Recorrências

Matemática Básica

- Polinômio: $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$
- $a^{-1} = 1/a$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a^m)^n = (a^n)^m$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$
- $e^x \geq 1 + x$
- $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$

Logaritmos

- $\lg n = \log_2 n$
- $\log n = \log_e n$
- $\lg^k n = (\lg n)^k$
- $\lg \lg n = \lg(\lg n)$
- $a = b^{\log_b a}$
- $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_b a^n = n \log_b a$
- $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
- $\log_b(1/a) = -\log_b a$
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Piso e Teto

Pisos e tetos: para qualquer real x, o maior inteiro menor ou igual a x é denotado por $\lfloor x \rfloor$ ("o piso de x"). Se forma análoga, o menor inteiro maior ou igual a x é denotado por $\lceil x \rceil$ ("teto de x").

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
- $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$, para qualquer inteiro n
- $n \geq 0$ e inteiros $a, b > 0$
  - $\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$
  - $\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$
  - $\lceil a/b \rceil \leq (a + (b-1))/b$
  - $\lfloor a/b \rfloor \leq (a - (b-1))/b$

Propriedades de Somatórios

- Dada uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sua soma finita pode ser escrita como:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$
- Para quaisquer sequências finitas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, e um número real c:
$$\sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- É possível colocar em evidência termos multiplicativos independentes do somatório:
$$\sum_{i=1}^{n} (f(x) a_i) = f(x) \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \textbf{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} \Theta(f(i)) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$$

Exemplos de Somatórios

- Soma dos termos de uma progressão aritmética:
$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \quad \textbf{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
- Soma dos termos de uma progressão geométrica:
$$\sum_{i=0}^{n-1} aq^i = \frac{a(q^n - 1)}{(q-1)}, \text{ para } q \neq 1$$
- Soma:
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$
- Soma:
$$\sum_{i=0}^{n} m^i = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}$$

Exemplos de Somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

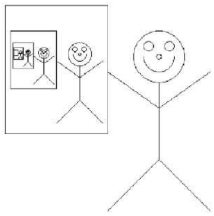
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i * 2^i = 2 + (n-1) * 2^{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i * 2^{n-i} = 2^{n+1} - 2 - n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Recursão



- "To understand recursion, we must first understand recursion."
- resolve um problema a partir das soluções de seus subproblemas
- Vamos construir um exemplo de recursão?

Resolução de Recorrências

- Recorrência = "fórmula" que define uma função em termos dela mesma = algoritmo recursivo que calcula uma função
- Expressam a complexidade de algoritmos recursivos como, por exemplo, os algoritmos de divisão e conquista.

Resolução de Recorrências

- Existem alguns métodos para a resolução de recorrências: método iterativo, árvore de recorrência e método da substituição.
- Resolvendo algumas recorrências:
  - $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$; $T(1) = 1$.
  - $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$; $T(1) = 1$.
  - $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$; $T(1) = 1$.

Torre de Hanói

```
procedure Hanoi(n, origem, auxiliar, destino)
begin
  if n=1 then writeln(origem, destino)
  else
    begin
      Hanoi(n-1, origem, destino, auxiliar)
      writeln(origem, destino)
      Hanoi(n-1, auxiliar, origem, destino)
    end
end;
```

Considere um conjunto com n discos de tamanhos distintos e 3 pinos A, B e C. Os discos se localizam, inicialmente, no pino A em ordem decrescente de tamanho, de baixo para cima. O problema consiste em mover os discos de A para C, um a um, de tal modo que em nenhum momento do processo, algum disco seja colocado sobre outro de tamanho menor.

Torre de Hanói

A relação de recorrência que descreve o número de movimentos de discos necessários para a solução de um problema de Hanói com n discos é:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 2T(n-1) + 1 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Substituição Iterativa

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2[2T(n-2) + 1] + 1 =$$
$$= 2^2T(n-2) + 2 + 1 = 2^3T(n-3) + 2^2 + 2 + 1$$
$$=> T(n) = 2^iT(n-i) + 2^{i-1} + ... + 2 + 1$$

Então,

$$T(n) = 2^{n-1}T(1) + 2^{n-2} + ... + 2 + 1 =$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1 = 2^n - 1$$

Qualquer solução para o problema Torre de Hanói é exponencial. Isto é provado!

Ou seja, está provado que qualquer algoritmo que resolva o problema de Hanoi com 3 pinos não poderá executar menos do que $2^n - 1$ passos.

Exercícios

Resolvendo algumas recorrências:

- $T(n) = T(n-1) + 2; T(0) = 0.$
- $T(n) = T(n-1) + n; T(0) = 0.$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1;\ T(1) = 1.$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2;\ T(1) = 1.$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n;\ T(1) = 1.$

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

- Existe uma fórmula geral para resultado de recorrências ?
- Expressão geral de recorrência de um algoritmo de divisão e conquista:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

  onde a representa o número e n/b o tamanho dos subproblemas obtidos na divisão, e $f(n)$ é a função que dá a complexidade das etapas de divisão e de conquista.
- Vamos resolver essa recorrência para termos uma fórmula geral para o resultado de recorrências de divisão e conquista.
- Simplificando a demonstração: supor que $f(n) = cn^k$ e $n = b^m$.

