Alocação de Polos Em Regiões do Plano Complexo Para Sistemas Discretos via LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

22 de novembro de 2022

Introdução

Resumo

Este trabalho implementou em software algoritmos desenvolvidos nos últimos anos na Teoria de Controle que aproximam em LMI regiões do plano **z** que não são convexas. A partir de parâmetros de projetos informados, o algoritmo verifica a factibilidade da solução e, caso possível, retorna um compensador que estabiliza o sistema discretizado.

Introdução

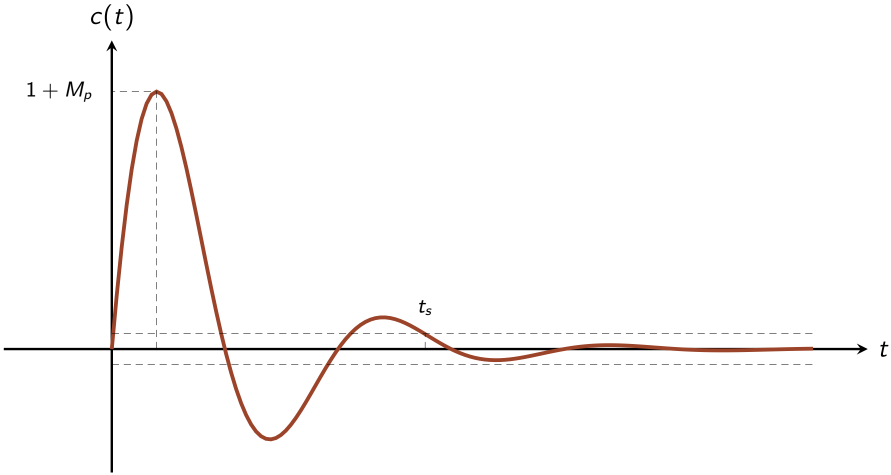
Resumo

Este trabalho implementou em software algoritmos desenvolvidos nos últimos anos na Teoria de Controle que aproximam em LMI regiões do plano **z** que não são convexas. A partir de parâmetros de projetos informados, o algoritmo verifica a factibilidade da solução e, caso possível, retorna um compensador que estabiliza o sistema discretizado.

Problema

- Algumas regiões do plano **z** não convexas;
- Logo, não podem ser representadas via LMIs;
- Alguns estudos apresentaram soluções para regiões específicas;
- Contudo, ainda não havia um algoritmo que engloba todas as soluções.

Resposta ao impulso de um sistema de segunda ordem



Representação de polos no plano $\mathbf{s}$

- Dado um par de polos conjugados, dado por:

$$\mathbf{s} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{1}$$

Representação de polos no plano $\mathbf{s}$

- Dado um par de polos conjugados, dado por:

$$\mathbf{s} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{1}$$

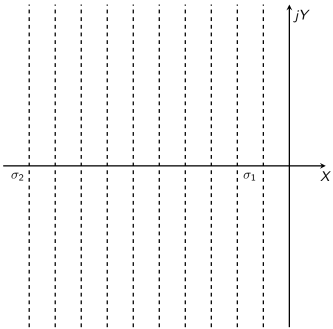
Definição

A regiões de polos de interesse são obtidas a partir da localização dos polos. Assim, (1) pode ser reescrita como:

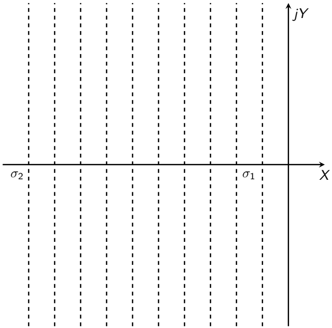
$$\mathbf{s}(\zeta, \omega_n) = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2}$$

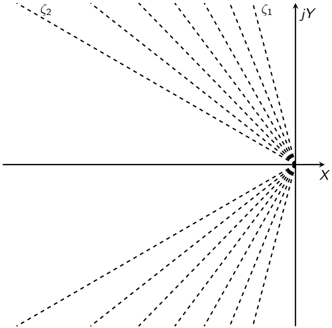
Fixando-se um valor para um parâmetro e variando o outro, as regiões de polos dos contínuos são definidas.

