Alocação de Polos Em Regiões do Plano Complexo Para Sistemas Discretos via LMIs

Alexandre Nascimento, Jr.

23 de outubro de 2022

Sumário

1 Introdução

2 Região de Desempenho Garantido

A alocação de polos é uma das principais ferramentas da teoria de controle, pois a partir desta, é possível projetar um sistema que seja estável e que tenha um bom desempenho Rosinová e Holič (2014). A operação de alocar polos de um sistema linear dentro de uma região específica é chamada $\mathscr{D}$-estabilidade Wisniewski et al. (2017).

Entende-se por estável o sistema que, em termos de resposta a estímulos, possui uma convergência ao zero da resposta natural, restando apenas a reposta forçada (NISE, 2011). Assim, para um intervalo de tempo determinado, espera-se que o sistema apenas tenha dinâmica referente à entrada aplicada. Neste contexto, a estabilidade é o ponto de partida para projetos de compensadores.

2.1 Regiões de polos para sistemas contínuos

Na $\mathscr{D}$-estabilidade, a região referente à estabilidade em sistema contínuos e invariantes no tempo é o semi-plano esquerdo do plano complexo. Dado um ponto genérico no plano s, representado por:

$$s = x + jy \tag{2.1}$$

este estará na região estável somente se a parte real de tal ponto estiver à esquerda do eixo imaginário, ou em números:

$$\Re(s) < 0 \implies x < 0 \tag{2.2}$$

Assim, um sistema com n polos é dito estável se todos os seus polos estão localizados à esquerda do eixo imaginário. A partir deste conceito, é possível definir estabilidade relativa. Se um sistema é estável para um valor $\sigma < 0$, então aquele é dito estável relativo (ao valor de σ).

A figura 1a mostra um esboço da região comentada. À medida que o valor de σ aumenta em valor absoluto, mais a esquerda a reta limitante se encontra e menor o plano estável relativo se torna. Além disso, as equações de tais retas podem ser generalizadas via:

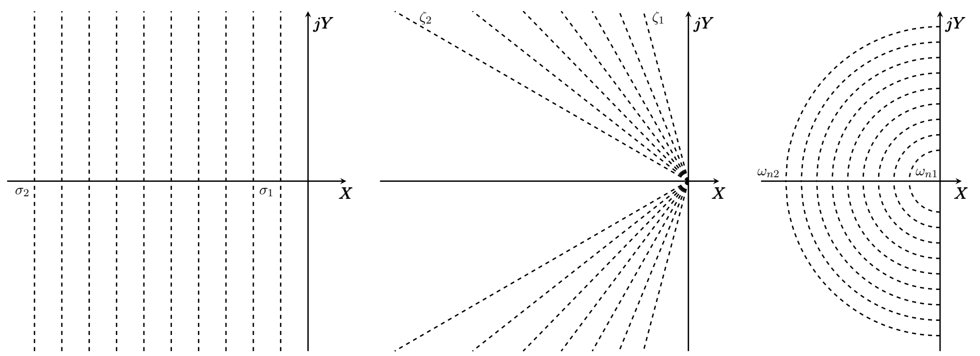
$$x = -|\sigma| \tag{2.3}$$

Outros parâmetros de desempenho importantes para projetos de compensadores são o fator de amortecimento ζ e a frequência natural não-amortecida ω_n. São caracterizados pela resposta de sistemas de segunda ordem à função degrau (NISE, 2011)(OGATA, 2011) e representam as oscilações não-amortecidas do modelo físico. Dado um par de polos conjugados via (2.1), é possível reescrevê-los em termos daqueles parâmetros:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.4}$$

com $\sigma = -\zeta\omega_n$. As regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade referente a tais parâmetros são obtidos fixando um deles em (2.4) e variando o outro em um certo intervalo. Por esse motivo, (2.4) pode ser entendido como uma função de duas varáveis, dado como:

$$s(\zeta, \omega_n) = -\zeta\omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.5}$$



(a) (b) (c)

Figura 1 – Regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade do plano s. Em (a) encontram-se retas verticais em vários valores de σ, sendo $|\sigma_2| > |\sigma_1|$. Em (b) encontram-se retas para vários valores de ζ, sendo $\zeta_2 > \zeta_1$. Em (c) encontram-se circunferências de raios $r = \omega_n$, sendo $\omega_{n2} > \omega_{n1}$.

