

# ALOCAÇÃO DE POLOS EM REGIÕES DO PLANO COMPLEXO VIA LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

17 de outubro de 2022



# 1 Introdução



## 2 Região de Desempenho Garantido

A alocação de polos é uma das principais ferramentas da teoria de controle, pois a partir desta, é possível projetar um sistema que seja estável e que tenha um bom desempenho (1). A operação de alocar polos de um sistema linear dentro de uma região específica é chamada  $\mathcal{D}$ -estabilidade (2).

Entende-se por estável o sistema que, em termos de resposta a estímulos, possui uma convergência ao zero da resposta natural, restando apenas a resposta forçada (3). Assim, para um intervalo de tempo determinado, espera-se que o sistema apenas tenha dinâmica referente à entrada aplicada. Neste contexto, a estabilidade é o ponto de partida para projetos de compensadores.

Na  $\mathcal{D}$ -estabilidade, a região referente à estabilidade em sistema contínuos e invariantes no tempo é o semi-plano esquerdo do plano complexo. Dado um ponto genérico no plano  $s$ , representado por:

$$s = x + jy \quad (2.1)$$

estará na região estável somente se a parte real de tal ponto estiver à esquerda do eixo imaginário, ou em números:

$$\Re(s) < 0 \implies x < 0 \quad (2.2)$$

Assim, um sistema com  $n$  polos é dito estável se todos os seus polos estão localizados à esquerda do eixo imaginário. A partir deste conceito, é possível definir estabilidade relativa. Se um sistema é estável para um valor  $\sigma < 0$ , então aquele é dito estável relativo (ao valor de  $\sigma$ ). A figura 1a mostra um esboço da região comentada. À medida que o valor de  $\sigma$  aumenta em valor absoluto, mais à esquerda a reta limitante se encontra e menor o plano estável relativo se torna.

Outros parâmetros de desempenho importantes para projetos de compensadores são o fator de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural não-amortecida  $\omega_n$ . São caracterizados pela resposta de sistemas de segunda ordem à função impulso (3)(4) e representam as oscilações não-amortecidas do modelo físico. Dado um polo representado como em (2.1), é possível reescrever tal equação em termos de tais parâmetros:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.3)$$

com  $\sigma = -\zeta\omega_n$ . As regiões de  $\mathcal{D}$ -estabilidade referente a tais parâmetros são obtidos fixando um deles em (2.3) e variando o outro em um certo intervalo. Por esse motivo, (2.3) pode ser entendido como uma função de duas variáveis, dado como:

$$s(\zeta, \omega_n) = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.4)$$

A partir disso, as regiões  $\zeta$ -constante são obtidas fixando-se  $\zeta$  e variando-se o valor de  $\omega_n$ , e possuem as características observadas na figura 1b. Os ângulos formados entre as

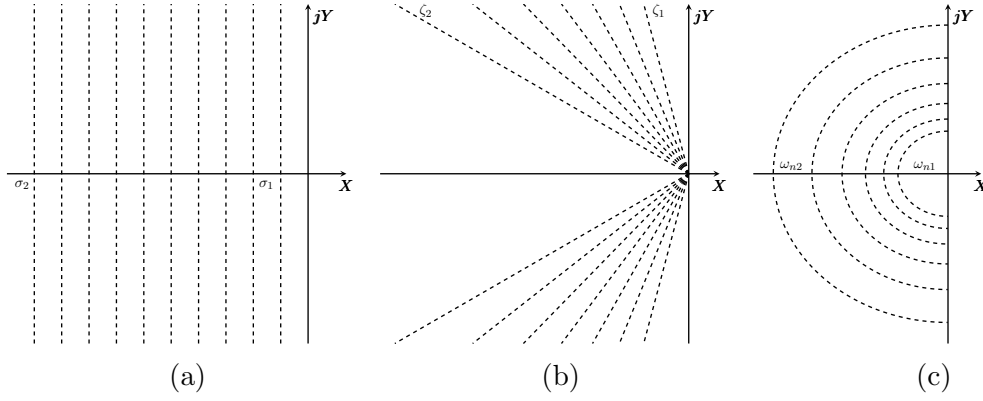


Figura 1 – Regiões de  $\mathcal{D}$ -estabilidade do plano  $s$ . Em (a) encontram-se retas verticais em vários valores de  $\sigma$ , sendo  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ . Em (b) encontram-se retas para vários valores de  $\zeta$ , sendo  $\zeta_2 > \zeta_1$ . Em (c) encontram-se circunferências de raios  $r = \omega_n$ , sendo  $\omega_2 > \omega_1$ .

retas e o eixo imaginário têm valores absolutos iguais à  $\beta = -\cot(\arccos(\zeta))$  e diminuem a medida que o valor de  $\zeta$  aumenta, tornando a região estreita.

