

ALOCAÇÃO DE POLOS EM REGIÕES DO PLANO COMPLEXO VIA LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

14 de outubro de 2022

1 Introdução

2 Região de Desempenho Garantido

A alocação de polos é uma das principais ferramentas da teoria de controle, pois a partir desta, é possível projetar um sistema que seja estável e que tenha um bom desempenho (1). A operação de alocar polos de um sistema linear dentro de uma região específica é chamada \mathcal{D} -estabilidade (2).

Entende-se por estável o sistema que, em termos de resposta a estímulos, possui uma convergência ao zero da resposta natural, restando apenas a resposta forçada (3). Assim, para um intervalo de tempo determinado, espera-se que o sistema apenas tenha dinâmica referente à entrada aplicada. Neste contexto, a estabilidade é o ponto de partida para projetos de compensadores.

Na alocação de polos, a região referente à estabilidade em sistema contínuos e invariantes no tempo é o semi-plano esquerdo do plano complexo. Dado um ponto genérico no plano- s , representado por:

$$s = x + jy \quad (2.1)$$

estará na região estável somente se a parte real de tal ponto estiver à esquerda do eixo imaginário, ou em números:

$$\Re(s) < 0 \implies x < 0 \quad (2.2)$$

Assim, um sistema com n polos é dito estável se todos os seus polos estão localizados à esquerda do eixo imaginário. A partir deste conceito, é possível definir estabilidade relativa. Se um sistema é estável para um valor $\sigma < 0$, então é dito estável relativo (ao valor de σ).

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.3)$$

$$z = \exp(sT_s) \quad (2.4)$$

$$z = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.5)$$

$$z(\zeta, \omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \quad (2.6)$$

$$r = \exp(-|\sigma|T_s) \quad (2.7)$$

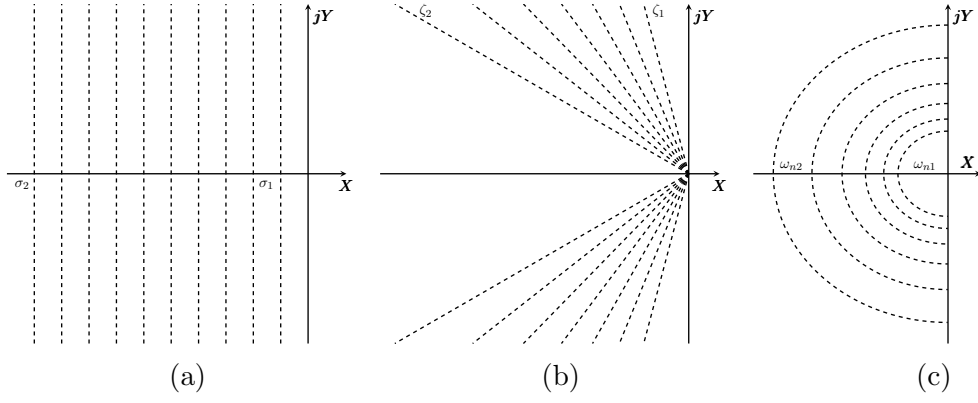


Figura 1

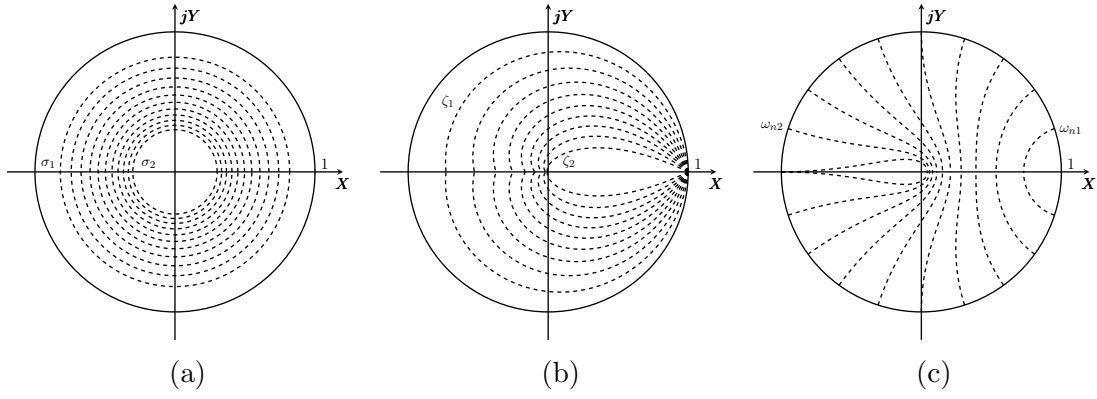


Figura 2

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) & \dots \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2aP) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(2aP - AP - BZ - PA' - Z'B') \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.10)$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2aP \succ 0 \quad (2.11)$$

