;

T : parâmetro do chamado de temperatura, que regula a probabilidade de piora na função objetivo;
Δf : variação da função objetivo entre o valor da solução considerada como central e a solução vizinha, gerada aleatoriamente.

A nova solução será aceita se p for maior que um número entre zero e um, gerado aleatoriamente. Caso contrário, a solução atual, que correponde ao centro de busca, é mantida. Para valores altos de T, a chance de aceitação de soluções piores será maior, sendo T gradualmente reduzido até que o critério de parada estabelecido seja atendido.

A estratégia usual para redução da temperatura, e considerada no presente estudo, consiste no emprego de um fator de redução α pelo qual a temperatura atual vai sendo multiplicada. Neste caso, cabe ressaltar que, caso seja adotado um valor grande para α (próximo da unidade), o processo pode se tornar demasiadamente lento. Em contrapartida, um valor pequeno para α pode acarretar na convergência prematura para um mínimo local.

A cada iteração do método, um novo vizinho s' é gerado de s e se realiza o teste para a variação Δf do valor da função objetivo, isto é, calcula-se $\Delta f = f(s') - f(s)$, onde podem ocorrer as seguintes situações:

- $\Delta f < 0$: Neste caso, há uma redução de energia, o que significa que a nova solução é melhor que a anterior e o método aceita a nova solução como solução otimizada e s' passa a ser a nova solução correpondente ao centro de busca;

- $\Delta f = 0$: Neste caso, não há nem aumento nem redução de energia, o que indicaria estabilidade. Porém, os autores afirmam que esta situação seria pouco provável, e a nova solução seria aceita;

- $\Delta f > 0$: Neste caso, há um aumento do estado de energia, o que significa que a aceitação deste tipo de solução estaria condicionada ao critério probabilístca, sendo mais provável a altas temperaturas e bastante improvável a temperaturas reduzidas.

No início do procedimento, quando a temperatura é alta, há uma chance maior de se escapar de mínimos locais, pois são aceitos mais pontos avaliados nas vizinhanças da solução considerada. No entanto, à medida que se aproxima de zero, o algoritmo comporta-se como o método de descida, uma vez que diminui a probabilidade de se aceitarem movimentos que possam piorar a solução encontrada. O procedimento é finalizado ao chegar a temperatura a um valor próximo de zero, quando soluções que pioram o valor da função objetivo não são mais aceitas, o que significa que o sistema está estável e evidencia o encontro de um ótimo local.

Em resolução de problemas reais também é comumente usado o procedimento chamado *Reannealing*, que consiste novamente na aplicação do método *Simulated Annealing*, tomando como solução inicial a solução otimizada obtida do processo de busca anterior, quando a temperatura mínima foi atingida. Neste caso, o procedimento representaria o reaquecimento, seguido de um novo processo de resfriamento, o que possibilitaria uma nova busca por soluções melhores, quando a quantidade de movimentos consecutivamente rejeitados é baixa. Também é possível se trabalhar com taxa de resfriamento menor quando as temperaturas são mais altas e aumentá-la à medida que a temperatura vá sendo reduzida.

Um algoritmo básico do *Simulated Annealing*, encontrado em Souza (2000), pode ser visualizado no Algoritmo 1.

4. Exemplo de Aplicação da Formulação

Com o objetivo de ilustrar a aplicação da formulação desenvolvida apresentam-se, na sequência, os dados e correspondentes resultados de um dos diversos testes efetuados. Nestas simulações, os valores empregados para os parâmetros específicos do *Simulated Annealing* foram temperatura inicial $T = 100$ e redutor de temperatura $\alpha = 0,95$.

O problema apresentado é composto de 15 disciplinas, as quais devem ser alocadas nas 17 salas disponíveis em quatro prédios do câmpus. Na Tabela 1 estão relacionados, para cada disciplina, o correspondente número de alunos matriculados e a sede (prédio de origem) do curso a que pertence. Já a Tabela 2 relaciona, para cada sala, a respectiva capacidade e o prédio onde se situa.

A matriz de distâncias D é constituída a partir do conhecimento das distâncias entre os prédios, e é empregada para o cálculo da função objetivo. Uma vez que as distâncias supostamente serão percorridas a pé, foi constituída uma matriz simétrica, ou seja, o percurso de ida entre um prédio e outro possui a mesma distância do percurso de retorno. Especificamente, para o exemplo, foram consideradas as distâncias (em metros) conforme apresentado na Tabela 3.