Já as regiões  $\omega_n$ -constante possuem as características esboçadas na figura 1c. Os raios das semicircunferências formadas possuem valores iguais à  $\omega_n$  e aumentam ou diminuem à medida que varia tal parâmetro. Conforme abordado em (5), a intersecção de tais regiões formam a Região  $\Omega$  de Desempenho garantido. Todos os polos dentro de tal região possuem um mínimo valor de  $\sigma$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

As regiões de  $\mathcal{D}$ -estabilidade para sistemas discretos seguem os mesmos métodos abordados nos contínuos, com a diferença de serem descritos no plano  $z$ . A transformada de um ponto do plano  $s$  para  $z$  é dado por:

$$z = \exp(sT_s) \quad (2.5)$$

onde  $T_s$  é o período de amostragem, parâmetro importante para sistemas discretos (ver detalhes em (6)). Substituindo (2.3) em (2.5), chega-se a seguinte relação:

$$z = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.6)$$

A  $\sigma$ -estabilidade nos contínuos foi encontrada verificando a parte real dos polos. Utilizando-se da mesma ideia, ao analisar apenas a parte real de (2.6), chega-se na seguinte relação:

$$r = \exp(-|\sigma|T_s) \quad (2.7)$$

onde  $\sigma = -\zeta\omega_n$ . Tal função descreve uma circunferência com raio  $r = |\sigma|$ . Recordando (2.14), quando  $\sigma = 0$  em (2.7), a circunferência gerada possui raio unitário. Dessa maneira, o região estável nos sistemas contínuos é o interior de uma circunferência unitária. A figura 2a mostra esboços para vários valores de  $\sigma$ .

Como realizado nos sistemas contínuos, (2.6) pode ser enxergada em função de  $\zeta$  e  $\omega_n$ :

$$z(\zeta, \omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.8)$$

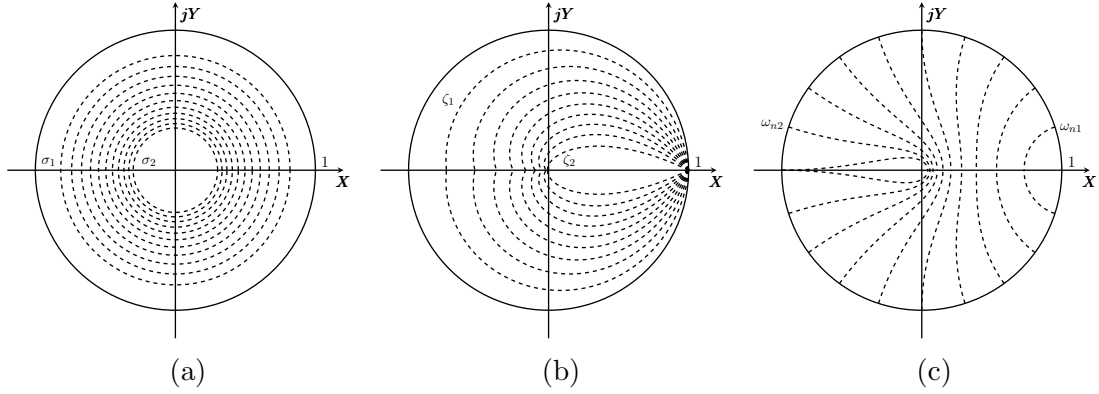


Figura 2 – Regiões de  $\mathcal{D}$ -estabilidade do plano  $z$ . Em (a) encontram-se circunferências com valores de raios crescentes, sendo  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ . Em (b) encontram regiões  $\zeta$ -constantes com áreas decrescentes em relação à  $\zeta$ , sendo  $\zeta_2 > \zeta_1$ . Em (c) encontram-se regiões semelhantes à cardioides que possuem áreas crescentes em relação à  $\omega_n$ , sendo  $\omega_2 > \omega_1$ .

