TE 979
Tópicos Especiais em Energia Elétrica I

Baterias na Engenharia Elétrica

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

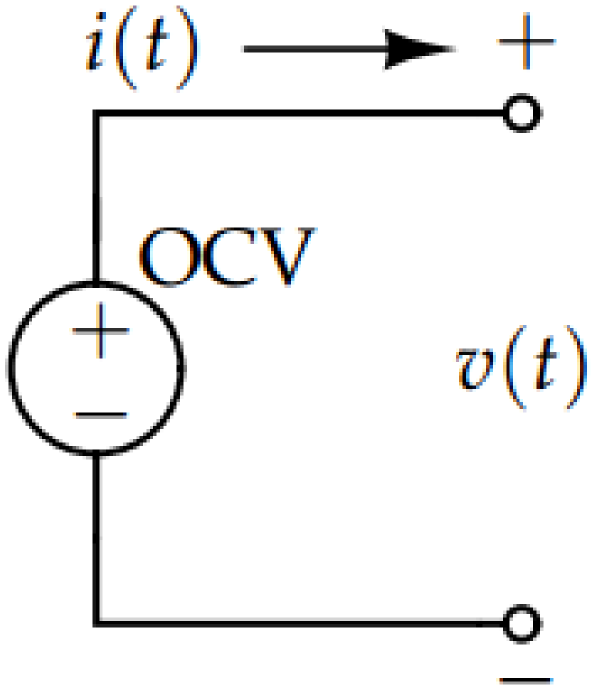
UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Modelo de operação

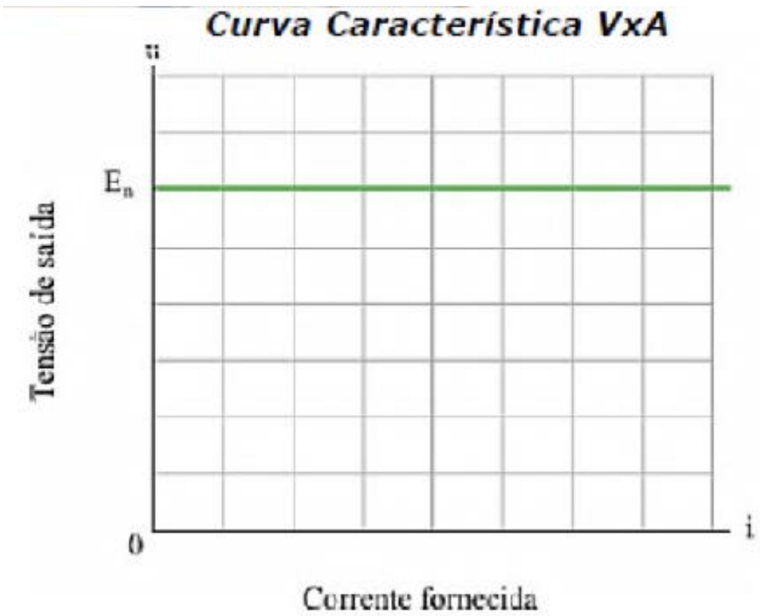
Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

1º Modelo:

