Couches Parfaitement adaptées 2D

Analyse de stabilité numérique et implémentation

Alexandre Poulain
Polytech Sorbonne, France

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POLYTECH SORBONNE

10 septembre 2018

Outline

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - Conditions de bords absorbants : Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - Couches de bords absorbants : Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.
- 2 types de méthodes :
  - <u>Conditions de bords absorbants :</u> Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - <u>Couches de bords absorbants :</u> Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - Conditions de bords absorbants : Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - Couches de bords absorbants : Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.
- 2 types de méthodes :

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - Conditions de bords absorbants : Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - Couches de bords absorbants : Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - Conditions de bords absorbants : Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - Couches de bords absorbants : Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - <u>Conditions de bords absorbants :</u> Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - <u>Couches de bords absorbants :</u> Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - <u>Conditions de bords absorbants :</u> Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - <u>Couches de bords absorbants :</u> Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Bords absorbants

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Méthode communément employée pour résoudre numériquement la propagation d'ondes en milieux infinis.
- Important sujet de recherche pour beaucoup de recherches et d'applications d'ingéniérie
- Ex : Simulation de séismes, structure des sols, géophysique, mesure dans le sous-sol, problème de guidage d'ondes.

- 2 types de méthodes :
  - <u>Conditions de bords absorbants :</u> Conditions spécifiques aux bords du modèle.
  - <u>Couches de bords absorbants :</u> Couche entourant le bord du domaine d'intérêt.

Couches parfaitement adaptées

- split-field PML :
  - Introduit par Béranger dans le contexte des ondes électromagnétiques
  - Prolongé aux ondes élastodynamiques par Hastings.
  - Transformation : prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe.
  - Dans ce nouveau domaine, les ondes oscillantes (propagatives) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroit de manière exponentielle.
  - Split-field : séparation des variables en deux composantes parallèle et perpendiculaire dans la PML.
- unsplit-field PML :
  - Introduite par Wang dans le contexte de l'élastodynamique (CPML) $\rightarrow$ Complexe
  - Basu and Chopra [Basu U.(2003)] : unsplit-field PML pour l'élastodynamique harmonique dans le temps $\rightarrow$ implémentation éléments finis

Couches parfaitement adaptées

- split-field PML :
  - Introduit par Béranger dans le contexte des ondes électromagnétiques
  - Prolongé aux ondes élastodynamiques par Hastings.
  - Transformation : prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe.
  - Dans ce nouveau domaine, les ondes oscillantes (propagatives) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroit de manière exponentielle.
  - Split-field : séparation des variables en deux composantes parallèle et perpendiculaire dans la PML.
- unsplit-field PML :
  - Introduite par Wang dans le contexte de l'élastodynamique (CPML) → Complexe
  - Basu and Chopra [Basu U.(2003)] : unsplit-field PML pour l'élastodynamique harmonique dans le temps → implémentation éléments finis

Couches parfaitement adaptées

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Introduit par Béranger dans le contexte des ondes électromagnétiques
  - Prolongé aux ondes élastodynamiques par Hastings.
  - Transformation : prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe.
  - Dans ce nouveau domaine, les ondes oscillantes (propagatives) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroit de manière exponentielle.
  - Split-field : séparation des variables en deux composantes parallèle et perpendiculaire dans la PML.
- unsplit-field PML :
  - Introduite par Wang dans le contexte de l'élastodynamique (CPML) $\rightarrow$ Complexe
  - Basu and Chopra [Basu U.(2003)] : unsplit-field PML pour l'élastodynamique harmonique dans le temps $\rightarrow$ implémentation éléments finis

Couches parfaitement adaptées

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Introduit par Béranger dans le contexte des ondes électromagnétiques
  - Prolongé aux ondes élastodynamiques par Hastings.
  - Transformation : prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe.
  - Dans ce nouveau domaine, les ondes oscillantes (propagatives) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroit de manière exponentielle.
  - Split-field : séparation des variables en deux composantes parallèle et perpendiculaire dans la PML.
- unsplit-field PML :
  - Introduite par Wang dans le contexte de l'élastodynamique (CPML) $\rightarrow$ Complexe
  - Basu and Chopra [Basu U.(2003)] : unsplit-field PML pour l'élastodynamique harmonique dans le temps $\rightarrow$ implémentation éléments finis

Couches parfaitement adaptées

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Introduit par Béranger dans le contexte des ondes électromagnétiques
  - Prolongé aux ondes élastodynamiques par Hastings.
  - Transformation : prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe.
  - Dans ce nouveau domaine, les ondes oscillantes (propagatives) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroit de manière exponentielle.
  - Split-field : séparation des variables en deux composantes parallèle et perpendiculaire dans la PML.
- unsplit-field PML :
  - Introduite par Wang dans le contexte de l'élastodynamique (CPML) → Complexe
  - Basu and Chopra [Basu U.(2003)] : unsplit-field PML pour l'élastodynamique harmonique dans le temps → implémentation éléments finis

Stabilité des PML dans la littérature

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Analyse de stablité en utilisant les diagrammes de lenteur (slowness diagrams) et les fronts d'ondes.
  - Définitions de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité des PML [Bécache E. and .P(2003)].
  - discrétisation en différences finis de premier ordre : souffre d'instabilité pour les milieux anisotropes.
- unsplit-field PML :
  - Stabilité prouvée pour l'électromagnetisme (équations de Maxwell).
  - Pour les problèmes de propagation d'ondes élastiques : peu d'informations.

