Disciplina de Modelagem e Construção de Aplicações 3D

Prof. M. Sc. Will Machado

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS AFINS

1 Revisão sobre fundamentação teórica

Esta seção apresentará uma revisão teórica sobre alguns conceitos básicos relacionados ao tema principal que será abordado nesta unidade.

1.1. Sistema de coordenadas

Um sistema de coordenadas $\mathbf{R}^n$ é definido por um ponto de referência que corresponde a origem do sistema de coordenadas e seus respectivos eixos de orientação.

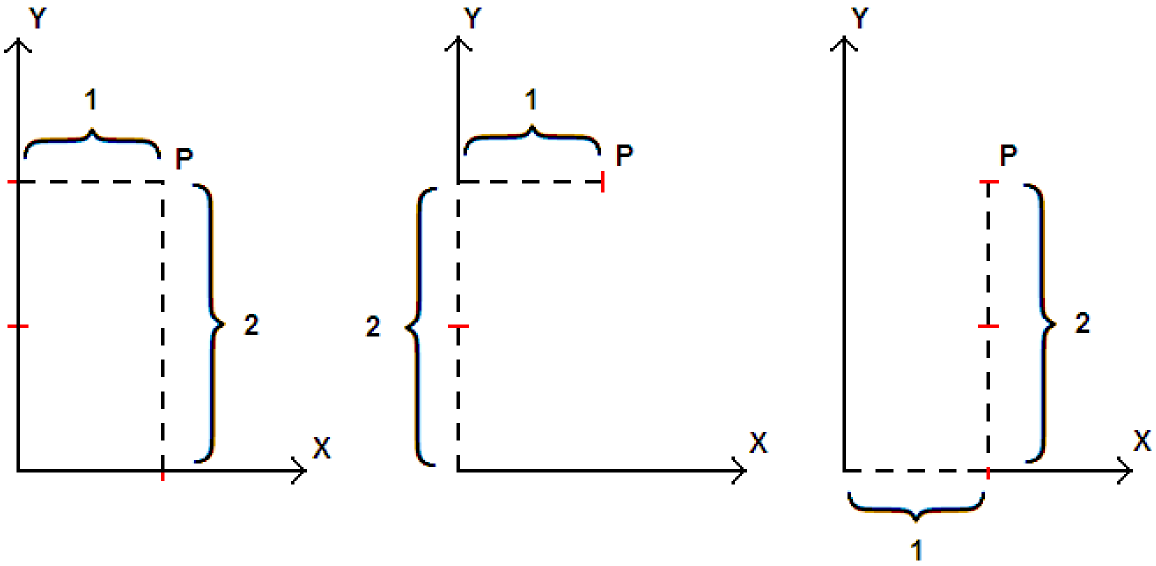
Algebricamente, podemos caracterizar a obtenção de um ponto $P = (x_p, y_p)$ no espaço $\mathbf{R}^2$ usando os eixos de orientação X e Y, e o ponto de origem O, através da equação:

$$P = x_p \cdot X + y_p \cdot Y + O$$

No espaço $\mathbf{R}^3$ podemos caracterizar a obtenção de um ponto $P = (x_p, y_p, z_p)$ usando os eixos de orientação X, Y e Z, e o ponto de origem O, através da equação:

$$P = x_p \cdot X + y_p \cdot Y + z_p \cdot Z + O$$

Por exemplo, seja o ponto P = (1, 2) e o ponto O = (0, 0), podemos localizar a posição deste ponto no espaço de três formas:

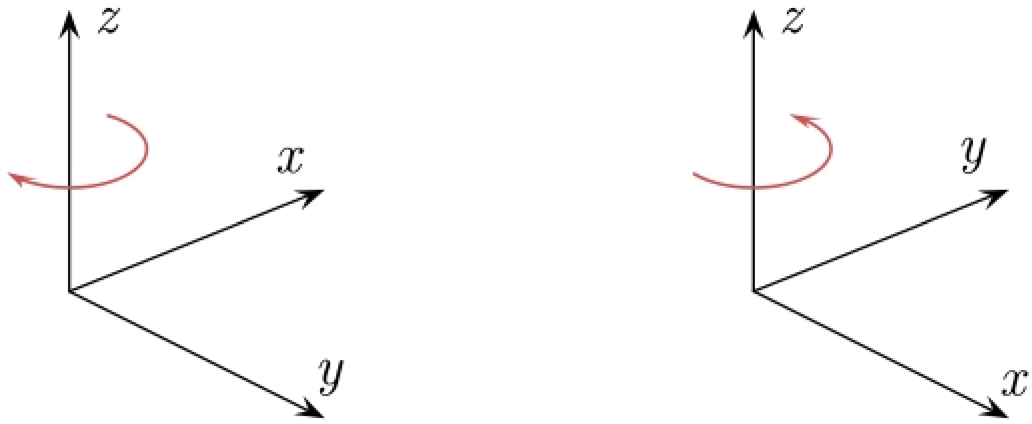


(a) (b) (c)
Figura 1 – Formas de localização de um ponto P no espaço

Na Figura 1 (a), a partir do ponto de origem, o ponto P foi localizado através da intersecção da projeção paralela de parte dos segmentos de reta correspondentes as coordenadas x_p e y_p do ponto P em relação aos eixos X e Y, respectivamente. Na Figura 1 (b), a partir da origem, foi realizado primeiramente o deslocamento de 2 unidades no eixo Y, referente à coordenada $y_p = 2$ e, a partir desta nova posição (0, 2), foi aplicado um novo deslocamento, referente a 1 unidade paralela ao eixo X, correspondente a coordenada $x_p = 1$. Já na Figura 1 (c), a partir da origem, foi realizado primeiramente o deslocamento de 1 unidade no eixo X, referente à coordenada $x_p = 1$ e, a partir desta nova posição (1, 0), foi aplicado um novo deslocamento, referente a 2 unidades, paralela ao eixo Y, correspondente a coordenada $y_p = 2$.

Sendo assim, conforme as ilustrações da Figura 1 podemos observar que a localização de um ponto qualquer no espaço bidimensional pode ser realizada de diferentes formas.

