Exercice 1. Pour f et g dans $F_N(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, on définit $f\star g \in F_N(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ en posant $E_m(\ell) = exp(2\pi i m\ell/N)$ pour $0 \leqslant m < N$ et

$$f\star g = \sum_{0\leqslant k<N} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)E_k.$$

1) Montrer que $\widehat{f\star g} = \widehat{f}\widehat{g}$.
2) Vérifier que

$$(f\star g)(m) = \frac{1}{N}\sum_{0\leqslant \ell<N} f(m-\ell)g(\ell).$$

3) Montrer que $f\star E_k = \widehat{f}(k)\ E_k$.

Exercice 2. –Soit $\delta : \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0,\\ 0, & \text{si } 0<k<N,\\ \delta(k+pN), & \forall p\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

On note 1 la fonction constante de valeurs 1 sur $\mathbb{Z}$.
1) Calculer $\widehat{\delta}$ et $\widehat{1}$ en fonction de N, δ et 1.
2) Calculer $\tau_m\delta(k)$ pour tout m et $k\in\mathbb{Z}$, puis $\widehat{\tau_m\delta}$.
3) Montrer que pour $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ de période N, on a

$$f = \sum_{0\leqslant k<N} f(m)\tau_m\delta.$$

4) En déduire une nouvelle démonstration de la formule de synthèse de Fourier.
5) Calculer $(\tau_m\delta)\star f$.

Exercice 3.
1) Décomposer en série de Fourier la fonction paire de période 2π définie par $f(t)=\pi-t$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi$. Étudier sa convergence.
2) Décomposer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = |\sin t|$ et étudier sa convergence.
2) Décomposer en série de Fourier la fonction de période de 2π définie par $h(t)=\sin t$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi$ et $h(t)=0$ pour $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ et étudier sa convergence.

Exercice 4. –
1) Décomposer en série de Fourier la fonction B_1 périodique de période 2π telle que $B_1(x)=\pi-x$ pour $0\leqslant x<2\pi$. Étudier sa convergence.
2) Montrer qu'il existe une unique suite de fonction $(B_m)_{m>1}$ C^1 par morceaux et continue telle que $B'_{m+1}=B_m$ pour tout $m\geqslant 0$. Calculer les coefficients de Fourier de B_m. Les fonctions B_m sont-elles polynomiales ?

Exercice 5. – Soient f et g deux fonctions périodiques et continues. Montrer qu'il existe une unique fonction continue h telle que

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad c_n(h) = c_n(f)c_n(g).$$