OTIMIZAÇÃO NA CONSTRUÇÃO DA GRADE HORÁRIA ESCOLAR – UMA APLICAÇÃO –

Eliana Gomes da Silva Kotsko
Departamento de Ciências - UNICENTRO
e-mail elianagsk2002@yahoo.com.br

Drª Maria Teresinha Arns Steiner
Departamento de Matemática – UFPR
e-mail: tere@mat.ufpr.br

MSc. Artur Lourival da Fonseca Machado
Departamento de Ciências - UNICENTRO
e-mail arturlfm@uol.com.br

Resumo

O presente trabalho trata da construção otimizada de horário escolar de turmas em escolas de ensino fundamental e médio, utilizando técnicas da Pesquisa operacional. Trata-se de problema complexo, envolvendo inúmeras variáveis, que ocorre a cada início de ano ou por mudança de turmas e professores, aposentadorias e licenças. Na construção do modelo são utilizadas restrições correspondentes a exigências administrativas como máximo de duas aulas diárias por professor em uma mesma turma, aulas vagas dos professores preferencialmente as primeiras e/ou últimas, disponibilidades dos professores quanto a dias da semana, preferências de três professores por atuarem em três dias quaisquer dos cinco dias da semana e restrições para assegurar uma aula por turma e uma aula por professor em um mesmo horário. Para atender as exigências de aulas vagas no início e/ou final do turno, foram estabelecidos pesos adequados para interferência nas regras lexicográficas do simplex, forçando definições de horários que melhoram o valor da função objetivo. A definição das variáveis de decisão (binárias) foi realizada a partir de conjuntos de turmas e de dias da semana de cada professor, proporcionando uma redução de 6300 variáveis de decisão possíveis para 2510 utilizadas, devido à estrutura de esparsidade, pois nem todos os professores têm au

beginning and/or the final of the shift, adapted weights are established for interference in the simplex lexicographical rules, forcing schedules that improve the value of the objective function. The definition of the decision variables (binary) it was accomplished starting from groups set and week days set of each teacher, providing a reduction of 6300 possible decision variables to 2510 used, due to the sparse structure, because nor all the teachers have classes in all the groups. There were also used 15 auxiliary binary variables to which are imposed restrictions that result in the classes designation in three of five available days. The problem was implemented in LINGO version 6.0 educational, whose solution presents 300 non-null decision variables (designated schedules).

Keywords: Timetables, Mathematical Programming, Binary Lineal Programming, Modeling with Lingo.

1. Introdução

1.1. Objetivos do trabalho

Utilizar a Pesquisa Operacional para alocação otimizada de horários das aulas de professores de uma escola da rede pública de ensino do estado do Paraná, atendendo suas preferências e necessidades e também às exigências administrativas e pedagógicas da escola.

Dessa forma, pretende-se atender a objetivos específicos tais como:

- Aumentar a satisfação dos docentes em relação à designação de seus horários.
- Obter a construção da escala de trabalho de forma eficaz e eficiente.

Para atender estes objetivos, fez-se a implementação computacional e solução do modelo matemático com o pacote computacional LINGO (*Language for Interactive General Optimizer)*.

1.2. Importância do trabalho

A distribuição das aulas para professores da rede estadual de ensino ocorre, normalmente, uma semana antes do início do ano letivo e a designação de horários é feita nesse curto prazo de forma manual e empiricamente. Por tratar-se de problema complexo, envolvendo inúmeras variáveis, gera certa dificuldade para quem o faz pelo pequeno prazo que dispõe e também porque na maioria das vezes não é possível atender as preferências e necessidades individuais de cada professor.

Sabe-se também que muitos professores, no decorrer do ano, aumentam ou diminuem sua carga horária, seja por motivo de licença ou outro, levando a alterações do horário, causando transtornos para a direção, equipe pedagógica, outros professores envolvidos e alunos.

A designação otimizada oferece maior satisfação aos docentes quanto a seus horários, com melhor rendimento em suas atividades, beneficiando toda comunidade escolar.

Como o colégio situa-se em local com estradas de difícil acesso, a melhor distribuição de aulas proporciona redução no custo de transporte de professores.

2. Revisão Bibliográfica de Problemas de Alocação de Horários

2.1. Introdução

O Problema de Designação (*Assignment Problem*) é uma classe de problemas onde é necessário designar pessoas a horários, lugares, tarefas ou a zonas de trabalho, máquinas a tarefas, etc. Aparece muitas vezes como um problema de PL, mas as suas variáveis de decisão são binárias.

Na otimização da grade de horários podem ser utilizados os métodos exatos, que conduzem à solução ótima e os métodos heurísticos, que fornecem soluções quase ótimas ou ótimas.

