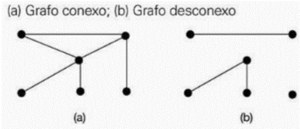
Grafos

Grafo $G = (V, E)$

V – conjunto dos **nós** (ou **vértices**)

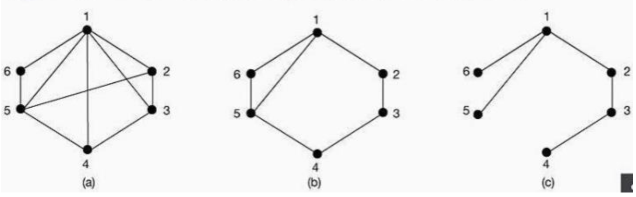
$E \subseteq V^2$ – conjunto dos **arcos** (ou **arestas**)

(a) Grafo conexo; (b) Grafo desconexo



- Dois vértices ligados por uma aresta são denominados **adjacentes**.
- Grafo **simples** se não possui laços ou arestas múltiplas.
- Grafo **completo** quando existe uma aresta para cada par de vértices distintos.
- Grafo **regular** quando todos os vértices de um grafo possuem o mesmo grau. Grau: o grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
- O número de arestas do caminho é denominado **comprimento do caminho**. Quando todos os vértices do caminho são distintos, a sequencia recebe o nome de caminho simples ou elementar. Se as arestas forem diferentes recebe o nome de trajeto.
- Quando um grafo não possui ciclos é chamado **acíclico**.
- Grafo **conexo** se existe um caminho para cada par de vértices de G. Caso contrário é chamado **desconexo**. G é **fortemente conexo** se existe algum caminho de qualquer nó para qualquer nó.
- Dois grafos G1(V1, E1) e G2(V2,E2), com |V1|=|V2|= n, são **isomorfos** entre si, quando existe uma função univoca f:V1-V2 tal que (u,v) pertence a E1 se e somente se (f(u),f(v)) pertencer a E2.
- Grafo **pesado** é aquele com peso nas arestas.
- Os grafos que não possuem orientação nas suas arestas são chamados de **não orientado**. Um grafo **orientado** tambem chamado de **dígrafo**, possui um conjunto de arestas, tal que para cada aresta existe uma única direção entre u e v.
- Um grafo que não possui ciclos e é conexo é chamado de **árvore.** Uma árvore T com n vértices possui n-1 arestas.
- **Percurso em largura (BFS)**: Dado um grafo G e um vértice de origem s, a procura em largura explora as arestas de G até explorar todos os vértices alcançáveis a partir de s. Além disso também calcula a menor distancia em número de arestas de s até todos os vértices acessíveis a ele.
- **Percurso em profundidade (DFS)**: Nós são visitados pela ordem por que são encontrados.
- **Ordenação topológica**: Podemos usar busca em profundidade para executar uma ordenação topológica de um grafo acíclico dirigido. Se contém um ciclo, nenhuma ordenação é possível.
- **Árvore de cobertura minima:** Seja G um grafo pesado não orientado conexo, uma árvore de cobertura (ou geradora) é um grafo não orientado conexo acíclico. Uma árvore de cobertura mínima de G é uma árvore de cobertura de peso mínimo.

Figura 8.12 (a) Grafo G; (b) Subgrafo gerador; (c) Árvore geradora



- **Algoritmo de Prim**: começa com um vértice e cresce passo a passo, adicionando sempre a aresta de menor peso. Faz uso da fila de prioridade. Garante que a MST resultante seja conectada e tenha o menor peso possível. **O Algoritmo de Kruskal**: Ordena todas as arestas em ordem crescente de peso e, em seguida constrói a MST adicionando arestas em ordem até que todos os vértices estejam conectados.