Regiões de polos do plano contínuo

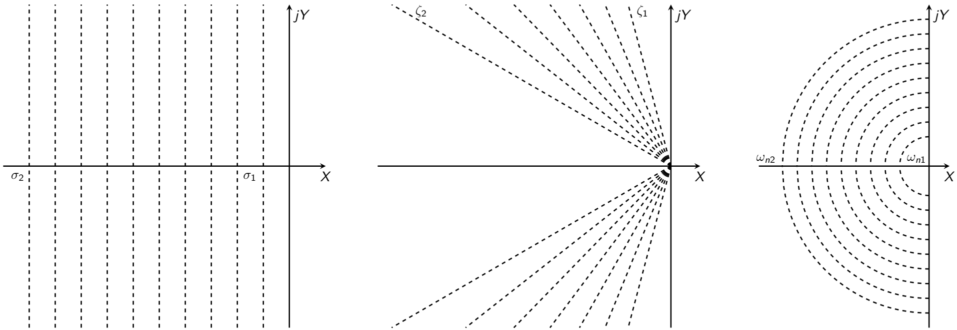


Regiões de polos do plano contínuo





Regiões de polos do plano contínuo



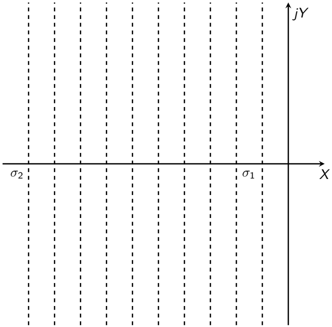
Relação entre os planos **s** e **z**

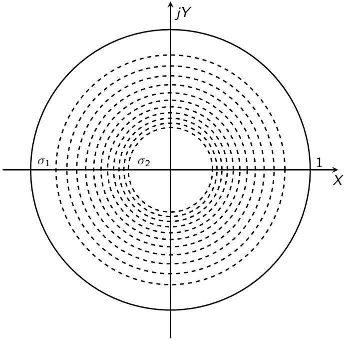
- A transformada que leva um ponto do plano **s** para o plano **z** é:
  - $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{s}\, T_s)$, onde:
  - **s** é polo no plano **s** e;
  - T_s o período de amostragem.

Relação entre os planos **s** e **z**

- A transformada que leva um ponto do plano **s** para o plano **z** é:
  - $\mathbf{z} = \exp\left(\mathbf{s}\, T_s\right)$, onde:
  - **s** é polo no plano **s** e;
  - T_s o período de amostragem.
- A região de estabilidade nos discretos é o interior de uma circunferência unitária, pois:
  - $\mathrm{Re}\left(\mathbf{s}\right) <= 0 \implies \mathbf{z} = \exp\left(-|\sigma|\, T_s\right)$.

Regiões de polos do plano discreto – σ-constante



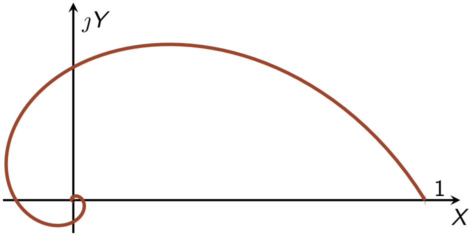


Regiões de polos do plano discreto – ζ-constante I

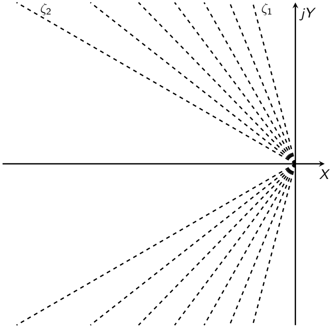
- $z(\zeta,\omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right);$
- O ponto máximo extremo possui ângulo igual à π;
- Assim, os valores dos pontos extremos são:

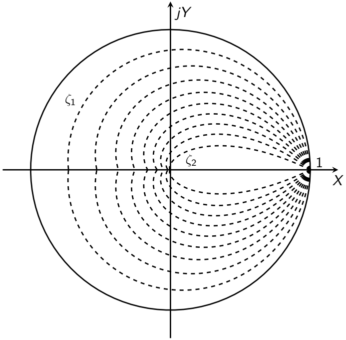
$$\omega_{nmin} = 0 \tag{3a}$$

$$\omega_{nmax} = \frac{\pi}{Ts\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3b}$$

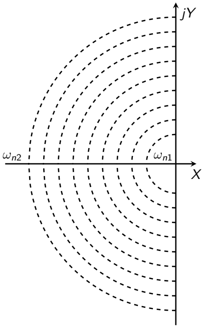


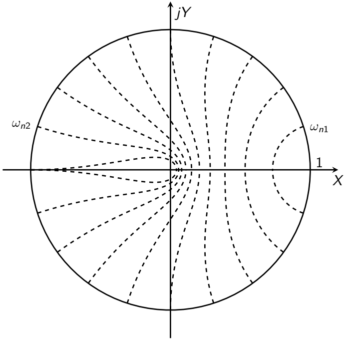
Regiões de polos do plano discreto – ζ-constante II





