Devoir surveillé – Spécialité Mathématiques
13 Décembre 2020

Exercices *(10 points)*

Exercice 1. *(3 points)*

On pose :

$$f \quad : \quad]-\infty; -0,5] \cup [1;2[\quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto \quad \sqrt{\frac{2x^2 - x - 1}{-3x + 6}}$$

1) Justifier l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 2.

Exercice 2. *(5 points)*

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x+1)e^x$$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)e^x$

3) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Question bonus, à faire uniquement s'il reste du temps !
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$

Exercice 3. *(2 points)*

Calculer $\ln(2+\sqrt{3})^{20} + \ln(2-\sqrt{3})^{20}$.

Problème *(10 points)*

Dans un pays imaginaire, 2% de la population est contaminée par un virus. Dans ce problème, nous étudions les résultats des tests de dépistage. *Dans toute la suite, on donnera tous les résultats sous forme décimale arrondie à 10^{-3}. On rappelle que si A est un évènement, $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A.*

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.
— La probabilité qu'une personne saine ait un test négatif est de 0,97.

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans la population. On note V l'évènement "la personne est contaminée par le virus" et T l'évènement "le test est positif".

1) Donner les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{T})$. Dessiner l'arbre de probabilités associé à cette situation.

2) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

3) Déterminer $P(T)$.

4) Justifier par un calcul la phrase "Si le test est positif, il y a environ 40% de chances que la personne testée soit contaminée par le virus".

5) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure ?

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, en considérant les tirages indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 individus.

1) Justifier que X suit une loi binomiale, et expliciter ses paramètres.

2) Calculer la probabilité que 4 individus soient contaminés par le virus.

3) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes soient contaminées par le virus.

4) On teste les individus chacun leur tour. Les trois premières personnes sont contaminées. Déterminer la probabilité que 5 personnes soient contaminées au total.