Com isso, é possível analisar as regiões geradas a partir de tais parâmentros. A região ζ-constante é obtida fixando-se um valor para ζ e variando-se o valor de ω_n. As características obtidas são representadas na figura 1b. Os ângulos formados entre as retas e o eixo imaginário têm valores absolutos $\beta = -cot(\arccos(\zeta))$ e diminuem à medida que o valor de ζ aumenta, tornando a região estreita.

Já as regiões ω_n-constante possuem as características esboçadas na figura 1c. Os raios das semicircunferências formadas possuem valores iguais à ω_n e aumentam ou diminuem à medida que se varia tal parâmetro. Conforme abordado em (CHILALI; GAHINET, 1996), a intersecção das regiões comentadas formam a Região Ω de Desempenho garantido. Todos os polos dentro de tal região possuem um mínimo valor de σ, ζ e ω_n.

2.2 Regiões de polos para sistemas discretos

As regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade para sistemas discretos são obtidas seguindo os mesmos métodos abordados nos contínuos, com a diferença de serem descritos no plano z. A transformada de um ponto do plano s para z é dada por:

$$z = \exp(sT_s) \tag{2.6}$$

onde T_s é o período de amostragem, parâmetro importante para sistemas discretos (KUO, 1980). Substituindo (2.4) em (2.6), chega-se a seguinte relação:

$$z = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{2.7}$$

A σ-estabilidade nos contínuos foi encontrada verificando a parte real dos polos. Utilizando-se da mesma ideia, ao analisar apenas a parte real de (2.7) (igualando a parte imaginária igual a zero), chega-se na seguinte relação:

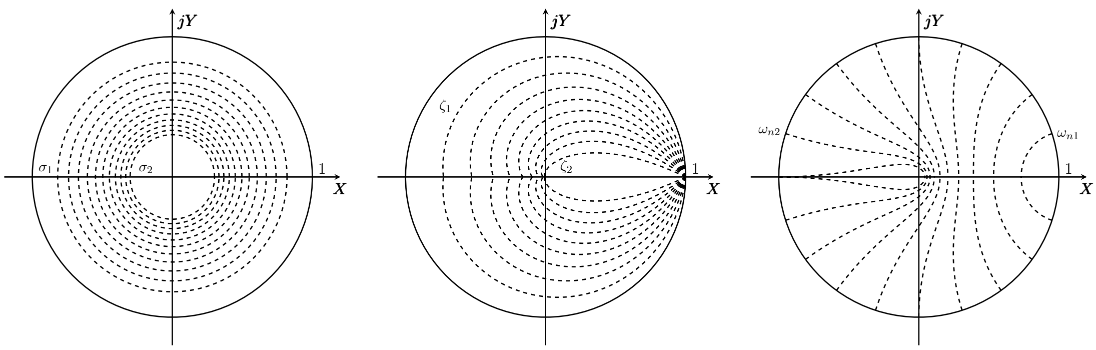
$$z = \exp\left(-|\sigma|T_s\right) \tag{2.8}$$

onde $\sigma = -\zeta\omega_n$. Tal função descreve uma circunferência com raio $r = |\sigma|$ no plano complexo. Recordando (2.2) e (2.3), quando $\sigma = 0$ em (2.8), a circunferência gerada possui raio unitário. Dessa maneira, o região estável nos sistemas discretos é o interior de uma circunferência unitária. A figura 2a mostra esboços para vários valores de σ.

Como realizado nos sistemas contínuos, (2.7) pode ser enxergada em função de ζ e ω_n:

$$z(\zeta, \omega_n) = \exp\left(-\zeta\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{2.9}$$

e a partir desta, é possível descrever as regiões geradas a partir de tais parâmentros. A região ζ-constante possui o formato aprensentado na figura 2a. Devido ao exponencial, as curvas geradas assemelham-se a cardioides, mas não o são, pois denominam-se espirais logarítmicas.



(a) (b) (c)

Figura 2 – Regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade do plano z. Em (a) encontram-se circunferências com valores de raios crescentes, sendo $|\sigma_2| > |\sigma_1|$. Em (b) encontram regiões ζ-constantes com áreas decrescentes em relação à ζ, sendo $\zeta_2 > \zeta_1$. Em (c) encontram-se regiões semelhantes à cardioides que possuem áreas crescentes em relação à ω_n, sendo $\omega_2 > \omega_1$.