As análises foram efetuadas a partir de diversas soluções iniciais, todas elas infactíveis. O resultado, invariavelmente, convergiu para um mesmo valor da função objetivo. A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos sem consideração de folga (diferença entre a capacidade da sala e o tamanho da turma). O custo da

Algoritmo 1: Procedimento SA ($f(.)$, $N(.)$, α, $SAmax$, T_0, s)

```
s* ← s ; { Melhor solução obtida até então } ;
IterT ← 0; { Número de iterações na temperatura T };
T ← T0; { Temperatura Corrente } ;
enquanto (T > 0) faça
    enquanto (IterT < SAmax ) faça
        IterT ← IterT + 1 ;
        Gere um vizinho qualquer s' ∈ N(s) ;
        Δ = f(s') − f(s) ;
        se ( Δ < 0 ) então
            s ← s' ;
            se (f(s') < f(s*)) então
                s* ← s'
            fim se
        senão
            Tome x ∈ [0, 1];
            se (x < e^(−Δ/T) ) então
                s ← s'
            fim se
        fim se
    fim enqto
    T ← α × T ;
    IterT ← 0 ;
fim enqto
s ← s* ;
Retorne s ;
Fim SA
```

Tabela 1. Dados gerais das disciplinas.

Disciplina	Nº Alunos	Origem
1	48	1
2	45	1
3	38	1
4	30	1
5	23	1
6	20	1
7	40	3
8	35	3
9	27	3
10	22	3
11	13	3
12	41	4
13	34	4
14	29	4
15	18	4

solução ótima é composto do somatório dos valores constantes da última coluna, obtidos a partir do produto entre o número de alunos da turma e a distância entre o prédio que comporta a sala e o prédio sede. Assim, as parcelas para as quais o custo é nulo indicam que a disciplina correspondente ocorrerá na própria sede do curso.

Para o exemplo, o custo total resultou em $35 \times 200 + 18 \times 150 = 9700$ metros, correspondendo ao somatório das distâncias percorridas por cada um dos alunos.

Ainda para o exemplo analisado cabe destacar que, apesar da solução otimizada indicar a necessidade de duas turmas terem de se deslocar ao longo do câmpus, esta solução é factível, uma vez que todas as turmas

Tabela 2. Dados das salas disponíveis.

Sala	Capacidade	Prédio
1	20	1
2	25	1
3	35	1
4	40	1
5	40	1
6	45	1
7	50	1
8	20	2
9	40	2
10	50	2
11	20	3
12	25	3
13	30	3
14	50	3
15	35	4
16	40	4
17	50	4

Tabela 3. Distância entre os prédios (metros).

Prédios	1	2	3	4
1	0	100	300	250
2	100	0	200	150
3	300	200	0	100
4	250	150	100	0

Tabela 4. Resultados obtidos sem reserva de lugares nas salas.

Disc.	Sala	Nº Al.	Cap.	Sede Disc.	Prédio	Custo
1	7	48	50	1	1	0
2	6	45	45	1	1	0
3	5	38	40	1	1	0
4	3	30	35	1	1	0
5	2	23	25	1	1	0
6	1	20	20	1	1	0
7	14	40	50	3	3	0
8	10	35	50	3	2	7000
9	13	27	30	3	3	0
10	12	22	25	3	3	0
11	11	13	20	3	3	0
12	17	41	50	4	4	0
13	15	34	35	4	4	0
14	16	29	40	4	4	0
15	8	18	20	4	2	2700

foram alocadas a salas com capacidade igual ou superior ao número de alunos matriculados nas disciplinas. No caso específico, a folga variou entre 0 e 15 alunos.

5. Aplicação ao Problema da Universidade de Passo Fundo

Apresentam-se na sequência os resultados obtidos a partir de uma pesquisa de campo no Instituto de Ciências Exatas e Geociências, da Universidade de Passo Fundo, realizada com a finalidade de coletar dados reais para validação do modelo de otimização proposto para o problema de alocação de salas.

As análises foram efetuadas com e sem a consideração da reserva de lugares (diferença entre a capacidade da sala e o número de alunos matriculados). Nas otimizações com reserva de lugares, foram buscadas cinco vagas adicionais por disciplina.