Entre os trabalhos encontrados na literatura, pode-se citar:

Para a alocação de disciplinas a professores de um departamento de informática da UFES, GARCIA (1995) aplicou a heurística dos algoritmos genéticos com objetivo de maximizar uma função objetivo definida com pesos correspondentes ao grau de interesse que cada professor possui em ministrar dada disciplina. As variáveis de decisão são binárias assumindo o valor 1 se um professor é designado para determinada disciplina. As restrições são definidas a partir de conjuntos de disciplinas, conjuntos de professores a serem designados a disciplinas, conjuntos de disciplinas que têm uma interseção de horário, de forma a garantir certo número de disciplinas que cada professor deve ministrar, que somente um professor assuma determinada disciplina e que não assuma duas disciplinas com interseção de horário. Após definição da função objetivo e restrições, o autor obtém representações para os indivíduos e determina, em função desta, como serão os operadores genéticos. São inicializados por uma população inicial aleatória, onde serão aplicados os pesos de avaliação, seleção e aplicação de operadores genéticos (*crossover* e mutação). O autor estabelece como critério de parada quando, após um número de gerações, o vetor da avaliação do indivíduo permanece inalterado, sendo esta a solução ótima procurada.

SANTOS (1995) apresenta um método de determinação de horário escolar baseado em coloração de grafos. O método foi implementado com base no Algoritmo de Guénoche (1989), que enumera todas as partições para um número fixo de classes de diâmetro mínimo. Esse algoritmo baseia-se na coloração de um grafo teto em p cores, cada cor definindo uma classe. Na implementação realizada, foram feitas algumas modificações nos passos 1 e 2 do algoritmo e colocou-se um índice de eficiência com o objetivo de auxiliar no processo de tomada de decisão. Os resultados obtidos mostraram-se de boa qualidade, obtendo um índice de eficiência de 82,8%.

BARBOSA (2000), na solução de designação de horários de atendentes em uma central telefônica de atendimento a usuários, a qual opera vinte quatro horas por dia, resolve o problema em três fases: inicialmente determina o número de atendentes necessários para cada meia hora do dia com base em dados históricos da demanda, fazendo uso de um simulador da central de atendimento; na segunda fase são determinados os melhores horários de forma a minimizar os custos da empresa onde, além dos resultados gerados na primeira fase, são utilizados também os horários disponíveis dos atendentes e na última fase, são designados os horários para os atendentes, maximizando a satisfação destes com relação aos seus horários, fazendo a designação dos horários obtidos na fase anterior. Para a designação utilizou o modelo de Programação Inteira com solução pelo pacote computacional LINDO.

OHIRA (1990) utiliza-se da estrutura do "Problema de Transporte", com um processo semelhante ao método de Vogel, adaptado para considerar a necessidade de se alocar toda quantidade do número de horas aula necessária no período de cada turma em todas as disciplinas, obtendo, assim, uma solução heurística aproximada para o problema de alocação de disciplinas.

SIQUEIRA et al. (2001) definiu o problema de alocação de turmas às salas de aula na UFPR, no qual as turmas devem ser designadas às salas evitando ociosidades e sobreposição de horários, adequando o número de alunos à capacidade das salas e atendendo às particularidades de algumas disciplinas, como um Problema de *Matcning* de Peso Máximo comparando-o com o Problema da Designação, obtendo resultados bastante satisfatórios. Para tanto, as salas de aula e as turmas constituem um conjunto bipartido de vértices. Numa primeira etapa trabalhou com um número reduzido de salas de aula como um Problema de *Matching,* que se mostrou bastante eficiente. Porém, quando aumentou o número de salas, o tempo computacional para solução do problema exato de *Matching* tornou inviável a sua aplicação. Para solucionar este problema, utilizou as técnicas heurísticas de Busca Tabu e *Simulated Annealing*. Nos dois algoritmos, partiu de uma solução inicial aleatória factível, na qual um vetor contendo a designação das turmas às salas disponíveis foi gerado. Neste vetor cada posição indica a sala, a turma, o horário e a capacidade da sala. No processo de efetivação de trocas, as capacidades das salas devem ser verificadas para gerar apenas soluções factíveis e a ociosidade deve ser minimizada, resolvendo, então, o problema.

Em OLIVEIRA et al. (2001) utilizou-se a meta-heurística S*imulated Annealin*g para a implementação de um programa para a criação de uma grade horária minimizando o número de períodos escolares, dados um conjunto de disciplinas, a carga horária, seus respectivos pré-requisitos e o número máximo de horas que podem ser cursadas por período . Este método parte de uma solução inicial composta por uma grade de horários péssima que vai sendo melhorada a cada passo. Nesta grade inicial, em cada período é cursada uma única disciplina, o que se justifica pelo fato de não haver soluções melhores devido à dependência de pré-requisitos. Desta forma o número de períodos previstos para a conclusão do curso é muito elevado. Outras grades podem ser elaboradas a partir da solução inicial. O algoritmo consiste em realizar várias iterações da técnica de *Simulated Annealing* em busca de uma melhor solução para o problema, com função de energia a minimizar dada pelo número de períodos da grade.