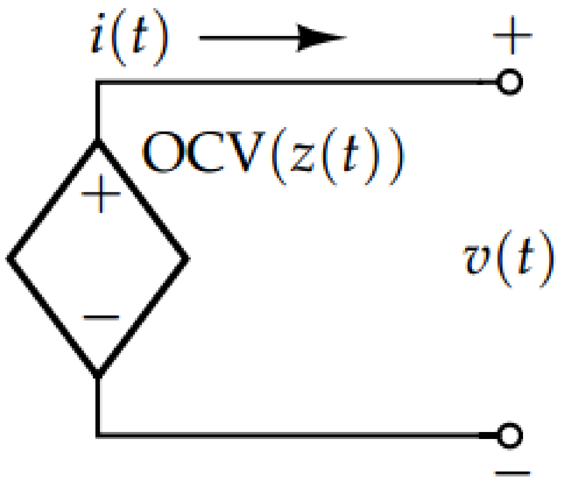


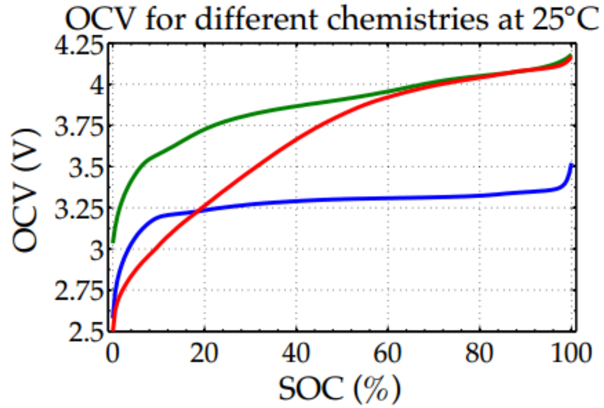
Fonte ideal de tensão (V=constante)



Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE





2º Modelo: OCV em função do SoC

$$\frac{dz}{dt} = -\eta\,(t)\frac{i(t)}{Q}$$

em que:

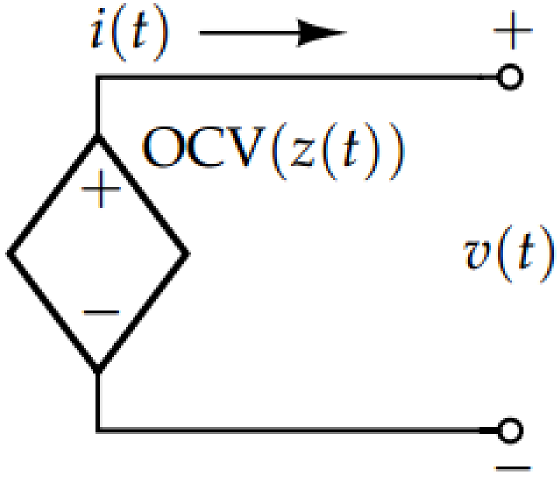
z – estado de carga (adimensional)
η – eficiência coulombiana ou de carga (adimensional)
i – corrente (A)
t – tempo (h)
Q – capacidade total ou máxima da célula (Ah)

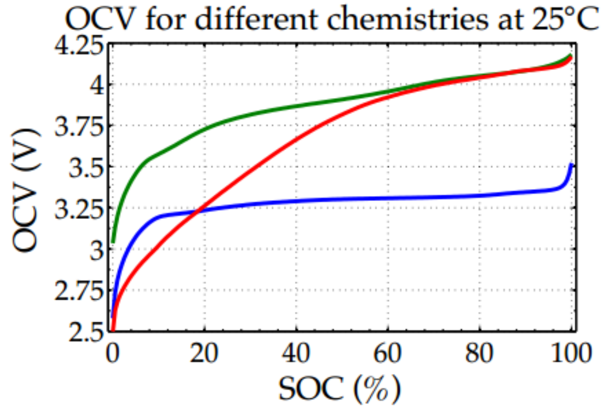
Na equação a corrente de descarga foi considerada positiva

$$z(t) = z(t_0) - \frac{1}{Q}\int_{t_0}^{t} \eta(\tau)\,i(\tau)\,d\tau$$

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE





2º Modelo: OCV em função do SoC

Discretização com período Δt (s) e taxa 1/Δt (Hz)

Consideramos t_0 = k Δt e t = (k+1) Δt e substituímos

$$z(t) = z(t_0) - \frac{1}{Q}\int_{t_0}^{t} \eta(\tau) i(\tau) d\tau$$

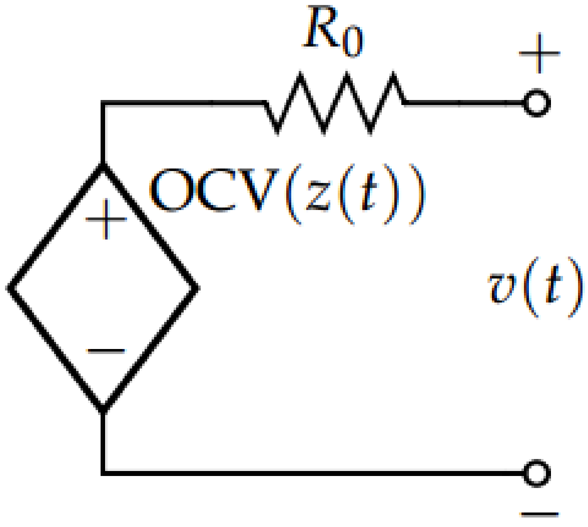
$$\Downarrow$$

$$z\big((k+1)\Delta t\big) = z(k\Delta t) - \frac{\Delta t}{Q}\eta(k\Delta t) i(k\Delta t)$$

