

ALOCAÇÃO DE POLOS EM REGIÕES DO PLANO COMPLEXO VIA LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

17 de outubro de 2022

1 Introdução

2 Região de Desempenho Garantido

A alocação de polos é uma das principais ferramentas da teoria de controle, pois a partir desta, é possível projetar um sistema que seja estável e que tenha um bom desempenho (1). A operação de alocar polos de um sistema linear dentro de uma região específica é chamada \mathcal{D} -estabilidade (2).

Entende-se por estável o sistema que, em termos de resposta a estímulos, possui uma convergência ao zero da resposta natural, restando apenas a resposta forçada (3). Assim, para um intervalo de tempo determinado, espera-se que o sistema apenas tenha dinâmica referente à entrada aplicada. Neste contexto, a estabilidade é o ponto de partida para projetos de compensadores.

Na \mathcal{D} -estabilidade, a região referente à estabilidade em sistema contínuos e invariantes no tempo é o semi-plano esquerdo do plano complexo. Dado um ponto genérico no plano s , representado por:

$$s = x + jy \quad (2.1)$$

estará na região estável somente se a parte real de tal ponto estiver à esquerda do eixo imaginário, ou em números:

$$\Re(s) < 0 \implies x < 0 \quad (2.2)$$

Assim, um sistema com n polos é dito estável se todos os seus polos estão localizados à esquerda do eixo imaginário. A partir deste conceito, é possível definir estabilidade relativa. Se um sistema é estável para um valor $\sigma < 0$, então aquele é dito estável relativo (ao valor de σ). A figura 1a mostra um esboço da região comentada. À medida que o valor de σ aumenta em valor absoluto, mais à esquerda a reta limitante se encontra e menor o plano estável relativo se torna.

Outros parâmetros de desempenho importantes para projetos de compensadores são o fator de amortecimento ζ e a frequência natural não-amortecida ω_n . São caracterizados pela resposta de sistemas de segunda ordem à função impulso (3)(4) e representam as oscilações não-amortecidas do modelo físico. Dado um polo representado como em (2.1), é possível reescrever tal equação em termos de tais parâmetros:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.3)$$

com $\sigma = -\zeta\omega_n$. As regiões de \mathcal{D} -estabilidade referente a tais parâmetros são obtidos fixando um deles em (2.3) e variando o outro em um certo intervalo. Por esse motivo, (2.3) pode ser entendido como uma função de duas variáveis, dado como:

$$s(\zeta, \omega_n) = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.4)$$

A partir disso, as regiões ζ -constante são obtidas fixando-se ζ e variando-se o valor de ω_n , e possuem as características observadas na figura 1b. Os ângulos formados entre as

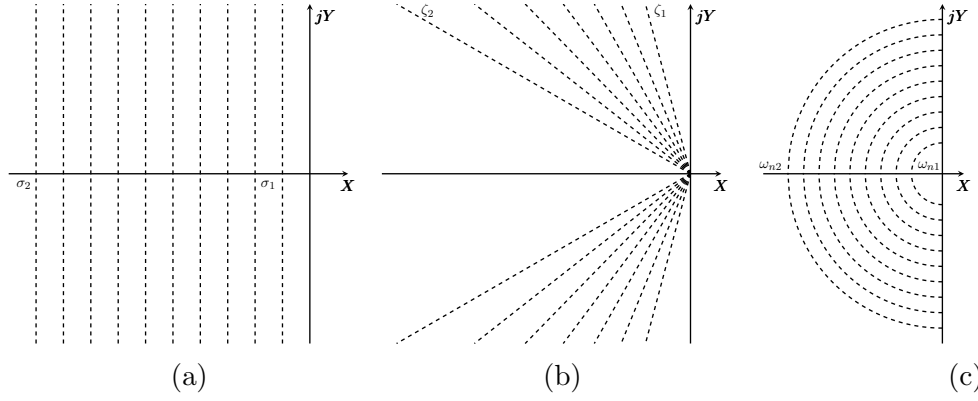


Figura 1 – Regiões de \mathcal{D} -estabilidade do plano s . Em (a) encontram-se retas verticais em vários valores de σ , sendo $|\sigma_2| > |\sigma_1|$. Em (b) encontram-se retas para vários valores de ζ , sendo $\zeta_2 > \zeta_1$. Em (c) encontram-se circunferências de raios $r = \omega_n$, sendo $\omega_{n2} > \omega_{n1}$.

