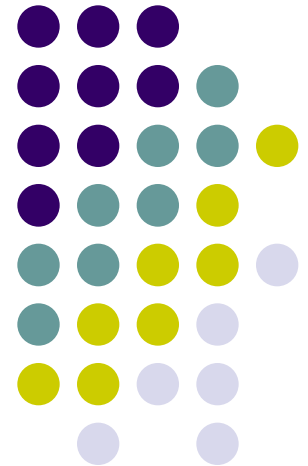


# Análise de algoritmos

---

SCE-181 Introdução à Ciência da Computação II

Alneu Lopes  
Thiago A. S. Pardo



# Algoritmo



- Noção geral: conjunto de instruções que devem ser seguidas para solucionar um determinado problema
- Cormen et al. (2002)
  - Qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores de **entrada** e produz algum valor ou conjunto de valores de **saída**
  - Ferramenta para resolver um problema computacional bem especificado
  - Assim como o hardware de um computador, constitui uma tecnologia, pois o desempenho total do sistema depende da escolha de um algoritmo eficiente tanto quanto da escolha de um hardware rápido



# Algoritmo

- Comen et al. (2002)
  - Deseja-se que um algoritmo termine e seja correto
- Perguntas
  - Mas um algoritmo **correto** vai **terminar**, não vai?
  - A afirmação está redundante?

# Eficiência e Problemas Difíceis



- Além de um algoritmo correto, busca-se também um algoritmo **eficiente** para resolver um determinado problema
- Pergunta: como 'medir' eficiência de um algoritmo?
- Obs. existem problemas para os quais não se conhece nenhum algoritmo eficiente para obter a solução: NP-completos



# Recursos de um algoritmo

- Uma vez que um algoritmo está pronto/disponível, é importante determinar os **recursos necessários** para sua execução
  - Tempo
  - Memória
- Qual o principal quesito? Por que?



# Análise de algoritmos

- Um algoritmo que soluciona um determinado problema, mas requer o processamento de **um ano**, não deve ser usado
- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?
  - “Desenvolvi um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos”
- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

# Análise de algoritmos



- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos
  - Características da máquina em que o algoritmo foi testado
    - Quantidade de memória
  - Linguagem de programação
    - Compilada vs. interpretada
    - Alto vs. baixo nível
  - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. “super” implementação do algoritmo TripleX
  - Quantidade de dados processados
    - Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números, certo?



# Análise de algoritmos

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
  - Hardware
  - Linguagem de programação
  - Habilidade do programador
- Portanto, quer-se comparar **algoritmos** e não **programas**
  - Área conhecida como “análise/complexidade de algoritmos”





# Eficiência de algoritmos

- Sabe-se que
  - Processar 10.000 números leva mais tempo do que 1.000 números
  - Cadastrar 10 pessoas em um sistema leva mais tempo do que cadastrar 5
  - Etc.
- Então, pode ser uma boa idéia estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema
  - Em geral, assume-se que “n” é o tamanho do problema, ou número de elementos que serão processados
  - E calcula-se o número de operações que serão realizadas sobre os n elementos



# Eficiência de algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada, pois é o mais rápido
  - O tempo de execução do algoritmo pode variar em diferentes máquinas, mas o número de operações é uma boa medida de desempenho de um algoritmo
- De que **operações** estamos falando?
- Toda operação leva o **mesmo tempo**?



# Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- TripleX: para uma entrada de tamanho  $n$ , o algoritmo realiza  $n^2+n$  operações
  - Pensando em termos de função:  $f(n)=n^2+n$
- SimpleX: para uma entrada de tamanho  $n$ , o algoritmo realiza  $1.000n$  operações
  - $g(n)=1.000n$



# Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- Faça os cálculos do desempenho de cada algoritmo para cada tamanho de entrada

Tamanho da entrada (n)	1	10	100	1.000	10.000
$f(n)=n^2+n$					
$g(n)=1.000n$					



# Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- Faça os cálculos do desempenho de cada algoritmo para cada tamanho de entrada

Tamanho da entrada (n)	1	10	100	1.000	10.000
$f(n)=n^2+n$	2	110	10.100	1.001.000	100.010.000
$g(n)=1.000n$	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000