Regiões de polos do plano discreto – ω_n-constante





Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4}$$

Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,(\theta)(\mathcal{V}\,(AP) + \mathcal{V}\,(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos\,(\theta)(\bar{\mathcal{V}}\,(PA') + \bar{\mathcal{V}}\,(Z'B')) & \text{sen}\,(\theta)(\mathcal{V}\,(AP) + \mathcal{V}\,(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5}$$

Regiões LMI de interesse

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}(Z'B')) & \operatorname{sen}(\theta)(\mathcal{V}(AP) + \mathcal{V}(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}BZ) & * \\ \cos(\theta)(\bar{\mathcal{V}}(PA') + \bar{\mathcal{V}}Z'B') & \operatorname{sen}(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}(AP) - \mathcal{V}(BZ)) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6}$$

Regiões LMI de interesse

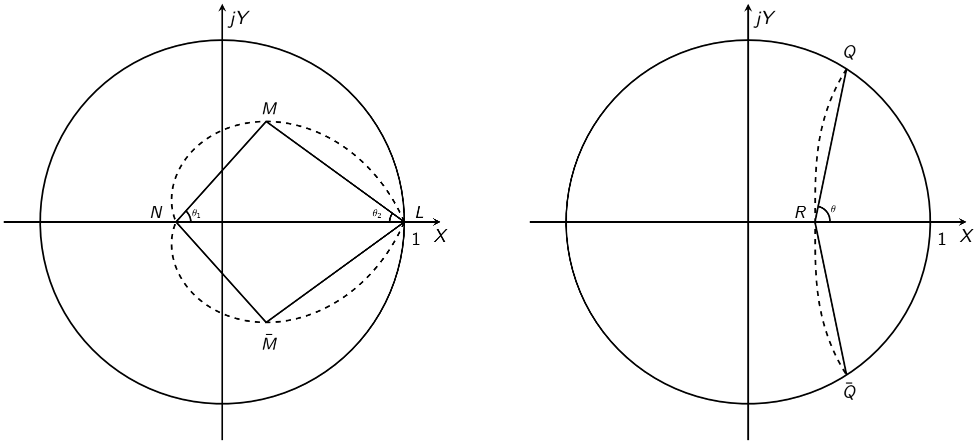
$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,(\theta)(\mathcal{V}\,(AP) + \mathcal{V}\,(BZ) - 2\alpha P) & * \\ \cos\,(\theta)(\bar{\mathcal{V}}\,(PA') + \bar{\mathcal{V}}\,(Z'B')) & \text{sen}\,(\theta)(\mathcal{V}\,(AP) + \mathcal{V}\,(BZ) - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}\,(AP) - \mathcal{V}\,BZ) & * \\ \cos\,(\theta)(\bar{\mathcal{V}}\,(PA') + \bar{\mathcal{V}}\,Z'B') & \text{sen}\,(\theta)(2\alpha P - \mathcal{V}\,(AP) - \mathcal{V}\,(BZ)) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6}$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2\alpha P \succ 0 \tag{7}$$

Aproximação cônica I



Aproximação cônica II

Entrada: σ, ζ, T_s
Saída: K

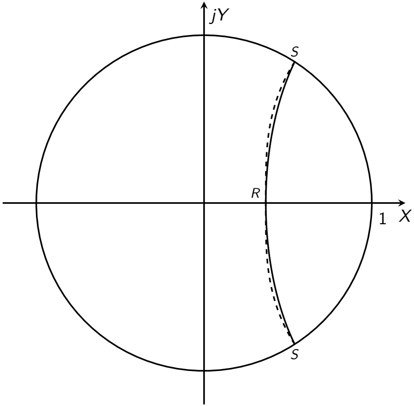
```
L ← z(ζ, ω_nmin)
N ← z(ζ, ω_nmax)
M ← z(ζ, ω_n), onde a área do triângulo formado é a maior possível
F ← P ≻ 0
F ← F ∩ (4) com r = exp(−|σ|T_s)                ▷ Taxa de amortecimento
F ← F ∩ (5) com α = L e θ = ang(M, N)            ▷ Setor cônico esquerdo
F ← F ∩ (6) com α = N e θ = ang(L, M)            ▷ Setor cônico direito
F ← F ∩ (7) com α = N                            ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
K ← ZP^{−1}
```

Aproximação cônica III

Entrada: σ, ω_n
Saída: K

1: $Q \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{min}, \omega_n)$
2: $R \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{max}, \omega_n)$
3: $F \leftarrow P \succ 0$
4: $F \leftarrow F \cap$ (4) com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
5: $F \leftarrow F \cap$ (6) com $\alpha = R$ e $\theta = \text{ang}(Q, R)$ ▷ Setor cônico direito
6: $F \leftarrow F \cap$ (7) com $\alpha = R$ ▷ Reta vertical
7: Verificar se o problema é factível
8: $K \leftarrow ZP^{-1}$