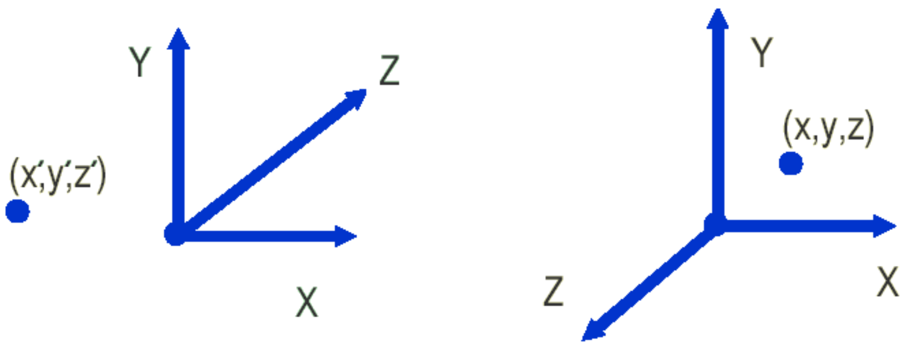
Para representar informações presentes no espaço R3 são comumente utilizadas duas convenções de eixos para orientação do sistema com base na regra da mão direita e na regra da mão esquerda. A diferença básica entre a orientação dos dois sistemas está no fato de que, na regra da mão esquerda, a partir do eixo do *x*, temos os eixos do *y* e do *z* no sentido horário, conforme a seta vermelha ilustrada na Figura 2 (a). Já na regra da mão direita, a partir do eixo do *x*, temos os eixos do *y* e do *z* no sentido anti-horário, conforme a seta vermelha ilustrada na Figura 2 (b).



(a) (b)

Figura 2 – (a) Orientação referente à mão-esquerda e (b) orientação referente à mão direita

A Figura 3 (a) e (b) ilustram respectivamente os sistemas de coordenadas referentes à mão esquerda e a mão direita, assim como a Figura 2(a) e (b). A única diferença entre as Figuras 2 e 3 está no fato de que os eixos de orientação presentes na Figura 3 estão rotacionados em relação a Figura 2, sendo visualizados em pontos de vista diferentes.



(a) (b)

Figura 3 – (a) Orientação referente à mão-esquerda e (b) orientação referente à mão direita

Na Figura 4 podemos observar o mesmo objeto sendo visualizado em diferentes pontos de vista. Nesta figura, o cubo cinza do objeto tem o centro alinhado com o eixo *x*, o cubo amarelo tem o centro alinhado com o eixo *y* e o cubo vermelho tem o centro alinhado com o eixo *z*. O centro da esfera posicionada na extremidade do cubo cinza possui as coordenadas (50, 0, 0), o centro da esfera posicionada na extremidade do cubo amarela possui as coordenadas (0, 50, 0) e da esfera posicionada na extremidade do cubo vermelho possui as coordenadas (0, 0, 50). Esses objetos foram desenhados usando a versão *trial* (avaliação) da ferramenta 3D Game Studio.

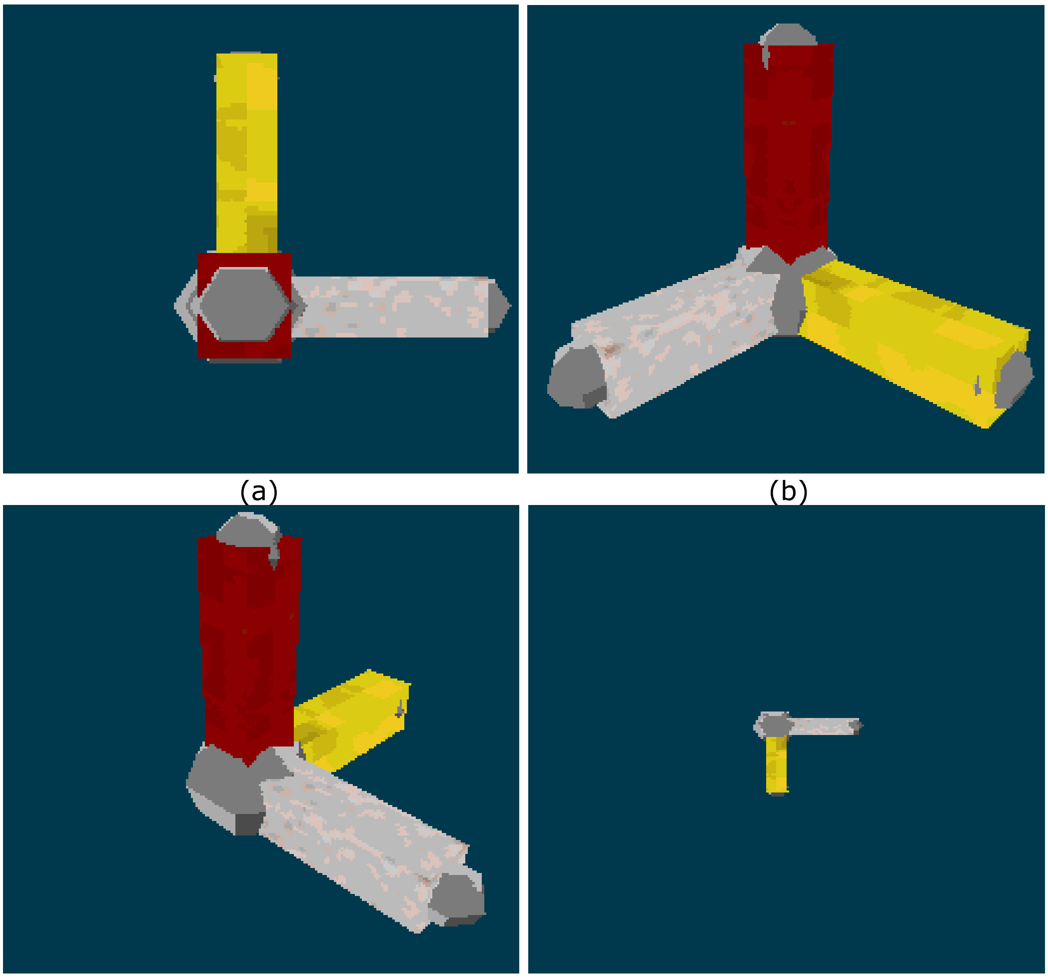
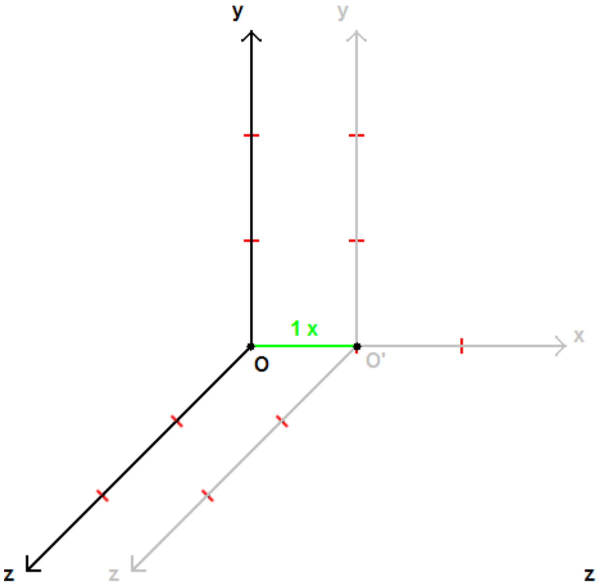