Um exemplo de aplicação do Problema de Satisfação de Restrições (PRS) a um problema de tabela de horário pode ser encontrado em MEISELS et al.(1993). A técnica de PSR é definida por um conjunto de variáveis, cada qual com um discreto e finito conjunto de valores possíveis e um conjunto de restrições entre estas variáveis. Uma solução para um PRS é um conjunto de valores de variáveis que satisfaça todas as restrições.

2.2. Métodos Exatos

2.2.1. Programação Linear Inteira

Segundo ALVES (1997), um problema de Programação Linear Inteira (PLI) é um problema de Programação Linear (PL) em que todas ou alguma(s) das suas variáveis são discretas (devem assumir valores inteiros). Quando todas as variáveis estão sujeitas à condição de integralidade estamos perante um problema de Programação Linear Inteira Pura (PLIP); e se apenas algumas o estão trata-se de um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM). Embora a Programação Inteira (PI) inclua também a Programação Não-Linear Inteira, na maioria dos modelos da vida real se preserva a estrutura linear das funções.

2.2.2. Métodos para Resolução de Problemas de PLI

Para a resolução de problemas de PLI, ALVES, (1997), descreve dois métodos: o Método dos Planos de Cortes (*Cutting Planes*) e o Método de Partição e Avaliação Sucessivas (*Branch and Bound*), ambos utilizam o algoritmo Simplex para chegar à solução ótima de problemas de PL cuja região admissível vai sendo sucessivamente reduzida até se alcançar a solução do problema de PLI. Estes métodos são gerais, podendo ser aplicados a qualquer modelo de PLI.

- **Método dos Planos de Corte**

O método dos Planos de Corte foi o primeiro método a ser desenvolvido e deve-se a Gomory (1958). Consiste em introduzir sucessivamente novas restrições no problema linear do PLI, restrições essas que cortam o conjunto das soluções possíveis eliminando algumas delas e a própria solução ótima do PL (por isso se chamam planos de corte), sem contudo eliminar qualquer solução inteira.

- **Método de Partição e Avaliação Sucessivas**

O método "*Branch and Bound*" (literalmente, método de ramificação e limitação) consiste na partição (ramificação) sucessiva do conjunto de soluções possíveis do problema de PLI em subconjuntos e na limitação (avaliação) do valor ótimo da função objetivo (limite inferior se tratar de maximização, ou superior se tratar de minimização), de modo a excluir os subconjuntos que não contenham a solução ótima. Se na solução ótima de um problema de PL as variáveis tomam valores inteiros, essa é a solução ótima do PLI. Então se começa a resolver o PLI como um problema de PL. Quando sua solução não atende às restrições de integralidade, divide-se o problema de PL em dois, através da introdução de restrições adicionais, eliminando tal solução do conjunto das soluções possíveis. São resolvidos sucessivos problemas de PL, estabelecendo-se limites para o valor ótimo da função objetivo e eliminando diversos sub-conjuntos, até se alcançar a solução ótima do PLI.

2.2.3. Programação Linear Inteira Binária

Existe um caso especial PLI: os problemas onde as variáveis devem ser binárias, ou seja podem assumir os valores 0 (zero) ou 1 (um) que são os problemas de Programação Linear Binária (PPLB). Quando todas as variáveis de um modelo são binárias, o modelo diz-se de

Programação Inteira Binária. As variáveis binárias são muito úteis para exprimirem situações dicotômicas (sim ou não, fazer ou não fazer, e outros).

2.2.4. Algoritmo de Programação Linear Binária

O algoritmo proposto por E. Balas (1965) consiste em um processo de busca em uma árvore binária, na qual a cada nó *n* da árvore corresponde uma solução parcial do PPLB, cujos valores das *k* primeiras variáveis são conhecidas. A fim de se verificar a possibilidade de existência de uma solução viável e ótima, a partir desta solução parcial, dois testes deverão ser realizados.

- **Teste de Otimalidade**

O teste de otimalidade considera o conhecimento prévio de uma solução ótima temporária, cujo valor da função objetivo é z_{otimo} . Considerando que na solução parcial as *k* primeiras variáveis são conhecidas, uma estimativa do valor máximo da função objetivo para uma solução completa derivada desta solução parcial, poderá ser feita através de:

$$Z_{estimado} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j$$

Se o valor de $Z_{estimado}$ for superior ao valor de $Z_{ótimo}$, então é possível que se encontre uma solução ótima a partir desta solução parcial. Caso contrário, a melhor solução possível de ser encontrada não será melhor do que a solução ótima temporária já disponível.

- **Teste de Viabilidade**

O teste de viabilidade, por sua vez, considera que para cada restrição deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$\sum_{J=1}^{K} a_{cj} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

ou

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j < b_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j < b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0; a_{ij})$$

Então, se para alguma restrição:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j > b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0,1)$$

conclui-se que não existirão valores para as variáveis ainda não conhecidas que permitam a obtenção de uma solução que satisfaça a restrição.