retas e o eixo imaginário têm valores absolutos iguais à $\beta = -\cot(\arccos(\zeta))$ e diminuem a medida que o valor de ζ aumenta, tornando a região estreita.

Já as regiões ω_n -constante possuem as características esboçadas na figura 1c. Os raios das semicircunferências formadas possuem valores iguais à ω_n e aumentam ou diminuem à medida que varia tal parâmetro. Conforme abordado em (5), a intersecção de tais regiões formam a Região Ω de Desempenho garantido. Todos os polos dentro de tal região possuem um mínimo valor de σ , ζ e ω_n .

As regiões de \mathcal{D} -estabilidade para sistemas discretos seguem os mesmos métodos abordados nos contínuos, com a diferença de serem descritos no plano z . A transformada de um ponto do plano s para z é dado por:

$$z = \exp(sT_s) \quad (2.5)$$

onde T_s é o período de amostragem, parâmetro importante para sistemas discretos (ver detalhes em (6)). Substituindo (2.3) em (2.5), chega-se a seguinte relação:

$$z = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.6)$$

A σ -estabilidade nos contínuos foi encontrada verificando a parte real dos polos. Utilizando-se da mesma ideia, ao analisar apenas a parte real de (2.6), chega-se na seguinte relação:

$$r = \exp(-|\sigma|T_s) \quad (2.7)$$

onde $\sigma = -\zeta\omega_n$. Tal função descreve uma circunferência com raio $r = |\sigma|$. Recordando (2.14), quando $\sigma = 0$ em (2.7), a circunferência gerada possui raio unitário. Dessa maneira, o região estável nos sistemas contínuos é o interior de uma circunferência unitária. A figura 2a mostra esboços para vários valores de σ .

Como realizado nos sistemas contínuos, (2.6) pode ser enxergada em função de ζ e ω_n :

$$z(\zeta, \omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.8)$$

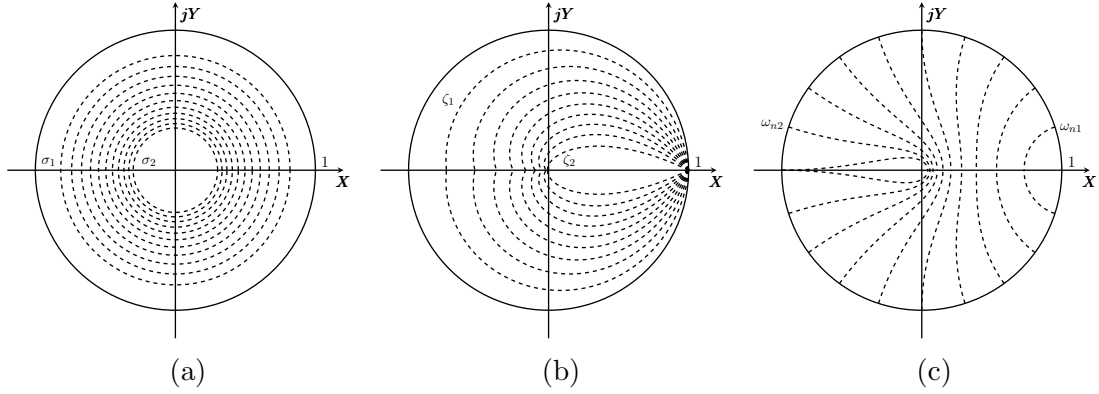


Figura 2 – Regiões de \mathcal{D} -estabilidade do plano z . Em (a) encontram-se circunferências com valores de raios crescentes, sendo $|\sigma_2| > |\sigma_1|$. Em (b) encontram regiões ζ -constantes com áreas decrescentes em relação à ζ , sendo $\zeta_2 > \zeta_1$. Em (c) encontram-se regiões semelhantes à cardioides que possuem áreas crescentes em relação à ω_n , sendo $\omega_2 > \omega_1$.