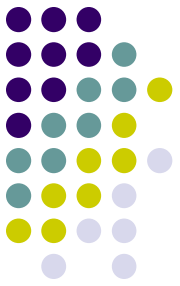
- A partir de  $n=1.000$ ,  $f(n)$  mantém-se maior e cada vez mais distante de  $g(n)$ 
  - Diz-se que  $f(n)$  cresce mais rápido do que  $g(n)$



# Análise assintótica

- Deve-se preocupar com a eficiência de algoritmos quando o tamanho de  $n$  for **grande**
- Definição: a eficiência assintótica de um algoritmo descreve a sua eficiência relativa quando  $n$  torna-se grande
- Portanto, para **comparar** 2 algoritmos, determinam-se as **taxas de crescimento** de cada um: o algoritmo com menor taxa de crescimento rodará mais rápido quando o tamanho do problema for grande

# Análise assintótica



- Atenção
  - Algumas funções podem não crescer com o valor de  $n$ 
    - Quais?
  - Também se pode aplicar os conceitos de análise assintótica para a quantidade de memória usada por um algoritmo
    - Mas não é tão útil, pois é difícil estimar os detalhes exatos do uso de memória e o impacto disso

# Relembrando um pouco de matemática...



- Expoentes
  - $x^a x^b = x^{a+b}$
  - $x^a / x^b = x^{a-b}$
  - $(x^a)^b = x^{ab}$
  - $x^n + x^n = 2x^n$  (diferente de  $x^{2n}$ )
  - $2^n + 2^n = 2^{n+1}$



# Relembrando um pouco de matemática...

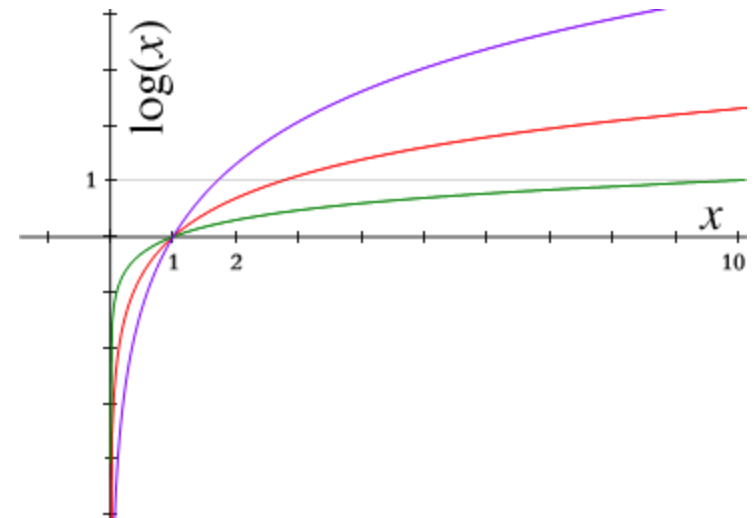


- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
  - $x^a=b \rightarrow \log_x b=a$
  - $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ , se  $c>0$
  - $\log ab = \log a + \log b$
  - $\log a/b = \log a - \log b$
  - $\log(a^b) = b \log a$

# Relembrando um pouco de matemática...



- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
  - E o mais importante
    - $\log x < x$  para todo  $x > 0$
  - Alguns valores
    - $\log 1 = 0$ ,  $\log 2 = 1$ ,  
 $\log 1.024 = 10$ ,  
 $\log 1.048.576 = 20$



Exemplo para várias bases

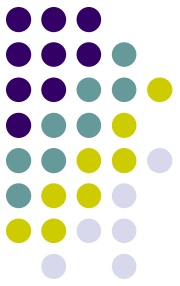
# Função exponencial vs. logarítmica



- Na palma da mão direita



# Relembrando um pouco de matemática...



- Séries

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

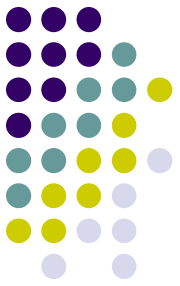
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