(a) (b) (c) (d)

Figura 4 – Visualização de um mesmo objeto em diferentes pontos de vista no sistema de orientação referente à regra da mão direita

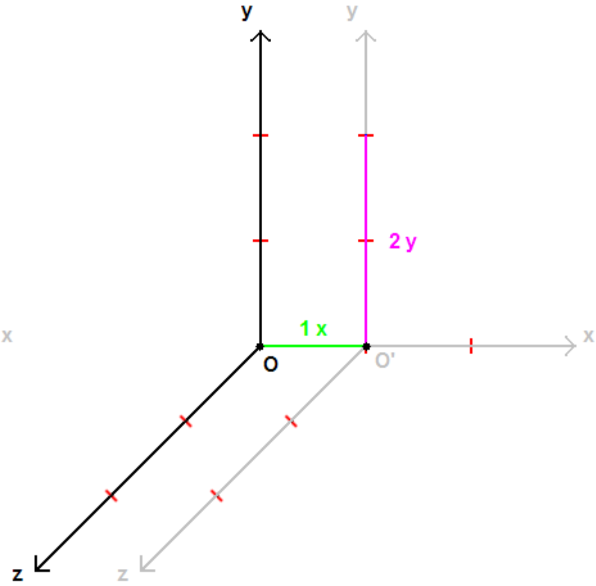
Como o sistema de coordenadas 3D faz uso de três eixos de orientação, muitas vezes podemos ter uma falsa impressão em relação aos objetos presentes no sistema devido à posição da câmera (observador) e ângulo de visualização. Conforme pode ser observado nas Figuras 4 (a), (b), (c) e (d), a localização das esferas e dos cubos no espaço são os mesmos, o que foi alterado foi apenas o posicionamento da câmera. Além disso, na Figura 4 (d), a câmera foi afastada do objeto observado e colocada em uma posição de modo que o cubo e a esfera alinhada sobre o eixo z ficassem ocultos, dando a impressão de não haver outros objetos. Como os objetos permanecem na mesma posição, a relação de distância entre eles permanecem o mesmos, embora na Figura 4 (d) eles pareçam menores.

Para posicionar pontos no espaço 3D podemos fazer uso da mesma estratégia de posicionamento de pontos utilizada nas Figuras 1 (b) e Figura 1 (c). A Figura 5 ilustra o posicionamento do ponto P = (1, 2, -1) no sistema de coordenadas baseado na regra da mão direita.

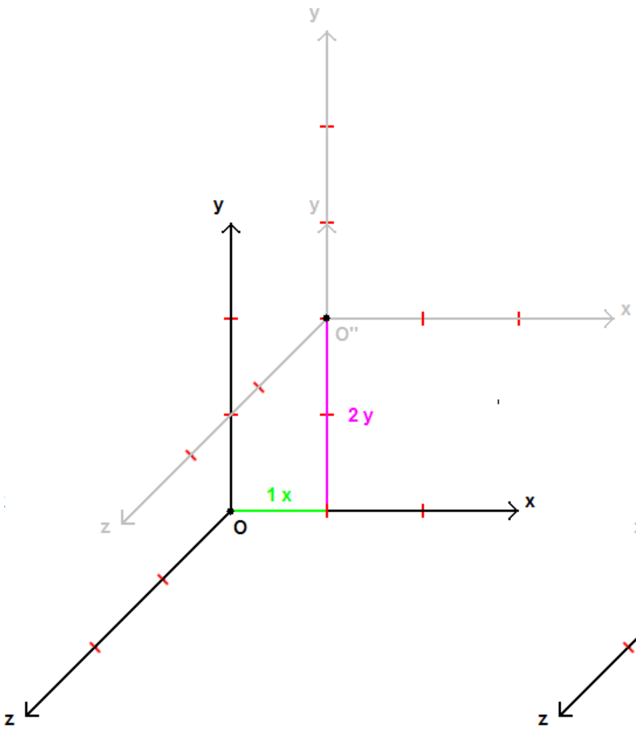
Para ilustrar o ponto P da figura acima, inicialmente temos que reconhecer os valores das coordenadas referentes aos eixos do *x*, *y* e *z*, que neste caso são respectivamente 1, 2 e -1. Depois devemos traçar um segmento de reta para cada um desses valores, paralelos aos respectivos eixos de orientação. Sendo assim, deve-se localizar pontos parciais no sistema de coordenadas.