No caso de falha de um destes dois testes, é necessário rever os valores atribuídos às *k* primeiras variáveis.

3. Material e Métodos

As etapas para desenvolvimento do trabalho correspondem à coleta de dados, modelagem matemática, implementação computacional e solução no programa Lingo versão 6.0 educacional e formatação da solução para os padrões usuais.

Para a modelagem matemática, a partir de informações obtidas sobre preferências e necessidades dos professores e exigências administrativas, são gerados a função objetivo e os conjuntos de restrições, com base em revisão bibliográfica de métodos exatos e heurísticos de trabalhos como de Scaerf (1995), além de outros onde foram obtidas soluções satisfatórias para construção de escalas de horários escolares, guia de modelagem como Bisschop et Entriken (1993) e modelagem e programação matemática com o software Lingo, como Schrage (2002).

A implementação no Lingo realizou-se em etapas:

- Definição de conjuntos de turmas e respectivo número de aulas e de dias da semana para cada professor;
- Definição das variáveis de decisão, levando em conta a estrutura de esparsidade;
- Definição da função objetivo e conjuntos de restrições.
- Estabelecimento de integralidade das variáveis.

A solução obtida no software Lingo é gravada em arquivo do Microsoft Word, onde se procede a formatação para os padrões usuais, facilitado com o uso de macro-funções.

3.1. Descrição do Problema

3.1.1. Distribuição de aulas em escolas de ensino fundamental e médio

Obedecendo a uma regulamentação contida na Resolução Nº 168/2002 da Secretaria Estadual de Educação, a distribuição das aulas para professores das escolas estaduais do ensino fundamental e médio da rede pública do Paraná é feita, normalmente, de uma a duas semanas antes do início do ano letivo.

Nessa resolução observam-se algumas normas para priorizar a escolha dos professores para as disciplinas e turmas. Dentre as mais importantes, destacam-se:

- Os professores que ocupam cargo efetivo, ou seja, que pertencem ao quadro próprio do magistério(QPM);
- Contratados pelo regime da Consolidação das Leis do Trabalho – CLT;
- Professores com maior titulação;
- Tempo de serviço do professor na rede estadual de ensino.

Observada a compatibilidade de horários, os primeiros poderão ministrar até 40 horas/aulas semanais, inclusive aulas extraordinárias e os contratados pelo regime da CLT poderão ministrar até um máximo de 36 horas/aula semanais, sejam de caráter definitivo ou temporário.

As aulas a serem distribuídas aos professores são consideradas a partir das cargas horárias disponíveis nas escolas e a matriz curricular de cada estabelecimento de ensino, de acordo com o número de turmas e modalidade de ensino (5ª a 8ª séries do ensino fundamental e as séries do ensino médio), geradas para o ano letivo através das matrículas dos alunos em cada escola.

A matriz curricular das disciplinas é aprovada pelo Núcleo Regional de Ensino, visando atender as características de cada região.

Prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em consonância com o disposto no Art. 26 da LDB (Lei de Diretrizes e Bases nº 9394/96), a proposta de organização do ensino fundamental estabelece que os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma Base Nacional Comum, complementada em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar por uma Parte Diversificada, exigida pelas características regionais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela, conforme Tabelas 1 e 2 a seguir.

Tabela 1: Disciplinas do Ensino Fundamental e respectivas cargas horárias

BASE	ÁREAS DO CONHECIMENTO	CARGA HORÁRIA POR SÉRIE			
		5ª	6ª	7ª	8ª
BASE DO NÚCLEO COMUM	Língua Portuguesa	3	3	4	4
	Educação Física	2	2	2	2
	Educação Artística	1	1	1	1
	Matemática	5	5	3	3
	Ciências	3	3	3	3
	Geografia	2	2	2	3
	História	2	2	3	2
SUB TOTAL		18	18	18	18
PARTE DIVERSIFICADA	Inglês	2	2	2	2
	Oficina de Produção de Texto	2	2	1	1
	Língua Ucraniana	2	2	1	1
	PEC Matemática	-	-	2	2
SUB TOTAL		6	6	6	6
TOTAL		24	24	24	24

Tabela 2: Disciplinas do Ensino Médio e respectivas cargas horárias

BASE	ÁREAS DO CONHECIMENTO	CARGA HORÁRIA POR SÉRIE		
		1ª	2ª	3ª
DO	Língua Portuguesa	3	3	3
	Arte	1	1	1

NÚCLEO COMUM	Educação Física	1	1	1
	Matemática	3	3	3
	Física	2	2	2
	Química	2	2	2
	Biologia	2	2	2
	História	2	2	2
	Geografia	2	2	2
SUB TOTAL		18	18	18
PARTE DIVERSIFICADA	PEC Biologia	-	2	-
	Inglês	2	2	2
	Introdução à Filosofia	-	2	-
	PEC Matemática	2	-	2
	Introdução à Sociologia	2	-	-
	PEC Língua Portuguesa	-	-	2
SUB TOTAL		6	6	6
TOTAL		24	24	24

3.1.2. O Problema de Construção da Grade Horária

A construção de grade horária do presente trabalho foi aplicada no Colégio Estadual Padre José Orestes Preima, localizado no interior do município de Prudentópolis, onde 21 professores atendem atualmente 12 turmas em um total de 640 alunos em dois turnos (manhã e tarde).

