Dénombrement, groupes

Questions de cours

Question de cours 1 : Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Question de cours 2 : Lemme du berger

Enoncer et prouver le lemme du berger.

Question de cours 3 : Sous-groupe engendré par une partie

Soit G un groupe et $A \subset G$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G minimal pour l'inclusion parmi les sous-groupes de G contenant A.

Exercices

(*) Exercice 1 : Nombre de chemins

On se place dans le plan. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (où p et q sont des entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

(*) Exercice 2 : Jouons au poker

Une main au poker est un ensemble de cinq cartes prises dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1. une paire (exactement deux cartes de même hauteur) ?
2. deux paires ?
3. un brelan (exactement trois cartes de même hauteur) ?
4. un carré (exactement quatre cartes de même hauteur) ?
5. une couleur (cinq cartes de même couleur) ?
6. un full (exactement trois cartes d'une même hauteur et deux cartes d'une même hauteur, différente de la première) ?

(*) Exercice 3 : La formule de Pascal généralisée

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

(*) Exercice 4 : Des groupes divers

Montrer que les ensembles suivants (pour les opérations associées) sont des groupes.

1. $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}$, muni de la multiplication matricielle.
2. $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ où E est un ensemble dont on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties, et où Δ désigne la différence symétrique.
3. On pose, pour tout couple $(x,y) \in]-1,1[^2$, $x \star y = \dfrac{xy}{1+xy}$. Montrer que $(]-1,1[,\star)$ est un groupe.

(*) Exercice 5 : Un groupe d'ordre pair

Soit G un groupe d'ordre pair dont on note l'élément neutre e. Montrer qu'il existe un nombre impair d'éléments $x_i \in G$ tels que $x_i \neq e$ et $x_i^2 = e$.

(**) Exercice 1 : Une formule de Vandermonde

Soit $(n,m,p) \in (\mathbb{N})^3$. Montrer de deux façons l'égalité de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

(**) Exercice 2 : Un peu de rangement

On range p boules dans n cases. Combien y a-t-il de rangements possibles si :

1. les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum ?
2. les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
3. les boules sont indiscernables et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum ?
4. les boules sont indiscernables et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

(**) Exercice 3 : Une histoire de permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $[\![1,12]\!]$ possédant :

1. la propriété : n est pair $\implies f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\implies f(n)$ est divisible par 3 ?

3. ces deux propriétés à la fois ?

(**) Exercice 4 : Un seul élément

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ une partie de E à p éléments. Combien y a-t-il de parties de E contenant exactement un seul élément de A ?

(**) Exercice 5 : Le centre d'un groupe

Soit $(G,.)$ un groupe. On définit $Z(G) = \left\{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\right\}$ le centre de G. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G. On suppose de plus que G admet un unique élément x_0 d'ordre 2. Montrer que $x_0 \in Z(G)$.

(**) Exercice 6 : Un peu de densité

Soit θ un réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

1. Montrer que $H := \left\{e^{ik\theta} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.
2. Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} \in H\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ contenant 0 et 2π.
3. En déduire que $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$.

(**) Exercice 7 : Une condition pour être un sous-groupe

A quelle condition la réunion de deux sous-groupes d'un groupe G est-elle un sous-groupe de G ?

(**) Exercice 8 : A un coup de peinture près

Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$ et $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,+)$ sont-ils isomorphes ?

(**) Exercice 9 : Théorème de Wilson

Montrer qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$.

(***) Exercice 1 : Une somme de uns

Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $k \leqslant n$. Combien y a-t-il de façons d'écrire n comme somme de k entiers naturels non nuls ?

(***) Exercice 2 : Les applications croissantes

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Dénombrer les applications croissantes de $[\![1,\ n]\!]$ dans $[\![1,\ p]\!]$.

2. Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1,\ n]\!]$ dans $[\![1,\ p]\!]$.

(***) Exercice 3 : Les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{A\subset E} |A|$$

$$\sum_{A\subset E} (-1)^{|A|}$$

$$\sum_{A,B\subset E} |A\cap B|$$

$$\sum_{A,B\subset E} |A\cup B|$$

$$\left|\left\{A,B\subset E \;\middle|\; A\cap B=\emptyset\right\}\right|$$

$$\left|\left\{A,B\subset E \;\middle|\; A\subset B\right\}\right|$$

(***) Exercice 4 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou dense. (On pourra considérer $\alpha=\inf G\cap\mathbb{R}_+^*$)
En déduire une caractérisation des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.

(***) Exercice 5 : Des sous-groupes distincts

Soit $(G,.)$ un groupe fini d'ordre $2n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, d'élément neutre e. On suppose qu'il existe deux sous-groupes distincts H et H' de $(G,.)$, d'ordre n, tels que $G\cap G'=\{e\}$. Montrer que $n=2$ et dresser la table de $(G,.)$.

(***) Exercice 6 : L'indicatrice d'Euler

On définit l'indicatrice d'Euler sur $\mathbb{N}^*$, notée φ, de la façon suivante. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ est égal au nombre d'entiers de $[\![1,n]\!]$ premiers avec n. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\varphi(d)$$