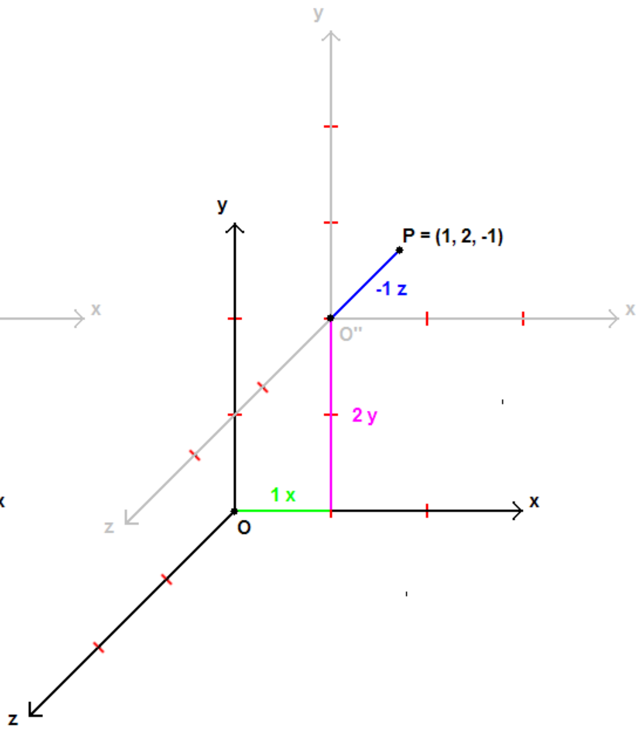
(a)



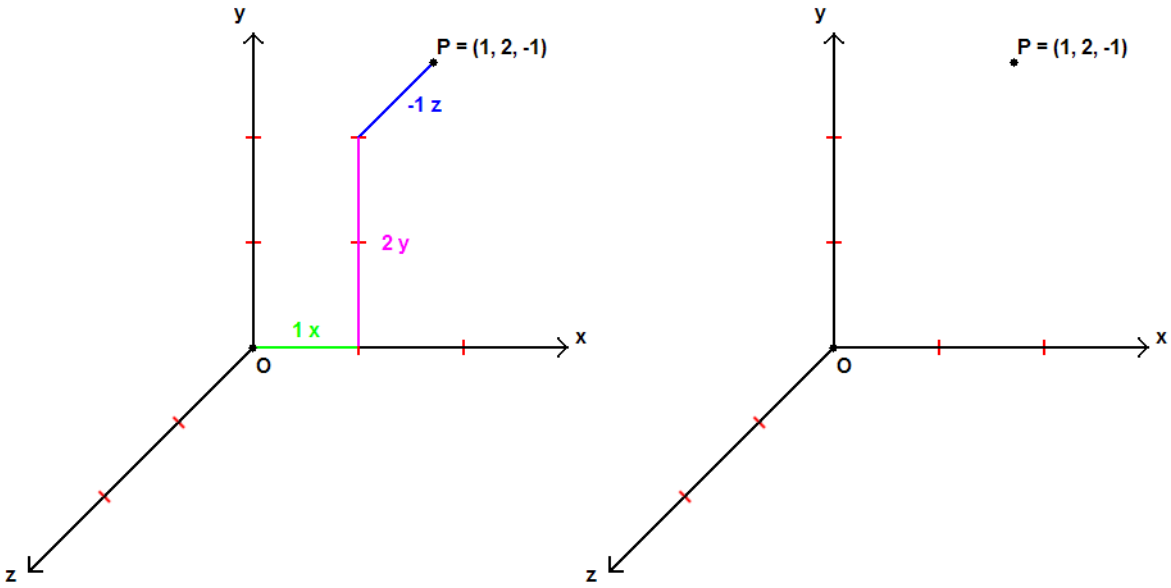
(b)



(c)



(d)



(e) (f)

Figura 5 – Passo-a-passo da localização do ponto P = (1, 2, -1) no sistema de coordenadas 3D, com eixos orientados pela regra da mão direita.

No caso do ponto P=(1,2-1), pode-se localizar um ponto P' = (1, 0, 0) representado na Figura 5 (a), onde x=1 e o segmento de reta se desloca no eixo x, que vai de 0 a 1, representado pela cor verde. A partir desse ponto P' = O', sendo y=2, traça-se o segmento de reta referente a 2 partes, paralelo ao eixo y, localizando o ponto P'' = (1, 2, 0), deslocamento representado pela cor rosa, conforme ilustrado na Figura 5 (b). Em seguida, a partir do ponto P''=O'', conforme Figura 5 (c), sendo z=-1 traça-se o segmento de reta referente a 1 (uma) parte no sentido negativo, paralelo ao eixo z, localizando o ponto P''' = (1, 2, -1), representado pela cor azul, conforme ilustrado na Figura 5 (d). Na Figura 5 (e) observa-se os 3 segmentos de reta paralelos aos eixos de orientação, representados para ilustrar o posicionamento do ponto P (1, 2, -1) no sistema de coordenadas 3D. Já na Figura 5 (f) pode-se observar apenas a posição do ponto P no espaço, não sendo necessário ilustrar os passos intermediários para obter o posicionamento do mesmo no espaço.

Adotando uma representação chamada vetorial, uma figura pode ser ilustrada através da interligação de seus vértices. Por exemplo, um quadrado pode ser ilustrado por quatro linhas que interligam quatro vértices, um cubo pode ser ilustrado por doze linhas que interligam 8 vértices.

A Figura 6, ilustra os passos para se localizar as coordenadas de cada vértices de um triângulo, A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2) no espaço 3D.