# Algumas notações



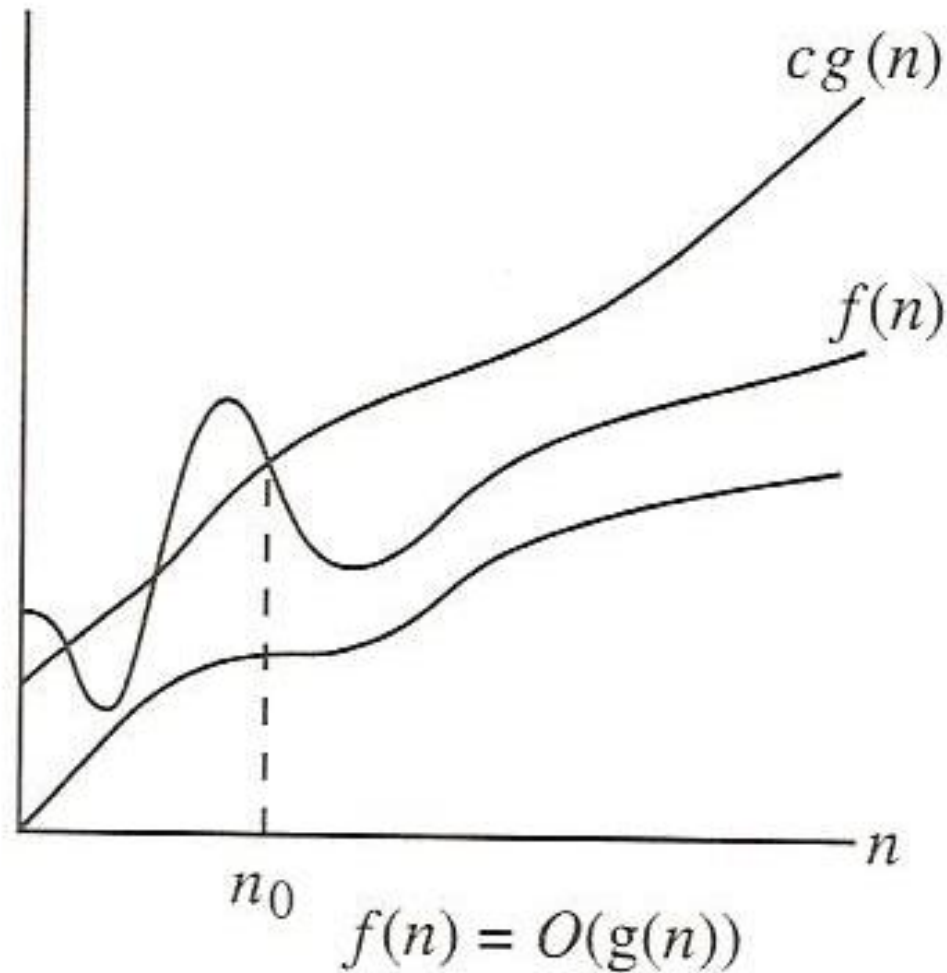
- Notações que usaremos na análise de algoritmos
  - $f(n) = O(g(n))$  (lê-se *big-oh*, *big-o* ou “da ordem de”) se existirem constantes  $c$  e  $n_0$  tal que  $f(n) \leq c * g(n)$  quando  $n \geq n_0$ 
    - A taxa de crescimento de  $f(n)$  é menor ou igual à taxa de  $g(n)$
  - $f(n) = \Omega(g(n))$  (lê-se “ômega”) se existirem constantes  $c$  e  $n_0$  tal que  $f(n) \geq c * g(n)$  quando  $n \geq n_0$ 
    - A taxa de crescimento de  $f(n)$  é maior ou igual à taxa de  $g(n)$

