

Alocação de Polos Em Regiões do Plano Complexo Para Sistemas Discretos via LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

22 de novembro de 2022

1 Introdução

2 Base teórica

- 2.1 Regiões de polos do plano contínuo
- 2.2 Regiões de polos do plano discreto
- 2.3 Regiões LMI de interesse

3 Algoritmo proposto

- 3.1 Aproximação cônica
- 3.2 Aproximação elíptica
- 3.3 Aproximação poligonal

4 Problema-exemplo

5 Referências Bibliográficas e Bibliografia

Introdução

Resumo

Este trabalho implementou em software algoritmos desenvolvidos nos últimos anos na Teoria de Controle que aproximam em LMI regiões do plano \mathbf{z} que não são convexas. A partir de parâmetros de projetos informados, o algoritmo verifica a factibilidade da solução e, caso possível, retorna um compensador que estabiliza o sistema discretizado.

Introdução

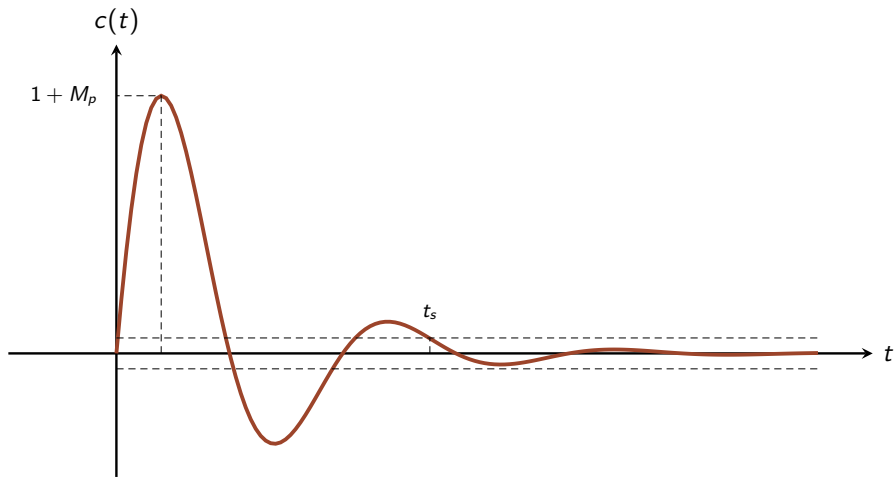
Resumo

Este trabalho implementou em software algoritmos desenvolvidos nos últimos anos na Teoria de Controle que aproximam em LMI regiões do plano \mathbf{z} que não são convexas. A partir de parâmetros de projetos informados, o algoritmo verifica a factibilidade da solução e, caso possível, retorna um compensador que estabiliza o sistema discretizado.

Problema

- ▶ Algumas regiões do plano \mathbf{z} não convexas;
- ▶ Logo, não podem ser representadas via LMIs;
- ▶ Alguns estudos apresentaram soluções para regiões específicas;
- ▶ Contudo, ainda não havia um algoritmo que engloba todas as soluções.

Resposta ao impulso de um sistema de segunda ordem



Representação de polos no plano \mathbf{s}

- Dado um par de polos conjugados, dado por:

$$\mathbf{s} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1)$$

Representação de polos no plano s

- Dado um par de polos conjugados, dado por:

$$\mathbf{s} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1)$$

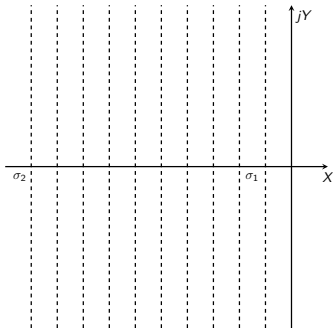
Definição

A regiões de polos de interesse são obtidas a partir da localização dos polos. Assim, (1) pode ser reescrita como:

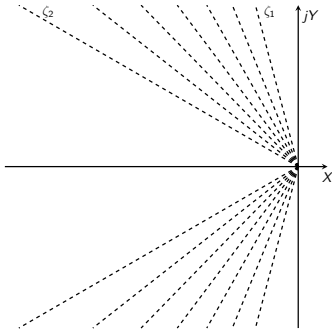
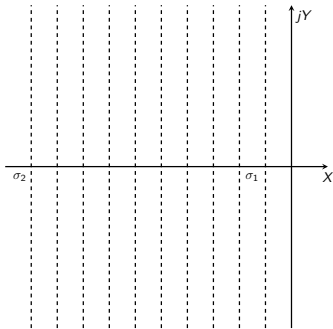
$$\mathbf{s}(\zeta, \omega_n) = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2)$$

Fixando-se um valor para um parâmetro e variando o outro, as regiões de polos dos contínuos são definidas.

