TD 3 : Espaces L^p et convolution

Exercice 1. Dites si les fonctions suivantes sont L^1, L^2 ou L^∞ sur l'intervalle considéré.

1. $f_1(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; +\infty[$.
2. $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
3. $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; 1]$.
4. $f_4(x) = \sin(x)\cos(2x)$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de montrer que la fonction $f(x) = xsin(\frac{1}{x})$ n'est pas intégrable.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{cos(x)}{x} dx$ est convergente.
2. Utiliser le résultat précédent pour prouver que $f(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty]$.

Exercice 3 (Convolution)**.** Calculez le produit de convolution suivant en justifiant au préalable pourquoi il est bien défini.

1. $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-a,a]})(x)$ pour $a > 1$.

Exercice 4. -

1. Justifiez pourquoi $\cos * \chi_{[0,1]}$ est bien définie et est une fonction L^∞ (on pourra montrer que cos est L^∞ et que $\chi_{[0,1]}$ est L^1).
2. Calculez $f(x) = (\cos * \chi_{[0,1]})(x)$.
3. En déduire que f est dérivable et calculez sa dérivée.
4. Calculez $(-\sin) * \chi_{[0,1]}(x)$ et comparez le avec l'expression de f' trouvée en 3.