Semaine 5 : Nombres complexes, suites réelles et complexes

Questions de cours

Question de cours 1 : Unicité de la limite

Montrer que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Question de cours 2 : Suites adjacentes

Donner la définition de suites adjacentes et montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Question de cours 3 : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Enoncer et prouver le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercices

(*) Exercice 1 : Un peu de calcul...

Les suites suivantes, définies par leur terme général, sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leurs limites.

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

$$u_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$u_n = \sqrt[n]{n!}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

$$u_n = n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$$

(*) Exercice 2 : Les extractions de $\mathbb{N}$

Soit φ une extraction de $\mathbb{N}$. Montrer que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(*) Exercice 3 : Une suite définie par récurrence

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Etudier la suite u.

(*) Exercice 4 : Une condition suffisante de convergence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w := (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que u converge.

(*) Exercice 5 : Des équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(z+i)^n = (z-i)^n \text{ (on supposera } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$$

$$z^3 - i = 6(z+i)$$

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ et en déduire les valeurs de } \cos\frac{\pi}{8} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8}.$$

(*) Exercice 6 : Des racines dans $\mathbb{C}$

1. Déterminer les racines carrées complexes de $i, 3+4i, 8-6i$.
2. Déterminer les racines cubiques complexes de $i, 2-2i, 11+2i$.

(*) Exercice 7 : Un peu de géométrie

Montrer (et interpréter géométriquement) que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

(*) Exercice 8 : Un produit de conjugués

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)...(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

(**) Exercice 1 : La série harmonique

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) := H_n - \ln(n)$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. En déduire un équivalent simple de H_n.
$\longrightarrow H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

(**) Exercice 2 : Le nombre d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer :
$$\forall \alpha \in]0,1[], \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \implies (1-\alpha)^n > 1 - na$$
2. En prenant $\alpha = \frac{1}{n^2}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. En prenant $\alpha = \frac{1}{6n+1}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
4. Conclure.

(**) Exercice 3 : Le lemme de l'escalier

1. Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
2. Soit $u_1 > 0$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

(**) Exercice 4 : Une recherche d'équivalent

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$.

(**) Exercice 5 : Une histoire de module

Déterminer tous les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient le même module.

(**) Exercice 6 : Regarder le nom du chapitre

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$$

(**) Exercice 7 : Une racine 7-ième ?

On pose $\omega_7 = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $\omega_7 + \omega_7^2 + \omega_7^4$ et $\omega_7^3 + \omega_7^5 + \omega_7^6$.

(**) Exercice 8 : Un peu de trigonométrie

Montrer que :
$$\forall x > 0\ , \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \text{ (formule de Machin)}$$

(**) Exercice 9 : Des réels positifs

Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

(***) Exercice 1 : La moyenne de Césaro

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite l. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l.

(***) Exercice 2 : $\mathbb{R}$ est complet !

Une suite réelle $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Pour toute la suite, on considère $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. Soit $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que v est de Cauchy.
2. Montrer que u est bornée.
3. En déduire que u admet une valeur d'adhérence.
4. Montrer que u est convergente.

(***) Exercice 3 : Les morphismes de $\mathbb{C}$

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f(z) + f(z')$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$

$\longrightarrow$ $f(z) = \bar{z}$ ou $f(z) = -\bar{z}$