Semaine 8 : Fonctions numériques, fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Questions de cours

Question de cours 1 : Théorème de la limite monotone

Enoncer et prouver le théorème de la limite monotone.

Question de cours 2 : Continuité des fonctions lipschitziennes

Soit $f : A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si f est lipschitzienne sur A, f est continue sur A.

Question de cours 3 : Image d'une partie compacte par une fonction continue

Montrer que l'image d'une partie compacte par une fonction continue est compacte.

Exercices

(*) Exercice 1 : Une recherche de fonction

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

(*) Exercice 2 : Une fonction périodique

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction périodique. Montrer que f est bornée.

(*) Exercice 3 : Un maximum ?

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} l_1$ et que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l_2$, avec $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est bornée.

(**) Exercice 1 : Un théorème de point fixe

Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

(**) Exercice 2 : Un autre théorème de point fixe

Soit $f \in C^0([0,1])$. Montrer que f admet un point fixe.

(**) Exercice 3 : Une première formule de la moyenne

Soient $(f,g) \in \left(C^0([a,b],\mathbb{R})\right)^2$. On suppose que g est positive. Montrer que :

$$\exists c \in [a,b], \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

(**) Exercice 4 : Encore un point fixe

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ et $\alpha \leqslant 1$. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Montrer que f admet un point fixe.

(***) Exercice 1 : Une seconde formule de la moyenne

Soient $(f,g) \in \left(C^0([a,b],\mathbb{R}\right)^2$. On suppose que g est positive et décroissante. Montrer que :

$$\exists c \in [a,b], \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

(***) Exercice 2 : Le lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(On rappelle que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $g \in C^0([a,b]$, il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$.)

(***) Exercice 3 : Applications propres

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes.

1. $|f(x)| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est compact.