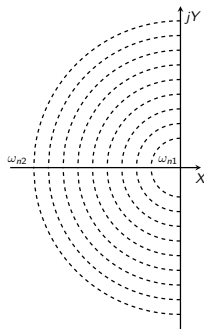
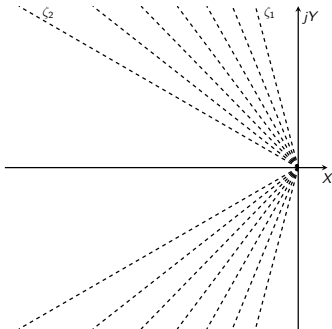
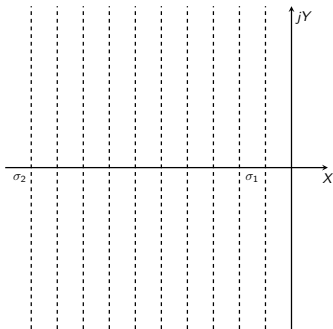
Regiões de polos do plano contínuo



Regiões de polos do plano contínuo



Regiões de polos do plano contínuo



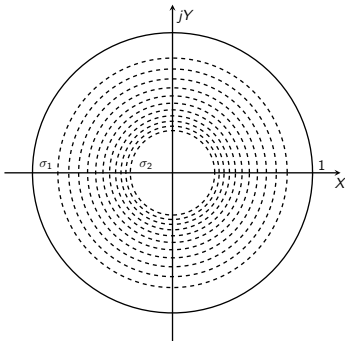
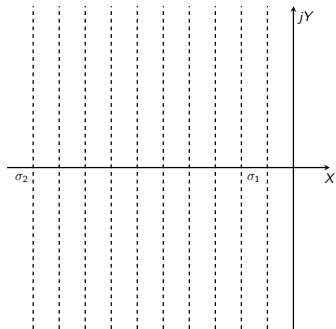
Relação entre os planos **s** e **z**

- ▶ A transformada que leva um ponto do plano **s** para o plano **z** é:
 - ▶ $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{s} T_s)$, onde:
 - ▶ **s** é polo no plano **s** e;
 - ▶ T_s o período de amostragem.

Relação entre os planos **s** e **z**

- ▶ A transformada que leva um ponto do plano **s** para o plano **z** é:
 - ▶ $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{s} T_s)$, onde:
 - ▶ **s** é polo no plano **s** e;
 - ▶ T_s o período de amostragem.
- ▶ A região de estabilidade nos discretos é o interior de uma circunferência unitária, pois:
 - ▶ $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) \leq 0 \implies \mathbf{z} = \exp(-|\sigma| T_s)$.

Regiões de polos do plano discreto – σ -constante

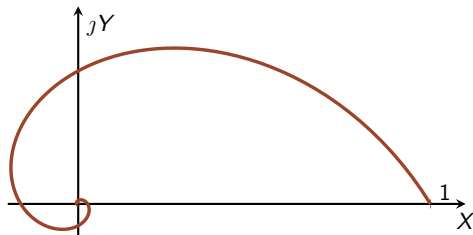


Regiões de polos do plano discreto – ζ -constante I

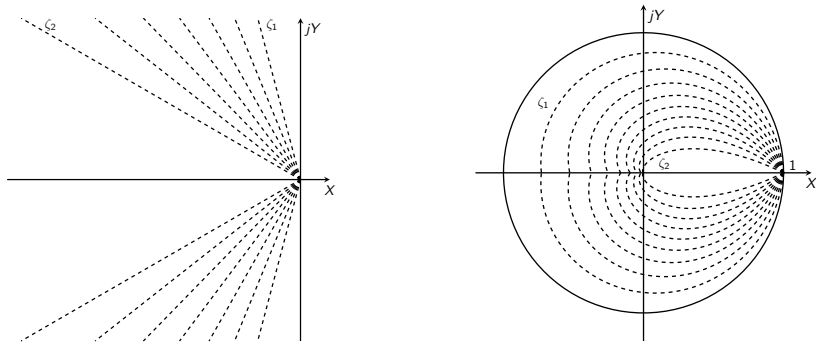
- ▶ $z(\zeta, \omega_n) = \exp \left(-\zeta \omega_n T_s \pm j \omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2} \right);$
- ▶ O ponto máximo extremo possui ângulo igual à π ;
- ▶ Assim, os valores dos pontos extremos são:

$$\omega_{nmin} = 0 \quad (3a)$$

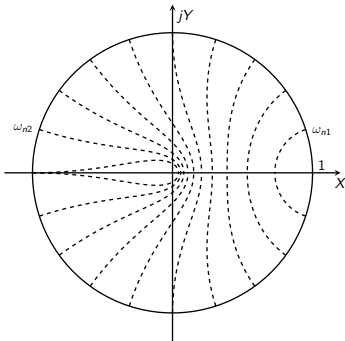
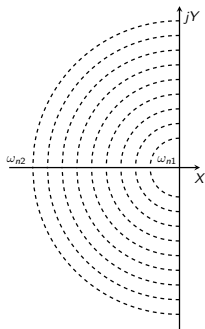
$$\omega_{nmax} = \frac{\pi}{T_s \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3b)$$



