Semaine 4 : Arithmétique et nombres complexes

Questions de cours

Question de cours 1 : Théorème de Gauss

Enoncer et prouver le théorème de Gauss en arithmétique

Question de cours 2 : Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Question de cours 3 : Un peu de trigonométrie

Simplifier $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$.

Exercices

(*) Exercice 1 : Le dernier chiffre

Trouver le dernier chiffre de $5467^{4291^{5523}}$.

(*) Exercice 2 : Les nombres premiers sont rares

Trouver 1000 entiers naturels consécutifs non premiers.

(*) Exercice 3 : Des équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(z+i)^n = (z-i)^n \text{ (on supposera } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$$

$$z^3 - i = 6(z+i)$$

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ et en déduire les valeurs de } \cos\frac{\pi}{8} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8}.$$

(*) Exercice 4 : Des racines dans $\mathbb{C}$

1. Déterminer les racines carrées complexes de $i, 3+4i, 8-6i$.
2. Déterminer les racines cubiques complexes de $i, 2-2i, 11+2i$.

(*) Exercice 5 : Un peu de géométrie

Montrer (et interpréter géométriquement) que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

(*) Exercice 6 : Un produit de conjugués

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)...(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

(**) Exercice 1 : Des factorielles !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n!+1$ et $(n+1)!+1$ sont premiers entre eux.

(**) Exercice 2 : Un reste

Quel est le reste dans la division euclidienne de $(2222)^{3333}$ par $(3333)^{2222}$?

(**) Exercice 3 : Des combinaisons

Montrer que si $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, alors :

$$k \wedge n = 1 \implies n \,\Big|\, \binom{n}{k}$$

(**) Exercice 4 : Des divisions

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. 9 divise $2^{2n} + 15n - 1$
2. 17 divise $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$
3. 9 divise $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$
4. n^2 divise $(n+1)^n - 1$

(**) Exercice 5 : Une division par 30

Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, 30 divise $mn(m^4 - n^4)$.

(**) Exercice 6 : Les nombres de Fermat

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si $n \neq p$, F_n et F_p sont premiers entre eux.

(**) Exercice 7 : Une histoire de module

Déterminer tous les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient le même module.

(**) Exercice 8 : Regarder le nom du chapitre

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$$

(**) Exercice 9 : Une racine 7-ième ?

On pose $\omega_7 = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $\omega_7 + \omega_7^2 + \omega_7^4$ et $\omega_7^3 + \omega_7^5 + \omega_7^6$.

(**) Exercice 10 : Un peu de trigonométrie

Montrer que :

$$\forall x > 0 \text{ , } \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \text{ (formule de Machin)}$$

(**) Exercice 11 : Des réels positifs

Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

(***) Exercice 1 : Le carré d'un entier

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que a et b sont premiers entre eux et que ab est le carré d'un entier. Montrer que a et b sont des carrés d'entiers.
2. Montrer que le produit de trois entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais le carré d'un entier.

(***) Exercice 2 : Un peu de probabilités

1. Soit N un entier positif à 100 chiffres. Déterminer la probabilité que N^3 se termine par 11.

2. Déterminer tous les entiers positifs à 100 chiffres dont le cube se termine par 11.
3. Montrer que le résultat persiste pour un entier à p chiffres, où $p \geqslant 3$.

(***) Exercice 3 : Les morphismes de $\mathbb{C}$

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant :

- $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f(z) + f(z')$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$

$\longrightarrow$ $f(z) = \bar{z}$ ou $f(z) = -\bar{z}$