A respectiva região ζ -constante possui o formato apresentado na figura 2a. Devido ao exponencial, as curvas geradas são chamadas de espirais logarítmicas. Ambos os ramos começam a ser desenhadas a partir de $(1, 0)$, quando $\omega_n = 0$, e se deslocam da direita para a esquerda até cruzarem o eixo real primeira vez. À medida que o valor de ω_n aumenta, mais voltas o contorno dá. E a cada $n\pi$ voltas, o contorno cruza o eixo real pela n -ésima vez, conforme esboçado na figura 3. Como a espiral tende para dentro da região limitada pela primeira volta, somente a primeira volta é considerada no plano z .

O valor de ω_n no qual os ramos cruzam o eixo imaginário a cada $n\pi$ voltas é encontrado quando o argumento de (2.8) é igual à π , isto é:

$$\arg z(\zeta, \omega_{ne}) = \pi \implies \pm \omega_{ne} T_s \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi$$

$$\omega_{ne} = \frac{\pi}{T_s \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.9)$$

Assim, ambos os ramos cruzam o eixo imaginário pela primeira vez quando $\omega_n = \omega_{ne}$, para o respectivo valor dado de ζ . Ainda, outra característica que pode ser citada é a influência do ζ : quando maior seu valor, menor a região ζ -constante equivalente, assim como ocorre com seu dual nos contínuos.

Em relação às regiões ω_n -constante, como o estudo de alocação de polos se restringe a sistemas de segunda ordem subamortecidos (ver (3) e (4)), os valores possíveis para a taxa de amortecimento estão no intervalo $0 \leq \zeta \leq 1$. Dito isso, os ramos esboçados na figura 2c começam a ser desenhadas a partir da circunferência unitária e vão em direção ao ponto $(z(1, \omega_n), 0)$, calculado como:

$$z(1, \omega_n) = \exp \left(-\omega_n T_s \pm T_s \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (2.10)$$

A área de tal região aumenta com o valor de ω_n .

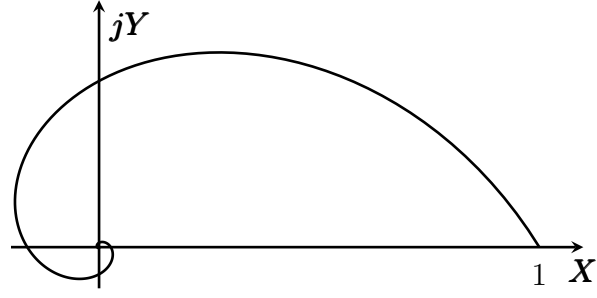


Figura 3 – Espiral logarítmica com 3 voltas gerada a partir de (2.8) com $\zeta = 0.5$ constante.

2.1 Regiões LMI

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) & \dots \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.13)$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2aP \succ 0 \quad (2.14)$$

com $u = \omega_n T_s$

3 Algoritmo

O algoritmo desenvolvido neste trabalho é um compilado de algoritmos desenvolvidos em (2), (7) e (8), onde mapeiam regiões de interesse da Teoria de Controle que em alguns casos são não-convexas, em regiões aproximadamente convexas.

Em (2) e (8) foram desenvolvidos aproximações cônicas das regiões ζ -constante e ω_n -constante, respectivamente, via LMIS. Ainda, adaptando-se as ideias apresentadas em (1) e (9) para a aproximação elíptica das curvas ζ -constante, em (8) foi desenvolvido um algoritmo para aproximar a curva ω_n -constante utilizando a maior elipse dentro da curva. Finalmente, Em (7) e (8) foram desenvolvidos aproximações poligonares para as curvas ζ -constante e ω_n -constante, onde aproveitam melhor tais regiões.