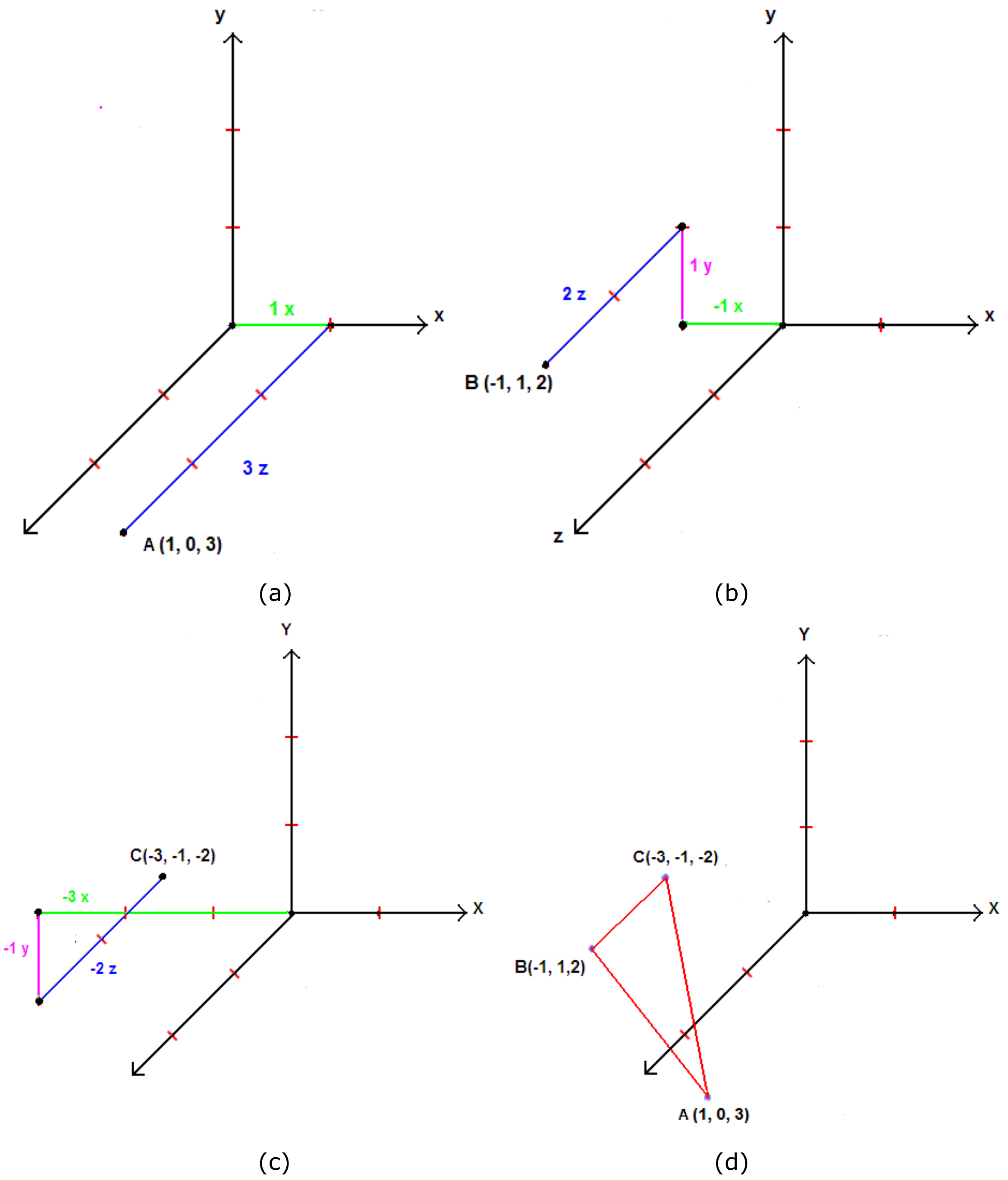


Figura 6 – Localização de cada vértice de um triângulo. (a) localização do vértice A, (b) localização do vértice B, (c) localização do vértice C e (d) interligação dos 3 vértices para ilustrar um triângulo.

2 Transformações Afins

Uma transformação de coordenadas afins é uma função que mapeia pontos de um espaço Euclidiano em outros pontos (ou eventualmente os mesmos pontos) do mesmo espaço, preservando o paralelismo entre as retas.

Este tipo de transformação pode ser escrita pela equação:

$$P' = M \cdot P + \vec{T}$$

Equação 1 – Equação modelo de uma transformação de coordenadas afins

ou pela seguinte forma matricial no espaço 2D:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(eq. 2)}$$

ou pela seguinte forma matricial no espaço 3D:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(eq. 3)}$$

Neste caso, as coordenadas (x',y',z') que definem um ponto no espaço são obtidas através de uma função linear de (x,y,z) e m_{ij} e t_i, onde t_i são constantes determinadas pelo tipo de transformação.

Rotação, translação, escalamento, espelhamento e cisalhamento são exemplos de transformações afins detalhados a seguir.

A operação envolvendo os termos $M \cdot P$ da equação 1 é uma multiplicação entre a matriz *M* de ordem 3 por 3 (M_{3x3}) e a matriz *P* de ordem 3x1 (P_{3x1}).

As operações aritméticas envolvendo todos os termos da equação 1 são demonstradas a seguir:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_{11} \cdot x) + (m_{12} \cdot y) + (m_{13} \cdot z) \\ (m_{21} \cdot x) + (m_{22} \cdot y) + (m_{23} \cdot z) \\ (m_{31} \cdot x) + (m_{32} \cdot y) + (m_{33} \cdot z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((m_{11} \cdot x) + (m_{12} \cdot y) + (m_{13} \cdot z)) + t_1 \\ ((m_{21} \cdot x) + (m_{22} \cdot y) + (m_{23} \cdot z)) + t_2 \\ ((m_{31} \cdot x) + (m_{32} \cdot y) + (m_{33} \cdot z)) + t_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)}$$

Equação 4 – Multiplicação e soma de matrizes

Exemplo: Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, os fatores $T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e um ponto $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, encontre um ponto $Q' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ com base na equação 1 (a).

$$Q' = M \quad Q + T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_{11} \cdot x) + (m_{12} \cdot y) + (m_{13} \cdot z) \\ (m_{21} \cdot x) + (m_{22} \cdot y) + (m_{23} \cdot z) \\ (m_{31} \cdot x) + (m_{32} \cdot y) + (m_{33} \cdot z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\cdot(-1)) + (0\cdot 2) + ((-3)\cdot(-4)) \\ (2\cdot(-1)) + ((-1)\cdot 2) + (4\cdot(-4)) \\ (0\cdot(-1)) + ((-2)\cdot 2) + (3\cdot(-4)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) + (0) + (12) \\ (-2) + (-2) + (-16) \\ (0) + (-4) + (-12) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -20 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((m_{11}\cdot x) + (m_{12}\cdot y) + (m_{13}\cdot z)) + t_1 \\ ((m_{21}\cdot x) + (m_{22}\cdot y) + (m_{23}\cdot z)) + t_2 \\ ((m_{31}\cdot x) + (m_{32}\cdot y) + (m_{33}\cdot z)) + t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+5 \\ -20+(-2) \\ -16+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -22 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -22 \\ -15 \end{bmatrix}$$

1.1 Translação

A translação, alteração da posição de um ponto através da soma de constantes de deslocamento as suas coordenadas, é normalmente aplicada sobre todos os pontos de uma figura, de maneira a possibilitar a sua movimentação no espaço, conforme ilustrado na Figura 7.