# Algumas notações

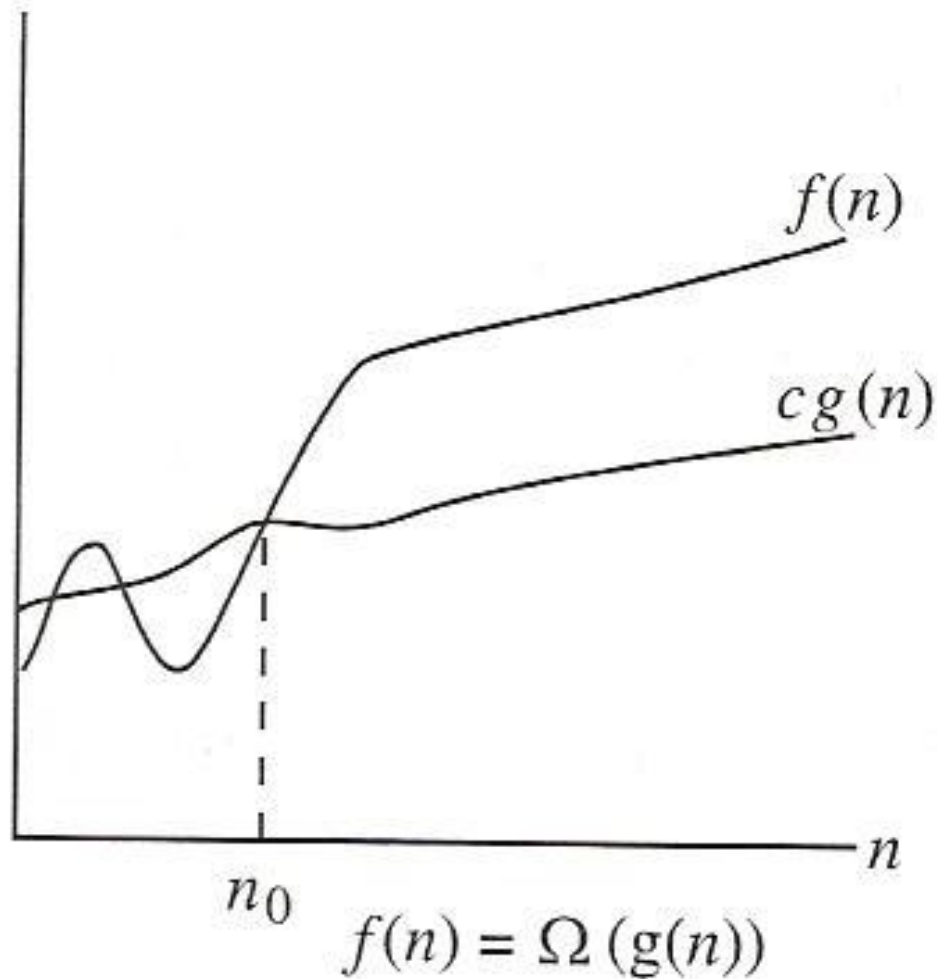


- Notações que usaremos na análise de algoritmos
  - $f(n) = \Theta(g(n))$  (lê-se “theta”) se e somente se  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) = \Omega(g(n))$ 
    - A taxa de crescimento de  $f(n)$  é igual à taxa de  $g(n)$
  - $f(n) = o(g(n))$  (lê-se *little-oh* ou *little-o*) se e somente se  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) \neq \Theta(g(n))$ 
    - A taxa de crescimento de  $f(n)$  é menor do que a taxa de  $g(n)$