Estabelecidas as demandas de aulas, conforme as Tabelas 1 e 2 acima e considerando que o colégio tem em sua parte diversificada a disciplina de Ensino Religioso, com uma aula semanal, a escola convoca os professores para realizar o processo de escolha das disciplinas e séries.

Na construção da grade horária de cada série deve-se considerar que cada professor possui um número de aulas semanais em cada turma, já determinado previamente na distribuição das aulas. Fatores como preferências, necessidades particulares e disponibilidades devem ser observadas, considerando que muitos professores trabalham em mais de uma escola e que é necessário evitar conflitos de horários. Outros itens mais específicos devem ser levados em conta:

- Cada turma tem carga horária de 5 aulas por dia nos 5 dias da semana;
- Um mesmo professor ministrará no máximo duas aulas por dia em uma mesma turma;
- As aulas vagas do professor devem ser as primeiras e/ou as últimas (salvo quando a preferência do professor for outra);
- As aulas do professor devem ser, preferencialmente, seguidas evitando-se “vazios” no horário. Se esta interrupção existir deverá ser de no máximo uma aula;

3.2. Metodologia para Resolução do Problema

Para designar aulas aos 21 professores de modo que cada uma de doze turmas tenha o total de vinte e cinco aulas semanais, distribuídas em cinco aulas diárias em um único turno, para disciplinas e número de aulas previamente atribuídas aos respectivos professores, a resolução do problema foi dividida em etapas, constituídas de:

- Identificação de dados e variáveis do problema;
- Identificação das restrições comuns a modelos de designação e peculiares ao problema sendo resolvido;
- Modelagem matemática do problema PPLB e implementação computacional;
- Solução com o Lingo e adequação da solução à prática usual.

3.2.1. Dados e Variáveis do Problema

As informações de turmas e respectivo número de aulas onde cada professor atua, seus dias e horários de disponibilidade e preferências são apresentados na **Tabela 3** a seguir.

Tabela 3: Informações para a designação de horários

PROFESSOR	Nº DE DIAS COM AULA	DIAS DA SEMANA ONDE O PROFESSOR PODERÁ ATUAR					TURMAS POR PROFESSOR	HORAS AULA POR TURMA											
		SEG	TER	QUA	QUI	SEX		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
A	4	x	x	x	x		4	-	-	-	-	-	-	-	-	2	5	5	3
B	5	x	x	x	x	x	11	2	2	2	-	2	2	2	2	2	3	3	3
C	4	x	x	x	-	x	9	2	-	2	-	-	2	2	2	2	2	2	2
D	1	x	-	-	-	-	2	-	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
E	1	x	-	-	-	-	1	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
F	5	x	x	x	x	x	6	4	4			4	4	4	2				
G	4	x	x	x	x	-	4	-	-	4	6	-	-	-	3	3	-	-	-
H	5	x	x	x	x	x	9	3	3	3	3	3	3	3	2	2	-	-	-
I	3	-	x	-	x	x	5	-	-	-	-	-	-	-	4	2	2	2	4
J	2	-	-	-	x	x	4	-	-	-	-	-	-	-	-	2	3	3	2
K	5	x	x	x	x	x	6	-	-	2	-	-	-	-	5	5	4	4	4
L	3	x	-	x	-	x	7	2	2	3	2	2	2	2	-	-	-	-	-
M	5	x	x	x	x	x	9	2	2	-	2	6	2	2	-	-	1	1	2
N	1	-	-	-	x	-	5	1	-	-	1	1	1	1	-	-	-	-	-
O	1	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1
P	5	x	x	x	x	x	12	2	3	2	2	2	4	4	1	1	1	1	1
Q	2	-	x	-	x	-	3	-	2	-	-	-	4	4	-	-	-	-	-
R	4	x	x	x	-	x	4	6	4	6	4	-	-	-	-	-	-	-	-
S	3	x	x	x	x	x	12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
T	3	x	x	x	x	x	4	-	-	-	-	4	-	-	-	-	2	2	2
U	1	x	x	x	x	x	2	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-

As variáveis de decisão para cada professor são definidas como:

X(professor, turma, dia, horário)

Cada professor tem seu conjunto de turmas e de dias. Como exemplo, para o professor A:

Conjunto de turmas: J(A) = {T09, T10, T11, T12}

Conjunto de dias K(A) = {SEG, TER, QUA, QUI}

Conjunto de horários H = {1, 2, 3, 4, 5}

Do produto cartesiano destes conjuntos obtém-se o número de variáveis para o professor A, ou seja, 80 horários possíveis para ministrar 15 aulas.