Stabilité des PML dans la littérature

- split-field PML :
  - Analyse de stablité en utilisant les diagrammes de lenteur (slowness diagrams) et les fronts d'ondes.
  - Définitions de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité des PML [Bécache E. and .P(2003)].
  - discrétisation en différences finis de premier ordre : souffre d'instabilité pour les milieux anisotropes.
- unsplit-field PML :
  - Stabilité prouvée pour l'électromagnetisme (équations de Maxwell).
  - Pour les problèmes de propagation d'ondes élastiques : peu d'informations.

Stabilité des PML dans la littérature

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Analyse de stablité en utilisant les diagrammes de lenteur (slowness diagrams) et les fronts d'ondes.
  - Définitions de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité des PML [Bécache E. and .P(2003)].
  - discrétisation en différences finis de premier ordre : souffre d'instabilité pour les milieux anisotropes.
- unsplit-field PML :
  - Stabilité prouvée pour l'électromagnetisme (équations de Maxwell).
  - Pour les problèmes de propagation d'ondes élastiques : peu d'informations.

Stabilité des PML dans la littérature

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- split-field PML :
  - Analyse de stablité en utilisant les diagrammes de lenteur (slowness diagrams) et les fronts d'ondes.
  - Définitions de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité des PML [Bécache E. and .P(2003)].
  - discrétisation en différences finis de premier ordre : souffre d'instabilité pour les milieux anisotropes.
- unsplit-field PML :
  - Stabilité prouvée pour l'électromagnetisme (équations de Maxwell).
  - Pour les problèmes de propagation d'ondes élastiques : peu d'informations.

Stabilité des PML dans la littérature

- split-field PML :
  - Analyse de stablité en utilisant les diagrammes de lenteur (slowness diagrams) et les fronts d'ondes.
  - Définitions de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité des PML [Bécache E. and .P(2003)].
  - discrétisation en différences finis de premier ordre : souffre d'instabilité pour les milieux anisotropes.
- unsplit-field PML :
  - Stabilité prouvée pour l'électromagnetisme (équations de Maxwell).
  - Pour les problèmes de propagation d'ondes élastiques : peu d'informations.

Equations

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- System of equations :

$$\begin{cases} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \tag{1}$$

- Complex coordinates : $x_i \rightarrow \tilde{x}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \lambda_i(x_i) = 1 + f_i^e(x_i) - i \frac{f_i^p(x_i)}{bk_s} \tag{2}$$

b : characteristic length of the physical problem.
$k_s = \frac{\omega}{c_s}$: wavenumber.
c_s : shear wave velocity.

Discrete form of PML

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

After :

- Integrating over the computational domain.
- Discretization in time and space.

$$M\ddot{U}_{n+1} + (C + \tilde{C})\dot{U}_{n+1} + (K + \tilde{K})U_{n+1} + P(\epsilon_n, E_n, \Sigma_n) = F_{ext} \tag{3}$$

with

$$m^e = \int_{\Omega_e} \rho f_m N_I N_J d\Omega_e I_d \qquad \tilde{c}^e = \frac{1}{dt}\int_{\Omega_e} \tilde{B}^T D B^{\epsilon} d\Omega_e$$

$$c^e = \int_{\Omega_e} \rho f_c \frac{c_s}{b} N_I N_J d\Omega_e I_d \qquad \tilde{k}^e = \frac{1}{dt}\int_{\Omega_e} \tilde{B}^T D B^{Q} d\Omega_e$$

$$k^e = \int_{\Omega_e} \frac{\mu}{b^2} f_k N_I N_J d\Omega_e I_d$$

Discrete form of PML

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$P^e(\epsilon_n, E_n, \Sigma_n) = \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T \frac{D}{dt}\left[\frac{1}{dt}\hat{F}^{\epsilon}\hat{\epsilon} - \hat{F}^Q \hat{E}_n\right] + \tilde{B}^p \hat{\Sigma}_n d\Omega_e$$

$$\begin{cases} f_m = (1 + f_1^e(x1))(1 + f_2^e(x2)) \\ f_c = (1 + f_1^e(x1)) f_2^p(x2) + (1 + f_2^e(x2)) f_1^p(x1) \\ f_k = f_1^p(x_1) f_2^p(x_2) \end{cases}$$

