TD n°1

Exercice 1 : Suite différée et exponentielle discrète.
Dans cet exercice on cherche à prouver que $\exp(z) = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
1°) On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, la suite $U_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ et $V_n = \ln(U_n)$. Prouver que V_n peut s'écrire $\frac{\ln(1+zx_n)}{x_n}$. Avec $x_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2°) Exprimer V_n comme le taux d'accroissement en 0 de la fonction $f(x) = \ln(1+zx)$. En déduire la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+zx)}{x}$
3°) En déduire la limite de la suite $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2 : Exponentielle complexe.
1°) Prouver les propriétés suivantes de l'exponentielle $t \to \exp(t)$:

1. $\cos(t+t') = \cos t \cos t' - \sin t \sin t'$.
2. $\sin(t+t') = \sin t \cos t' + \cos t \sin t'$.
3. $\cos(t+\pi/2) = -\sin(t)$.
4. $\sin(t+\pi/2) = \cos(t)$.
5. $\cos(\pi/2 - t) = \sin(t)$.
6. $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$.

2°) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ est impaire.

Exercice 3 : Série de Fourier discrète d'une fonction créneau.
Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in [-1,1] \\ 0, & \text{si } n \in [-2,-1[\cup]1,2] \end{cases}$$

périodique de période $N = 4$.
1°) tracer le graphe de f sur $n \in [0,3]$.
2°) Calculer les coordonnées $\hat{f}$ de f dans la base des (E_k). Avec $E_k(m) = \exp(2\pi i k \frac{m}{N})$.
3°) A partir des coordonnées $\hat{f}$ de f, reconstituer f sur l'intervalle $n = [0,3]$.
4°) Montrer que nous aurions pu nous restreindre à l'étude de $\hat{f}(0)$,$\hat{f}(N/2)$,$Re(\hat{f}(1))$ et $Im(\hat{f}(1))$ pour caractériser f tout entier.

Exercice 4 : Espace $\mathbb{F}_N$ (Espace des fonctions périodiques de période N).
1°) Montrer que la famille (E_k) définie par $E_k(m) = \exp(2\pi i k \frac{m}{N})$ est orthonormée.

Exercice 5 : Transformée de Fourier discrète.
1°) Calculer les coordonnées $\hat{a}$ du signal discret $a = [1,0,0,1]$ dans la base des (E_k).
2°) Appliquer la transformée de Fourier inverse à $\hat{b} = [2, -1-i, 0, -1+i]$.