O número total de variáveis de decisão para os 21 professores é 2510, sendo que destas apenas 300 (12 turmas, 5 dias da semana, 5 horários por dia) serão não nulas, correspondendo às designações de professores para ministrar aulas.

Para tais designações, são observadas as restrições referentes a preferências e/ou necessidades dos professores e exigências administrativas, apresentadas a seguir.

Restrições dos professores:

- Estar envolvido em uma única aula em um mesmo horário;
- Deve atuar em dias e horários específicos por eles escolhidos ou, ainda, em um número máximo de dias dentre os cinco dias da semana.

Restrições administrativas da escola:

- Cada professor terá no máximo duas aulas por turma em um mesmo dia;
- Preferencialmente os horários vagos dos professores deverão ser os primeiros e/ou os últimos, salvo quando a preferência do professor for outra;
- As aulas do professor devem ser seguidas (evitar buracos no horário do professor) e se caso existir, no máximo de uma aula;
- Professores com maior tempo de serviço e aqueles pertencentes ao quadro permanente terão prioridade no atendimento de suas preferências;
- Cada turma terá, em um mesmo dia e horário, aula com somente um professor.

3.2.2. Modelagem Matemática

Esta etapa corresponde à formulação matemática do problema, bem como sua escrita em linguagem do software Lingo. A formulação será estabelecida e imediatamente comentada.

Para atender a algumas das restrições foram estabelecidos pesos forçando a definição de horários pela ação das regras lexicográficas do simplex. Para horários definiu-se PH = 2, 5, 8, 5, 2, com o objetivo de concentrar as aulas nos horários intermediários, atendendo a preferência de que as aulas vagas sejam as primeiras e ou as últimas. Para atender as preferências de professores com maior tempo de serviço na escola, estabeleceram-se pesos multiplicadores dos pesos de horários, conforme a seguir:

Tabela 4: Multiplicadores de pesos atribuídos aos professores

Professor	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
Multiplicador	1	5	10	5	1	10	5	10	5	1	10	1	5	10	10	10	1	1	1	1	5

Formulação Matemática:

Visando maximizar a satisfação do professor, bem como proporcionar designações de horários adequados às exigências administrativas, adotou-se a seguinte função objetivo:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{21} \sum_{\ell=1}^{5} \sum_{j \in J(i)} \sum_{k \in K(i)} PH_l PP_{il} x_{ijkl}$$

onde:

PH_l = peso para as variáveis de decisão referentes ao l-ésimo horário

PP_{il} = peso para as variáveis de decisão do i-ésimo professor no l-ésimo horário

$$x_{ijkl} = \begin{cases} 1, \text{se o professor i for designado à turma j no dia k no horário l} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

i é o índice do conjunto de professores da escola (A, B, ...U)

j é o índice do conjunto das turmas (T1, T2, ..., T12)

k é o índice do dias da semana, de segunda a sexta-feira

l é o índice do horário diário (1º, ..., 5º)

J(*i*) e K(*i*) são os conjuntos de turmas e de dias da semana do *i*-ésimo professor.

Sujeito às restrições:

- Comuns a todos os professores:

De quantidade de aulas em cada turma, nos dias de atuação do professor:

$$\sum_{\ell=1}^{5} \sum_{k \in K(i)} x_{ijkl} = N_{ij}$$, para cada i = 1, 2, ..., 21 e para cada j $\in$ J(i)

onde N_{ij} é a quantidade de aulas do *i*-ésimo professor na sua *j*-ésima turma.

Para a exigência administrativa de que um professor não tenha mais do que duas aulas na mesma turma em um mesmo dia da semana, utilizam-se as restrições a seguir:

$$\sum_{l=1}^{5} x_{ijkl} \le 2$$, para cada i = 1, 2, ..., 21, para cada j $\in$ J(i), para cada k $\in$ K(i)

Que resulta em até cinco restrições por professor, dependendo do número de dias de sua preferência ou disponibilidade, para cada turma onde atue.

Em cada turma deve atuar um único professor em um mesmo horário e dia da semana:

$$\sum_{i=1}^{21} x_{ijkl} = 1$$, para cada j $\in$ J(i), para cada k $\in$ K(i), para cada l = 1, 2, ..., 5

Que resulta em 300 restrições (correspondentes a 12 turmas x 5 dias x 5 horários).

- Específicas de alguns professores:

Para os professores S, T e U, que não indicaram preferência por dia da semana, mas apenas que pretendem trabalhar três dias (S e T) e um dia (U), são geradas restrições referentes aos conjuntos de 3 dias entre 5 dias possíveis, ou seja, uma combinação de 5 dias tomados 3 a 3, resultando em um total de 10 opções: {Seg, Ter, Qua}, {Seg, Ter, Qui}, etc.

