Semaine 6 : Suites réelles et complexes, séries

Questions de cours

Question de cours 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Enoncer et prouver le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

Question de cours 2 : Séries de Riemann

Déterminer, en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, si la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ou non.

Question de cours 3 : Critère spécial des séries alternées

Enoncer et prouver le critère spécial des séries alternées.

Exercices

(*) Exercice 1 : Un peu de calcul...

Les suites suivantes, définies par leur terme général, sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leurs limites.

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

$$u_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$u_n = \sqrt[n]{n!}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

$$u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$$

(*) Exercice 2 : Les extractions de $\mathbb{N}$

Soit φ une extraction de $\mathbb{N}$. Montrer que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(*) Exercice 3 : Une suite définie par récurrence

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Etudier la suite u.

(*) Exercice 4 : Une condition suffisante de convergence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w := (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que u converge.

(*) Exercice 5 : Un exemple important

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(*) Exercice 6 : Un peu de calcul...

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\cos(n) + n^{3/4}}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$$

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$$

$$\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

(*) Exercice 7 : Encore un peu de calcul...

Justifier l'existence puis calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \text{ (pour } x \in\ ]-1,1[)$$

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k)x^{n-k-1} \text{ (pour } x \in\ ]-1,1[\text{ et } k \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$$

(*) Exercice 8 : Attention à l'ordre !

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geqslant 2$, on pose :

$$u_{n,p} = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n$$

Comparer

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty} u_{n,p} \text{ et } \sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$$

.

(**) Exercice 1 : La série harmonique

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) := H_n - \ln(n)$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. En déduire un équivalent simple de H_n.
$\longrightarrow H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

(**) Exercice 2 : Le nombre d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer :
$$\forall \alpha \in]0,1[], \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \implies (1-\alpha)^n > 1 - na$$
2. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{6n+1}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
4. Conclure.

(**) Exercice 3 : Le lemme de l'escalier

1. Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
2. Soit $u_1 > 0$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

(**) Exercice 4 : Une recherche d'équivalent

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$.

(**) Exercice 5 : Des séries alternées

Caractériser les suites $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positives telles que $\sum u_n$ converge et qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Que dire de plus si on suppose u décroissante ?

(**) Exercice 6 : Les séries de Bertrand

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$$

Discuter la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de α et β.

(**) Exercice 7 : L'inverses des nombres impairs

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(**) Exercice 8 : Des sommes partielles croisées

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} + T_n = S_n + T_{n+1}$. Que dire de u et v ?

(**) Exercice 9 : Irrationalité de e

1. Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On admettra que sa limite vaut e.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Montrer que $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que e est irrationnel.

(***) Exercice 1 : La moyenne de Césaro

Soit $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite l. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l.

(***) Exercice 2 : $\mathbb{R}$ est complet !

Une suite réelle $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Pour toute la suite, on considère $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. Soit $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que v est de Cauchy.
2. Montrer que u est bornée.
3. En déduire que u admet une valeur d'adhérence.
4. Montrer que u est convergente.

(***) Exercice 3 : La série des inverses des nombres premiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{p_n}$ est de la même nature que la série de terme général $\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$$
(on pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers des entiers de $[\![1, N]\!]$)