Integral of stess and strain :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \int_0^t \underline{\underline{\sigma}} dt, \underline{\underline{E}} = \int_0^t \underline{\underline{\epsilon}} dt$$

Attenuation function :

$$f_x^{\alpha} = a_{\alpha}\left(\frac{x - x_0}{L_p}\right)^n \qquad f_y^{\alpha} = a_{\alpha}\left(\frac{y - y_0}{L_p}\right)^n$$

Principle

- Stable direct integration scheme :

$$\exists h_0 > 0 \quad \text{such as} \quad \forall h \in [0, h_0]$$

a finite perturbation of the state vector at t_n gives a non increasing variation of the state vector at a subsequent time t_{n+j}.

- Effect of the disturbance at time t_{n+1} :

$$X_{n+1} = HX_n \tag{4}$$

ill be amplified if eigenvalues are higher than unity.

Standard element

- State vector :

$$X^n = \begin{bmatrix} \dot{u}^n \\ u^n \end{bmatrix}, \qquad X^{n+1} = \begin{bmatrix} \dot{u}^{n+1} \\ u^{n+1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

- Amplification matrix :
- Equation of motion at time t_n and t_{n+1} :

$$\begin{cases} M\ddot{U}^n = -C\dot{U}^n - KU^n + P^n_{int} \\ M\ddot{U}^{n+1} = -C\dot{U}^{n+1} - KU^{n+1} + P^{n+1}_{int} \end{cases} \tag{6}$$

- And the recurrence relationships by Newmark method (it could be another method) :

$$\begin{cases} \dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + (1-\gamma)dt\ddot{U}_n + \gamma dt\ddot{U}_{n+1} \\ U_{n+1} = U_n + dt\dot{U}_n + dt^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{U}_n + dt^2\beta\ddot{U}_{n+1} \end{cases} \tag{7}$$

- H has a size of 8×8.

PML element

- State vector :

$$X_n = \begin{bmatrix} \dot{u}_n \\ u_n \\ \hat{\epsilon}_n \\ \hat{E}_n \\ \hat{\Sigma}_n \end{bmatrix}, \qquad X_{n+1} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} \\ \hat{\epsilon}_{n+1} \\ \hat{E}_{n+1} \\ \hat{\Sigma}_{n+1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

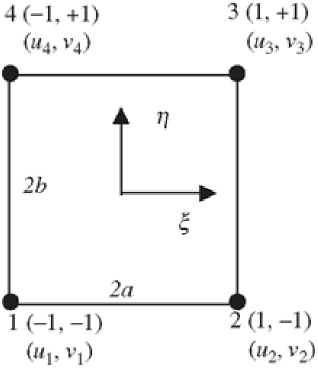
- Amplification matrix :
- Equation of motion at time t_n and t_{n+1} :

$$\begin{cases} M\ddot{u}_n + C\dot{u}_n + Ku_n + p(\epsilon_n, E_n, \Sigma_n) = F_{ext} \\ M\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} + Ku_{n+1} + p(\epsilon_{n+1}, E_{n+1}, \Sigma_{n+1}) = F_{ext} \end{cases} \tag{9}$$

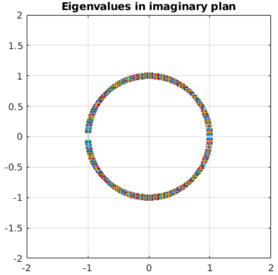
- And the recurrence relationships by Newmark method.
- H has a size of 52×52.

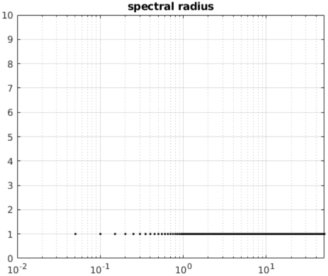
2D element stability

- 2D linear 4-noded element :



2D standard element : Implicit

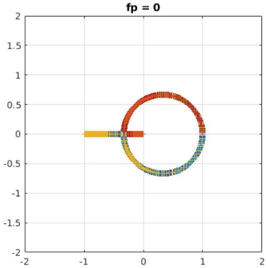


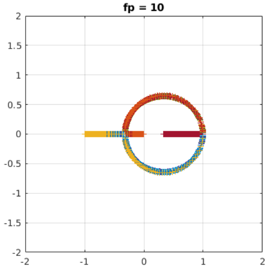


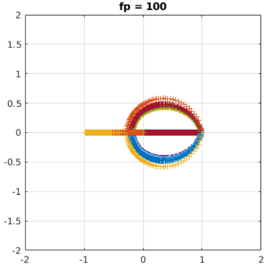
- Moduli of eigenvalues is below 1.
- The integration scheme is unconditionally stable for the standard element.

