Alocação de Polos Em Regiões do Plano Complexo via LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

13 de outubro de 2022

1 Introdução

2 Região de Desempenho Garantido

$$s = -\zeta\omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.1}$$

$$z = \exp(sT_s) \tag{2.2}$$

$$z = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{2.3}$$

$$z(\zeta,\omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{2.4}$$

$$r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right) \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) & \dots \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.8}$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2aP \succ 0 \tag{2.9}$$

com $u = \omega_n T_s$

3 Algoritmo

O algoritmo desenvolvido neste trabalho é um compilado de algoritmos desenvolvidos em (1), (2) e (3), onde mapeiam regiões de interesse da Teoria de Controle que em alguns casos são não-convexas, em regiões aproximadamente convexas.

Em (1) e (3) foram desenvolvidos aproximações cônicas das regiões ζ-constante e ω_n-constante, respectivamente, via LMIS. Ainda, adaptando-se as ideias apresentadas em (4) e (5) para a aproximação elíptica das curvas ζ-constante, em (3) foi desenvolvido um algoritmo para aproximar a curva ω_n-constante utlizando a maior elipse dentro da curva. Finalmente, Em (2) e (3) foram desenvolvidos aproximações poligonares para as curvas ζ-constante e ω_n-constante, onde aproveitam melhor tais regiões.

Referente a este trabalho, foi desenvolvido um algoritmo que baseia-se de tais ideias para sintetizar um controlador a partir de valores de σ, ζ, ω_n e T_s fornecidos e determinar a factibilidade da solução encontrada.

3.1 Aproximação cônica

Para o mapeamento cônico das curvas ζ-constante e ω_n-constante, são utilizados setores cônicos determinados via (2.8) e (2.7), e retas verticais como apresentado em (1) e (3).

Para a primeira curva, a ideia consiste em calcular os pontos em que a espiral logarítmica cruza o eixo real, determinar o sobre o ramo o ponto entre os calculados anteriormente e partir destes, determinar as LMIs correspondentes. A figura

Algoritmo 1 Aproximação cônica da taxa de amortecimento

Entrada: ζ, T_s
Saída: K

$Z_o \leftarrow z(\zeta, 0)$

$Z_i \leftarrow z\left(\zeta, \dfrac{\pi}{T_s\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right)$

$Z \leftarrow z(\zeta, \omega_n)$, onde a área do triângulo formado é a maior possível

$F \leftarrow P \succ 0$

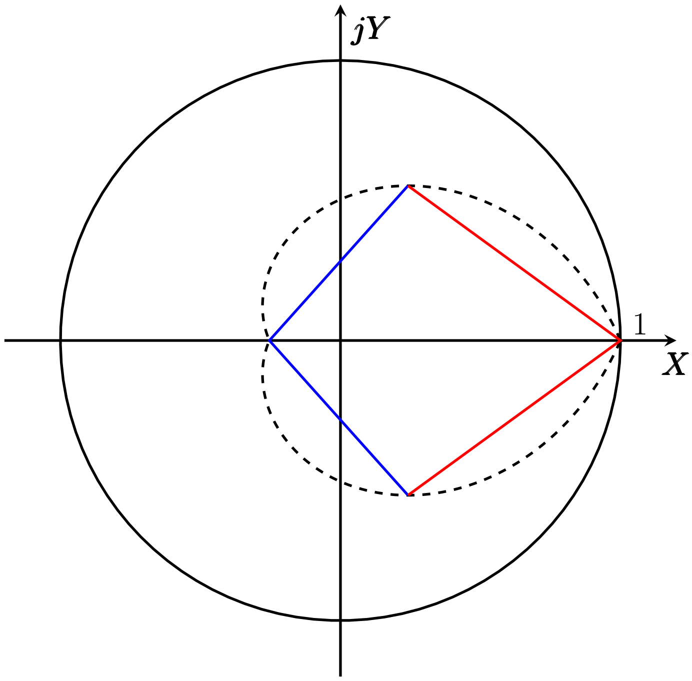
$F \leftarrow F \cap (2.7)$, com $a = Z_o$ e $\theta = ang(Z, Z_i)$ ▷ Setor cônico esquerdo