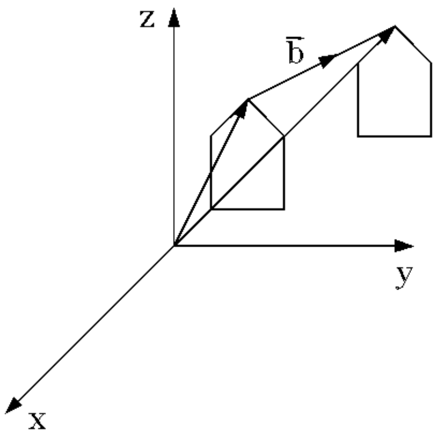


Figura 7 – Translação de uma figura no espaço 3D usando o fator de translação $\vec{b}$

Em termos de transformação afim, a translação corresponde à soma de um vetor de deslocamento ao vetor que define o ponto que se deseja deslocar. Assim, na equação 1, o vetor com as componentes t_i corresponde ao vetor de deslocamento.

Na translação, a matriz de transformação M é igual à matriz Identidade, ou seja, $M = I$.

$$P' = M \cdot P + \vec{T}$$

$$P' = I \cdot P + \vec{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x & + & 0 \cdot y & + & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & + & 1 \cdot y & + & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & + & 0 \cdot y & + & 1 \cdot z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ z + t_3 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, a equação referente à transformação de translação pode ser simplificada e expressa pela equação 5.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ z + t_3 \end{bmatrix}$$

Equação 5 – Equação simplificada da transformação de translação

Exemplo: Aplicar o fator de translação (2, -1, 1) na figura formada pela interligação dos vértices A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2).

$$A' = A + \vec{T}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2 \\ 0+(-1) \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$B^{/} = B + \vec{T}$

$$B' = \begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \\ z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (-1)+2 \\ 1+(-1) \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$C^{/} = C + \vec{T}$

$$C' = \begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \\ z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (-3)+2 \\ (-1)+(-1) \\ (-2)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

* *Para exercitar, ilustre a figura após a aplicação desta transformação.*

1.2 Escalamento

O escalamento, multiplicação das coordenadas de um ponto por valores iguais ou diferentes, é normalmente aplicada sobre todos os pontos de uma figura com o objetivo de ampliar ou reduzir sua dimensão ou então distorcer a sua forma geométrica, conforme ilustrado na Figura 8. O uso clássico desta operação em computação gráfica é a função *zoom in* (ampliação) ou *zoom out* (redução).

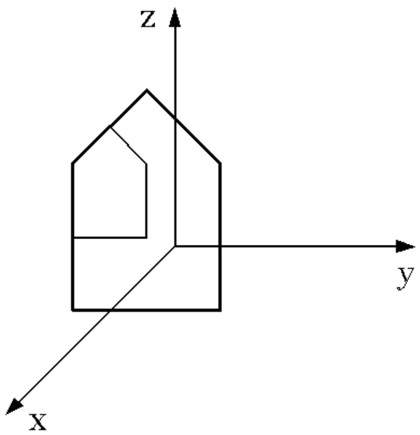


Figura 8 – Escalamento de uma figura no espaço 3D

Quando somente a operação de escalamento é realizada, a matriz *M* na equação 1 deve ser substituída pela matriz E, onde e_x, e_y, e_z, são os fatores de escala das coordenadas *x*, *y* e *z*, respectivamente. Observa-se facilmente que a aplicação desta matriz sobre o vetor de coordenadas gera o vetor escalado $\vec{v}$, conforme descrito abaixo.

$$E = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix}$$

No escalamento, a matriz de transformação *M* é igual à matriz *E*, ou seja, *M* = *E*, e o fator de translação $\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sendo assim, não é necessário realizar a adição na operação de escalamento.

$$P' = E \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x & + & 0 \cdot y & + & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & + & e_y \cdot y & + & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & + & 0 \cdot y & + & e_z \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x \\ e_y \cdot y \\ e_z \cdot z \end{bmatrix}$$

Sendo assim, a equação referente à transformação de escalamento pode ser simplificada e expressa pela equação 6.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x \\ e_y \cdot y \\ e_z \cdot z \end{bmatrix}$$

Equação 6 – Equação simplificada da transformação de escalamento

Exemplo: Aplicar o fator de escalamento (0.5, 2, 3) na figura formada pela interligação dos vértices A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2).

$$A' = E \cdot A$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x \\ e_y \cdot y \\ e_z \cdot z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$B' = E \cdot B$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x \\ e_y \cdot y \\ e_z \cdot z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$C' = E \cdot C$$

$$C^{/} = \begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \\ z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \cdot x \\ e_y \cdot y \\ e_z \cdot z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

** Para exercitar, ilustre a figura após a aplicação desta transformação.*

Aplicando o fator de escalamento descrito acima, reduz-se o tamanho da figura pela metade em relação ao eixo x, dobra-se o tamanho da mesma em relação ao eixo y e triplica-se a mesma em relação ao eixo do z.

Caso não se deseje alterar o tamanho de uma figura em um dos eixos de orientação, basta usar o valor igual a 1 (um) no eixo correspondente.

1.3 Rotação

A rotação é o giro de um determinado ângulo de um ponto em torno de um ponto de referência, sem alteração da distância entre eles. Esta operação é aplicada normalmente sobre todos os pontos de uma figura, o que possibilita que ela seja rotacionada. Vários programas gráficos dispõem desta operação, sendo que alguns restringem o ângulo de rotação, tais como, 90° e 180°.

Na figura 1.3a, o ponto P, de coordenadas (x, y), será rotacionado de um ângulo α em torno do eixo z, até a posição do ponto P' (x',y'). A linha que une o ponto P a origem do sistema de coordenadas está rotacionada de um ângulo β em relação ao eixo x.

A equação 7 possibilita a aplicação da transformação de rotação no espaço 2D.

$$\begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Equação 7 – Equação que possibilita a rotação de um ponto qualquer no espaço 2D

Em relação ao espaço 3D, pode-se aplicar a rotação de um objeto no espaço com base um dos três eixos de orientação, conforme ilustração da Figura 9, ou com base em um eixo genérico de orientação.