Percurso em largura (a partir do vértice s)

BFS(G, s)

```
for each vertex u in G.V - {s} do
    u.color <- WHITE
    u.d <- INFINITY            // distância para s
    u.p <- NIL                 // antecessor no caminho
s.color <- GREY
s.d <- 0
s.p <- NIL
Q <- EMPTY                     // fila (FIFO)
ENQUEUE(Q, s)
while Q != EMPTY do
    u <- DEQUEUE(Q)            // próximo nó a explorar
    for each vertex v in G.adj[u] do
        if v.color = WHITE then
            v.color <- GREY
            v.d <- u.d + 1
            v.p <- u
            ENQUEUE(Q, v)
    u.color <- BLACK           // u foi explorado
```

Percurso em profundidade

DFS(G)

```
for each vertex u in G.V do
    u.color <- WHITE
    u.p <- NIL
time <- 0                      // variável global
for each vertex u in G.V do    // explora todos os nós
    if u.color = WHITE then
        DFS-VISIT(G, u)
```

DFS-VISIT(G, u)

```
time <- time + 1               // instante da descoberta do
u.d <- time                    // vértice u
u.color <- GREY
for each vertex v in G.adj[u] do // explora arco (u, v)
    if v.color = WHITE then
        v.p <- u
        DFS-VISIT(G, v)
u.color <- BLACK               // u foi explorado
time <- time + 1               // instante em que termina
u.f <- time                    // a exploração de u
```

Árvore de cobertura mínima

Algoritmo de Prim

$G = (V, E)$ – grafo pesado não orientado conexo

MST-PRIM(G, w, s)

```
for each vertex u in G.V do
    u.key <- INFINITY          // custo de juntar u à MST
    u.p <- NIL                 // nó a que u é ligado
s.key <- 0
Q <- G.V                       // fila com prioridade, por
                               // mínimos, chave é u.key
while Q != EMPTY do
    u <- EXTRACT-MIN(Q)
    for each vertex v in G.adj[u] do
        if v in Q and w(u,v) < v.key then
            v.p <- u           // arco (u,v) é candidato
            v.key <- w(u,v)    // pode alterar Q!
```

Ordenação topológica

Adaptação de DFS

$G = (V, E)$ – grafo orientado acíclico (DAG)

TOPOLOGICAL-SORT(G)

```
for each vertex u in G.V do
    u.color <- WHITE
L <- EMPTY                     // lista, global
for each vertex u in G.V do
    if u.color = WHITE then
        DFS-VISIT'(G, u)
return L
```

DFS-VISIT'(G, u)

```
u.color <- GREY
for each vertex v in G.adj[u] do
    if v.color = WHITE then
        DFS-VISIT'(G, v)
u.color <- BLACK
LIST-INSERT-HEAD(L, u)         // insere
```

Partição

Implementação em vector

MAKE-SETS(n)

```
let P[1..n] be a new array
for i <- 1 to n do
  P[i] <- -1      // i is the representative for set {i}
return P
```

FIND-SET-BASIC(P, i)

```
while P[i] > 0 do
    i <- P[i]
return i
```

UNION-BASIC(P, i, j)

```
P[FIND-SET(P,j)] <- FIND-SET(P, i)
```

Árvore de cobertura mínima

Algoritmo de Kruskal

$G = (V, E)$ – grafo pesado não orientado conexo

MST-KRUSKAL(G, w)

```
v <- |G.V|
A <- EMPTY                     // conjunto dos arcos da MST
P <- MAKE-SETS(G.V)            // partição de G.V, floresta
Q <- G.E                       // fila com prioridade, por
                               // mínimos, chave é w(u,v)
e <- 0                         // número de arcos na MST
while e < v - 1 do
    (u,v) <- EXTRACT-MIN(Q)
    if FIND-SET(P, u) != FIND-SET(P, v) then
        A <- A + {(u,v)}       // novo arco da MST
        UNION(P, u, v)
        e <- e + 1
return A
```

Abstracção da implementação de conjuntos disjuntos com os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$

Operações suportadas

MAKE-SETS(n)
: Cria conjuntos singulares com os elementos $\{1, 2, \dots, n\}$

FIND-SET(i)
: Devolve o representante do conjunto que contém o elemento i

UNION(i, j)
: Reúne os conjuntos a que pertencem os elementos i e j

Reunião por tamanho (union by size/rank): Em vez de simplesmente unir um conjunto ao outro sem considerar seus tamanhos, a reunião por tamanho escolhe a raiz com base no tamanho do conjunto. O conjunto menor é unido ao conjunto maior, para que a estrutura permaneça mais balanceada e a profundidade das árvores seja reduzida.

