Semaine 1

Applications, relations d'équivalence et d'ordre, lois de composition, dénombrement

1.1 Questions de cours

Question de cours 1 : Division enclidienne

Enoncer et prouver le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Question de cours 2 :

Enoncer et prouver le principe de récurrence.

Question de cours 3 :

Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Montrer que l'ensemble des classes d'équivalences sur $\mathscr{R}$ constitue une partition de E.

Question de cours 4 :

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il y a n^p applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

Question de cours 5 :

Soit E, F, G trois ensembles, $f : F \mapsto G$, $g : E \mapsto F$. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $f \circ g$ est injective. On suppose que $f \circ g$ est injective. Montrer que g est injective.

Question de cours 6 :

Soit E, F, G trois ensembles, $f : F \mapsto G$, $g : E \mapsto F$. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $f \circ g$ est surjective. On suppose que $f \circ g$ est surjective. Montrer que f est surjective.

Question de cours 7 :

Donner la définition d'un magma. Donner un exemple de magma non associatif/sans élément neutre

1.2 Exercices

(*) Exercice 1 : Quelques relations

Etudier les propriétés des relations suivantes sur E, et dire s'il s'agit de relations d'ordre, d'équivalence...

1. $E = \mathbb{Z}$, $x\mathscr{R}y \iff x = -y$
2. $E = \mathbb{R}$, $x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$
3. $E = \mathbb{N}$, $x\mathscr{R}y \iff \exists(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, y = px^q$

(*) Exercice 2 : La formule de Pascal généralisée

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

(*) Exercice 3 : Nombre de chemins

On se place dans le plan. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (où p et q sont des entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

(*) Exercice 4 : Jouons au poker

Une main au poker est un ensemble de cinq cartes prises dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1. une paire (exactement deux cartes de même hauteur) ?
2. deux paires ?
3. un brelan (exactement trois cartes de même hauteur) ?
4. un carré (exactement quatre cartes de même hauteur) ?
5. une couleur (cinq cartes de même couleur) ?
6. un full (exactement trois cartes d'une même hauteur et deux cartes d'une même hauteur, différente de la première) ?

(**) Exercice 1 : A propos du disque unité

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Montrer que D n'est pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

(**) Exercice 2 : Le théorème de Cantor

1. Soit E un ensemble fini. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. On suppose maintenant que E est un ensemble quelconque. Montrer que le résultat précédent persiste. On

pourra étudier $A = \left\{x \in E \;\middle|\; x \notin f(x)\right\}$.

(**) Exercice 3 : Les fonctions caractéristiques

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$, telle que :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{c} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \end{array}$$

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles à déterminer :

1. $1 - \mathbb{1}_A$
2. $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
4. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

(**) Exercice 4 : Un calcul de réciproque dans $\mathbb{R}$

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est bijective, et expliciter sa bijection réciproque.

(**) Exercice 5 : Un calcul de réciproque dans $\mathbb{C}$

Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{i\}$ définie par $f(z) = \dfrac{iz - i}{z + 3}$ est bijective, et expliciter sa bijection réciproque.

(**) Exercice 6 : Deux ensembles qui se ressemblent

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1\right\}$ et $B = \left\{(t+1, 4t+3) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Comparer A et B.

(**) Exercice 7 : Une équation ensembliste

Soit E un ensemble, et $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Résoudre l'équation, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup X = B$.

(**) Exercice 8 : Une formule de Vandermonde

Soit $(n,m,p) \in \mathbb{N}^3$. Montrer de deux façons l'égalité de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

(**) Exercice 9 : Un peu de rangement

On range p boules dans n cases. Combien y a-t-il de rangements possibles si :

1. les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum ?
2. les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
3. les boules sont indiscernables et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum ?
4. les boules sont indiscernables et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

(**) Exercice 10 : Une histoire de permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $[\![1, 12]\!]$ possédant :

1. la propriété : n est pair $\implies f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\implies f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?

(**) Exercice 11 : Un seul élément

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ une partie de E à p éléments. Combien y a-t-il de parties de E contenant exactement un seul élément de A ?

(***) Exercice 1 : Une somme de uns

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $k \leqslant n$. Combien y a-t-il de façons d'écrire n comme somme de k entiers naturels non nuls ?

(***) Exercice 2 : Les applications croissantes

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Dénombrer les applications croissantes de $[\![1,\ n]\!]$ dans $[\![1,\ p]\!]$.
2. Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1,\ n]\!]$ dans $[\![1,\ p]\!]$.

(***) Exercice 3 : Les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{A \subset E} |A|$$

$$\sum_{A \subset E} (-1)^{|A|}$$

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cap B|$$

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cup B|$$

$$\left|\left\{A, B \subset E \;\middle|\; A \cap B = \emptyset\right\}\right|$$

$$\left|\left\{A, B \subset E \;\middle|\; A \subset B\right\}\right|$$