# Algumas notações

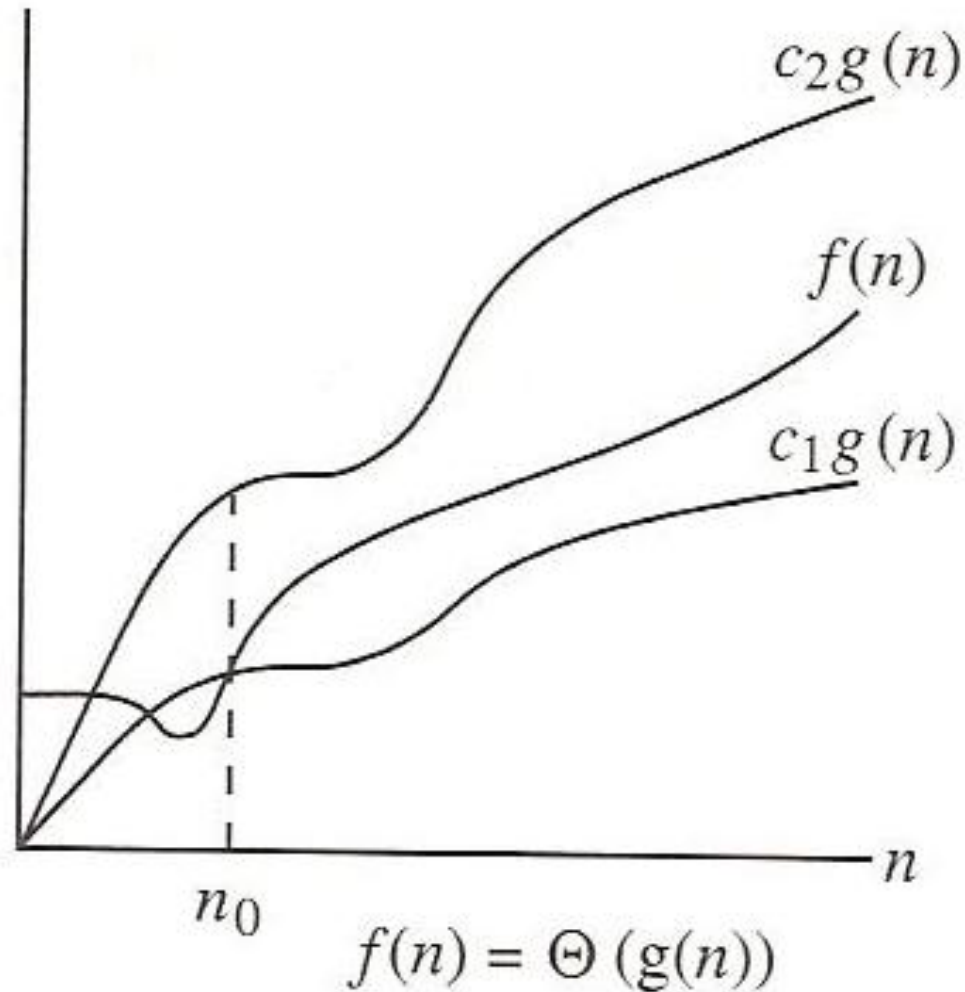


# Algumas notações





# Algumas notações





# Algumas notações

- O uso das notações permite **comparar a taxa de crescimento** das funções correspondentes aos algoritmos
  - **Não faz sentido comparar pontos isolados** das funções, já que podem não corresponder ao comportamento assintótico



# Exemplo

- Para 2 algoritmos quaisquer, considere as funções de eficiência correspondentes  $1.000n$  e  $n^2$ 
  - A primeira é maior do que a segunda para valores pequenos de  $n$
  - A segunda cresce mais rapidamente e eventualmente será uma função maior, sendo que o ponto de mudança é  $n=1.000$
  - Segundo as notações anteriores, se existe um ponto  $n_0$  a partir do qual  $c \cdot f(n)$  é sempre pelo menos tão grande quanto  $g(n)$ , então, ignorados os fatores constantes  $f(n)$  é pelo menos tão grande quanto  $g(n)$ 
    - No nosso caso,  $g(n)=1.000n$ ,  $f(n)=n^2$ ,  $n_0=1.000$  e  $c=1$  (ou, ainda,  $n_0=10$  e  $c=100$ )
      - Dizemos que  $1.000n = O(n)$

# Mais algumas considerações



- Ao dizer que  $g(n) = O(f(n))$ , garante-se que  $g(n)$  cresce numa taxa não maior do que  $f(n)$ , ou seja,  $f(n)$  é seu limite superior
- Ao dizer que  $f(n) = \Omega(g(n))$ , tem-se que  $g(n)$  é o limite inferior de  $f(n)$



# Outros exemplos

- A função  $n^3$  cresce mais rapidamente que  $n^2$ 
  - $n^2 = O(n^3)$
  - $n^3 = \Omega(n^2)$
- Se  $f(n)=n^2$  e  $g(n)=2n^2$ , então essas duas funções têm taxas de crescimento iguais
  - Portanto,  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) = \Omega(g(n))$



# Taxas de crescimento

- Algumas regras
  - Se  $T_1(n) = O(f(n))$  e  $T_2(n) = O(g(n))$ , então
    - $T_1(n) + T_2(n) = \max(O(f(n)), O(g(n)))$
    - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$
  - Para que precisamos desse tipo de cálculo?



# Taxas de crescimento

- Algumas regras

- Se  $T(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , então

- $T(x) = \Theta(x^n)$

- Relembrando: um polinômio de grau  $n$  é uma função que possui a forma abaixo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

seguindo a seguinte classificação em função do grau

- Grau 0: polinômio constante
  - Grau 1: função afim (polinômio linear, caso  $a_0 = 0$ )
  - Grau 2: polinômio quadrático
  - Grau 3: polinômio cúbico

Se  $f(x)=0$ , tem-se o polinômio nulo



# Taxas de crescimento

- Algumas regras
  - $\log^k n = O(n)$  para qualquer constante  $k$ , pois logaritmos crescem muito vagarosamente



# Funções e taxas de crescimento



- As mais comuns

Função	Nome
$c$	constante
$\log n$	logarítmica
$\log^2 n$	log quadrado
$n$	linear
$n \log n$ $n^2$	quadrática
$n^3$	
$2^n$ $a^n$	exponencial