Regiões de polos do plano discreto – ζ -constante II



Regiões de polos do plano discreto – ω_n -constante



Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4)$$

Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5)$$

Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}(BZ)) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \sin(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}(BZ)) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (6)$$

Regiões LMI de interesse

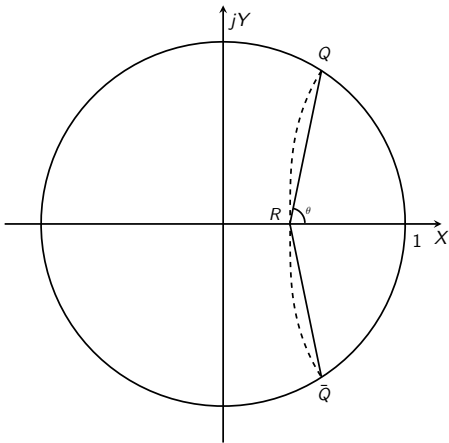
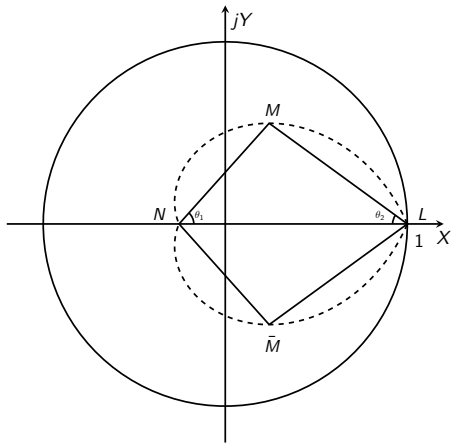
$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \sin(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}(BZ)) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \sin(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}(BZ)) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (6)$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2\alpha P \succ 0 \quad (7)$$

Aproximação cônica I



Aproximação cônica II

Entrada: σ, ζ, T_s

Saída: K

- 1: $L \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmin})$
- 2: $N \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmax})$
- 3: $M \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_n)$, onde a área do triângulo formado é a maior possível
- 4: $F \leftarrow P \succ 0$
- 5: $F \leftarrow F \cap (4)$ com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$
- 6: $F \leftarrow F \cap (5)$ com $\alpha = L$ e $\theta = \text{ang}(M, N)$
- 7: $F \leftarrow F \cap (6)$ com $\alpha = N$ e $\theta = \text{ang}(L, M)$
- 8: $F \leftarrow F \cap (7)$ com $\alpha = N$
- 9: Verificar se o problema é factível
- 10: $K \leftarrow ZP^{-1}$

- ▷ Taxa de amortecimento
- ▷ Setor cônico esquerdo
 - ▷ Setor cônico direito
 - ▷ Reta vertical

Aproximação cônica III

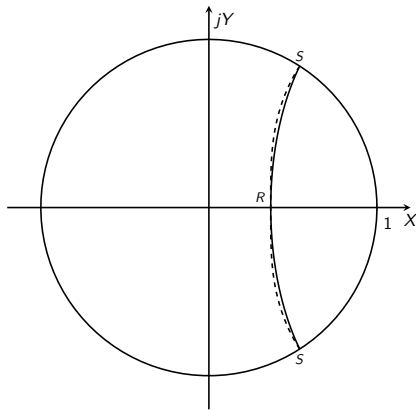
Entrada: σ, ω_n

Saída: K

- 1: $Q \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{min}, \omega_n)$
- 2: $R \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{max}, \omega_n)$
- 3: $F \leftarrow P \succ 0$
- 4: $F \leftarrow F \cap (4)$ com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$
- 5: $F \leftarrow F \cap (6)$ com $\alpha = R$ e $\theta = \text{ang}(Q, R)$
- 6: $F \leftarrow F \cap (7)$ com $\alpha = R$
- 7: Verificar se o problema é factível
- 8: $K \leftarrow ZP^{-1}$

- ▷ Taxa de amortecimento
 - ▷ Setor cônico direito
 - ▷ Reta vertical

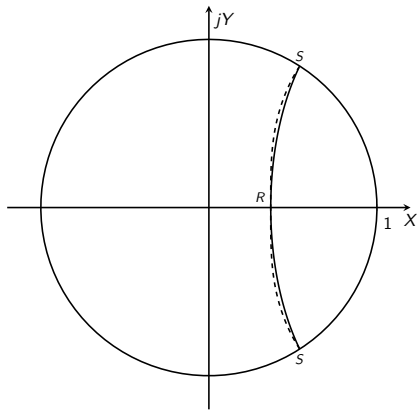
Aproximação elíptica I



$$\mathbb{E} : \frac{(x-1)^2}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N_y}\right) - 1\right)^2\right) y^2}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)} = 1$$

Aproximação elíptica I



$$\mathbb{E} : \frac{(x-1)^2}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N_y}\right) - 1\right)^2\right) y^2}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)} = 1$$

$$N_y = \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_n T_s} \quad (8)$$