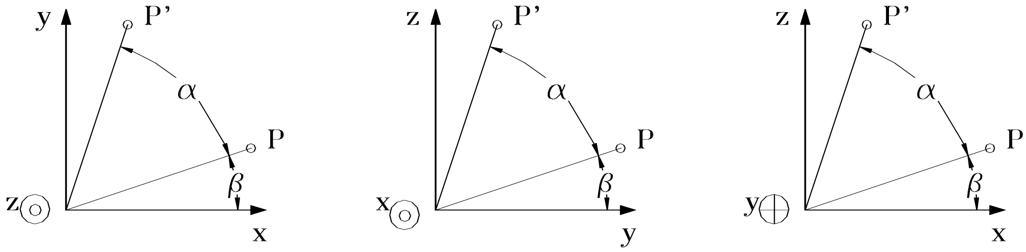


Figura 9 – Rotações em torno dos eixos de orientação de um sistema de coordenadas 3D, (a) rotação em torno do eixo z, (b) rotação em torno do eixo x e (c) Rotação em torno do eixo y.

Para aplicar a rotação de um ponto qualquer em torno de um dos eixos de orientação representados na Figura 9, podemos utilizar as equações 8, 9 e 10.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(eq. 8)} \quad \text{Rotação em torno do eixo z}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(eq. 9)} \quad \text{Rotação em torno do eixo y}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(eq. 10)} \quad \text{Rotação em torno do eixo x}$$

Equações que possibilitam a rotação de um ponto em torno dos eixos *z*, *y* e *x*

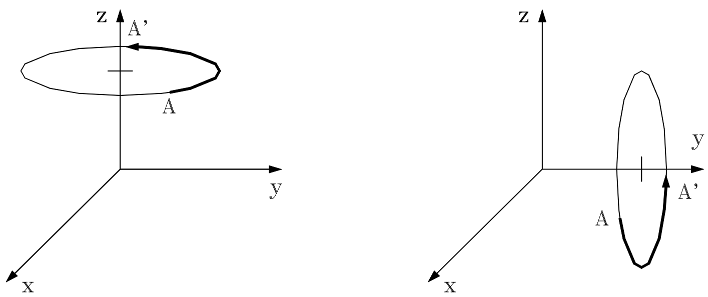


Figura 10 – Rotação de um ponto A em torno dos eixos de orientação de um sistema de coordenadas 3D, (a) rotação em torno do eixo "*z*" e (b) rotação em torno do eixo "*y*".

Exemplo: Aplicar a rotação usando o ângulo de 90º em torno do eixo *y* na figura formada pela interligação dos vértices A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2).

Matriz de rotação em torno do eixo y: $R_y = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & sen(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Matriz de rotação R_y usando ângulo de 90º:

$$R_y(90°) = \begin{bmatrix} \cos(90°) & 0 & sen(90°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(90°) & 0 & \cos(90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando a rotação de 90º em torno do eixo y sobre cada vértice.

$$A' = R_y(90°) \cdot A$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Detalhes da multiplicação entre as matrizes

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B' = R_y(90°) \cdot B$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = R_y(90°) \cdot C$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \\ -1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

* *Para exercitar, ilustre a figura após a aplicação desta transformação.*

1.4 Espelhamento

Uma operação bastante conhecida em computação gráfica é o **espelhamento**, que consiste no **rotacionamento** de um objeto **em torno de um eixo de orientação usando um ângulo fixo de 180º graus**. Portanto, no caso tridimensional, **espelhar** um objeto em torno do eixo *x* consiste na aplicação da matriz de rotação $\boxed{R_x(180^o)}$ sobre cada vértice que compõem o objeto; em torno do eixo *y*, aplicar a matriz de rotação $\boxed{R_y(180^o)}$ sobre cada vértice que compõem o objeto e em torno do eixo *z*, aplicar a matriz de rotação $\boxed{R_z(180^o)}$ sobre cada vértice que compõem o objeto.

Na figura 11, há o espelhamento de um objeto em torno do eixo *y* em relação ao plano *xy* e em torno do eixo *z* em relação ao plano *xz*.

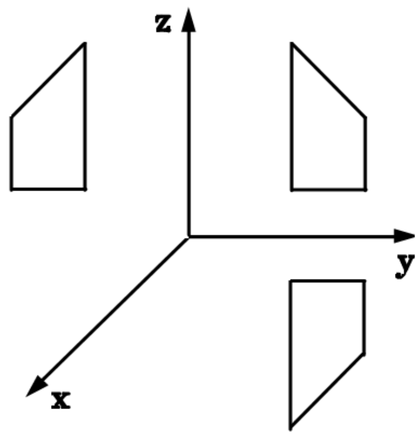


Figura 11 – Espelhamento em torno dos três eixos de orientação do espaço 3D

Exemplo: Aplicar o espelhamento em torno do eixo *x* na figura formada pela interligação dos vértices A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2).

Matriz de rotação em torno do eixo *x*:

$$R_x(180°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(180°) & -sen(180°) \\ 0 & sen(180°) & \cos(180°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o espelhamento em torno do eixo *x* sobre cada vértice.

$$A' = R_x(180°) \cdot A$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & + & 0\cdot 0 & + & 0\cdot 3 \\ 0\cdot 1 & + & (-1)\cdot 0 & + & 0\cdot 3 \\ 0\cdot 1 & + & 0\cdot 0 & + & (-1)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$B' = R_x(180°) \cdot B$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) & + & 0\cdot 1 & + & 0\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & + & (-1)\cdot 1 & + & 0\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & + & 0\cdot 1 & + & (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

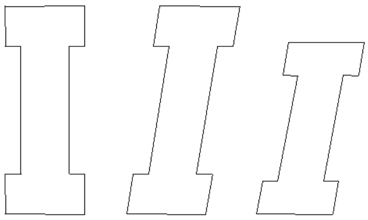
$$C' = R_x(180°)\cdot C$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot(-3) & + & 0\cdot(-1) & + & 0\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3) & + & (-1)\cdot(-1) & + & 0\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3) & + & 0\cdot(-1) & + & (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

** Para exercitar, ilustre a figura após a aplicação desta transformação.*

1.5 Cisalhamento

Outra transformação afim importante de ser estudada é o cisalhamento (*shear)*, cujo exemplo clássico para o sistema de coordenadas bidimensional que explica a sua função é o da italização de um caracter, conforme ilustrado na Figura 12. Neste caso, há uma variação no valor da coordenada *x* em função do valor da *y*, conforme Figura 12 (a), (b) e (c). Pode-se associar uma outra transformação a de cisalhamento, como, por exemplo, o escalamento da coordenada *y*, conforme ilustrado na Figura 12 (c). A matriz *MatCis 3* ilustra o uso desta transformação para o caso tridimensional.