# Taxas de crescimento

- Apesar de às vezes ser importante, **não é comum incluir constantes ou termos de menor ordem em taxas de crescimento**
  - Queremos medir a taxa de crescimento da função, o que torna os “termos menores” irrelevantes
  - As constantes também dependem do tempo exato de cada operação; como ignoramos os custos reais das operações, ignoramos também as constantes
- Não se diz que  $T(n) = O(2n^2)$  ou que  $T(n) = O(n^2+n)$ 
  - Diz-se apenas  $T(n) = O(n^2)$



# Exercício

- Um algoritmo tradicional e muito utilizado é da ordem de  $n^{1,5}$ , enquanto um algoritmo novo proposto recentemente é da ordem de  $n \log n$ 
  - $f(n)=n^{1,5}$
  - $g(n)=n \log n$
- Qual algoritmo você adotaria na empresa que está fundando?
  - Lembre-se que a eficiência desse algoritmo pode determinar o sucesso ou o fracasso de sua empresa



# Exercício

- Uma possível solução

- $f(n) = n^{1,5} \quad \rightarrow \quad n^{1,5}/n = n^{0,5} \quad \rightarrow \quad (n^{0,5})^2 = n$

- $g(n) = n \log n \quad \rightarrow \quad (n \log n)/n = \log n \quad \rightarrow \quad (\log n)^2 = \log^2 n$

- Como  $n$  cresce mais rapidamente do que qualquer potência de  $\log$ , temos que o algoritmo novo é mais eficiente e, portanto, deve ser o adotado pela empresa no momento



# Análise de algoritmos

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um **modelo de computador** e das **operações** que executa
- Assume-se o uso de um **computador tradicional**, em que as **instruções de um programa são executadas sequencialmente**
  - Com **memória infinita**, por simplicidade



# Análise de algoritmos

- Repertório de **instruções simples**: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc.
- Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que **cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo** para ser executada
  - Obviamente, em situações reais, isso pode não ser verdade: a leitura de um dado em disco pode demorar mais do que uma soma
- Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo, obviamente: devem ser analisadas em partes



# Análise de algoritmos

- Considera-se somente o algoritmo e suas entradas (de tamanho  $n$ )
- Para uma entrada de tamanho  $n$ , pode-se calcular  $T_{\text{melhor}}(n)$ ,  $T_{\text{média}}(n)$  e  $T_{\text{pior}}(n)$ , ou seja, o melhor tempo de execução, o tempo médio e o pior, respectivamente
  - Obviamente,  $T_{\text{melhor}}(n) \leq T_{\text{média}}(n) \leq T_{\text{pior}}(n)$
- Atenção: para mais de uma entrada, essas funções teriam mais de um argumento





# Análise de algoritmos

- Geralmente, utiliza-se somente a análise do pior caso  $T_{\text{pior}}(n)$ , pois ela fornece os limites para todas as entradas, incluindo particularmente as entradas ruins
- Logicamente, muitas vezes, o tempo médio pode ser útil, principalmente em sistemas executados rotineiramente
  - Por exemplo: em um sistema de cadastro de alunos como usuários de uma biblioteca, o trabalho difícil de cadastrar uma quantidade enorme de pessoas é feito somente uma vez; depois, cadastros são feitos de vez em quando apenas
- Dá mais trabalho calcular o tempo médio
- O melhor tempo não tem muita utilidade



# Pergunta

- Idealmente, para um algoritmo qualquer de ordenação de vetores com  $n$  elementos
  - Qual a configuração do vetor que você imagina que provavelmente geraria o melhor tempo de execução?
  - E qual geraria o pior tempo?



# Exemplo

- Soma da subsequência máxima
  - Dada uma seqüência de inteiros (possivelmente negativos)  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , encontre o valor da máxima soma de quaisquer números de elementos consecutivos; se todos os inteiros forem negativos, o algoritmo deve retornar 0 como resultado da maior soma
  - Por exemplo, para a entrada -2, 11, -4, 13, -5 e -2, a resposta é 20 (soma de  $a_2$  a  $a_4$ )



# Soma da subsequência máxima

- Há muitos algoritmos propostos para resolver esse problema
- Alguns são mostrados abaixo juntamente com seus tempos de execução

Algoritmo	1	2	3	4
Tempo	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Tamanho da entrada				
n = 10	0.00103	0.00045	0.00066	0.00034
n = 100	0.47015	0.01112	0.00486	0.00063
n = 1.000	448.77	1.1233	0.05843	0.00333
n = 10.000	ND*	111.13	0.68631	0.03042
n = 100.000	ND	ND	8.0113	0.29832