Compressão de caminho (path compression): Durante a busca pelo representante (raiz) de um elemento, a compressão de caminho é aplicada para atualizar os ponteiros ao longo do caminho percorrido, fazendo com que eles apontem diretamente para a raiz. Essa compressão de caminho reduz a altura da árvore, tornando as futuras buscas mais eficientes.

- **Algoritmo de Dijkstra**: só aplicável a grafos sem pesos negativos. Começa num ponto e atualiza-se a distância aos adjacentes (a distância da fonte a ela mesma é 0). Pego sempre na distância mais curta para ver os adjacentes. Vértice v – [p,d] p-pai d-distancia.
- **Algoritmo de Bellman-Ford**: aplicável a qualquer grafo pesado.
- **Algoritmo de Floyd-Warshall**: Arestas de peso negativo podem estar presentes, valores diferentes de 0 na diagonal principal indica que há ciclos negativos no grafo. O algoritmo assume que não existem ciclos negativos no grafo.
- **Algoritmo de Kruskal**: Colocar os vértices, ordenar as arestas pelos tamanhos da menor para a maior. Ir adicionando sem criar ciclos até estarem todos os vértices ligados.

FLOYD-WARSHALL(w)

```
n <- w.rows
d <- w
for k <- 1 to n do
  for i <- 1 to n do
    for j <- 1 to n do
      if d[i,k] + d[k,j] < d[i,j] then
        d[i,j] <- d[i,k] + d[k,j]
return d
```

BELLMAN-FORD(G, w, s)

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i <- 1 to |G.V| - 1 do
    for each edge (u,v) in G.E do
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u,v) in G.E do
    if u.d + w(u,v) < v.d then
        return FALSE
return TRUE
```

DIJKSTRA(G, w, s)

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
Q <- G.V                        // fila com prioridade, chave u.d
while Q != EMPTY do
    u <- EXTRACT-MIN(Q)
    for each vertex v in G.adj[u] do
        RELAX(u, v, w)                      // pode alterar Q!
```

O peso do caminho mais curto de s a qualquer outro nó é inicializado com ∞

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

```
for each vertex v in G.V do
    v.d <- INFINITY     // peso do caminho mais curto de s a v
    v.p <- NIL          // predecessor de v nesse caminho
s.d <- 0
```

Se o caminho de s a v, que passa por u e pelo arco (u, v), tem menor peso do que o mais curto anteriormente encontrado, encontrámos um caminho mais curto

RELAX(u, v, w)

```
if u.d + w(u,v) < v.d then
    v.d <- u.d + w(u,v)
    v.p <- u
```

Método de Ford-Fulkerson

1. Inicializar $f(u, v) = 0$, para todo $(u, v) \in E$
2. Enquanto houver um caminho simples $p = s \ldots t$ na rede residual
   a. Seja $c_f(p) = \min \{ c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ está em } p \}$
   b. Para cada arco (u, v) em p
      - Se $(u, v) \in E$, o fluxo no arco (u, v) é aumentado em $c_f(p)$ unidades
        $$f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$$
      - Senão, então $(v, u) \in E$ e são canceladas $c_f(p)$ unidades de fluxo no arco (v, u)
        $$f(v, u) = f(v, u) - c_f(p)$$

Algoritmo de Edmonds-Karp

EDMONDS-KARP(G, s, t)

```
for each edge (u,v) in G.E do
    (u,v).f <- 0               // fluxo f(u,v) = 0
Gf <- RESIDUAL-NET(G)
while (cf <- BFS-FIND-PATH(Gf, s, t)) > 0 do
    v <- t
    while v.p != NIL do
        if edge (v.p,v) is in G.E then
            (v.p,v).f = (v.p,v).f + cf     // aumenta
        else // edge (v,v.p) is in G.E
            (v,v.p).f = (v,v.p).f - cf     // cancela
        v <- v.p
    UPDATE(Gf, G)              // actualiza rede residual
```