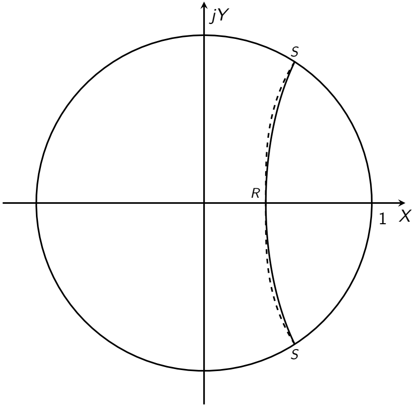
Aproximação elíptica I



$$\mathbb{E}: \frac{(x-1)^2}{\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)-1\right)^2\right) y^2}{\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)} = 1$$

Aproximação elíptica I



$$\mathbb{E} : \frac{(x-1)^2}{\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)-1\right)^2\right) y^2}{\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi}{N_y}\right)\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_y}\right)} = 1$$

$$N_y = \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_n T_s} \tag{8}$$

Aproximação elíptica II

$$\begin{bmatrix} -P & * \\ -\frac{1}{a}P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)AP + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)PA' & -P \end{bmatrix} \prec 0 \tag{9}$$

onde:

$$a = \left(1 - \exp\left(\frac{-2\pi}{N_y}\right)\right) \tag{10a}$$

$$b = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{Ny}\right) \tag{10b}$$

Aproximação elíptica III

Entrada: σ, T_s, N_y
Saída: K

1: $F \leftarrow P \succ 0$
2: $F \leftarrow F \cap$ (4), com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
3: $F \leftarrow$ (9), com $a =$ (10a) e $b =$ (10b) ▷ Elipse
4: Verificar se o problema é factível
5: $K \leftarrow ZP^{-1}$

Aproximação polígonal da região ζ-constante I

Entrada: σ, ζ, T_s
Saída: K

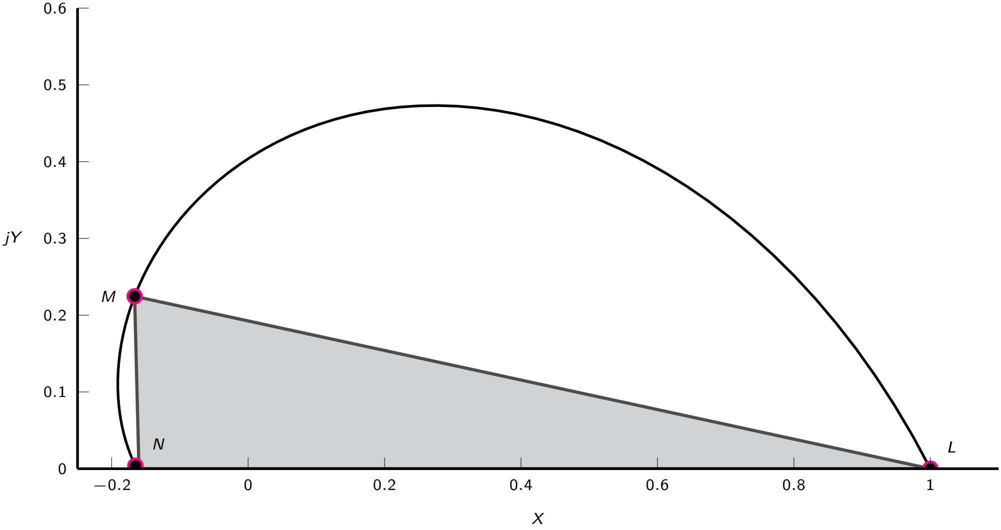
$I \leftarrow 0$
$L \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmin})$
$N \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_{nmax})$
$M \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, \omega_n)$ tal que $\mathrm{Re}\,(M) = N$
$pts1 \leftarrow [0\ \omega_{ne}]$
$pts2 \leftarrow pts1$
$vec1 \leftarrow [L\ M]$
$vec2 \leftarrow vec1$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (4) com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap$ (5), com $\alpha = L$ e $\theta = \mathrm{ang}(L, M)$ ▷ Voltado para a esquerda
$F \leftarrow F \cap$ (7), com $\alpha = N$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
enquanto Problema for infactível **faça**
    se $I <$ número de elementos em $vec1 - 1$ **então**
        $I \leftarrow I + 1$