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

Expandindo a fórmula anterior para $T(n)$ temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^k \\
&= a(aT(n/b^2) + c(n/b)^k) + cn^k \\
&= a(a(aT(n/b^3) + c(n/b^2)^k) + c(n/b)^k) + cn^k \\
&= \cdots \\
&= a(a(\cdots aT(n/b^m) + c(n/b^{m-1})^k) + \cdots) + cn^k \\
&= a(a(\cdots aT(1) + cb^k) + cb^{2k}) + \cdots) + cb^{mk}.
\end{aligned}$$

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

Supondo $T(1) = c$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
T(n) &= ca^m + ca^{m-1}b^k + ca^{m-2}b^{2k} + \cdots + cb^{mk} \\
&= c\sum_{i=0}^{m} a^{m-i}b^{ik} \\
&= ca^m \sum_{i=0}^{m} (b^k/a)^i.
\end{aligned}$$

Para finalizar a resolução da recorrência, temos três casos a considerar: $a > b^k$, $a = b^k$ e $a < b^k$.

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

Caso 1: $a > b^k$

- Neste caso, o somatório $\sum_{i=0}^{m}(b^k/a)^i$ converge para uma constante.
- daí temos que $T(n) \in \Theta(a^m)$.
- como $n = b^m$, então $m = \log_b n$ e,
- como $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, concluímos que

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}).$$

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

Caso 2: $a = b^k$

- como $b^k/a = 1$, $\sum_{i=0}^{m}(b^k/a)^i = m + 1$.
- daí, temos que $T(n) \in \Theta(a^m m)$.
- como $m = \log_b n$ e $a = b^k$, então $a^m m = n^{\log_b a}\log_b n = n^k \log_b n$,
- o que nos leva à conclusão de que

$$T(n) \in \Theta(n^k \log n).$$

Resolução de Recorrências de Divisão e Conquista

Caso 3: $a < b^k$

- Neste caso, a série não converge quando $m \to \infty$, mas pode-se calcular sua soma para um número finito de termos.
- $$T(n) = ca^m \sum_{i=0}^{m} \left(b^k/a\right)^i = ca^m \left(\frac{(b^k/a)^{m+1} - 1}{(b^k/a) - 1}\right)$$

- desprezando as constantes na última linha da expressão acima e sabendo que $a^m \left(\frac{(b^k/a)^{m+1}-1}{(b^k/a)-1}\right) \in \Theta(b^{km})$ e $b^m = n$, ...
- concluímos que
$$T(n) \in \Theta(n^k).$$

Teorema 3.4 do Manber

Dada uma relação de recorrência da forma $T(n) = aT(n/b) + cn^k$, onde $a, b \in \mathbb{N}, a \geq 1, b \geq 2$ e $c, k \in \mathbb{R}^+$,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & se\ a > b^k \\ \Theta(n^k \log n), & se\ a = b^k \\ \Theta(n^k), & se\ a < b^k \end{cases}$$

É possível generalizar esse Teorema para os casos em que $f(n)$ não é um polinômio.

Teorema Master (CLRS)

Sejam $a \geq 1$ e $b \geq 2$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não-negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ pode ser limitada assintoticamente como:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, para algum $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$, para alguma constante $c < 1$ e para n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Para o Caso 1, a função $f(n)$ não deve ser apenas menor do que $n^{\log_b a}$, deve ser polinomialmente menor do que $n^{\log_b a}$.

Em outras palavras, $n^{\log_b a}/f(n) = n^\epsilon$

$f(n)$ deve ser assintoticamente menor que $n^{\log_b a}$ por um fator n^ϵ, para alguma constante $\epsilon > 0$.

Analogamente, para o Caso 3, a função $f(n)$ não deve ser apenas maior do que $n^{\log_b a}$, deve ser polinomialmente maior do que $n^{\log_b a}$, ou seja:

$f(n)/n^{\log_b a} = n^\epsilon$, isto é, $f(n)$ deve ser assintoticamente maior que $n^{\log_b a}$ por um fator n^ϵ, para alguma constante $\epsilon > 0$;

Ainda, $f(n)$ deve satisfazer a condição de "regularidade" $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e n suficientemente grande. A condição de regularidade é satisfeita pela maioria das funções polinomiais que encontraremos.

Mais Exemplos de Recorrências

Exemplos onde o Teorema Master se aplica (e $f(n) \neq cn^k$):

- Caso 1: $T(n) = 4T(n/2) + n \log n, T(1) = 0.$
- Caso 2: $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n), T(1) = 0.$
- Caso 3: $T(n) = T(n/2) + n \log n, T(1) = 0.$

Mais Exemplos de Recorrências

Exemplos onde o Teorema Master **não se aplica**:

- $T(n) = T(n-1) + n$; $T(1) = 1$.
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$; $T(b) = 1$.
  (para $a \geq 1$, $b \leq a$, a e b inteiros)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$; $T(1) = 1$.
  (para $0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$; $T(1) = 1$.
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$; $T(1) = 1$.

Exercícios

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + n, & n > 1, \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + 1, & n > 1, \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + n - 1, & n > 1, \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n, & n > 1, \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n^2, & n > 1, \end{cases}$$

Referências

- Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva, notas de aula da disciplina de MC448 — Análise de Algoritmos I, IC-Unicamp.
- José Augusto R. Soares., notas de aula da disciplina de Análise de Algoritmos, IME-USP.