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\Delta t}{Q}\eta[k] \mathrm{i}[k]$$

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE



3º Modelo :

OCV com uma resistência equivalente R_0 em série (ganhamos mais uma equação)

$$\frac{dz}{dt} = -\eta\,(t)\,\frac{i(t)}{Q} \qquad v(t) = \mathrm{OCV}(\mathrm{z}(\mathrm{t})) - i(t)R_0$$

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\Delta \mathrm{t}}{Q}\eta[k]\mathrm{i}[k] \qquad v[k] = \mathrm{OCV}(\mathrm{z}[\mathrm{k}]) - i[k]R_0$$

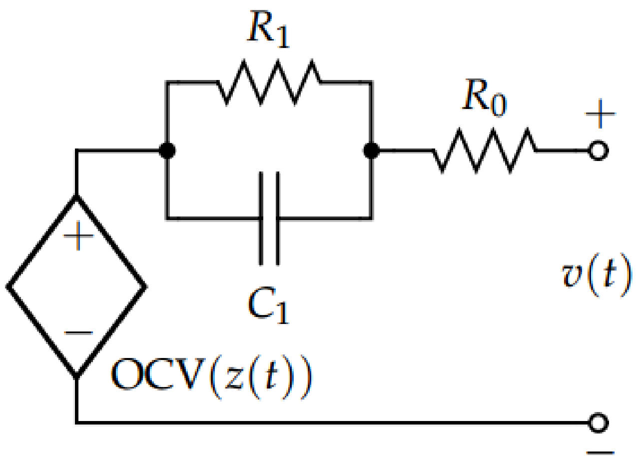
Comentários:

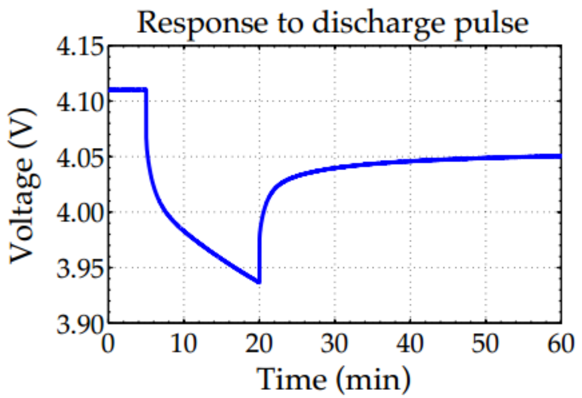
1. Se i(t)<0 → v(t) > OCV;   Se i(t)>0 → v(t) < OCV
2. Agora energia é dissipada em R_0 ($R_0 i^2$) e temos aquecimento além de perda de eficiência
3. R_0 não é constante, ela é função do SoC e da T.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE





4º Modelo :

Fenômenos difusionais

$$v(t) = \mathrm{OCV}(z(t)) - v_{C_1}(t) - v_{R_0}(t)$$

$$v[k] = \mathrm{OCV}(z[k]) - v_{C_1}[k] - v_{R_0}[k]$$

ou em função das correntes

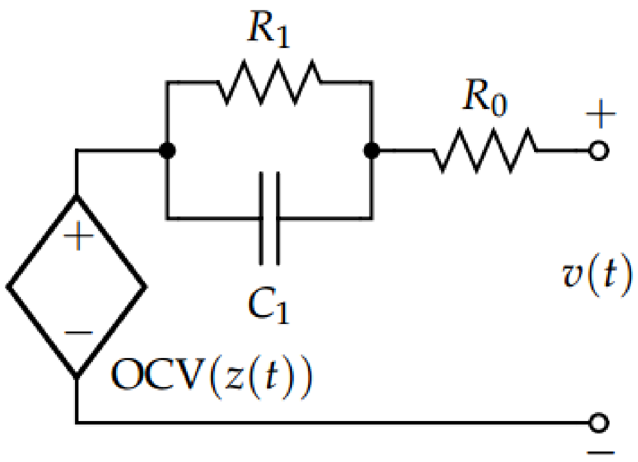
$$v(t) = \mathrm{OCV}(z(t)) - R_1 i_{R_1}(t) - R_0 i(t)$$