Para apenas uma das combinações a restrição deve ser satisfeita com igualdade e a soma das aulas em três dias deve ser igual ao número total de aulas do professor (ΣN_{ij}). Uma variável binária indica que determinado dia está sendo utilizado.

Para o professor S são utilizadas as variáveis binárias $s_2 = s_3 = s_4 = 1$ e $s_5 = s_6 = 0$, para indicar que terá aulas na segunda, terça e quarta feira. O recurso da primeira restrição será dado pela soma $5(y_2 + y_3 + y_4) - 3$, onde 5 corresponde aos cinco horários diários e (-3) é a folga de três horários que o professor terá em seus três dias.

As duas primeiras restrições para o professor S (i = 19), são:

$$\sum_{l=1}^{5} \sum_{j \in J(19)} \sum_{k=2}^{4} x_{19jkl} \geq 5(s_2 + s_3 + s_4) - 3$$

$$\sum_{l=1}^{5} \sum_{j \in J(19)} \sum_{k=2}^{3} x_{19jkl} + \sum_{l=1}^{5} \sum_{j \in J(19)} \sum_{k=5}^{5} x_{19jkl} \geq 5(s_2 + s_3 + s_5) - 3$$

Para que as aulas sejam dadas em uma única combinação de três dias, acrescenta-se:

$$\sum_{r=2}^{6} s_r = 3 \text{ , } s_r \in [0, 1]$$

3.3. Implementação computacional

Seguindo a modelagem matemática já descrita, a implementação computacional do problema foi feita no software Lingo versão 6.0 – Educacional.

3.3.1. Definição dos conjuntos (seção SETS:)

Com base na **Tabela 3** que mostra as preferências e necessidades dos professores, suas respectivas turmas, dias com aulas em cada turma e número de aulas com cada turma, definiram-se os seguintes conjuntos:

- **Conjuntos Primários:**

- De horários:

    H / 1, 2, 3, 4, 5/: PH;

Onde PH corresponde ao vetor de pesos para os horários.

- De turmas, define as turmas de cada professor e respectivo número de aulas:

    TPA / T9, T10, T12, / APA;

    TPB / T1, T2, T3, T6, T7, T8, T9, T10, T11, T12 / APB;

Onde APA, APB, … , APU são os conjuntos de número de aulas das respectivas turmas do professor A, B, etc. Segue da mesma forma até o professor U.

- De dias da semana em que cada professor atua:

    KA / seg, ter, qua, qui /;

    KB / seg, ter, qua, qui, sex /:

Segue desta forma até o professor U.

- De variáveis binárias úteis na escolha de três dos cinco dias disponíveis:

    JS / s2, s3, s4, s5, s6 / ;

    JT/ t2, t3, t4, t5, t6 / ;

    JU/ u2, u3, u4, u5, u6 / ;

- **Conjuntos derivados (estrutura de esparsidade)**

Os conjuntos referentes aos vinte e um professores definem as variáveis de decisão do problema, conforme descrito no item 3.2.1. Dados e Variáveis do Problema.

    TDHA (TPA, KA, H): X1;

    TDHB (TPB, KB, H): X2;

Segue o mesmo procedimento para os demais professores.

3.3.2. Definição dos dados do problema (seção DATA)

- Aulas de cada professor em suas respectivas turmas:
  APA = 2 5 5 3;
  APB = 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3;

Onde APA, APB são os conjuntos de aulas do professor A e B nas suas respectivas turmas. O mesmo procedimento é feito para os dados dos demais professores.

- Pesos dos professores, estabelecem prioridades:
  PP = 1, 5, 10, 5, 1, 10, 5, 10, 5, 1, 10, 1, 5, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 5;
- Pesos correspondentes aos horários:
  PH = 2, 5, 8, 5, 2;

Para a função objetivo e restrições, a implementação computacional segue a sintaxe do Lingo, com formulações apresentadas no item **3.3.2. Modelagem Matemática**.

3.4. Solução do Problema

Para obter uma solução factível em menor tempo, foi estabelecido um percentual de tolerância de otimalidade de 5% (IPTOL = r, onde 100.r = 5%), de forma que o solver de *branch-and-bound* procure soluções inteiras com valores da função objetivo 5% melhores que a melhor solução inteira já encontrada. A melhor solução factível (quando obtida) é indicada como ótima.

Uma solução factível com tal característica foi obtida com tempo de busca de 7 minutos e 01 segundo, após 107740 iterações, em um computador Pentium III 850MHz, 128MB de memória.

O valor da função objetivo foi de 7778, para um *IPBound* de 7838, mostrando que a solução obtida é bastante eficiente: 7778 / 7838 = 0.992.

A solução obtida foi gravada em arquivo texto utilizando-se a sintaxe do Lingo:

: DIV C:\Horários.doc
: NONZ
: RVRT

Para obter os horários convencionais, a solução foi copiada para arquivo do Word onde se fizeram substituições de denominações de forma que com a utilização da opção Tabela/Converter/Texto em Tabela do Word obteve-se a tabela de horários. A solução usual final é obtida classificando-se a tabela obtida por Turma, Dia da Semana e Horário.