Ambos os ramos começam a ser desenhadas a partir de $(1, 0)$ (quando $\omega_n = 0 = \omega_{nmin}$), e se deslocam da direita para a esquerda até cruzarem o eixo real primeira vez. À medida que o valor de ω_n aumenta, mais voltas o contorno dá. E a cada $n\pi$ voltas, o contorno cruza o eixo real pela n-ésima vez, conforme esboçado na figura 3. Como a espiral tende

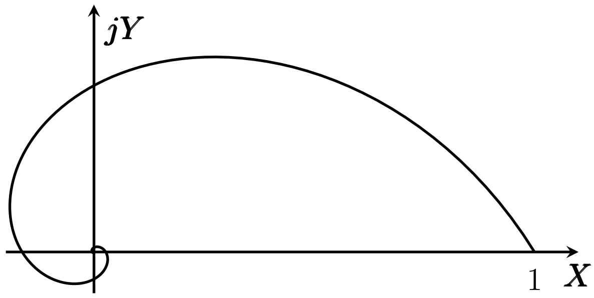


Figura 3 – Espiral logarítmica com 3 voltas gerada a partir de (2.9) com $\zeta = 0.5$ constante.

para dentro da região limitada pela primeira volta, somente a primeira volta é considerada no plano z.

O valor de ω_n no qual os ramos cruzam o eixo imaginário a cada $n\pi$ voltas é encontrado quando o argumento de (2.9) é igual à π (meia volta da espiral, em radianos), isto é:

$$\begin{aligned} \arg z(\zeta, \omega_{nmax}) = \pi \implies \omega_{nmax} T_s \sqrt{1-\zeta^2} = \pi \implies \\ \omega_{nmax} = \frac{\pi}{T_s\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, ambos os ramos cruzam o eixo imaginário pela primeira vez quando $\omega_n = \omega_{nmax}$, para o respectivo valor fixado de ζ. Ainda, outra característica que pode ser citada é a influência do ζ na região: quanto maior seu valor, menor a área da região ζ-constante equivalente, assim como ocorre com seu dual nos contínuos.

Em relação às regiões ω_n-constante, como o estudo de alocação de polos se restringe a sistemas se segunda ordem subamortecidos (NISE, 2011) (OGATA, 2011), os valores possíveis para a taxa de amortercimento está no intervalo $0 < \zeta < 1$. Dito isso, os ramos esboçados na figura 2c começam a ser desenhadas a partir da circunferência unitária (quando $\zeta = 0$) e vão em direção ao ponto $(z(1, \omega_n), 0)$. Tais pontos extremos possuem as seguintes relações:

$$z(\zeta_{min} = 0, \omega_n) = \exp\left(\pm \omega_n T_s\right) \tag{2.11a}$$

$$z(\zeta_{max} = 1, \omega_n) = \exp\left(-\omega_n T_s \pm j\omega_n\right) \tag{2.11b}$$

Com tais pontos extremos, é possível aproximar as regiões do plano z utilizando Desigualdes Matriciais Lineares (LMIs, em inglês). Esse estudo será abordado na subseção a seguir.

2.3 Aproximação das regiões do plano z via LMIs

Em estudos anteriores, foram abordadas técnicas utilizando LMIs para mapear as regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade no plano s. Tal feito foi realizado devido à convexidade de tais regiões, requisito para o uso de LMIs. Conforme visto na subseção 2.2, as regiões

ζ-constante e ω_n-constante no plano z podem possuir características não-convexas, o que impossibilita o mapeamento exato via LMIs.

Estudos foram desenvolvidos para contornar a não-convexidade de algumas regiões do plano z, aproximando-os em regiões convexas. Em 2014, no artigo (ROSINOVá; HOLIč, 2014), a autora mapeou a região ζ-constante utilizando a maior elipse ou circunferência inscrita possível. Mas foi em (ROSINOVá; HYPIUSOVá, 2019) que foi desenvolvido um algoritmo que traz várias aproximações utilizando elipses, para aproveitar da melhor forma a área daquela região.

Já em (WISNIEWSKI et al., 2017) foi abordada uma aproximação cônica, utilzando-se apenas de quatro pontos e, consequentemente, dois setores cônicos. Apesar de simples, a ideia poderia facilmente ser estendida para n pontos, o que foi feito em (WISNIEWSKI; MADDALENA; GODOY, 2019). Ao aumentar a área a cada iteração, o algoritmo verifica a solução proposta.