com $u = \omega_n T_s$

3 Algoritmo

O algoritmo desenvolvido neste trabalho é um compilado de algoritmos desenvolvidos em (2), (4) e (5), onde mapeiam regiões de interesse da Teoria de Controle que em alguns casos são não-convexas, em regiões aproximadamente convexas.

Em (2) e (5) foram desenvolvidos aproximações cônicas das regiões ζ -constante e ω_n -constante, respectivamente, via LMIS. Ainda, adaptando-se as ideias apresentadas em (1) e (6) para a aproximação elíptica das curvas ζ -constante, em (5) foi desenvolvido um algoritmo para aproximar a curva ω_n -constante utilizando a maior elipse dentro da curva. Finalmente, Em (4) e (5) foram desenvolvidos aproximações poligonares para as curvas ζ -constante e ω_n -constante, onde aproveitam melhor tais regiões.

Referente a este trabalho, foi desenvolvido um algoritmo que baseia-se de tais ideias para sintetizar um controlador a partir de valores de σ , ζ , ω_n e T_s fornecidos e determinar a factibilidade da solução encontrada.

3.1 Aproximação cônica

Para o mapeamento cônico das curvas ζ -constante e ω_n -constante, são utilizados setores cônicos determinados via (2.10) e (2.9), e retas verticais como apresentado em (2) e (5).

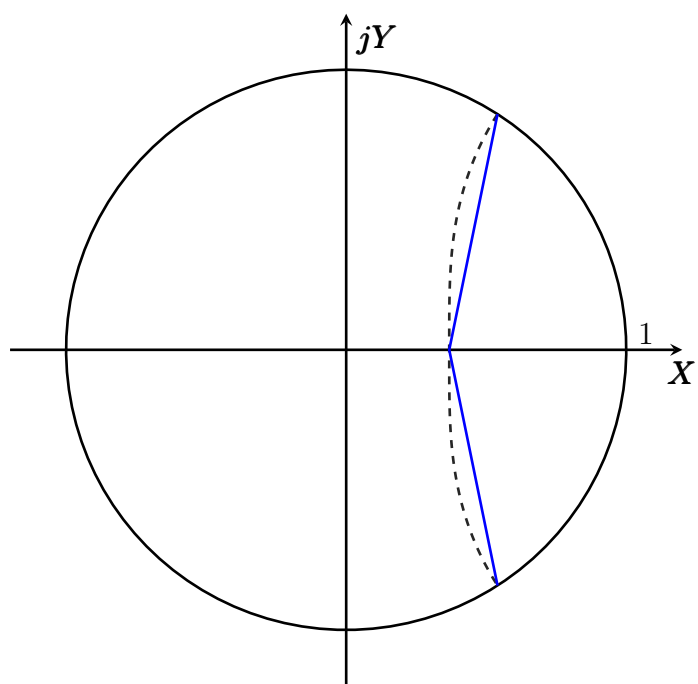
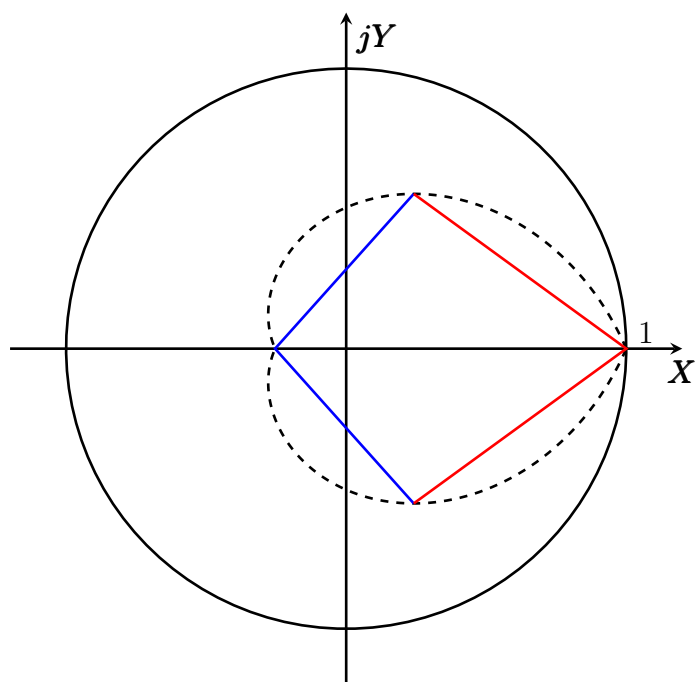
Para a primeira curva, a ideia consiste em calcular os pontos em que a espiral logarítmica cruza o eixo real, determinar o sobre o ramo o ponto entre os calculados anteriormente e partir destes, determinar as LMIs correspondentes. A figura