5.1 Dados gerais

Para os seis dias letivos (segunda-feira a sábado) foram considerados os dados conforme a Tabela 5, relativos ao número total de disciplinas, de salas disponíveis e de alunos matriculados. A enumeração dos prédios foi realizada conforme a Tabela 6. As distâncias consideradas entre eles, para construção da matriz de distâncias, empregada para o cálculo da função objetivo, estão apresentadas na Tabela 7. Na Tabela 8 estão relacionados os dados gerais relativos às 38 salas de aula disponíveis (capacidade e prédio onde se situam). Por questão de concisão, apenas os dados relativos a algumas salas são apresentados.

Tabela 5. Dados Gerais dos problemas de alocação de salas.

Dia	N° Disciplinas	Nº Salas	Nº Alunos
Segunda	28	38	685
Terça	29	37	691
Quarta	23	36	573
Quinta	28	37	679
Sexta	22	38	523
Sábado	10	36	224

Tabela 6. Numeração dos prédios considerados.

Prédio	Numeração considerada
ICEG-B2	1
ICEG-B5	2
FEFF-A12	3
CENTRAL DE SALAS-D5	4
CET-B3	5
FAED	6

Tabela 7. Distância entre os prédios (metros).

Prédios	1	2	3	4	5	6
1	0	218	292	420	112	850
2	218	0	390	212	325	740
3	292	390	0	605	380	1010
4	420	212	605	0	521	930
5	112	325	380	521	0	980
6	850	740	1010	930	980	0

Tabela 8. Descrição de salas de aula disponíveis.

Sala	Número	Capacidade	Prédio
001	1	20	1
202	2	20	1
203	3	20	1
...	...	...	...
214	38	25	6

Em seguida, apresenta-se um exemplo específico sobre os dados utilizados na otimização da alocação de salas para segunda-feira, bem como todos os resultados computacionais gerais obtidos.

5.2 Resultados computacionais

Considerando os dados reais apresentados, foram realizadas as otimizações dos seis dias letivos para a demanda de disciplinas do Instituto de Ciências Exatas e Geociências relativas ao segundo semestre de 2010.

Como exemplo, são apresentadas, na Tabela 9, algumas das 28 disciplinas previstas para ocorrerem nas segundas-feiras que poderiam ser alocadas nas 38 salas disponíveis, conforme apresentado na Tabela 8. Estão relacionados na Tabela 9 os nomes das disciplinas apenas como dados informativos sobre o problema real. Já o curso ao qual a disciplina pertence indica a sede (última coluna da tabela). Cada disciplina ocupará uma sala durante todo o turno (quatro períodos letivos).

Tabela 9. Descrição das disciplinas que ocorrem na segunda-feira.

Curso	Disciplina	N° Disc.	N° Alunos	Sede
Física	Física Geral e Exp. IV	1	16	1
Física	Sem. de Ed.	2	30	1
Química L/B	Inic. ao Conh. Ac.	3	21	1
...	...	...	...	...
Ciência da Computação	Teoria da Computação	28	30	2

Nas Tabelas 10 e 11, apresentam-se os resultados obtidos das otimizações realizadas.

Conforme comentado na descrição da formulação do problema, é interesse da instituição que, sempre que possível, haja um excedente prevendo eventuais matrículas posteriores ao início das aulas. Por este motivo também se optou em realizar a otimização prevendo obrigatoriamente a existência de lugares excedentes nas salas, para se verificar a possibilidade de existência de uma solução viável, considerado as folgas.

As análises foram efetuadas com e sem sobras, ou seja, a consideração da reserva de lugares (diferença entre a capacidade da sala e o número de alunos matriculados). Nas otimizações com reserva de lugares, foram buscadas cinco vagas adicionais por disciplina.

Na Tabela 10 apresenta-se o resultado da otimização da alocação de salas para segunda-feira, onde se considerou a restrição de folga como não impeditiva, chamada de Solução Otimizada 1.

Na Tabela 11 apresenta-se o resultado da otimização da alocação de salas para segunda-feira, onde a restrição de folga foi considerada como restrição essencial ou impeditiva, chamada de Solução Otimizada 2. Pode se observar, pelos resultados obtidos, que, em função da capacidade das salas disponíveis, a restrição de folga pode ser integralmente atendida.

Ressalta-se que, no processo de otimização, como solução inicial foram utilizadas tanto soluções iniciais infactíveis, como também foi considerada a solução praticada atualmente pela secretaria da Unidade, chamada de atual. Os resultados, invariavelmente, convergiram para os mesmos valores otimizados das funções objetivos.