Aproximação polígonal da região ζ-constante II

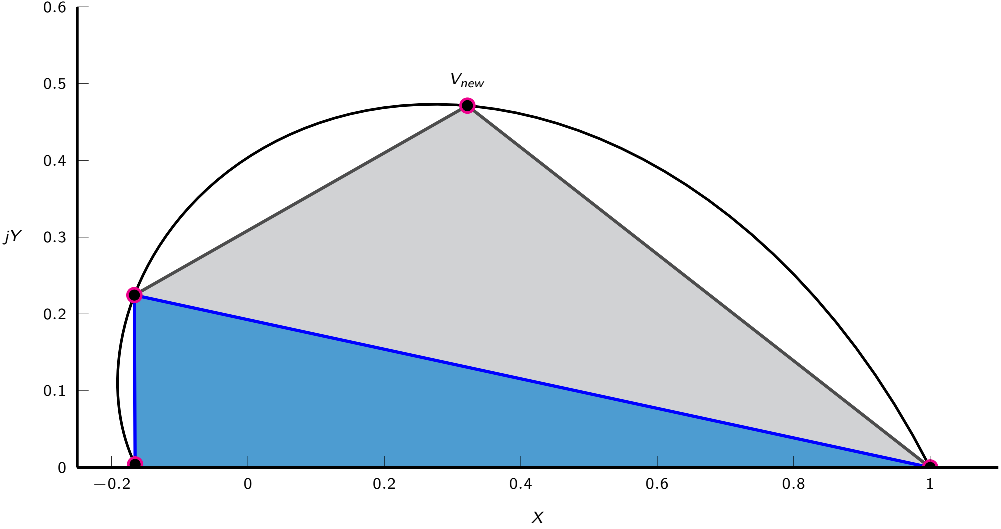
senão
  $l \leftarrow 1$
  $vec1 \leftarrow vec2$
  $pts1 \leftarrow pts2$
fim se
$F \leftarrow \emptyset$ ▷ Descarta as restrições anteriores
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (4) com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$pt_{new1} \leftarrow (pts1(l) + pts1(l+1))/2$
$V_{new1} \leftarrow \mathbf{z}(\zeta, pt_{new1})$
$pts2 \leftarrow [pts2\ pt_{new1}]$
Orderna de forma decrescente $pts2$
$vec2 \leftarrow [vec2\ V_{new1}]$
Orderna de forma decrescente $vec2$
$F \leftarrow F \cap$ (7), com $\alpha = N$ ▷ Reta vertical
para $m = 1$ até número de elementos de $vec1 - 1$ **faça**
  $u_1 \leftarrow \text{loc}(vec2(m), vec2(m+1))$
  se $u_1 < 0$ **então**

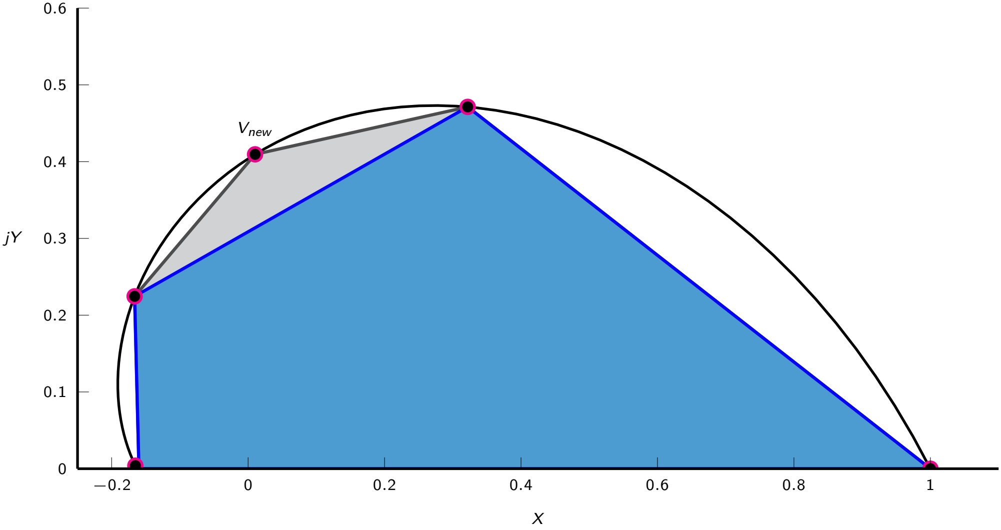
Aproximação polígonal da região ζ-constante III