Referente a este trabalho, foi desenvolvido um algoritmo que baseia-se de tais ideias para sintetizar um controlador a partir de valores de σ , ζ , ω_n e T_s fornecidos e determinar a factibilidade da solução encontrada.

3.1 Aproximação cônica

Para o mapeamento cônico das curvas ζ -constante e ω_n -constante, são utilizados setores cônicos determinados via (2.13) e (2.12), e retas verticais como apresentado em (2) e (8).

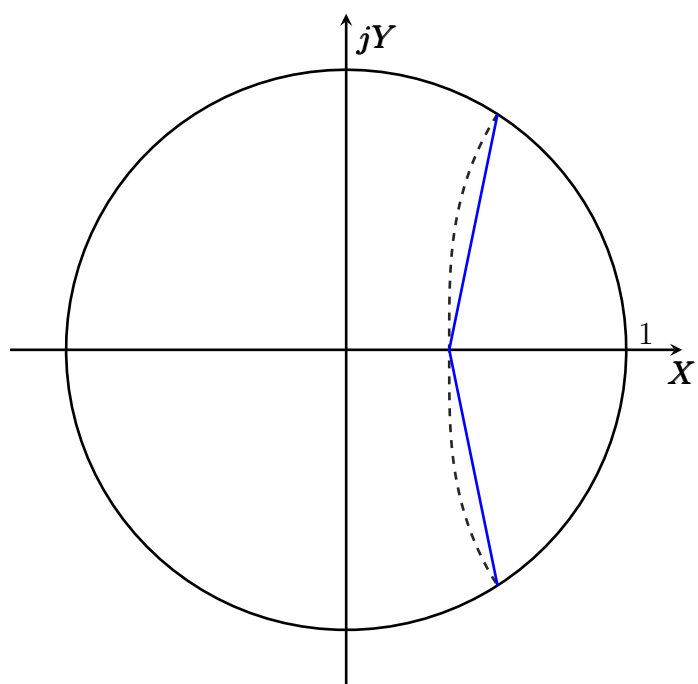
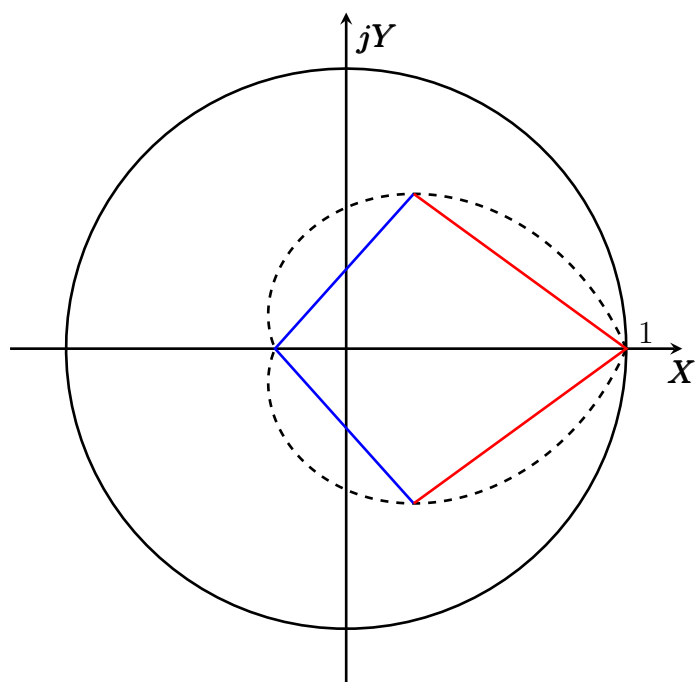
Para a primeira curva, a ideia consiste em calcular os pontos em que a espiral logarítmica cruza o eixo real, determinar o sobre o ramo o ponto entre os calculados anteriormente e partir destes, determinar as LMIs correspondentes. A figura