Percurso em largura (BFS): É usado para explorar ou pesquisar todos os nós de um grafo de maneira sistêmica, visitando primeiro os nós vizinhos antes de avançar para os próximos níveis. **Percurso em profundidade (DFS):** Permite explorar ou pesquisar um grafo, visitando os nós o mais a fundo possível antes de retroceder. É útil para encontrar componentes conexas, ciclos e outras propriedades dos grafos. **Ordenação topológica**: É um algoritmo aplicado a grafos direcionados acíclicos (DAGs) para ordenar os nós de forma que todas as arestas apontem para nós anteriores na ordem. **Grafo transposto**: É obtido revertendo as direções de todas as arestas de um grafo direcionado. É útil para resolver problemas relacionados a grafos direcionados. **Cálculo das componentes fortemente conexas**: Permite identificar e agrupar os nós de um grafo direcionado em componentes, onde cada nó de uma componente é alcançável por qualquer outro nó dessa mesma componente**. Algoritmo de Prim e de Kruskal**: Ambos são algoritmos de árvore geradora mínima, usados para encontrar a árvore que conecta todos os nós de um grafo ponderado com o custo total mínimo. O algoritmo de Prim começa de um nó inicial e expande a árvore adicionando a aresta de menor peso, enquanto o algoritmo de Kruskal constrói a árvore adicionando arestas em ordem crescente de peso. Caminhos mais curtos num DAG: DAG significa "Directed Acyclic Graph" (Grafo Direcionado Acíclico). Os algoritmos para caminhos mais curtos em um DAG, como o algoritmo de Bellman-Ford ou o algoritmo de Dijkstra, permitem encontrar o

Em cada rede de fluxos existem dois pontos especiais:

- Fonte (*source*) Origem de tudo o que flui na rede
- Dreno (*sink*) Destino final de tudo o que flui na rede

Rede de fluxos (*Flow network*)

- Modelada através de um grafo orientado $G = (V, E)$
- $c(u, v) > 0$ é a capacidade do arco (u, v)
- $s \in V$ é a fonte (*source*) da rede
- $t \in V$ é o dreno (*sink*) da rede ($s \neq t$)
- Se $(u, v) \in E$, então $(v, u) \notin E$
- Assume-se que, qualquer que seja o vértice $v \in V$, existe um caminho $s \ldots v \ldots t$

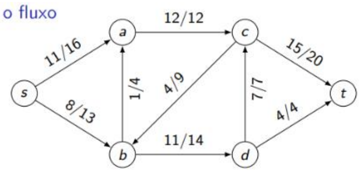
  (Logo, $|E| \geq |V| - 1$)

Numa rede residual

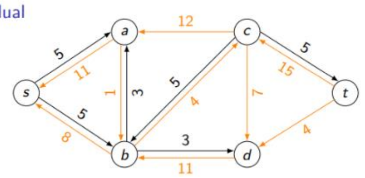
- A capacidade dos arcos comuns à rede original corresponde à capacidade não utilizada pelo fluxo
- A capacidade dos arcos com orientação oposta à dos da rede original corresponde à quantidade de fluxo que pode ser cancelada

Uma rede residual indica os limites das alterações que podem ser feitas a um fluxo em cada ligação

Rede com o fluxo



Rede residual



Majorante para o valor do fluxo na rede:
Soma da saída de fluxo da fonte

Complexidade dos algoritmos

$G = (V, E)$

	Compl. Temporal
Percurso em largura	$O(V + E)$
Percurso em profundidade	$\Theta(V + E)$
Ordenação topológica (ambos os algoritmos)	$\Theta(V + E)$
Grafo transposto	$\Theta(V + E)$
Cálculo das componentes fortemente conexas	$\Theta(V + E)$
Algoritmos de Prim e de Kruskal	$O(E \log V)$
Caminhos mais curtos num DAG	$\Theta(V + E)$
Algoritmo de Dijkstra	$O((V + E) \log V)$
Algoritmo de Bellman-Ford	$O(VE)$
Algoritmo de Floyd-Warshall	$\Theta(V^3)$

Pressupostos

Grafo representado através de listas de adjacências (excepto algoritmos de Kruskal, de Bellman-Ford e de Floyd-Warshall)

Algoritmos de Prim e de Dijkstra recorrem a uma fila tipo *heap* binário com actualização (EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY com complexidade temporal logarítmica no número de elementos da fila)

Algoritmo de Kruskal usa Partição com compressão de caminho