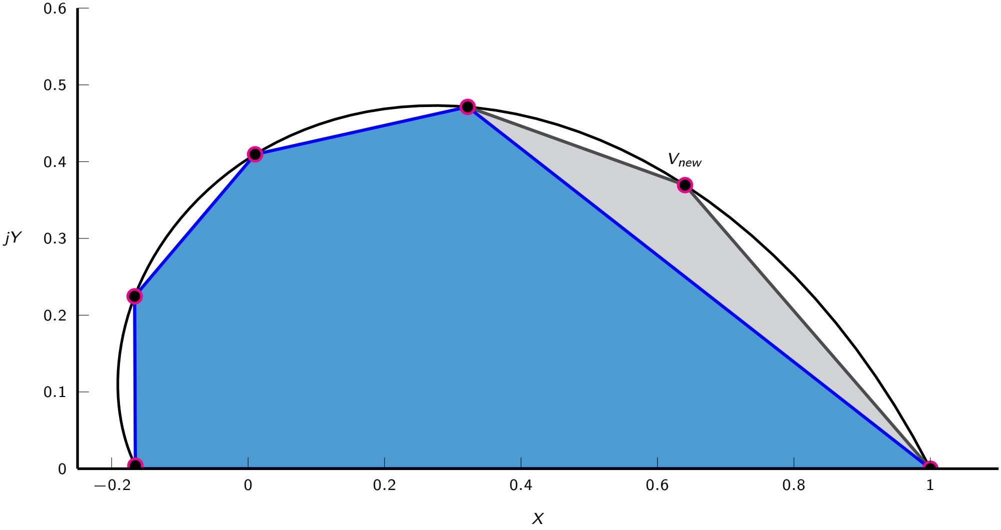
$F \leftarrow F \cap (6)$, com $\alpha = u_1$ e $\theta = \text{ang}(vec2(m+1), u_1)$ ▷ Voltado para a direita
senão
$F \leftarrow F \cap (5)$, com $\alpha = u_1$ e $\theta = \text{ang}(vec2(m+1), u_1)$ ▷ Voltado para a esquerda
fim se
fim para
Verificar se o problema é factível
fim enquanto
$K \leftarrow ZP^{-1}$



0.6
0.5
0.4
jY
0.3
M
0.2
0.1
N
L
0
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
jY
V_new
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X


V_{new}
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
jY
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X



0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
jY
V_{new}
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X

Aproximação polígonal da região ω_n-constante I

Entrada: σ, ω_n, T_s
Saída: K

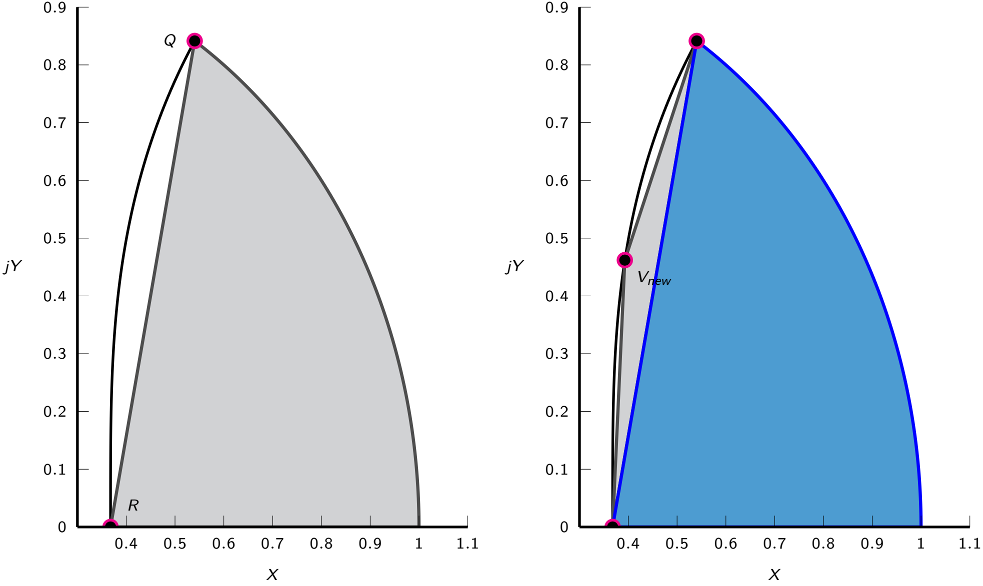
$I \leftarrow 0$
$Q \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{min}, \omega_n)$
$R \leftarrow \mathbf{z}(\zeta_{max}, \omega_n)$
$pts3 \leftarrow [\zeta_{min}\ \zeta_{max}]$
$pts4 \leftarrow pts3$
$vec3 \leftarrow [R\ Q]$
$vec4 \leftarrow vec3$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (4) com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap$ (6), com $\alpha = R$ e $\theta = \mathrm{ang}(Q, R)$ ▷ Voltado para a direita
$F \leftarrow F \cap$ (7), com $\alpha = R$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
enquanto Problema for infactível **faça**
    se $I <$ número de elementos em $vec3 - 1$ **então**
        $I \leftarrow I + 1$
    senão