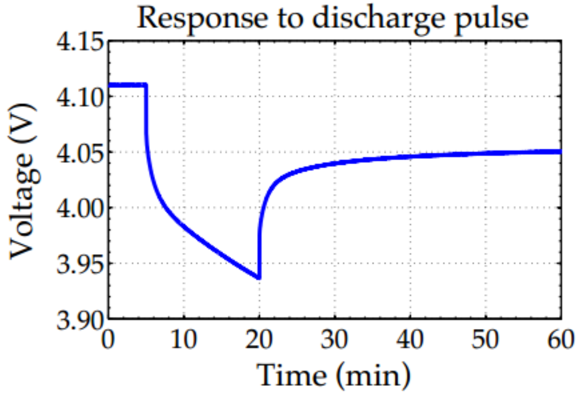
$$v[k] = \mathrm{OCV}(z[k]) - R_1 i_{R_1}[k] - R_0 i[k]$$

Agora precisamos obter a corrente i_{R_1}

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE





4º Modelo :

Fenômenos difusionais

$$i(t) = i_{R_1}(t) + i_{C_1}(t)$$

$$i(t) = i_{R_1}(t) + C_1\, \dot{v}_{C_1}(t)$$

$$v_{C_1}(t) = v_{R_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t)$$

$$i(t) = i_{R_1}(t) + R_1 C_1 \frac{d i_{R_1}(t)}{dt}$$

$$\frac{d i_{R_1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} i(t) - \frac{1}{R_1 C_1} i_{R_1}(t)$$

e em forma discreta?

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

Como transformar equações diferenciais ordinárias continuas no tempo para discretas?

$$\dot{x} = ax(t) + bu(t)$$

Consideramos que u(t) é constante no intervalo Δt e queremos avaliar x(t) a intervalor regulares t = kΔt

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$$

Multiplicamos por e^{-at}

$$e^{-at}\big(\dot{x}(t) - ax(t)\big) = e^{-at}bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

Integrando...

$$e^{-a\tau}x(\tau)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-at}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = e^{at}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}) d\tau$$

A resposta temporal descrita pela equação diferencial ordinária contem uma parte que depende da condição inicial $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})$ e outra que depende da função $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau})$.
Para ser estável, a<0

A integral $\int_0^t e^{a(t-\tau)} b\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}) d\tau$ é chamada **integral de convolução**

Agora vamos transformar ela em discreta. Para isso substituímos...

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a(k+1)\Delta t} x(0) + \int_0^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t - \tau)} b\boldsymbol{u}(\tau) d\tau$$

E dividimos a última integral em duas partes...

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a(k+1)\Delta t}x(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

rearranjamos...

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}e^{ak\Delta t}x(0) + e^{a\Delta t}\int_0^{k\Delta t} e^{a(k\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\left(e^{ak\Delta t}x(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{a(k\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\,x(k) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\,x[k] + e^{a(k+1)\Delta t}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\, x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

Para finalizar, considerando que u(t) é constante no intervalo kΔt até (k+1)Δt e igual a u(kΔt), podemos tirar ela fora da integral...

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\, x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} b u[k] \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-a\tau} d\tau$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\, x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} b u[k] \left(-\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \right)$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\, x[k] + \frac{1}{a} e^{a(k+1)\Delta t} b u[k] \left(e^{-ak\Delta t} - e^{-a(k+1)\Delta t} \right)$$

$$\boxed{x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\, x[k] + \frac{1}{a} b u[k] \left(e^{-a\Delta t} - 1 \right)}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

Equação diferencial inicial

$$\frac{di_{R_1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_1C_1}i(t) - \frac{1}{R_1C_1}i_{R_1}(t)$$