Aproximação elíptica II

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{a}P + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) AP + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) PA' & -P^* \end{bmatrix} \prec 0 \quad (9)$$

onde:

$$a = \left(1 - \exp \left(\frac{-2\pi}{N_y} \right) \right) \quad (10a)$$

$$b = a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N_y} \right) \quad (10b)$$

Aproximação elíptica III

Entrada: σ, T_s, N_y

Saída: K

- 1: $F \leftarrow P \succ 0$
- 2: $F \leftarrow F \cap (4)$, com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$
- 3: $F \leftarrow (9)$, com $a = (10a)$ e $b = (10b)$
- 4: Verificar se o problema é factível
- 5: $K \leftarrow ZP^{-1}$

- ▷ Taxa de amortecimento
- ▷ Elipse

Aproximação poligonal da região ζ -constante I

Entrada: σ, ζ, T_s

Saída: K

- 1: $I \leftarrow 0$
- 2: $L \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmin})$
- 3: $N \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmax})$
- 4: $M \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_n)$ tal que $\text{Re}(M) = N$
- 5: $pts1 \leftarrow [0 \ \omega_{ne}]$
- 6: $pts2 \leftarrow pts1$
- 7: $vec1 \leftarrow [L \ M]$
- 8: $vec2 \leftarrow vec1$
- 9: $F \leftarrow P \succ 0$
- 10: $F \leftarrow (4)$ com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$
- 11: $F \leftarrow F \cap (5)$, com $\alpha = L$ e $\theta = \text{ang}(L, M)$
- 12: $F \leftarrow F \cap (7)$, com $\alpha = N$
- 13: Verificar se o problema é factível
- 14: **enquanto** Problema for infactível **faça**
- 15: **se** $I < \text{número de elementos em } vec1 - 1$ **então**
- 16: $I \leftarrow I + 1$

- ▷ Taxa de amortecimento
- ▷ Voltado para a esquerda
 - ▷ Reta vertical

Aproximação poligonal da região ζ -constante II

```
17:  senão
18:     $l \leftarrow 1$ 
19:     $vec1 \leftarrow vec2$ 
20:     $pts1 \leftarrow pts2$ 
21:  fim se
22:   $F \leftarrow \emptyset$ 
23:   $F \leftarrow P \succ 0$ 
24:   $F \leftarrow (4)$  com  $r = \exp(-|\sigma| T_s)$ 
25:   $pt_{new1} \leftarrow (pts1(l) + pts1(l + 1))/2$ 
26:   $V_{new1} \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, pt_{new1})$ 
27:   $pts2 \leftarrow [pts2 \ pt_{new1}]$ 
28:  Ordena de forma decrescente  $pts2$ 
29:   $vec2 \leftarrow [vec2 \ V_{new1}]$ 
30:  Ordena de forma decrescente  $vec2$ 
31:   $F \leftarrow F \cap (7)$ , com  $\alpha = N$ 
32:  para  $m = 1$  até número de elementos de  $vec1 - 1$  faça
33:     $u_1 \leftarrow \text{loc}(vec2(m), vec2(m + 1))$ 
34:    se  $u_1 < 0$  então
```

▷ Descarta as restrições anteriores

▷ Taxa de amortecimento

▷ Reta vertical

Aproximação poligonal da região ζ -constante III

35: $F \leftarrow F \cap (6)$, com $\alpha = u_1$ e $\theta = \text{ang}(\text{vec2}(m+1), u_1)$

▷ Voltado para a direita

36: **senão**

37: $F \leftarrow F \cap (5)$, com $\alpha = u_1$ e $\theta = \text{ang}(\text{vec2}(m+1), u_1)$