Aproximação polígonal da região ω_n-constante II

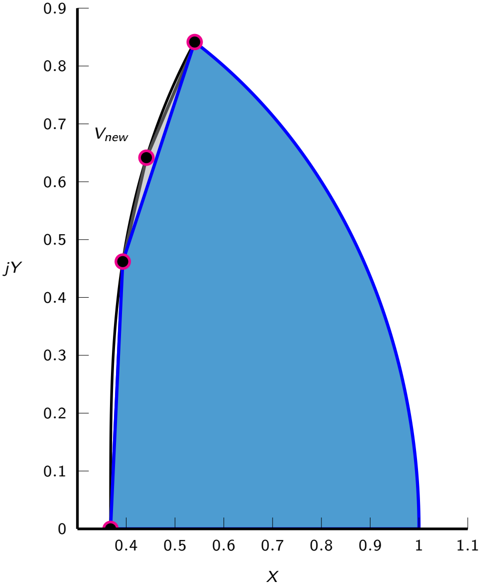
$l \leftarrow 1$
$vec3 \leftarrow vec4$
$pts1 \leftarrow pts2$
fim se
$F \leftarrow \emptyset$ ▷ Descarta as restrições anteriores
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (4) com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$pt_{new2} \leftarrow (pts3(l) + pts3(l+1))/2$
$V_{new2} \leftarrow \mathbf{z}(pt_{new2}, \omega_n)$
$pts4 \leftarrow [pts4 \ pt_{new2}]$
Orderna de forma decrescente $pts4$
$vec4 \leftarrow [vec4 \ \ V_{new2}]$
Orderna de forma decrescente $vec4$
$F \leftarrow F \cap$ (7), com $\alpha = N$ ▷ Reta vertical
para $m = 1$ até número de elementos de $vec3 - 1$ **faça**
$u_2 \leftarrow \mathrm{loc}(vec4(m), vec4(m+1))$
$F \leftarrow F \cap$ (6), com $\alpha = u_2$ e $\theta = \mathrm{ang}(vec4(m), u_2)$
fim para

Aproximação polígonal da região ω_n-constante III

    Verificar se o problema é factível
fim enquanto
$K \leftarrow ZP^{-1}$

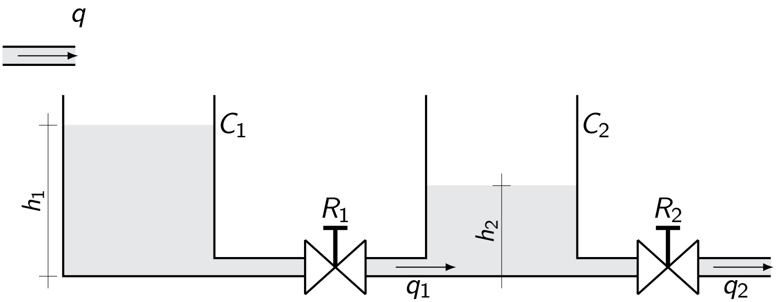


Q
R
jY
X
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
V_{new}

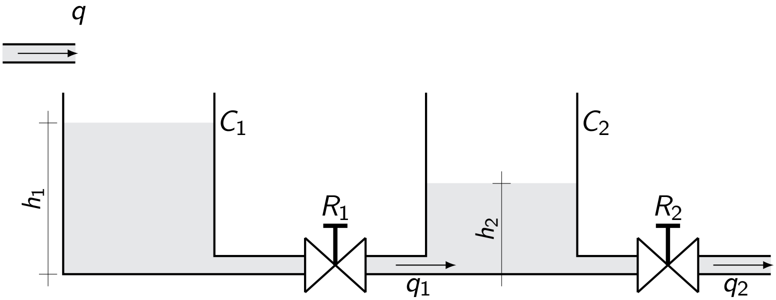


0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
jY
V_{new}
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
X
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
jY
V_{new}
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
X

Problema-exemplo I



Problema-exemplo I



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -(R_1 C_{eq})^{-1} & (R_1 C_2)^{-1} \\ (R_2 C_2)^{-1} & -(R_2 C_2)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} (R_1 C_1)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{11a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{11b}$$

onde $C_{eq} = C_1 C_2/(C_1 + C_2)$.

Problema-exemplo II

- $C_1 = C_2 = 5$;
- $R_1 = R_2 = 1$;
- $T_s = 10\,\mathrm{s}$.

Problema-exemplo II

- $C_1 = C_2 = 5$;
- $R_1 = R_2 = 1$;
- $T_s = 10\,\mathrm{s}$.

