Universidade Federal do Rio de Janeiro

Laboratório - Método da Potência

27 de janeiro de 2016

Roteiro

Este laboratório tem como intuito introduzir o aluno a um dos métodos numéricos para obtenção de autovalores e autovetores de uma matriz. É de grande importância um bom entendimento do método, uma vez que este será utilizado para **resolver o problema de rankear uma rede**. Um esqueleto do código está disponível na página do Facebook do curso.

1. Considere a seguinte matriz A, conjuntamente com o seguinte vetor v_0:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Calcule ($v_i = A^i v_0$):

   a) $v_1 = Av_0$
   b) $v_2 = A^2 v_0$
   c) $v_3 = A^3 v_0$
   d) $v_6 = A^6 v_0$
   e) $v_7 = A^7 v_0$
   f) $v_{19} = A^1 9 v_0$
   g) $v_{20} = A^2 0 v_0$

O ato de aplicar a transformação A sobre um vetor pode **alterar sua direção**. Uma forma de verificar se a direção de um vetor foi alterada é através do **produto interno**, que fornece o **cosseno do ângulo entre dois vetores**.

$$cos(\theta) = \frac{a^t b}{||a|| ||b||}$$

O valor do cosseno já informa qual a direção de um vetor em relação a outro. Se o mesmo for **1**, significa que ambos tem **mesmo sentido e direção**. Se o mesmo for $-\mathbf{1}$, significa que ambos tem **mesma direção e sentidos opostos**. Caso contrário, os vetores **não possuem a mesma direção**. Vefique então o valor do cosseno do ângulo entre os seguintes vetores:

a) v_1 e v_0

b) v_2 e v_1

c) v_3 e v_2

d) v_7 e v_6

e) v_{20} e v_{19}

Percebe-se uma relação muito importante entre **potencializar** uma matriz e a direção dos vetores que sofrem uma transformação da mesma. Você conseguiu percebe-la? Quando um dado vetor v não sofre alteração na sua direção, dizemos que o mesmo é um **autovetor** associado a matriz A. É notório que este vetor pode sofrer alterações de sentido e/ou norma (ou seja, o mesmo só sofre um escalonamento). Após suas contas, você consegue identificar o autovetor? Para tornar o processo menos conta e mais geométrica, gere plot dos vetores $v_0, v_1, v_2, v_3, v_{19}$ e v_{20}. Para realizar este plot, vamos usar a função xsegs. Lembra dela? Bom, vou colocá-la aqui de qualquer forma...

```
xsegs([0;0], v_i))  / Estamos definindo [0;0] como a origem do plot
                      para que seja algo padronizado
```

Não gosta da xsegs? Então segue uma outra alternativa: (gerando uma reta centrada na origem que tem vetor diretor igual ao vetor que deseja)

```
t = 0:0.1:5
v_i = v_i/norm(v_i)  // Apenas para que as retas
                    possuam pontos gerados mais
                    próximos umas das outras

plot(t*v_i(1),t*v_i(2))
```

Se você prestou atenção nas alterações de direção que a matriz faz sobre um vetor, percebeu que em potências elevadas **os vetores acabam sendo levados**

para a direção de um autovetor. Esta é a ideia do método da potência: **aplicar uma matriz sucetivas vezes sobre um vetor qualquer** (chamado de chute inicial) **até que encontremos um autovetor.**

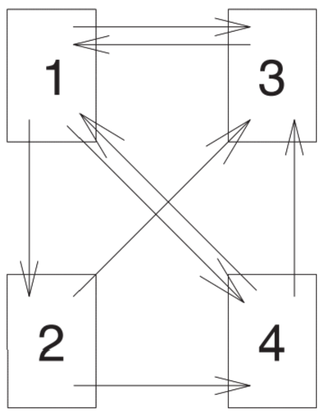
2. Termine a implementação do método da potência baseado no que foi visto. Sua implementação deve retornar um autovetor de norma 1, conjuntamente com o autovalor de maior modulo.
   Dica$_1$*: Use o método "CalculaCosseno" para calcular o valor do cosseno entre os vetores de iterações distintas*
   Dica$_2$*: Para extrair o autovalor será necessário usar o valor do cosseno e a norma de um vetor*

3. Aplicando o método da potência sobre a matriz $A - 5I$, qual autovalor/autovetor é encontrado? E a matriz A^{-1}?

4. Use sua criatividade para extrair todas as autocoisas da seguinte matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 29 & 34 & 46 \\ 25 & 29 & 26 \\ 38 & 17 & 56 \end{bmatrix}$$

5. Usando os conhecimentos obtidos na aula, crie a matriz do "PageRank" da seguinte rede e use o seu método da potência para achar o autovetor associado ao autovalor = 1 para dizer a ordem decrescente da importância das páginas.



6. Crie uma rede com pelo menos 8 sites e 15 links e repita o exercício anterior.