(a) (b) (c)

Figura 12 - Exemplo de cisalhamento

$$MatCis_{2Da} = \begin{bmatrix} 1 & cis_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad MatCis_{2Db} = \begin{bmatrix} 1 & cis_x \\ 0 & e_y \end{bmatrix} \qquad MatCis_{3D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & cis_x \\ 0 & 1 & cis_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

Equação 11 - Matrizes de cisalhamento para (a) apenas cisalhar no espaço 2D, (b) cisalhar e escalar no espaço 2D, e (c) cisalhar e escalar no espaço 3D.

Sendo assim, a equação referente à transformação de cisalhamento pode ser simplificada e expressa pelas equações 12 (a), (b) ou (c).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = MatCis_{2Da} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & cis_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = MatCis_{2Db} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & cis_x \\ 0 & e_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = MatCis_{3D} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & cis_x \\ 0 & 1 & cis_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

Equação 12 – Equações que possibilitam (a) apenas cisalhar um ponto no espaço 2D, (b) cisalhar e escalar um ponto no espaço 2D, e (c) cisalhar e escalar um ponto no espaço 3D.

Exemplo: Aplicar o cisalhamento usando os fatores de cis_x = 3 e cis_y = 2, em uma figura formada pela interligação dos vértices A = (1, 0, 3), B = (-1, 1, 2) e C = (-3, -1, -2).

Como os vértices possuem 3 coordenadas e dados os fatores cis_x = 3 e cis_y = 2 no enunciado do problema, teremos:

$$MatCis_{3D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & cis_x \\ 0 & 1 & cis_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz $MatCis_{3D}$ sobre cada vértice da figura:

$$A' = MatCis_{3D} \cdot A$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Detalhes da multiplicação entre as matrizes

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & + & 0\cdot 0 & + & 3\cdot 3 \\ 0\cdot 1 & + & 1\cdot 0 & + & 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 & + & 0\cdot 0 & + & 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B' = MatCis_{3D} \cdot B$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) & + & 0\cdot 1 & + & 3\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & + & 1\cdot 1 & + & 2\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & + & 0\cdot 1 & + & 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

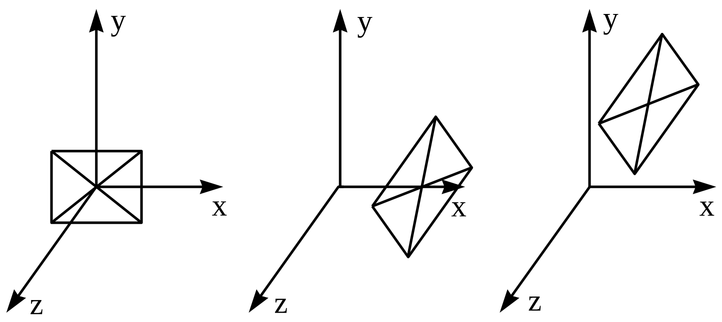
$$C' = MatCis_{3D} \cdot C$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1\cdot(-3) & + & 0\cdot(-1) & + & 3\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3) & + & 1\cdot(-1) & + & 2\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3) & + & 0\cdot(-1) & + & 1\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

** Para exercitar, ilustre a figura após a aplicação desta transformação.*

1.6 Composição de Transformações

Uma importante questão que sempre deve ser considerada com relação às transformações afins se refere a sua composição. Neste caso, a ordem em que elas são executadas pode alterar o resultado final esperado. Consideremos então duas transformações afins, uma somente de rotação de 45° em torno do eixo *z* e outra somente de translação de valor Δx ao longo do eixo *x*. Como a rotação é realizada em relação a origem do sistema de coordenadas, considerando-se a Figura 13 (a), a aplicação primeiro da rotação e depois da translação resulta na Figura 13 (b) e o inverso na Figura 13 (c).



(a) (b) (c)

Figura 13 – Composição de transformações

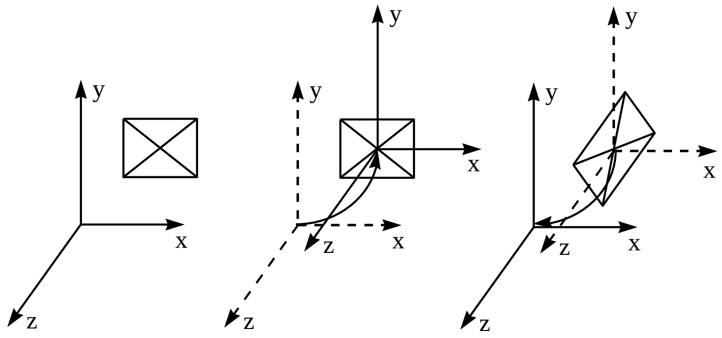


Figura 14 – Mudança de centro de rotação

Neste sentido, caso se deseje rotacionar um objeto no espaço em torno de um ponto interno a ele, deve se primeiramente deslocar o centro de rotação (origem dos eixos) para este ponto, proceder à rotação e posteriormente voltar o centro de rotação a sua posição inicial, conforme ilustrado na Figura 14. Note-se que isto equivale a deslocar o objeto para o centro de coordenadas.

■ Bibliografia:

BATTAIOLA, A., **Apostila de Computação Gráfica**. UFSCar – DC, http://www.dc.ufscar.br/~andre/Prof_ALB_Material_Didatico.htm, on-line: julho de 2004.

GRUPO DE BASE DE DADOS E IMAGENS**, Apostila de Computação Gráfica**. ICMC – USP. http://gbdi.icmc.sc.usp.br/documentacao/apostilas/cg/index.html.