▷ Voltado para a esquerda

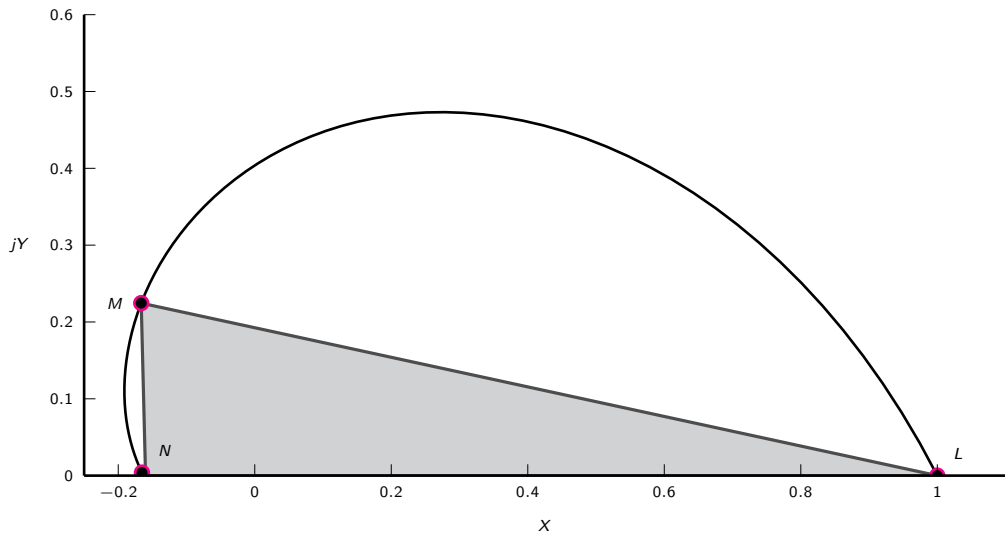
38: **fim se**

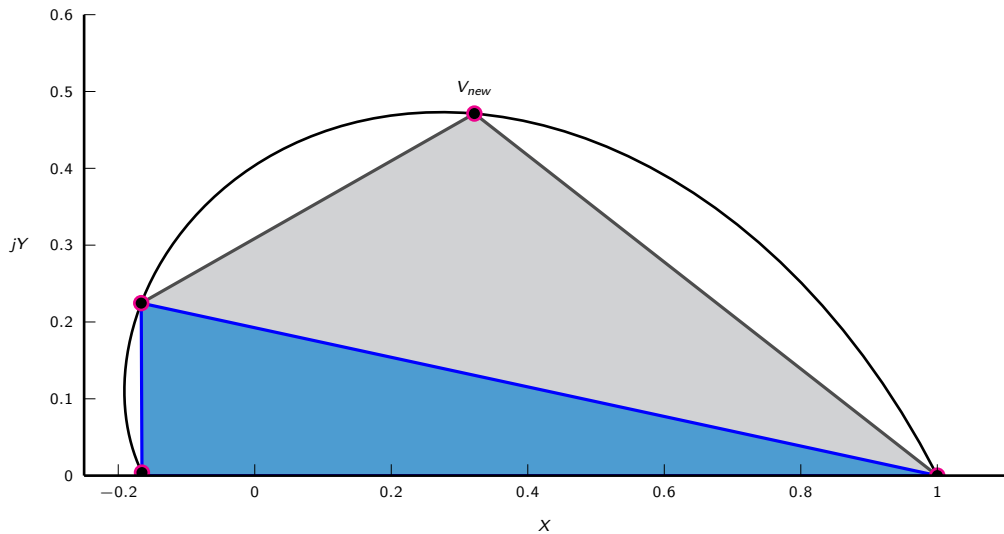
39: **fim para**

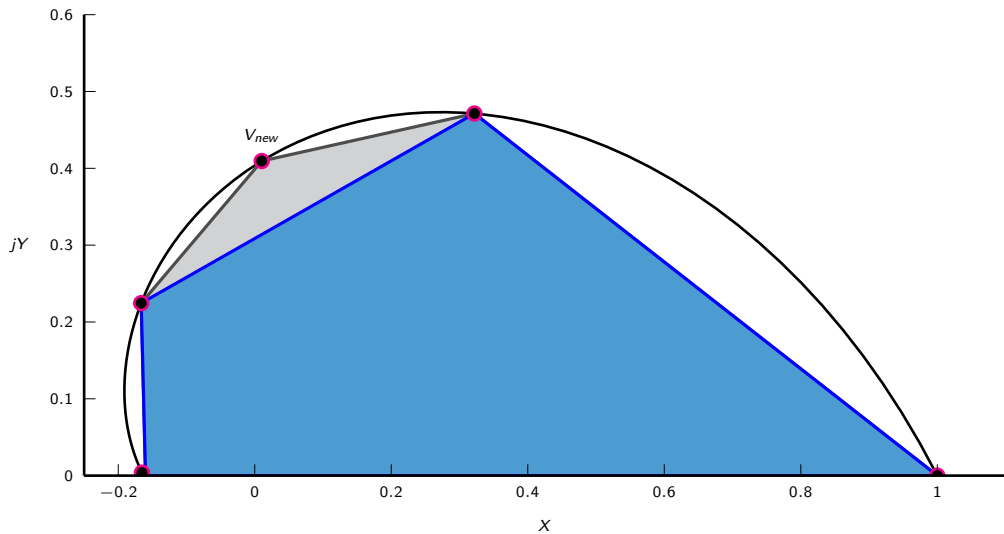
40: Verificar se o problema é factível

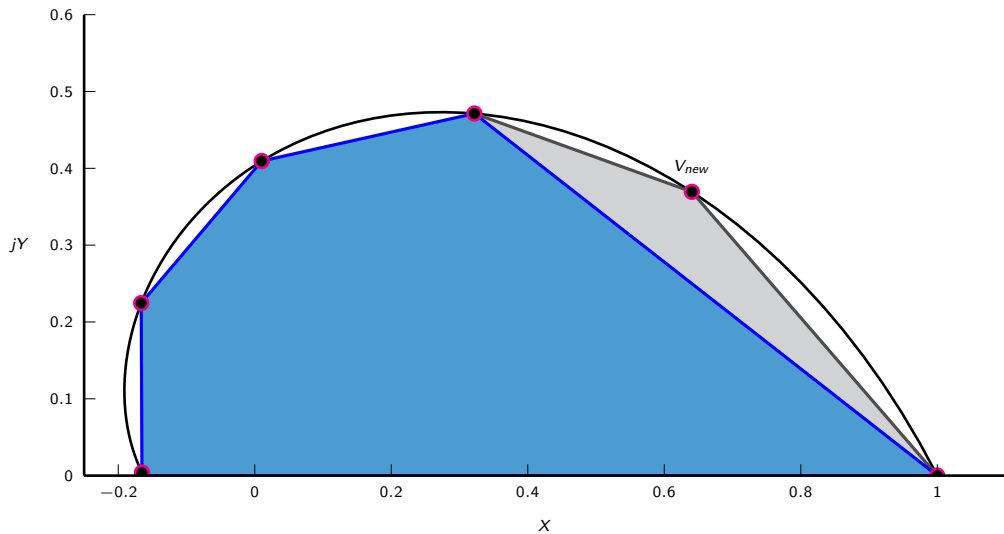
41: **fim enquanto**

42: $K \leftarrow ZP^{-1}$









Aproximação poligonal da região ω_n -constante I

Entrada: σ, ω_n, T_s

Saída: K

- 1: $I \leftarrow 0$
- 2: $Q \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{min}, \omega_n)$
- 3: $R \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{max}, \omega_n)$
- 4: $pts3 \leftarrow [\zeta_{min} \ \zeta_{max}]$
- 5: $pts4 \leftarrow pts3$
- 6: $vec3 \leftarrow [R \ Q]$
- 7: $vec4 \leftarrow vec3$
- 8: $F \leftarrow P \succ 0$
- 9: $F \leftarrow (4)$ com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$
- 10: $F \leftarrow F \cap (6)$, com $\alpha = R$ e $\theta = \text{ang}(Q, R)$
- 11: $F \leftarrow F \cap (7)$, com $\alpha = R$
- 12: Verificar se o problema é factível
- 13: **enquanto** Problema for infactível **faça**
- 14: **se** $I < \text{número de elementos em } vec3 - 1$ **então**