4. Conclusão

A tarefa de designação de horários para a escola Colégio Estadual Padre José Orestes Preima mostrou-se viável com a utilização do software Lingo, versão 6.0 – Educacional, sendo possível atender às exigências administrativas e pedagógicas, bem como às preferências estabelecidas pelos professores e aquelas decorrentes de critérios de antiguidade.

A utilização de conjuntos de pesos, como fator de interferência no *solver* do Lingo com base nas regras lexicográficas do simplex, para horários e para as prioridades de atendimento de preferências de alguns professores, mostrou-se razoavelmente eficiente, favorecendo aulas intermediárias, principalmente para os professores com maior prioridade. No entanto, para os professores com menor prioridade, mas como se deveria esperar, pela interação dos pesos de professores com pesos de horários, gerou soluções com horários intermediários vagos.

O modelo desenvolvido pode ser adaptado para a resolução do problema de escala de horários em outras escolas (públicas e particulares) uma vez que as restrições dos professores e administrativas são semelhantes, alterando-se apenas o número de turmas e de professores. E, ainda, para confecção de escala de horários de departamentos de universidades públicas e privadas.

Como sugestões para trabalhos futuros, poderá ser utilizado um sistema de pesos de horários diferenciado para cada professor, valorizando as soluções obtidas cujos horários vagos sejam os primeiros ou últimos (ex. 8, 5, 3, 2, 1) para professores com menor tempo de serviço.

A construção de grade horária mostrou-se viável, podendo ser aplicada a outras escolas, desde que se disponha do software Lingo.

Outra possibilidade, para suprir a dificuldade de aquisição do software Lingo, pode ser a implementação de outro dos métodos de solução, tais como Algoritmos Genéticos e *Simulated-Annealing*.

5. Referências Bibliográficas

AARTS, E. H. L.; LENSTRA, J. K. ***Local search algorithms***. John Wiley & Sons, 1998.

BARBOSA, H. J. C. **Introdução aos Algoritmos Genéticos**. Mini Curso – XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. CNMAC. Gramado (RS), 1997.

BARBOZA, A. O. **Aplicação de Algumas Técnicas da Pesquisa Operacional na Otimização de Horários de Atendentes em Central Telefônica**. Curitiba, Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia), UFPR, 2000.

CAMPBELL, H.G., DUDEK, R.A., and SMITH, M.L. "***A Heuristic Algorithm for the n-job, m-machine Sequencing Problem***". *Management Science* 16/B, 630-637, 1970.

BISSCHOP, Johannes et ENTRIKEN, Robert. ***AIMMS – The Modeling System***. Paragon Decision Technology B. V., The Netherlands, 1993.

BRASIL, Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Dispõe sobre as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em http://www.mec.br. Acesso em fev/2002.

GAREY, Michael R. and David S. Johnson. ***Computers andIntractability: a Guide to the Theory of NP-completeness***. Freeman, 1979.

GLOVER, Fred. ***Tabu search - part I***. *ORSA Journal on Computing*, 1(3): 190–206, 1989.

GLOVER, Fred et M. Laguna. ***Tabu search***. In C. R. Reeves Editor. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, chapter 3, pages 70–150. McGraw-Hill, 1995.

GLOVER, Fred. ***Tabu search: a tutorial. Technical report***. *Center for Applied Artificial Intelligence*, *University of Colorado*, 1990.

HSIAO-LAN, Fang. ***Genetic Algorithms in Timetabling and Scheduling***. *PHD Thesis, Department of Artificial Intelligence, University of Edinburg*, 1994

KIRKPATRICK, S., GELATT, C.D. Jr. and VECCHI, M.P. "***Optimization by Simulated Annealing***", *Science* 220, 671-680, 1983.

MEISELS et al. Amnon Meisels, Jihad Ell-sana & Ehud Gudes. ***Comments on CSP algoritms applied to timetabling***. *Technical report, Department of mathematics and Computer Science*, Israel, 1993.

METROPOLIS, N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth , A. H., Teller , E., "***Equation of State Calculations by Fast Computing machines***", *Journal of Chemical Physic*, v 21 , pp 1087-1092, 1953.

PALMER, D.S., "***Sequencing Jobs through a Multi-stage Process in the Minimum Total Time - A Quick Method of obtaining a Near Optimum***", *Operational Research Quarterly* 16, 101-107, 1965.

SCHRAGE, Linus. ***Optimization Modeling with Lingo***. Fifth Edition, Chicago, Illinois, 2002.

SIQUEIRA, P. H. **Aplicação do Algoritmo de *Matching* no Problema da Construção de Escalas de Motoristas e Cobradores de Ônibus**. Curitiba, Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia), UFPR, 1999.