Algoritmo 1 Aproximação cônica da taxa de amortecimento

Entrada: ζ, T_s

Saída: K

- 1: $Z_o \leftarrow z(\zeta, 0)$
 - 2: $Z_i \leftarrow z\left(\zeta, \frac{\pi}{T_s \sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$
 - 3: $Z \leftarrow z(\zeta, \omega_n)$, onde a área do triângulo formado é a maior possível
 - 4: $F \leftarrow P \succ 0$
 - 5: $F \leftarrow F \cap (2.9)$, com $a = Z_o$ e $\theta = \text{ang}(Z, Z_i)$ ▷ Setor cônico esquerdo
 - 6: $F \leftarrow F \cap (2.10)$, com $a = Z_i$ e $\theta = \text{ang}(Z, Z_o)$ ▷ Setor cônico direito
 - 7: $F \leftarrow F \cap (2.11)$, com $a = Z_i$ ▷ Reta vertical
 - 8: Verificar se o problema é factível
 - 9: $K \leftarrow ZP^{-1}$
-



Algoritmo 2 Aproximação cônica da curva N_y

Entrada: ω_n

Saída: K

- 1: $N_o \leftarrow z(0, \omega_n)$
 - 2: $N_i \leftarrow z(1, \omega_n)$
 - 3: $F \leftarrow P \succ 0$
 - 4: $F \leftarrow F \cap (2.10)$, com $a = N_i$ e $\theta = \text{ang}(N_i, N_o)$ ▷ Setor cônico direito
 - 5: $F \leftarrow F \cap (2.11)$, com $a = N_i$ ▷ Reta vertical
 - 6: Verificar se o problema é factível
 - 7: $K \leftarrow ZP^{-1}$
-

4 Testes e Simulações

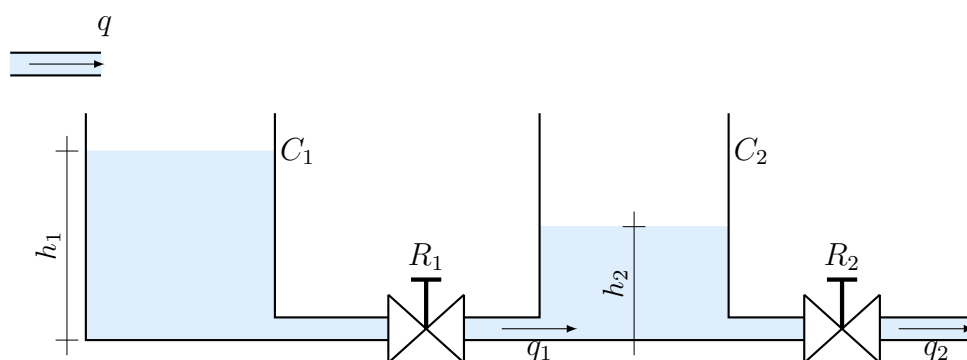


Figura 3 – Tanques comunicantes.

5 Conclusão

Referências

- 1 ROSINOVÁ, D.; HOLIČ, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.
- 2 WISNIEWSKI, V. L. et al. Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations. In: *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 655–659.
- 3 NISE, N. *Control Systems Engineering, Sixth*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2011. ISBN 9781118138168. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=34zmCQAAQBAJ>.
- 4 WISNIEWSKI, V.; MADDALENA, E.; GODOY, R. Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter. *Control Engineering Practice*, v. 91, p. 104102, 2019. ISSN 0967-0661. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066119301182>.
- 5 CHIQUETO, G. da S. Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em sistemas em tempo discreto. 2021.
- 6 ROSINOVÁ, D.; HYPIUSOVÁ, M. Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, v. 12, n. 8, 2019. ISSN 1999-4893. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1999-4893/12/8/167>.