- 15: $I \leftarrow I + 1$
- 16: **senão**

- ▷ Taxa de amortecimento
- ▷ Voltado para a direita
- ▷ Reta vertical

Aproximação poligonal da região ω_n -constante II

```
17:       $l \leftarrow 1$ 
18:       $vec3 \leftarrow vec4$ 
19:       $pts1 \leftarrow pts2$ 
20:  fim se
21:   $F \leftarrow \emptyset$ 
22:   $F \leftarrow P \succ 0$ 
23:   $F \leftarrow (4)$  com  $r = \exp(-|\sigma| T_s)$ 
24:   $pt_{new2} \leftarrow (pts3(l) + pts3(l + 1))/2$ 
25:   $V_{new2} \leftarrow \mathbf{z}(pt_{new2}, \omega_n)$ 
26:   $pts4 \leftarrow [pts4 \ pt_{new2}]$ 
27:  Ordena de forma decrescente  $pts4$ 
28:   $vec4 \leftarrow [vec4 \ V_{new2}]$ 
29:  Ordena de forma decrescente  $vec4$ 
30:   $F \leftarrow F \cap (7)$ , com  $\alpha = N$ 
31:  para  $m = 1$  até número de elementos de  $vec3 - 1$  faça
32:     $u_2 \leftarrow \text{loc}(vec4(m), vec4(m + 1))$ 
33:     $F \leftarrow F \cap (6)$ , com  $\alpha = u_2$  e  $\theta = \text{ang}(vec4(m), u_2)$ 
34:  fim para
```

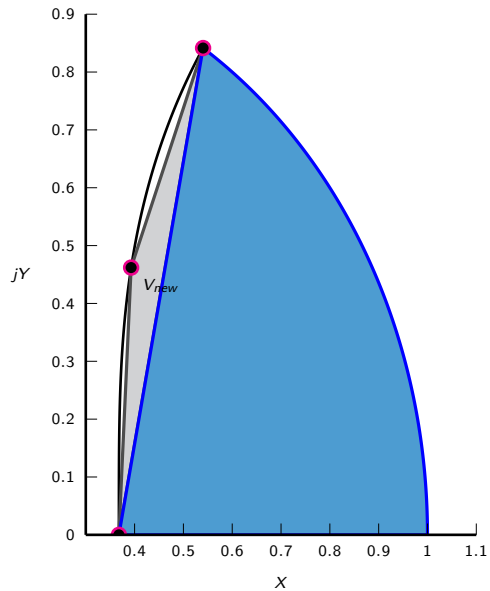
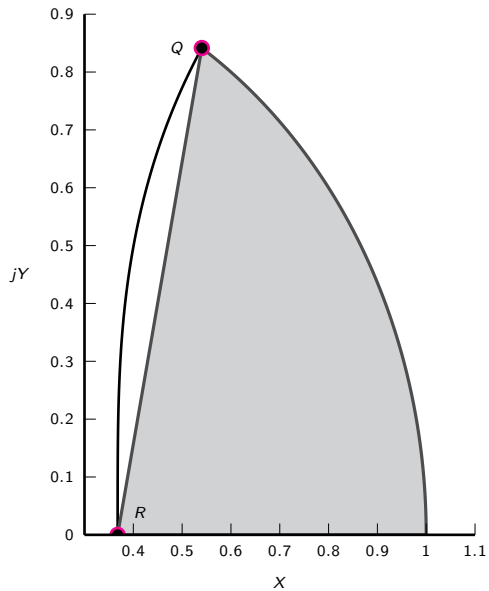
▷ Descarta as restrições anteriores