E finalmente, utilizando-se das ideias anteriores, (CHIQUETO, 2021) trouxe aproximações cônica, elíptica e poligonal da região ω_n-constante.

2.4 Condição de Liapunov

$$\begin{bmatrix} -rP & * \\ PA + Z'B & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.12}$$

com $r = \exp(-|\sigma|T_s)$.

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2\alpha P) & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(AP + BZ + PA' + Z'B - 2\alpha P) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.13}$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(2\alpha P - AP - BZ - PA' - Z'B') & * \\ \cos(\theta)(PA' + Z'B' - AP - BZ) & \sin(\theta)(2\alpha P - AP - BZ - PA' - Z'B') \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.14}$$

$$AP + BZ + Z'B' + PA' - 2\alpha P \succ 0 \tag{2.15}$$

$$N_y = \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_n T_s} \tag{2.16}$$

$$a = \left(1 - exp\left(\frac{-2\pi}{N_y}\right)\right) \tag{2.17}$$

$$b = a\sin\left(\frac{2\pi}{Ny}\right) \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix} -P & * \\ -\frac{1}{a}P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)AP + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)PA' & -P \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.19}$$

3 Algoritmo

O algoritmo apresentado neste trabalho é um compilado de algoritmos desenvolvidos anteriormente, utilizando-se das aproximações cônica, elíptica e poligonal das regiões de $\mathscr{D}$-estabilidade do plano z. O objetivo deste trabalho é desenvolver em *software* tais algoritmos e, ao informar parâmetros de projeto, determinar se é possível implementar um compensador que respeite os requisitos.

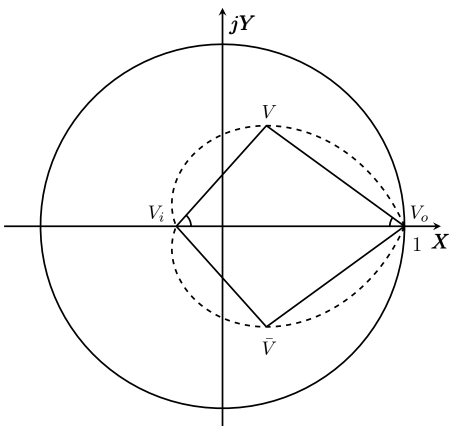
Para tal, o algoritmo pode ser divido em três partes, uma para cada aproximação, sendo a aproximação desejada escolhida via chamada da função. O *software* utilizado foi o MATLAB, juntamente com o interpretador de LMIs YALMIP em conjunto com o solucionador númerico MOSEK.

Notação: $loc(v_1, v_2)$ determina o ponto que a reta que passa por v_1 e v_2. $ang(v_1, v_2)$ cruza o eixo real. $ang(v_1, v_2)$ refere-se ao ângulo entre aquela reta e o eixo real.

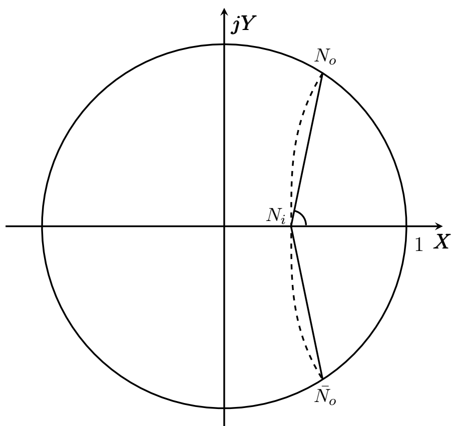
3.1 Aproximação cônica

Para o mapeamento cônico das curvas ζ-constante e ω_n-constante, são utilizados os setores cônicos determinados via (2.14) e (2.13), e retas verticais como apresentado em 2.15.

Para a primeira curva, a ideia consiste em utilizar os pontos extremos calculados na seção 2.2, onde serão os centros dos setores cônicos. Os ângulos, medidos no sentido anti-horário, são determinados a partir de um terceiro ponto, conforme a figura 4a. A escolha do ponto Z é feita de maneira que a área do triângulo $\widehat{Z_o Z Z_i}$ seja a maior possível. Um algoritmo linear foi usado para encontrar este ponto.