\*ND = Não Disponível



# Soma da subsequência máxima

- Deve-se notar que
  - Para entradas pequenas, todas as implementações rodam num piscar de olhos
    - Portanto, se somente entradas pequenas são esperadas, não devemos gastar nosso tempo para projetar melhores algoritmos
  - Para entradas grandes, o melhor algoritmo é o 4
  - Os tempos não incluem o tempo requerido para leitura dos dados de entrada
    - Para o algoritmo 4, o tempo de leitura é provavelmente maior do que o tempo para resolver o problema: característica típica de algoritmos eficientes

# Taxas de crescimento

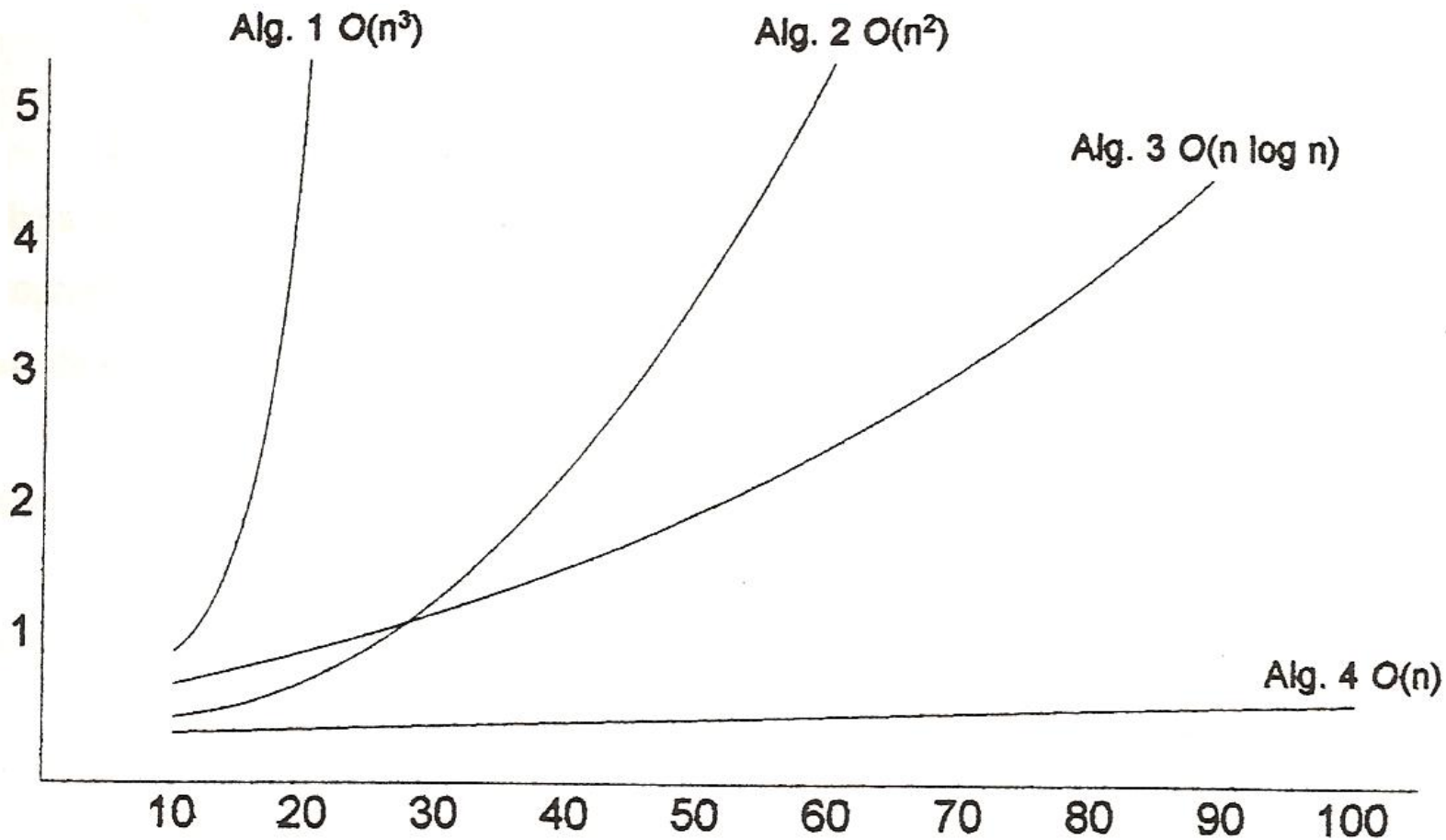


Gráfico (  $n$  x milisegundos) das taxas de crescimento dos 4 algoritmos com entradas entre 10 e 100.