Algoritmo 1 Aproximação cônica da taxa de amortecimento

Entrada: ζ, T_s

Saída: K

- 1: $Z_o \leftarrow z(\zeta, 0)$
 - 2: $Z_i \leftarrow z\left(\zeta, \frac{\pi}{T_s \sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$
 - 3: $Z \leftarrow z(\zeta, \omega_n)$, onde a área do triângulo formado é a maior possível
 - 4: $F \leftarrow P \succ 0$
 - 5: $F \leftarrow F \cap (2.12)$, com $a = Z_o$ e $\theta = \text{ang}(Z, Z_i)$ ▷ Setor cônico esquerdo
 - 6: $F \leftarrow F \cap (2.13)$, com $a = Z_i$ e $\theta = \text{ang}(Z, Z_o)$ ▷ Setor cônico direito
 - 7: $F \leftarrow F \cap (2.14)$, com $a = Z_i$ ▷ Reta vertical
 - 8: Verificar se o problema é factível
 - 9: $K \leftarrow ZP^{-1}$
-



Algoritmo 2 Aproximação cônica da curva N_y

Entrada: ω_n

Saída: K

- 1: $N_o \leftarrow z(0, \omega_n)$
 - 2: $N_i \leftarrow z(1, \omega_n)$
 - 3: $F \leftarrow P \succ 0$
 - 4: $F \leftarrow F \cap (2.13)$, com $a = N_i$ e $\theta = \text{ang}(N_i, N_o)$ ▷ Setor cônico direito
 - 5: $F \leftarrow F \cap (2.14)$, com $a = N_i$ ▷ Reta vertical
 - 6: Verificar se o problema é factível
 - 7: $K \leftarrow ZP^{-1}$
-

4 Testes e Simulações

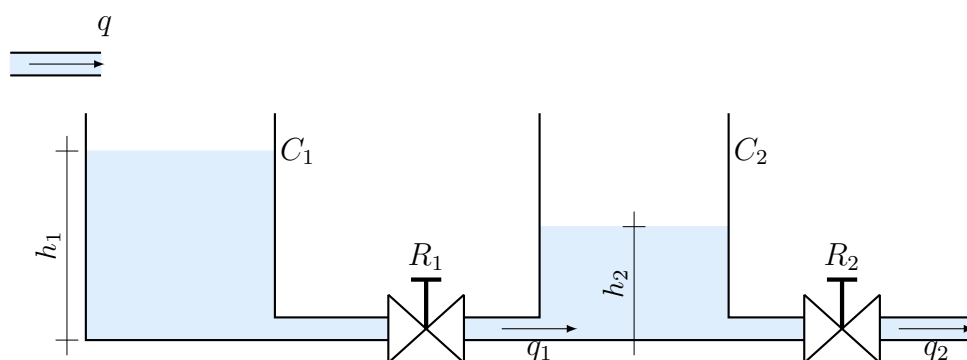


Figura 4 – Tanques comunicantes.

5 Conclusão

Referências

- 1 ROSINOVÁ, D.; HOLIČ, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.
- 2 WISNIEWSKI, V. L. et al. Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations. In: *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 655–659.
- 3 NISE, N. *Control Systems Engineering, Sixth*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2011. ISBN 9781118138168. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=34zmCQAAQBAJ>.
- 4 OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>.
- 5 CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- 6 KUO, B. *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, 1980. (HRW series in electrical and computer engineering). ISBN 9780030575686. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oNpSAAAAMAAJ>.
- 7 WISNIEWSKI, V.; MADDALENA, E.; GODOY, R. Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter. *Control Engineering Practice*, v. 91, p. 104102, 2019. ISSN 0967-0661. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066119301182>.
- 8 CHIQUETO, G. da S. Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em sistemas em tempo discreto. 2021.
- 9 ROSINOVÁ, D.; HYPIUSOVÁ, M. Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, v. 12, n. 8, 2019. ISSN 1999-4893. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1999-4893/12/8/167>.