
Semaine 7 : Suites, séries, droite numérique, fonctions numériques

Questions de cours

Question de cours 1 : Les compacts de \mathbb{R}

Montrer que, dans \mathbb{R} , les compacts sont exactement les fermés bornés.

Question de cours 2 : Composition de limites

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $B \subset f(A)$, et qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c$. Montrer que $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Question de cours 3 : Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Exercices

(*) Exercice 1 : Un peu de calcul...

Les suites suivantes, définies par leur terme général, sont-elles convergentes? Si oui, calculer leurs limites.

$$u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$u_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$u_n = \sqrt[n]{n!}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

$$u_n = n \ln \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \right)$$

(*) Exercice 2 : Les extractions de \mathbb{N}

Soit φ une extraction de \mathbb{N} . Montrer que $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

(*) Exercice 3 : Une suite définie par récurrence

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Etudier la suite u .

(*) Exercice 4 : Une condition suffisante de convergence

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w := (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que u converge.

(*) Exercice 5 : Un exemple important

Soit $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(*) Exercice 6 : Un peu de calcul...

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\cos(n) + n^{3/4}}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$$

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$$

$$\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

(*) Exercice 7 : Encore un peu de calcul...

Justifier l'existence puis calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \text{ (pour } x \in]-1, 1[)$$

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k) x^{n-k-1} \text{ (pour } x \in]-1, 1[\text{ et } k \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) 3^{-n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$$

(*) Exercice 8 : Attention à l'ordre !

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq 2$, on pose :

$$u_{n,p} = \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^n - \frac{1}{p+1} \left(\frac{p}{p+1} \right)^n$$

Comparer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} u_{n,p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$$

.

(*) Exercice 9 : Une recherche de fonction

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

(*) Exercice 10 : Une fonction périodique

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction périodique. Montrer que f est bornée.

(*) Exercice 11 : Un maximum ?

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l_1$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l_2$, avec $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est bornée.

() Exercice 1 : La série harmonique**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) := H_n - \ln(n)$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. En déduire un équivalent simple de H_n .

$$\longrightarrow H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

() Exercice 2 : Le nombre d'Euler**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \implies (1 - \alpha)^n > 1 - n\alpha$$

2. En prenant $\alpha = \frac{1}{n^2}$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3. En prenant $\alpha = \frac{1}{6n+1}$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

4. Conclure.

() Exercice 3 : Le lemme de l'escalier**

1. Soit $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.
2. Soit $u_1 > 0$. On pose, pour $n \geq 2$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

() Exercice 4 : Une recherche d'équivalent**

Soit $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

() Exercice 5 : Des séries alternées**

Caractériser les suites $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positives telles que $\sum u_n$ converge et qu'il existe $\alpha \geq 1$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Que dire de plus si on suppose u décroissante?

() Exercice 6 : Les séries de Bertrand**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$$

Discuter la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de α et β .

() Exercice 7 : L'inverse des nombres impairs**

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

() Exercice 8 : Des sommes partielles croisées**

Soit $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} + T_n = S_n + T_{n+1}$. Que dire de u et v ?

() Exercice 9 : Irrationalité de e**

1. Montrer que la série de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On admettra que sa limite vaut e .
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que e est irrationnel.

() Exercice 10 : Un théorème de point fixe**

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

() Exercice 11 : Un autre théorème de point fixe**

Soit $f \in C^0([0, 1])$. Montrer que f admet un point fixe.

() Exercice 12 : Encore un point fixe**

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ et $\alpha \leq 1$. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha$. Montrer que f admet un point fixe.

() Exercice 13 : Les ouverts de \mathbb{R}**

Montrer que tout ouvert de \mathbb{R} est l'union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. On pourra considérer, pour $x \in \mathcal{O}$ (où \mathcal{O} est un ouvert), J_x , l'union des intervalles ouverts inclus dans \mathcal{O} et contenant x .

(*) Exercice 1 : La moyenne de Césaro**

Soit $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite l . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

Montrer que $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l .

(*) Exercice 2 : \mathbb{R} est complet !**

Une suite réelle $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$$

Pour toute la suite, on considère $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. Soit $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que v est de Cauchy.
2. Montrer que u est bornée.
3. En déduire que u admet une valeur d'adhérence.
4. Montrer que u est convergente.

(*) Exercice 3 : La série des inverses des nombres premiers**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n -ième nombre premier. Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{p_n}$ est de la même nature que la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right)$$

(on pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers des entiers de $\llbracket 1, N \rrbracket$)

(***) Exercice 4 : Applications propres

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes.

1. $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$.
2. pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est compact.