A respectiva região  $\zeta$ -constante possui o formato apresentado na figura 2a. Devido ao exponencial, as curvas geradas são chamadas de espirais logarítmicas. Ambos os ramos começam a ser desenhadas a partir de  $(1, 0)$ , quando  $\omega_n = 0$ , e se deslocam da direita para a esquerda até cruzarem o eixo real primeira vez. À medida que o valor de  $\omega_n$  aumenta, mais voltas o contorno dá. E a cada  $n\pi$  voltas, o contorno cruza o eixo real pela  $n$ -ésima vez, conforme esboçado na figura 3. Como a espiral tende para dentro da região limitada pela primeira volta, somente a primeira volta é considerada no plano  $z$ .

O valor de  $\omega_n$  no qual os ramos cruzam o eixo imaginário a cada  $n\pi$  voltas é encontrado quando o argumento de (2.8) é igual à  $\pi$ , isto é:

$$\arg z(\zeta, \omega_{ne}) = \pi \implies \pm \omega_{ne} T_s \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi$$

$$\omega_{ne} = \frac{\pi}{T_s \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.9)$$

Assim, ambos os ramos cruzam o eixo imaginário pela primeira vez quando  $\omega_n = \omega_{ne}$ , para o respectivo valor dado de  $\zeta$ . Ainda, outra característica que pode ser citada é a influência do  $\zeta$ : quando maior seu valor, menor a região  $\zeta$ -constante equivalente, assim como ocorre com seu dual nos contínuos.

Em relação às regiões  $\omega_n$ -constante, como o estudo de alocação de polos se restringe a sistemas de segunda ordem subamortecidos (ver (3) e (4)), os valores possíveis para a taxa de amortecimento estão no intervalo  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Dito isso, os ramos esboçados na figura 2c começam a ser desenhadas a partir da circunferência unitária e vão em direção ao ponto  $(z(1, \omega_n), 0)$ , calculado como:

$$z(1, \omega_n) = \exp \left( -\omega_n T_s \pm T_s \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (2.10)$$

A área de tal região aumenta com o valor de  $\omega_n$ .

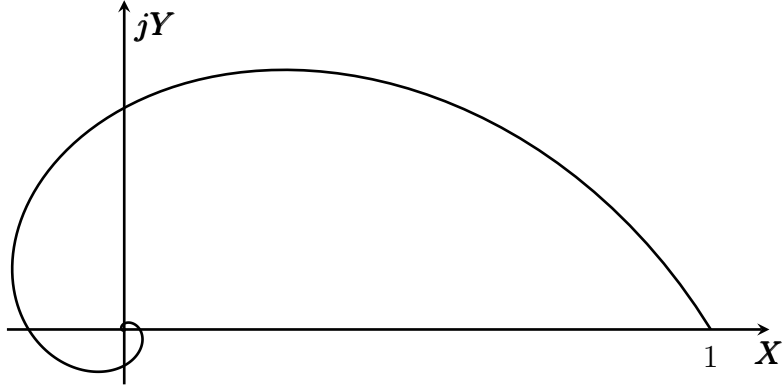


Figura 3 – Espiral logarítmica com 3 voltas gerada a partir de (2.8) com  $\zeta = 0.5$  constante.

## 2.1 Regiões LMI

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) & \dots \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.13)$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2aP \succ 0 \quad (2.14)$$

com  $u = \omega_n T_s$



## 3 Algoritmo

O algoritmo desenvolvido neste trabalho é um compilado de algoritmos desenvolvidos em (2), (7) e (8), onde mapeiam regiões de interesse da Teoria de Controle que em alguns casos são não-convexas, em regiões aproximadamente convexas.

Em (2) e (8) foram desenvolvidos aproximações cônicas das regiões  $\zeta$ -constante e  $\omega_n$ -constante, respectivamente, via LMIS. Ainda, adaptando-se as ideias apresentadas em (1) e (9) para a aproximação elíptica das curvas  $\zeta$ -constante, em (8) foi desenvolvido um algoritmo para aproximar a curva  $\omega_n$ -constante utilizando a maior elipse dentro da curva. Finalmente, Em (7) e (8) foram desenvolvidos aproximações poligonares para as curvas  $\zeta$ -constante e  $\omega_n$ -constante, onde aproveitam melhor tais regiões.