Equação genérica

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

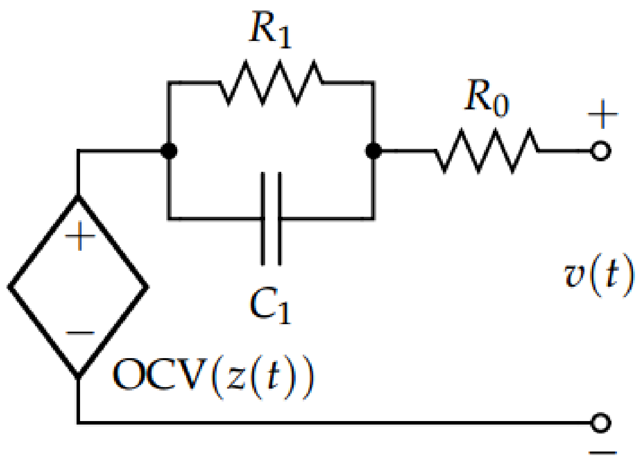
$$a = -\frac{1}{R_1C_1} \qquad b = \frac{1}{R_1C_1} \qquad u[k] = i[k] \qquad x[k] = i_{R_1}[k]$$

$$x[\mathrm{k}+1] = e^{a\Delta t}\,x[k] + \frac{1}{a}bu[k]\left(e^{-a\Delta t} - 1\right) \Rightarrow i_{R_1}[\mathrm{k}+1] = e^{-\frac{\Delta t}{R_1C_1}}\,i_{R_1}[k] + i[k]\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{R_1C_1}}\right)$$

Em resumo, temos os seguintes conjuntos de equações para tempo contínuo e discreto...

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE



$$\frac{dz}{dt} = -\eta\,(t)\,\frac{i(t)}{Q}$$

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\Delta \mathrm{t}}{Q}\eta[k]\mathrm{i}[k]$$

$$v(t) = \mathrm{OCV}\big(\mathrm{z(t)}\big) - v_{C_1}(t) - v_{R_0}(t)$$

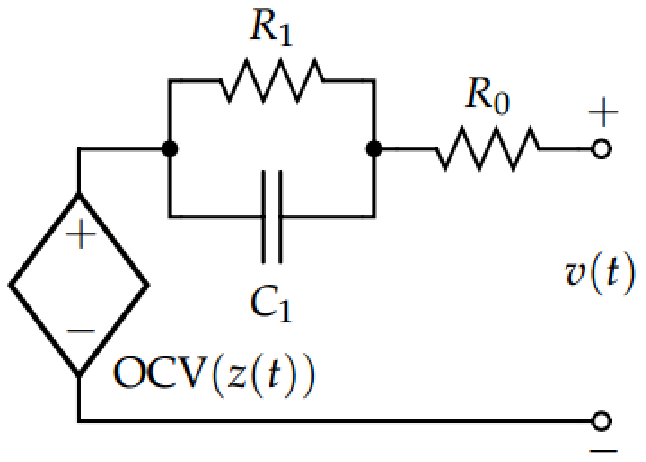
$$v[k] = \mathrm{OCV}(z[k]) - v_{C_1}[k] - v_{R_0}[k]$$