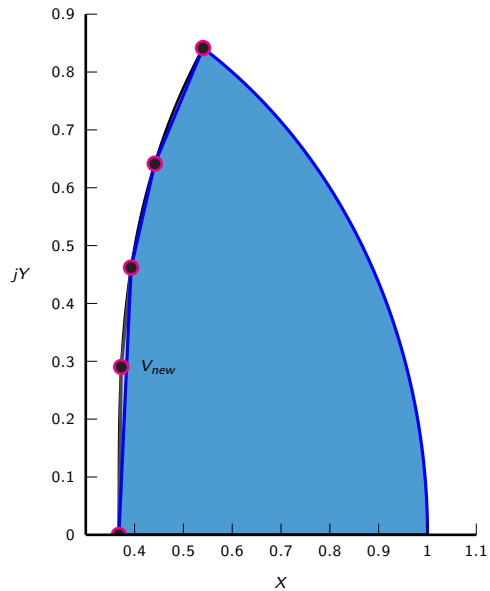
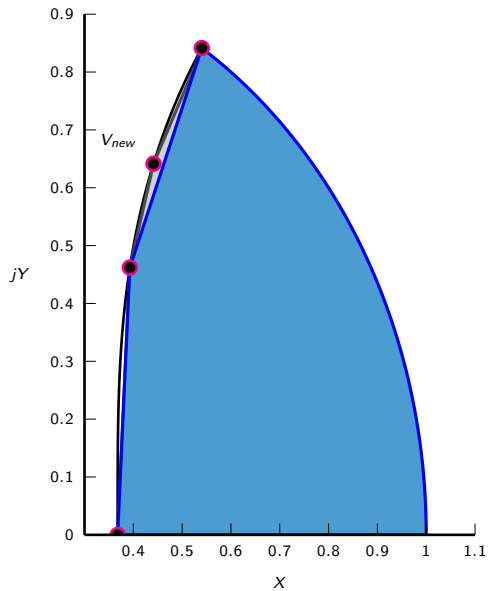
▷ Taxa de amortecimento

▷ Reta vertical

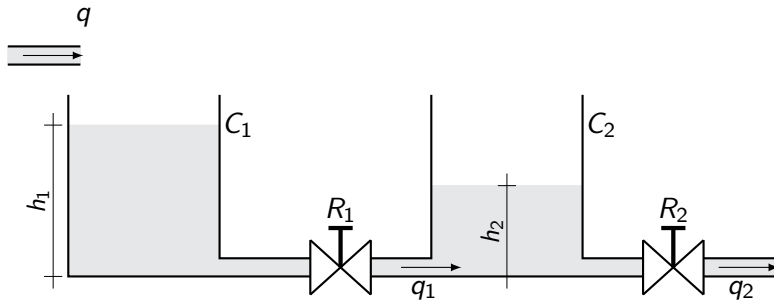
Aproximação poligonal da região ω_n -constante III

35: Verificar se o problema é factível
36: **fim enquanto**
37: $K \leftarrow ZP^{-1}$

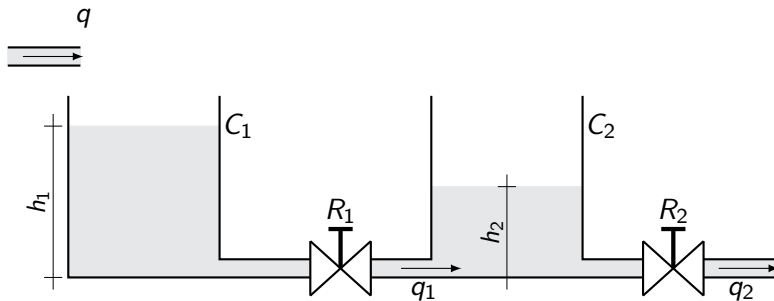




Problema-exemplo I



Problema-exemplo I



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -(R_1 C_{eq})^{-1} & (R_1 C_2)^{-1} \\ (R_2 C_2)^{-1} & -(R_2 C_2)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} (R_1 C_1)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (11a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (11b)$$

onde $C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.

Problema-exemplo II

► $C_1 = C_2 = 5;$

► $R_1 = R_2 = 1;$

► $T_s = 10 \text{ s}.$

Problema-exemplo II

- ▶ $C_1 = C_2 = 5$;
- ▶ $R_1 = R_2 = 1$;
- ▶ $T_s = 10$ s.