Referente a este trabalho, foi desenvolvido um algoritmo que baseia-se de tais ideias para sintetizar um controlador a partir de valores de  $\sigma$ ,  $\zeta$ ,  $\omega_n$  e  $T_s$  fornecidos e determinar a factibilidade da solução encontrada.

### 3.1 Aproximação cônica

Para o mapeamento cônico das curvas  $\zeta$ -constante e  $\omega_n$ -constante, são utilizados setores cônicos determinados via (2.13) e (2.12), e retas verticais como apresentado em (2) e (8).

Para a primeira curva, a ideia consiste em calcular os pontos em que a espiral logarítmica cruza o eixo real, determinar o sobre o ramo o ponto entre os calculados anteriormente e partir destes, determinar as LMIs correspondentes. A figura

---

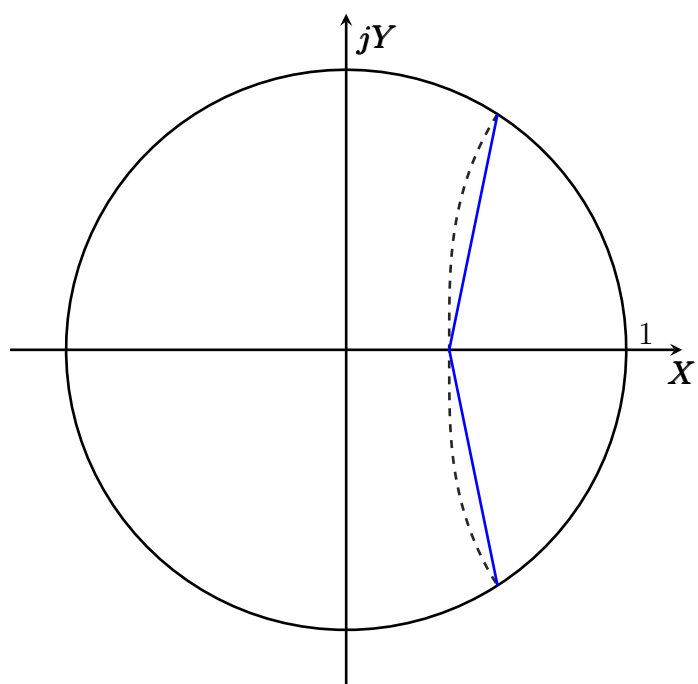
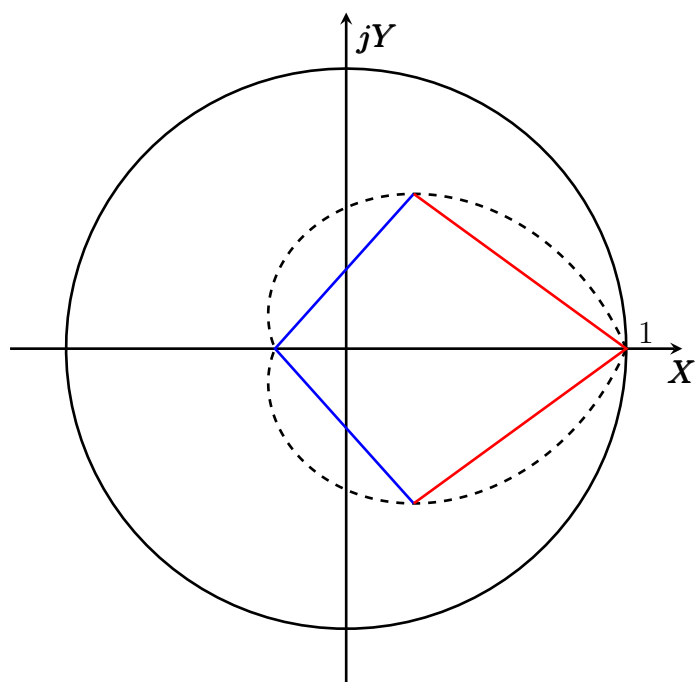
#### **Algoritmo 1** Aproximação cônica da taxa de amortecimento