# Taxas de crescimento

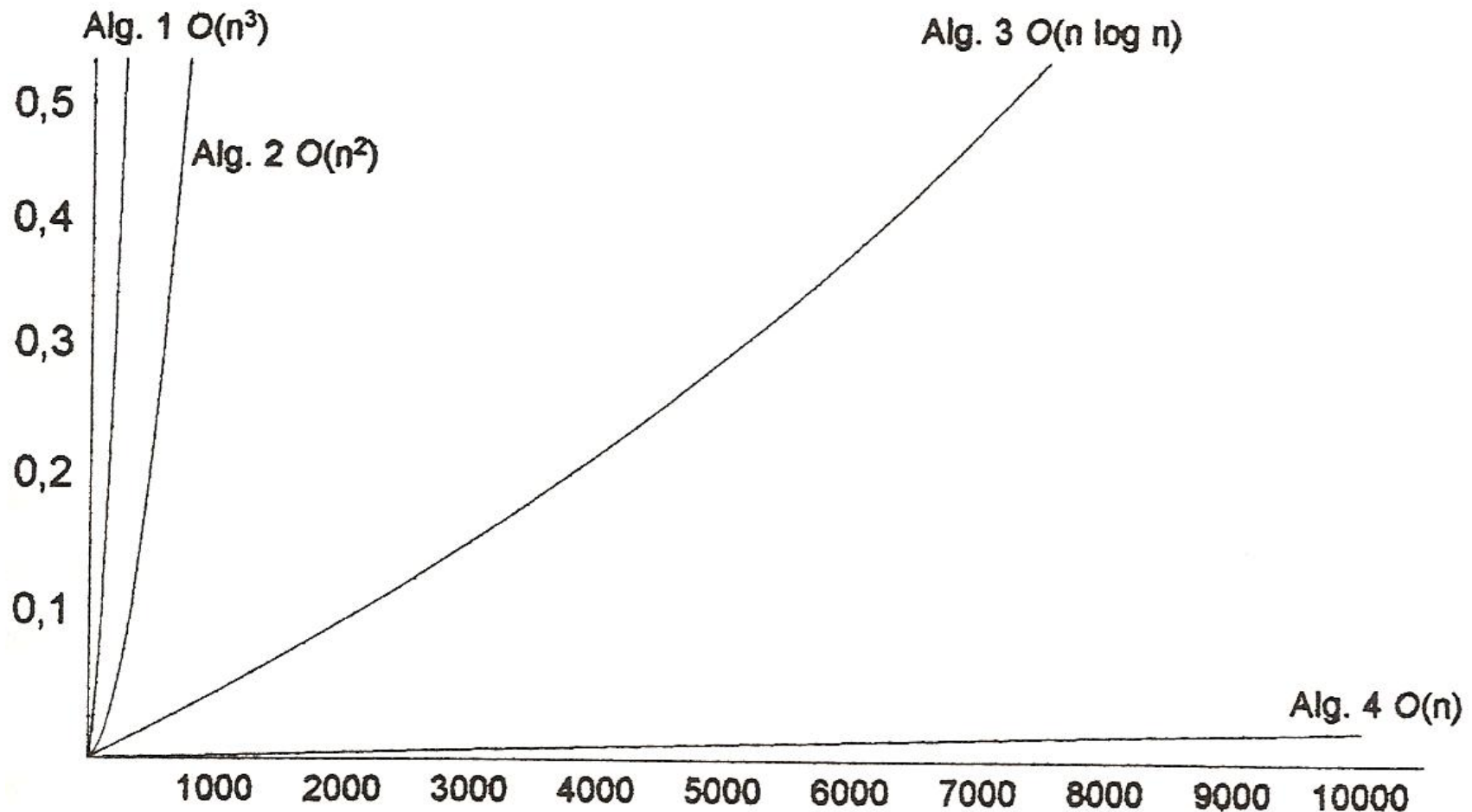


Gráfico ( $n$  x segundos) dos 4 algoritmos para entradas maiores