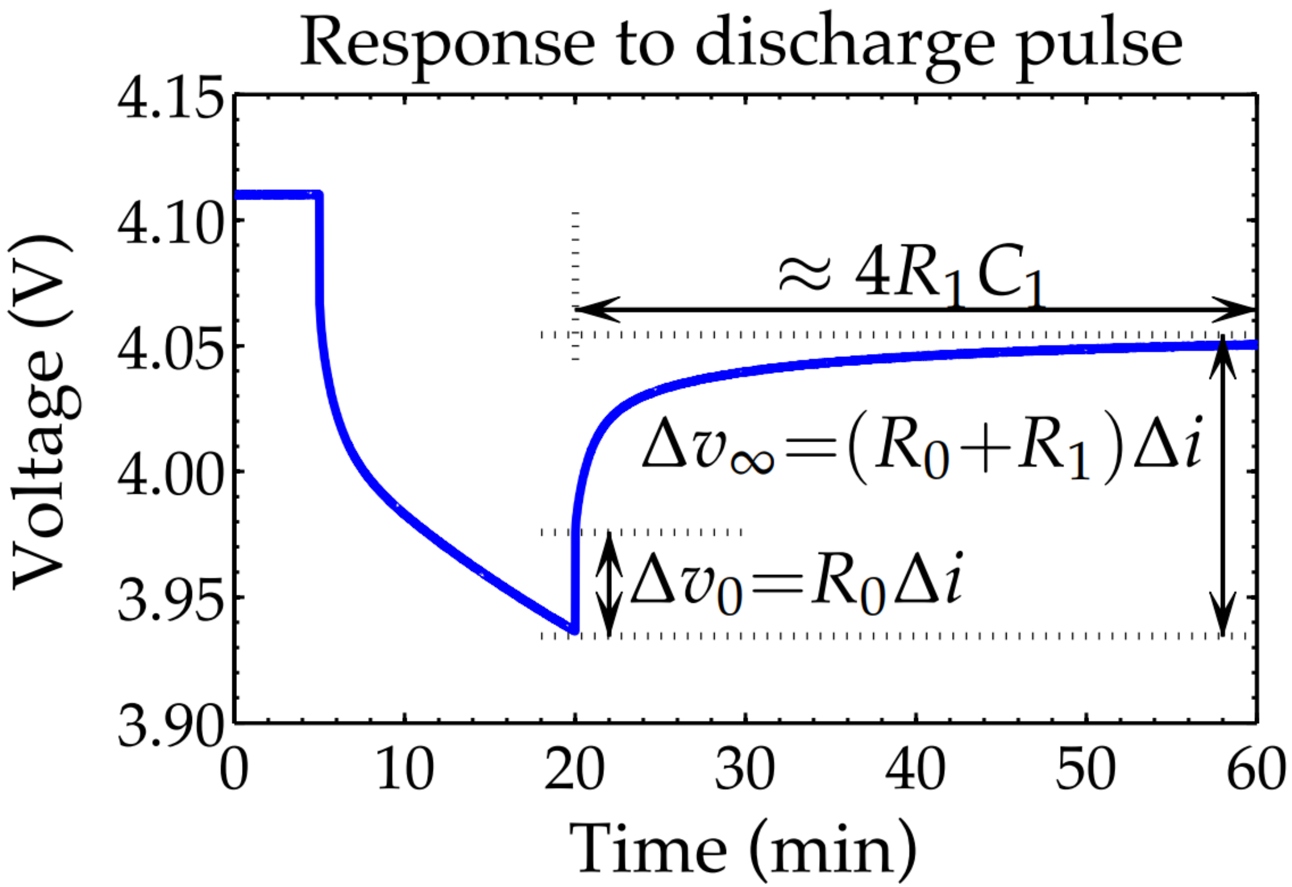
$$\frac{di_{R_1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_1C_1}i(t) - \frac{1}{R_1C_1}i_{R_1}(t)$$

$$i_{R_1}[\mathrm{k}+1] = e^{-\frac{\Delta t}{R_1C_1}}\,i_{R_1}[k] + i[k]\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{R_1C_1}}\right)$$

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE



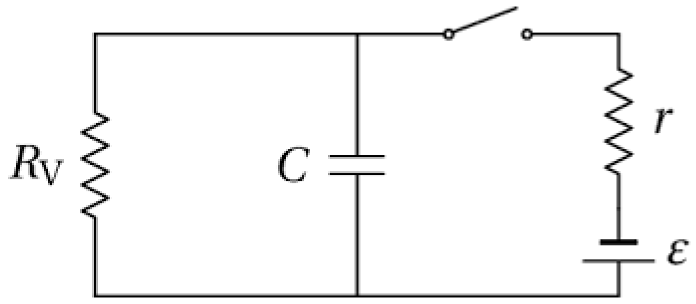


Como determinar os parâmetros?

$$R_0 = \left|\frac{\Delta v_0}{\Delta i}\right| \qquad R_1 = \left|\frac{\Delta v_\infty}{\Delta i}\right| - R_0 \qquad \tau = R_1\, C_1$$

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE



Outra forma, um pouco mais apurada, seria resolver o circuito RC paralelo e determinar C_1 e R_1 (ajuste de curva experimental)

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE

Modelo de operação

Circuitos Elétricos Equivalentes - CEE