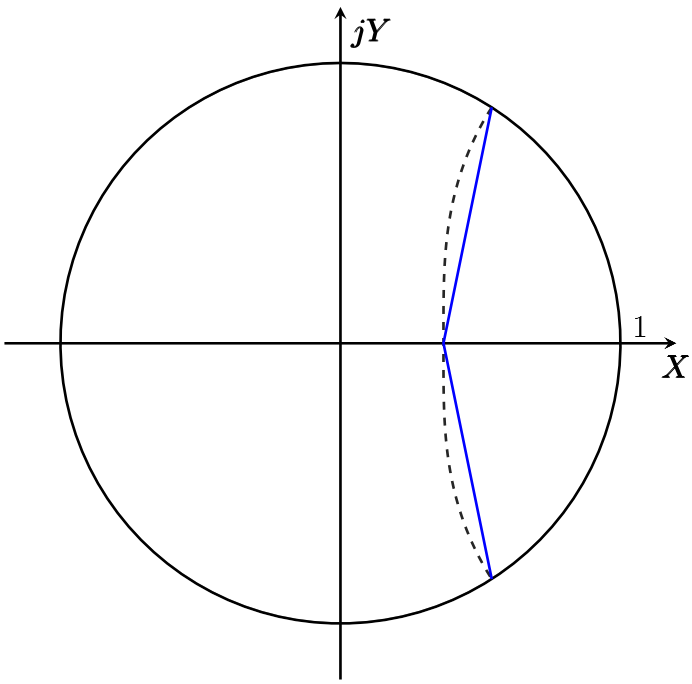
$F \leftarrow F \cap (2.8)$, com $a = Z_i$ e $\theta = ang(Z, Z_o)$ ▷ Setor cônico direito

$F \leftarrow F \cap (2.9)$, com $a = Z_i$ ▷ Reta vertical

Verificar se o problema é factível

$K \leftarrow ZP^{-1}$


jY
1
X


jY
1
X

Algoritmo 2 Aproximação cônica da curva N_y

Entrada: ω_n
Saída: K

$N_o \leftarrow z(0, \omega_n)$
$N_i \leftarrow z(1, \omega_n)$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow F \cap (2.8)$, com $a = N_i$ e $\theta = ang(N_i, N_o)$ ▷ Setor cônico direito
$F \leftarrow F \cap (2.9)$, com $a = N_i$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
$K \leftarrow ZP^{-1}$

4 Testes e Simulações

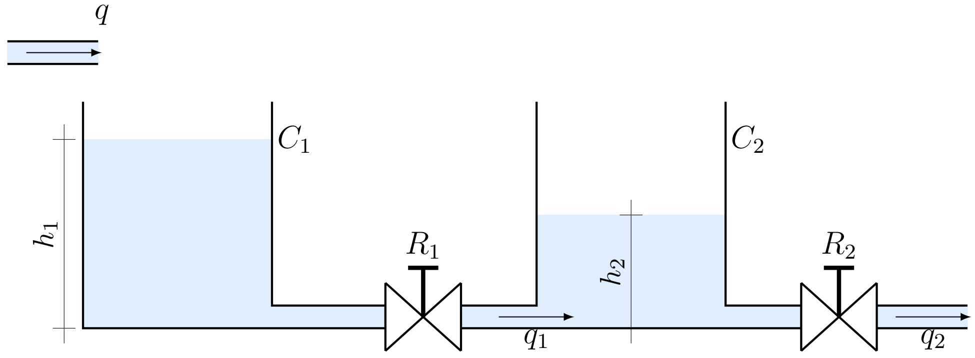


Figura 1 – Tanques comunicantes.

5 Conclusão

Referências

1 WISNIEWSKI, V. L. et al. Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations. In: *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 655–659.

2 WISNIEWSKI, V.; MADDALENA, E.; GODOY, R. Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter. *Control Engineering Practice*, v. 91, p. 104102, 2019. ISSN 0967-0661. Disponível em: ⟨https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066119301182⟩.

3 CHIQUETO, G. da S. Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em ssistemas em tempo discreto. 2021.

4 ROSINOVá, D.; HOLIč, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.

5 ROSINOVá, D.; HYPIUSOVá, M. Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, v. 12, n. 8, 2019. ISSN 1999-4893. Disponível em: ⟨https://www.mdpi.com/1999-4893/12/8/167⟩.