(a)



(b)

Figura 4

Algoritmo 1 Aproximação cônica da taxa de amortecimento

Entrada: σ, ζ, T_s
Saída: K

$Z_o \leftarrow z(\zeta, \omega_{nmin})$
$Z_i \leftarrow z\,(\zeta, \omega_{nmax})$
$Z \leftarrow z(\zeta, \omega_n)$, onde a área do triângulo formado é a maior possível
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow F \cap (2.12)$ com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap (2.13)$ com $\alpha = Z_o$ e $\theta = ang(Z, Z_i)$ ▷ Setor cônico esquerdo
$F \leftarrow F \cap (2.14)$ com $\alpha = Z_i$ e $\theta = ang(Z, Z_o)$ ▷ Setor cônico direito
$F \leftarrow F \cap (2.15)$ com $\alpha = Z_i$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
$K \leftarrow ZP^{-1}$

Com tais informações determinadas, é possível aplicar o algoritmo 1. Um setor cônico voltado para a direita, com centro em Z_i e ângulo θ_1, e outro voltado para a esquerda, com centro em Z_o e ângulo θ_2, são aplicados. Além disso, para limitar a simetria do setor cônico com centro em Z_i, uma reta que passa por este ponto é aplicada.

A região de $\mathscr{D}$-estabilidade resultante é a intersecção de tais regiões. Ao ser unida com a restrição da taxa de decaimento, o setor cônico com centro em Z_o é limitado por esta região. Após resolvido o problema, o algoritmo determina a factibilidade da solução encontrada e retorna a matrix K de estabiliza o sistema com os parâmetros de projeto informados.

Em relação à largura de banda, a mesma ideia é aplicada (CHIQUETO, 2021). Contudo, neste caso, somente um setor cônico com centro em N_i limitado pela direita por uma reta que passa neste ponto são usados. Os pontos N_o e N_i são determinados via (2.11a) e (2.11b), respectivamente. Além disso, o ângulo θ é determinado através de $ang(N_o, N_i)$.

Algoritmo 2 Aproximação cônica da curva N_y

Entrada: σ, ω_n
Saída: K

$N_o \leftarrow z(\zeta_{min}, \omega_n)$
$N_i \leftarrow z(\zeta_{max}, \omega_n)$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow F \cap (2.12)$ com $r = \exp\left(-|\sigma| T_s\right)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap (2.14)$ com $\alpha = N_i$ e $\theta = ang(N_i, N_o)$ ▷ Setor cônico direito
$F \leftarrow F \cap (2.15)$ com $\alpha = N_i$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
$K \leftarrow ZP^{-1}$

Com tais informações determinadas, é possível utilizar o algoritmo 2. Um detalhe que é facilmente observado é a rápida perda de convexidade da curva N_y. Logo, caso a constante N_y seja menor que 4.86 (CHIQUETO, 2021), o algoritmo retorna um alerta devido a falta de convexidade. Assim, para fins práticos, a pouca e a falta convexidade de tais curvas não foram tratadas.

3.2 Aproximação elíptica

Para a aproximação elíptica, apenas a região ω_n-constante foi aproximada. A ideia consiste em encontrar a maior elipse inscrita, a fim de aproveitar melhor área. Para tal, é preciso verificar se o valor escolhido para ω_n e T_s resultem em uma área convexa (CHIQUETO, 2021). Caso os parâmetros informados atendam à restricções, o algoritmo

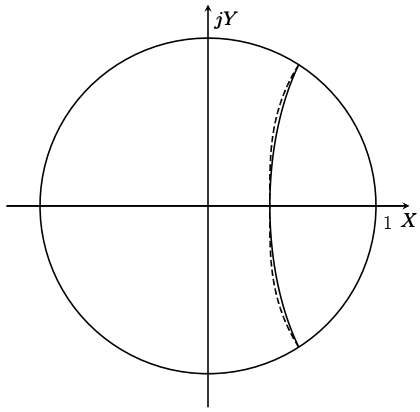


Figura 5

Algoritmo 3 Aproximação elíptica da curva N_y

Entrada: σ, T_s, N_y
Saída: K
1: $F \leftarrow P \succ 0$
2: $F \leftarrow F \cap (2.12)$, com $r = \exp(-|\sigma|T_s)$ ▷ Taxa de amortecimento
3: $F \leftarrow (2.19)$, com $a = (2.17)$ e $b = (2.18)$
4: Verificar se o problema é factível
5: $K \leftarrow ZP^{-1}$