Ainda cabe observar que, em alguns casos, a solução inicial, adotada pelo instituto, seria infactível, uma vez que o número de alunos foi superior à capacidade da sala. Esta foi a solução adotada pela secretaria, a partir do deslocamento de mesas entre as salas. Exemplificando, a disciplina 2 (com 30 alunos matriculados) foi alocada originalmente na sala 2 (vinte lugares).

Além da resolução do problema de Alocação de Salas de Aula para segunda-feira, o processo de otimização foi realizado para os demais dias da semana, obtendo-se valores otimizados para a função de avaliação, apresentados na Tabela 12. Resumidamente nesta tabela, apresentam-se os valores da Função Objetivo (FO) com os valores das penalizações e sem os valores das penalizações, que indicam as distâncias percorridas pelos alunos pelo Campus da UPF. Na coluna relativa à Solução Otimizada 1, a restrição de folga foi considerada como não impeditiva e na coluna relativa à Solução Otimizada 2, a restrição de folga foi considerada como impeditiva.

Observa-se que, em todos os casos analisados, o software encontrou uma solução factível ou viável, com resultados significativamente melhores que a solução atual adotada para as otimizações que previam folgas e praticamente em todos os casos em que não se previam folgas. O único caso em que distância total percorrida foi maior, após a otimização ocorreu na quarta-feira, onde a solução inicial praticada violava uma restrição de capacidade, considerada impeditiva, o que não ocorreu na solução otimizada encontrada.

Ainda é possível verificar, ao serem comparados os valores da FO otimizadas, que ao se considerar a folga como restrição impeditiva, apesar de existir um percentual de redução significativo, a redução foi bem maior quando a restrição de folga foi considerada como não impeditiva.

Com a finalidade de se comparar os resultados obtidos podem ser calculadas as distâncias médias percorridas por aluno, conforme apresentados na Tabela 13.

Pode-se observar na Tabela 13 que, com exceção da quarta-feira, os demais resultados otimizados indicaram reduções significativas na distância média percorrida pelos alunos.

Tabela 10. Resultados da otimização com restrição de folga não impeditiva.

			Solução Atual			Solução Otimizada 1		
Disc.	**Nº Alunos**	**Sede**	**Sala**	**Cap.**	**Prédio**	**Sala**	**Cap.**	**Prédio**
1	16	1	23	54	3	36	25	5
2	30	1	2	20	1	5	55	1
3	21	1	1	20	1	10	30	1
4	19	1	5	55	1	3	20	1
5	23	1	34	25	5	4	25	1
6	18	1	3	20	1	8	20	1
7	13	1	11	70	1	33	30	5
8	30	1	33	30	5	6	70	1
9	14	1	35	25	5	34	25	5
10	19	1	32	25	5	6	70	1
11	7	1	38	25	6	26	54	3
12	12	1	4	25	1	15	25	2
13	21	1	27	30	4	9	30	1
14	13	1	28	40	4	32	25	5
15	27	1	10	30	1	7	50	1
16	23	1	8	20	1	12	25	1
17	14	1	9	30	1	35	25	5
18	20	1	29	40	4	2	20	1
19	35	1	7	50	1	11	70	1
20	26	2	17	38	2	17	38	2
21	31	2	14	40	2	19	40	2
22	68	2	13	75	2	13	75	2
23	23	2	18	26	2	14	40	2
24	48	2	6	70	1	31	50	4
25	21	2	21	40	2	16	35	2
26	25	2	20	45	2	20	45	2
27	18	2	15	25	2	18	26	2
28	30	2	19	40	2	21	40	2

6. Conclusões

Com o objetivo de atender a uma demanda específica da Universidade de Passo Fundo foi desenvolvida uma formulação matemática para a otimização da alocação das salas de aula no câmpus. Nesta formulação, além do atendimento às restrições usuais neste tipo de problema, buscou-se manter os alunos o mais próximo possível da sede de seus respectivos cursos, através da minimização das distâncias a serem percorridas.

A formulação foi implementada e otimizada com o emprego do método *Simulated Annealing*, o qual já havia sido utilizado com êxito pelos autores em aplicações de natureza semelhante.