2D PML element : Implicit

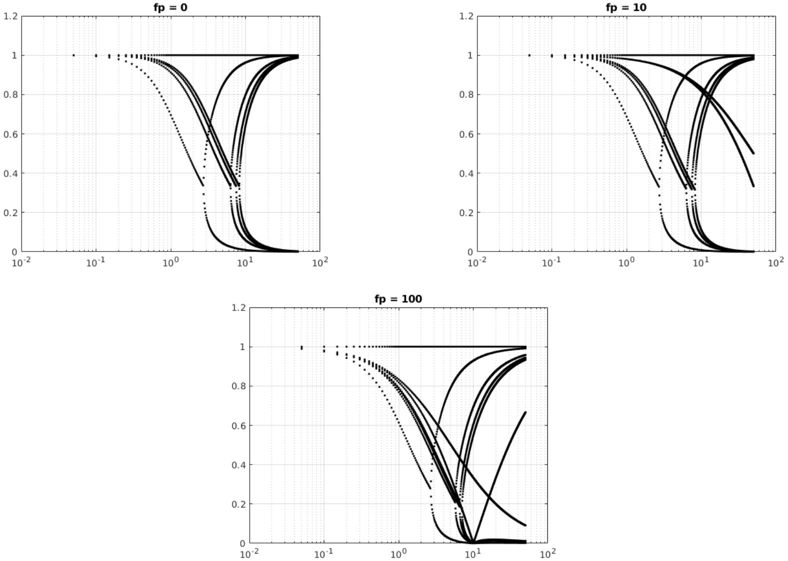
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE







2D PML element : Implicit



Principle

- Definition of a new material "PML".
- Inheritence from material_elastic material.
- Test case 1D bar

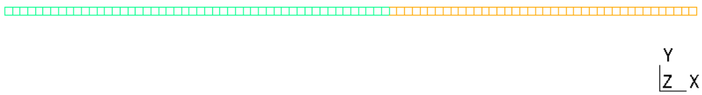


Figure – 1D bar with medium and PML

- Fixed end for the PML.
- Input at the extremity of medium : Ricker wave.

Results

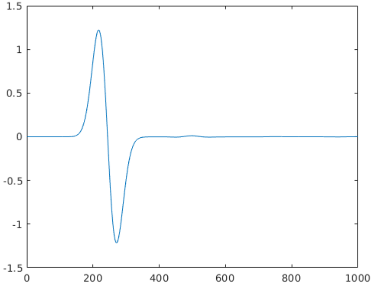


Figure – Displacement recorded at the middle of the medium in x direction

- Very slight reflection due to the truncation interface.
- No reflection going back in the medium from the fixed end of the PML.
- Matlab (8.033s) / Akantu (7.351s).

Results

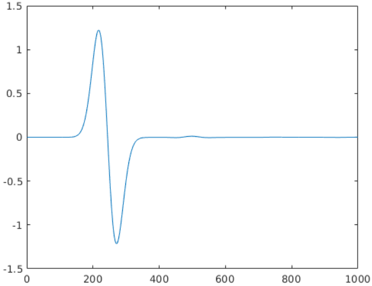


Figure – Displacement recorded at the middle of the medium in x direction

- Very slight reflection due to the truncation interface.
- No reflection going back in the medium from the fixed end of the PML.
- Matlab (8.033s) / Akantu (7.351s).

Conclusion

- Summary :
  - Description of the equations of the two-dimensional PML.
  - Proof of the stability of the implicit integration scheme related to the PML.
  - Implementation within Akantu and validation of the test case.
- Further work :
  - Generalisation to more complex cases.
  - Use of explicit time integration (lumped and consitent mass).
  - Complete analysis of the results of stability :
    - Explicit integration scheme (Lumped and consistent mass).
    - Depending on the normal modes of vibrations.
    - Analysis of the relative periodicity error and of the numerical damping ratio.

Conclusion

- Summary :
  - Description of the equations of the two-dimensional PML.
  - Proof of the stability of the implicit integration scheme related to the PML.
  - Implementation within Akantu and validation of the test case.
- Further work :
  - Generalisation to more complex cases.
  - Use of explicit time integration (lumped and consitent mass).
  - Complete analysis of the results of stability :
    - Explicit integration scheme (Lumped and consistent mass).
    - Depending on the normal modes of vibrations.
    - Analysis of the relative periodicity error and of the numerical damping ratio.

Bibliography

Chopra A. K. Basu U.
Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation.
Computational methods in applied mechanics and engineering, 192 : 1337–1375, 2003.

Fauqueux S. Bécache E. and Joly .P.
Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves.
Journal of Computational Physics, 188(2) :399–443, 2003.