3.3 Aproximação poligonal

A aproximação poligonal consiste na ideia de aproximar as regiões de interesse em um polígono com o maior número de lados possíveis. Para isto, o algoritmo irá partir de uma aproximação cônica simples. A partir daí, entre os dois pontos usados para definir o setor, um ponto intermediário é calculado e dois novos setores cônicos são definidos. Sob a ótica do número de lados, a cada iteração, um novo lado é acrescentado e, consequentemente, a área é incrementada. Em um número grande de iterações, a região aproximada tende a área total.

Em relação à região ζ-constante, um setor cônico voltado para esquerda e centro em Z_o é usado como aproximação inicial. Contudo, devido à cúspide daquela, uma reta em Z_i é usada para eliminar tal convexidade. Dito isso, surge a necessidade de calcular o ponto entre os pontos extremos, onde possui a mesma parte real que Z_i, conforme a figura:

Para a região ω_n-constante, a ideia é similar.

Algoritmo 4 Aproximação poligonal da região ζ-constante

Entrada: σ, ζ, T_s
Saída: K

$l \leftarrow 0$
$V_o \leftarrow z(\zeta, \omega_{nmin}, T_s)$
$V_i \leftarrow z(\zeta, \omega_{nmax}, T_s)$
$V \leftarrow z(\zeta, \omega_n, T_s)$, tal que $\Re(V) = V_i$
$pontos1 \leftarrow [0\ \omega_{ne}]$
$pontos2 \leftarrow pontos1$
$vec1 \leftarrow [V_o\ V]$
$vec2 \leftarrow vec1$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (2.12) com $r = \exp(-|\sigma|T_s)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap$ (2.13), com $\alpha = V_o$ e $\theta = ang(V_o, V)$ ▷ Voltado para a esquerda
$F \leftarrow F \cap$ (2.15), com $\alpha = V_i$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
enquanto Problema for infactível **faça**
  se $l <$ número de elementos em $vec1 - 1$ **então**
    $l \leftarrow l + 1$
  senão
    $l \leftarrow 1$
    $vec1 \leftarrow vec2$
    $pontos1 \leftarrow pontos2$
  fim se
  $F \leftarrow \emptyset$ ▷ Descarta as restrições anteriores
  $F \leftarrow P \succ 0$
  $F \leftarrow$ (2.12) com $r = \exp(-|\sigma|T_s)$ ▷ Taxa de amortecimento
  $ponto_{new1} \leftarrow (pontos1(l) + pontos1(l+1))/2$
  $V_{new1} \leftarrow z(\zeta, ponto_{new1}, T_s)$
  $pontos2 \leftarrow [pontos2\ ponto_{new1}]$
  Orderna de forma decrescente $pontos2$
  $vec2 \leftarrow [vec2\ V_{new1}]$
  Orderna de forma decrescente $vec2$
  $F \leftarrow F \cap$ (2.15), com $\alpha = V_i$ ▷ Reta vertical
  para $m = 1$ até número de elementos de $vec1 - 1$ **faça**
    $u \leftarrow loc(vec2(m), vec2(m+1))$
    se $u < 0$ **então**
      $F \leftarrow F \cap$ (2.14), com $\alpha = u$ e $\theta = ang(vec2(m+1), u)$ ▷ Voltado para a direita
    senão
      $F \leftarrow F \cap$ (2.13), com $\alpha = u$ e $\theta = ang(vec2(m+1), u)$ ▷ Voltado para a esquerda
    fim se
  fim para
  Verificar se o problema é factível
fim enquanto
$K \leftarrow ZP^{-1}$