Em todas as otimizações realizadas obteve-se soluções factíveis melhores que as praticadas, o que indica que o modelo proposto, além de atender as necessidades do referido Instituto, propõe soluções melhores do que as elaboradas manualmente. Para todos os dias da semana, foram encontradas soluções otimizadas factíveis que apresentaram melhoras significativas em relação a solução real praticada.

As análises foram efetuadas com e sem folgas, ou seja, a consideração da reserva de lugares (diferença entre a capacidade da sala e o número de alunos matriculados). Nas simulações com reserva de lugares, foram buscadas cinco vagas adicionais por disciplina. Além disto, como solução inicial no processo de otimização foram utilizadas tanto soluções iniciais infactíveis, como também foi considerada a solução encontrada, praticada, chamada de atual. Os resultados, invariavelmente, convergiram para os mesmos valores otimizados das funções objetivos.

Em todos os casos o software encontrou uma solução factível e com resultados significativamente melhores que a solução atual adotada para as otimizações que não previam folgas e, em praticamente todos os casos em que não se previam folgas. Os resultados obtidos evidenciam a importância do emprego de técnica de otimização a este tipo de problema, bem como a validade da abordagem efetuada.

Acredita-se que a formulação matemática apresentada, com pequenas adaptações, poderá resolver problemas específicos de outras Instituições de ensino.

Tabela 11. Resultados da otimização com restrição de folga impeditiva.

			Solução Atual			Solução Otimizada 2		
Disc.	**Nº Alunos**	**Sede**	**Sala**	**Cap.**	**Prédio**	**Sala**	**Cap.**	**Prédio**
1	16	1	23	54	3	36	25	5
2	30	1	2	20	1	7	50	1
3	21	1	1	20	1	33	30	5
4	19	1	5	55	1	34	25	5
5	23	1	34	25	5	10	30	1
6	18	1	3	20	1	32	25	5
7	13	1	11	70	1	1	20	1
8	30	1	33	30	5	5	55	1
9	14	1	35	25	5	2	20	1
10	19	1	32	25	5	4	25	1
11	7	1	38	25	6	22	54	3
12	12	1	4	25	1	35	25	5
13	21	1	27	30	4	25	54	3
14	13	1	28	40	4	3	20	1
15	27	1	10	30	1	19	40	2
16	23	1	8	20	1	9	30	1
17	14	1	9	30	1	8	20	1
18	20	1	29	40	4	12	25	1
19	35	1	7	50	1	6	70	1
20	26	2	17	38	2	21	40	2
21	31	2	14	40	2	20	45	2
22	68	2	13	75	2	13	75	2
23	23	2	18	26	2	17	38	2
24	48	2	6	70	1	11	70	1
25	21	2	21	40	2	18	26	2
26	25	2	20	45	2	14	40	2
27	18	2	15	25	2	15	25	2
28	30	2	19	40	2	16	35	2

Tabela 12. Distância entre os prédios (metros).

Dia	**Resultados**	**Atual**	**Solução Otimizada 1**	**Redução**	**Solução Otimizada 2**	**Redução**
S	FO c/ pen.	193498	22776	88,23%	42318	78,13%
	Dist. s/ pen.	53398	22676	57,53%	42058	21,24%
T	FO c/ pen.	278308	27554	90,10%	55698	79,99%
	Dist. s/ pen.	98258	27334	72,18%	55478	43,54%
Q	FO c/ pen.	136160	3908	97,13%	40294	70,41%
	Dist. s/ pen.	36060*	3808	89,44%	40144	- 11,33%*
Q	FO c/ pen.	399984	12100	96,97%	23700	94,07%
	Dist. s/ pen.	69924	12060	82,75%	23480	66,42%
S	FO c/ pen.	413595	5120	98,76%	13170	96,82%
	Dist. s/ pen.	93545	5040	94,61%	13030	86,07%
S	FO c/ pen.	49624	0	100%	0	100%
	Dist.s/ pen.	19594	0	100%	0	100%

* Solução inicial infactível, fornecida pela secretaria.

Tabela 13. Distância média percorrida por aluno (metros).

	S	**T**	**Q**	**Q**	**S**	**S**
Solução Atual	77,95	142,20	62,93	102,98	178,86	87,47
Solução Otimizada 1	33,10	39,56	6,65	17,76	9,64	0
Solução Otimizada 2	61,40	80,29	70,06	34,58	24,91	0

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Universidade de Passo Fundo pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa que possibilitou gerar os resultados apresentados.