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} -0.4286 & -0.2857 \\ 0.2857 & -0.1429 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5714 \\ 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{12a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1426 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{12b}$$

Problema-exemplo II

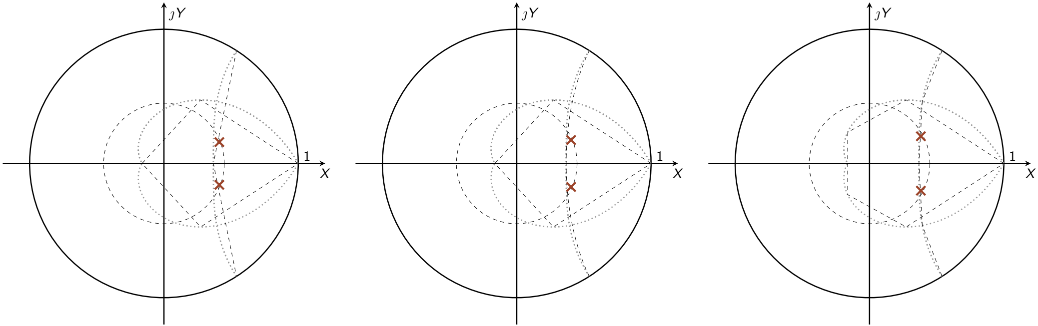
- $C_1 = C_2 = 5$;
- $R_1 = R_2 = 1$;
- $T_s = 10\,\mathrm{s}$.

$$\mathbf{x}^{+} = \begin{bmatrix} -0.4286 & -0.2857 \\ 0.2857 & -0.1429 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5714 \\ 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{12a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1426 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.2857 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{12b}$$

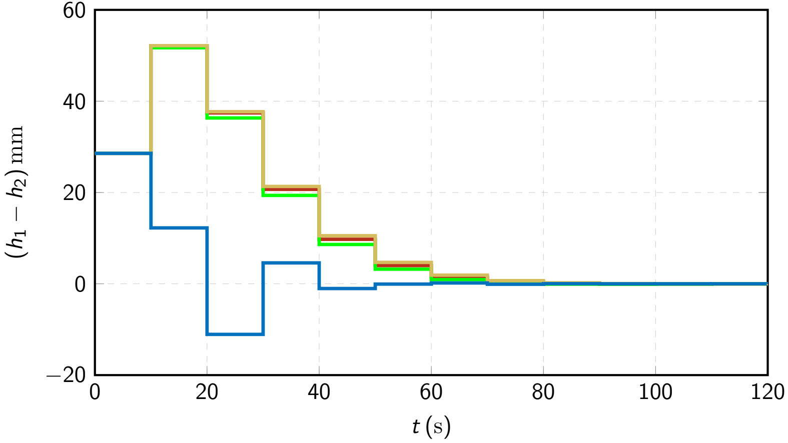
- $t_s = 50\,\mathrm{s}$;
- $\zeta = 0.5 \implies M_P \leq 0.16$
- $\omega_n = 0.1\,\mathrm{rad/s}$.

Problema-examplo III



Problema-exemplo IV

- $[K_c K_e K_p] = [2.4159 \quad -0.1554]\,[2.5358 \quad -0.1842]\,[2.4159 \quad -0.1554]$



Referências Bibliográficas e Bibliografia I

- M. Chilali and P. Gahinet.
  H/sub /spl infin// design with pole placement constraints: an lmi approach.
  IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):358–367, 1996.
- Danica Rosinová and Ivan Holič.
  Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems.
  In *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pages 497–502, 2014.
- Danica Rosinová and Mária Hypiusová.
  Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design.
  Algorithms, 12(8), 2019.

Referências Bibliográficas e Bibliografia II

- Viviane Louzada Wisniewski, Victor Leonardo Yoshimura, Edvaldo Assunção, and Marcelo Minhoto Carvalho Teixeira.
  Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations.
  In *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 655–659, 2017.

- V.L. Wisniewski, E.T. Maddalena, and R.B. Godoy.
  Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter.
  Control Engineering Practice, 91:104102, 2019.

- G. da S. Chiqueto.
  Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em ssistemas em tempo discreto.
  Faculdade de Computação - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2021.

Referências Bibliográficas e Bibliografia III

- M Sami Fadali and Antonio Visioli.
  Digital control engineering: analysis and design.
  Academic Press, 2012.
- N.S. Nise.
  Control Systems Engineering, Sixth.
  John Wiley & Sons, Incorporated, 2011.
- K. Ogata.
  Engenharia de controle moderno.
  Pearson Prentice Hall, 2011.
- B.C. Kuo.
  Digital Control Systems.
  HRW series in electrical and computer engineering. Holt, Rinehart and Winston, 1980.

Referências Bibliográficas e Bibliografia IV

- MATLAB.
  9.12.0.2009381 (R2022a) Update 4.
  The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2022.
- J. Löfberg.
  Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab.
  In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- MOSEK ApS.
  The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 10.0.25., 2022.