Algoritmo 5 Aproximação poligonal da região ω_n-constante

Entrada: σ, ω_n, T_s
Saída: K

$l \leftarrow 0$
$N_o \leftarrow z(\zeta_{min}, \omega_n, T_s)$
$N_i \leftarrow z(\zeta_{max}, \omega_n, T_s)$
$pontos3 \leftarrow [0\ 1]$
$pontos4 \leftarrow pontos3$
$vec3 \leftarrow [N_i\ N_o]$
$vec4 \leftarrow vec3$
$F \leftarrow P \succ 0$
$F \leftarrow$ (2.12) com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$ ▷ Taxa de amortecimento
$F \leftarrow F \cap$ (2.14), com $\alpha = N_i$ e $\theta = ang(N_o, N_i)$ ▷ Voltado para a direita
$F \leftarrow F \cap$ (2.15), com $\alpha = N_i$ ▷ Reta vertical
Verificar se o problema é factível
enquanto Problema for infactível **faça**
  se $l <$ número de elementos em $vec3 - 1$ **então**
    $l \leftarrow l + 1$
  senão
    $l \leftarrow 1$
    $vec3 \leftarrow vec4$
    $pontos1 \leftarrow pontos2$
  fim se
  $F \leftarrow \emptyset$ ▷ Descarta as restrições anteriores
  $F \leftarrow P \succ 0$
  $F \leftarrow$ (2.12) com $r = \exp(-|\sigma| T_s)$ ▷ Taxa de amortecimento
  $ponto_{new} \leftarrow (pontos3(l) + pontos3(l+1))/2$
  $V_{new2} \leftarrow z(ponto_{new2}, \omega_n, T_s)$
  $pontos4 \leftarrow [pontos4\ ponto_{new2}]$
  Orderna de forma decrescente $pontos4$
  $vec4 \leftarrow [vec4\ V_{new2}]$
  Orderna de forma decrescente $vec4$
  $F \leftarrow F \cap$ (2.15), com $\alpha = V_i$ ▷ Reta vertical
  para $m = 1$ até número de elementos de $vec3 - 1$ **faça**
    $u_2 \leftarrow loc(vec4(m), vec4(m+1))$
    $F \leftarrow F \cap$ (2.14), com $\alpha = u_2$ e $\theta = ang(vec4(m), u_2)$
  fim para
  Verificar se o problema é factível
fim enquanto
$K \leftarrow ZP^{-1}$

4 Testes e Simulações

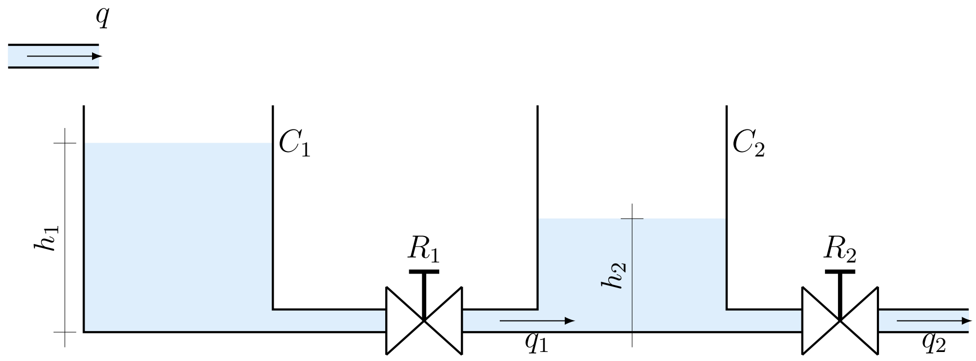


Figura 6 – Tanques comunicantes.

5 Conclusão

Referências

CHILALI, M.; GAHINET, P. H/sub /spl infin// design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

CHIQUETO, G. da S. Aproximações convexas via desigualdades matriciais lineares para o problema da largura de banda em ssistemas em tempo discreto. 2021.

KUO, B. *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, 1980. (HRW series in electrical and computer engineering). ISBN 9780030575686. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=oNpSAAAAMAAJ⟩.

NISE, N. *Control Systems Engineering, Sixth*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2011. ISBN 9781118138168. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=34zmCQAAQBAJ⟩.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ⟩.

ROSINOVá, D.; HOLIč, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.

ROSINOVá, D.; HYPIUSOVá, M. Lmi pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, v. 12, n. 8, 2019. ISSN 1999-4893. Disponível em: ⟨https://www.mdpi.com/1999-4893/12/8/167⟩.

WISNIEWSKI, V.; MADDALENA, E.; GODOY, R. Discrete-time regional pole-placement using convex approximations: Theory and application to a boost converter. *Control Engineering Practice*, v. 91, p. 104102, 2019. ISSN 0967-0661. Disponível em: ⟨https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066119301182⟩.

WISNIEWSKI, V. L. et al. Regional pole placement for discrete-time systems using convex approximations. In: *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 655–659.