---

**Entrada:**  $\zeta$ ,  $T_s$

**Saída:**  $K$

- 1:  $Z_o \leftarrow z(\zeta, 0)$
  - 2:  $Z_i \leftarrow z\left(\zeta, \frac{\pi}{T_s \sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$
  - 3:  $Z \leftarrow z(\zeta, \omega_n)$ , onde a área do triângulo formado é a maior possível
  - 4:  $F \leftarrow P \succ 0$
  - 5:  $F \leftarrow F \cap (2.12)$ , com  $a = Z_o$  e  $\theta = \text{ang}(Z, Z_i)$  ▷ Setor cônico esquerdo
  - 6:  $F \leftarrow F \cap (2.13)$ , com  $a = Z_i$  e  $\theta = \text{ang}(Z, Z_o)$  ▷ Setor cônico direito
  - 7:  $F \leftarrow F \cap (2.14)$ , com  $a = Z_i$  ▷ Reta vertical
  - 8: Verificar se o problema é factível
  - 9:  $K \leftarrow ZP^{-1}$
-



---

**Algoritmo 2** Aproximação cônica da curva  $N_y$ 

---

**Entrada:**  $\omega_n$

**Saída:**  $K$

- 1:  $N_o \leftarrow z(0, \omega_n)$
  - 2:  $N_i \leftarrow z(1, \omega_n)$
  - 3:  $F \leftarrow P \succ 0$
  - 4:  $F \leftarrow F \cap (2.13)$ , com  $a = N_i$  e  $\theta = \text{ang}(N_i, N_o)$  ▷ Setor cônico direito
  - 5:  $F \leftarrow F \cap (2.14)$ , com  $a = N_i$  ▷ Reta vertical
  - 6: Verificar se o problema é factível
  - 7:  $K \leftarrow ZP^{-1}$
-



## 4 Testes e Simulações

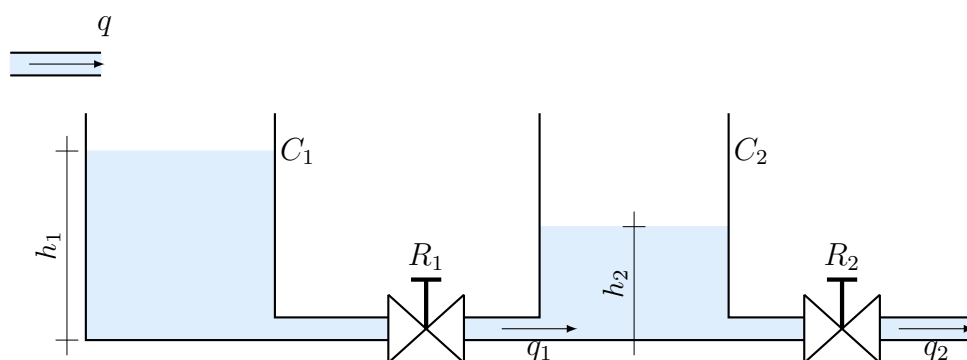


Figura 4 – Tanques comunicantes.



## 5 Conclusão





# Referências

- 1 ROSINOVÁ, D.; HOLIČ, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.
- 2 WISNIEWSKI, V. L. et al. Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations. In: *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 655–659.
- 3 NISE, N. *Control Systems Engineering, Sixth*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2011. ISBN 9781118138168. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=34zmCQAAQBAJ>.
- 4 OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>.
- 5 CHILALI, M.; GAHINET, P.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- 6 KUO, B. *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, 1980. (HRW series in electrical and computer engineering). ISBN 9780030575686. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oNpSAAAAMAAJ>.
- 7 WISNIEWSKI, V.; MADDALENA, E.; GODOY, R. Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter. *Control Engineering Practice*, v. 91, p. 104102, 2019. ISSN 0967-0661. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066119301182>.
- 8 CHIQUETO, G. da S. Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em sistemas em tempo discreto. 2021.
- 9 ROSINOVÁ, D.; HYPIUSOVÁ, M. Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, v. 12, n. 8, 2019. ISSN 1999-4893. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1999-4893/12/8/167>.