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} -0.4286 & -0.2857 \\ 0.2857 & -0.1429 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5714 \\ 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1426 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12b)$$

Problema-exemplo II

► $C_1 = C_2 = 5;$

► $R_1 = R_2 = 1;$

► $T_s = 10 \text{ s}.$

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} -0.4286 & -0.2857 \\ 0.2857 & -0.1429 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5714 \\ 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12a)$$

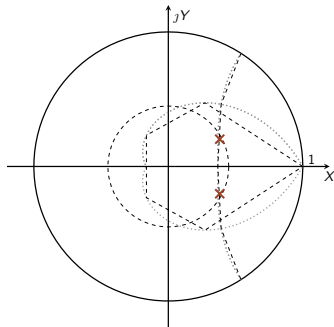
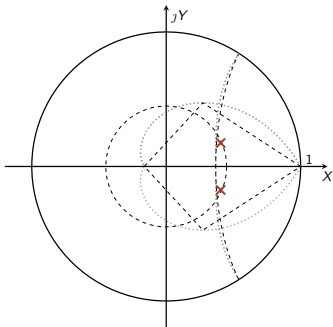
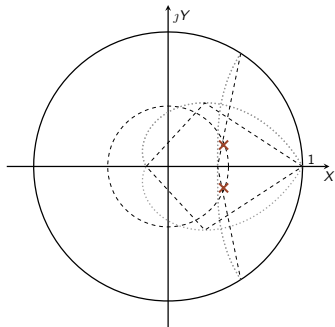
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1426 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12b)$$

► $t_s = 50 \text{ s};$

► $\zeta = 0.5 \implies M_P \leq 0.16$

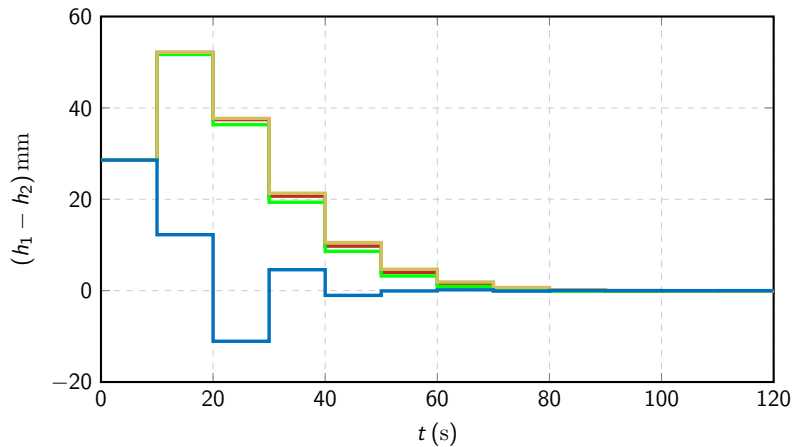
► $\omega_n = 0.1 \text{ rad/s}.$

Problema-exemplo III



Problema-exemplo IV

► $[K_c K_e K_p] = [2.4159 \quad -0.1554] [2.5358 \quad -0.1842] [2.4159 \quad -0.1554]$



Referências Bibliográficas e Bibliografia I

- ▶ M. Chilali and P. Gahinet.

H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach.

IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):358–367, 1996.

- ▶ Danica Rosinová and Ivan Holič.

LMI approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems.

In *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pages 497–502, 2014.

- ▶ Danica Rosinová and Mária Hypiusová.

LMI pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design.

Algorithms, 12(8), 2019.

Referências Bibliográficas e Bibliografia II

- ▶ Viviane Louzada Wisniewski, Victor Leonardo Yoshimura, Edvaldo Assunção, and Marcelo Minhoto Carvalho Teixeira.

Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations.

In 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), pages 655–659, 2017.

- ▶ V.L. Wisniewski, E.T. Maddalena, and R.B. Godoy.

Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter.

Control Engineering Practice, 91:104102, 2019.

- ▶ G. da S. Chiqueto.

Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em sistemas em tempo discreto.

Faculdade de Computação - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2021.

Referências Bibliográficas e Bibliografia III

- ▶ M Sami Fadali and Antonio Visioli.
Digital control engineering: analysis and design.
Academic Press, 2012.
- ▶ N.S. Nise.
Control Systems Engineering, Sixth.
John Wiley & Sons, Incorporated, 2011.
- ▶ K. Ogata.
Engenharia de controle moderno.
Pearson Prentice Hall, 2011.
- ▶ B.C. Kuo.
Digital Control Systems.
HRW series in electrical and computer engineering. Holt, Rinehart and Winston, 1980.

Referências Bibliográficas e Bibliografia IV

- ▶ MATLAB.

9.12.0.2009381 (R2022a) Update 4.

The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2022.

- ▶ J. Löfberg.

Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab.

In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.

- ▶ MOSEK ApS.

The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 10.0.25., 2022.