Referências

Alvarez-Valdés, R.; Crespo, E. & Tamarit, J.M., Tabu search: an efficient metaheuristic for university organization problems. *Revista Investigación Operacional*, 22(2):104–113, 2001.

Carter, M.W. & Laporte, G., Recent developments in practical examination timetabling. In: *Practice and Theory of Automated Timetabling*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, v. 1153 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 3–21, 1995.

Dammak, A.; Elloumi, A.; Kamoun, H. & Ferland, J.A., Course timetabling at a tunisian university: A case study. *Journal of System Science and System Engineering*, 17(3):334–352, 2008.

Even, S.; Itai, A. & Shamir, A., On the complexity of timetabling and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computation*, 5(4):691–703, 1976.

Jat, S.N. & Yang, S., A memetic algorithm for the university course timetabling problem. In: *Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*. Piscataway, USA: IEEE Press, v. 1, p. 427–433, 2008.

Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D. & Vecchi, M.P., Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.

Kripka, M., Discrete optimization of trusses by simulated annealing. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 26(2):170–173, 2004.

Kripka, R.M.L.; Oro, N.T. & Kripka, M., Distribuição de cargas horárias em instituições de ensino superior: uma formulação para a maximização do aproveitamento dos recursos humanos. *Ciência e Engenharia*, 14(1):65–72, 2005.

Martinez-Alfaro, H. & Flores-Teran, G., Solving the classroom assignment problem with simulated annealing. In: *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Piscataway, USA: IEEE Press, v. 4, p. 3703–3708, 1998.

Metropolis, N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.N.; Teller, A.H. & Teller, E., Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.

Oliveira, A.C., *Uso do Algoritmo Genético e Recozimento Simulado para o problema de alocação de salas*. Monografia de graduação, Ciêencia da Computação, Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, 2006.

Rossi-Doria, O.; Sampels, M.; Birattari, M.; Chiarandini, M.; Dorigo, M.; Gambardella, L.; Knowles, J.; Manfrin, M.; Mastrolilli, M.; Paechter, B.; Paquete, L. & Stützle, T., A comparison of the performance of different metaheuristics on the timetabling problem, .

Schaerf, A., A survey of automated timetabling. *Artificial Intelligence Review*, 13(2):87–127, 1999.

Silva, A.S.N.; Sampaio, R.M. & Alvarenga, G.B., Uma aplicação de *Simulated Annealing* para o problema de alocação de salas. *INFOCOMP – Journal of Computer Science*, 4(3):59–66, 2005.

Silva, D.J. & Silva, G.C., Heurísticas baseadas no algoritmo de coloração de grafos para o problema de alocação de salas em uma instituição de ensino superior. In: *Anais do XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Bento Gonçalves, RS, p. 1–11, 2010.

Souza, M.J.F., *Programação de horários em escolas: uma aproximação por meta-heurísticas*. Tese de doutorado, Engenharia de Sistemas de Computação, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2000.

Souza, M.J.F.; Martins, A.X.; Araujo, C.R. & Costa, F.W.A., Metodos de pesquisa em vizinhança variável aplicados ao problema de alocação de salas. In: *Anais do XXII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Curitiba, PR, v. 1, p. 1–8, 2002.

Subramanian, A.; Medeiros, J.M.F.; Cabral, L.A.F. & Souza, M., Aplicação da metaheurística busca tabu na resolução do problema de alocação de salas do centro de tecnologia da UFPB. In: *Anais do XXVI Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Fortaleza, CE, v. 1, p. 1–8, 2006.

Subramanian, A.; Medeiros, J.M.F.; Formiga, L.A. & Souza, M.J.F., Aplicação da metaheurística busca tabu ao problema de alocação de aulas e salas em uma instituição universitária. *Revista Produção Online*, 11(1):54–75, 2011.

Notas Biográficas

Rosana Maria Luvezute Kripka é graduada em Matemática com ênfase em Computação e mestre em Ciência da Computação e Matemática Computacional (USP/São Carlos, 1992 e 1995, respectivamente). Atualmente é professora do curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Geociências da Universidade de Passo Fundo.

Moacir Kripka é graduado em Engenharia Civil (PUC-RS, 1986), mestre e doutor em Engenharia Civil (COPPE/UFRJ, 1990 e EESC/USP, 1998, respectivamente). Atualmente é professor do curso de Engenharia Civil e Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade de Passo Fundo.